Symbolické výpočty v 0.2

Jan Schee

Abstract

Vedle numerických výpočtů umožňují dnešní systémy účinně zacházet s algebraickými výrazy, symbolicky řešit algebraické a diferenciální rovnice. Zvládají také symbolické derivování a integraci.

Cílem tohoto textu je seznámit studenty s řešením matematických a fyzikálních problémů pomocí nejrozšířenějšího nástroje tohoto typu - Wolfram Mathematica (ve světe OpenSource můžete najít podobný projekt nazvaný Maxima). Stephen Wolfram je zakladatelem společnosti Wolfram Research, která tento software vyvíji. Aktuální verze (v roce 2015) je 10.02.

Algebraické výrazy

Při spuštění vám *Mathematica* zpravidla nabídne prázdný notebook do které lze zadávat a vyhodnocovat matematické výrazy. Chcete-li například znát výsledek výpočtu 1 + 1 tak v notebooku zapíšte tento výraz a výpočet spustíte kombinací kláves Shift+Enter. V notebooku bude tato operace vypadat takto

```
In[1]:= 1 + 1

Out[1]= 2
```

Mathematica rozlišuje následující matematické operace

Součet	x+y+z
Rozdíl	x−y
Součin	x*y*z nebo xyz
Mocnina	x^y

Vyzkoušejte si ve svém notebooku následující příklady:

Sestavování výpočetních operací

Využití předchozích výsledků

V *Mathematica* se pod výrazem % skrývá předchozí výsledek. Způsoby jak se odkazovat na předchozí výsledky ukazuje tabulka

poslední vygenerovaný výsledek	%
předposlední vygenerovaný výsledek	%%
k−tý předchozí výsledek	%%...% (k−krát)
výsledek na n−tém výstupu Out[n]	%n

Vyzkoušejte následující příklady:

```
In[62]:= 77^2

Out[62]= 5929

In[63]:= % + 1

Out[63]= 5930
```

```
In[64]:= 3 % + %^2 + %%
Out[64]= 35188619
In[65]:= %6 + %7
Out[65]= {{InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 40.}} Output: scalar ] +
    (θ → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 40.}} Output: scalar ]),
  InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 40.}} Output: scalar ] +
    (θ′ → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 40.}} Output: scalar ])}}
```

Definice proměnných

Když provádíte dlouhé matematické operace, pak užitečné jednotlivé mezivýsledky pojmenovat. Tak jako v matematice nebo programovacích jazycích i zde k tomu účelu slouží koncept proměnné.

Následjící příklady nejlépe výsvětlí jak s proměnnými v *Mathematica* zacházet.

- Nastavení proměnné x na hodnotu 5

```
In[66]:= x = 5
Out[66]= 5
```

- Kdykoliv se teď objeví ve výrazech x, *Mathematica* na jeho místo dosadí číslo 5

```
In[67]:= x^2
Out[67]= 25
```

- Chceme-li do proměnné x vložit jinou hodnotu, tak samozřejmě můžeme

```
In[68]:= x = 4 + 7
Out[68]= 11
```

- Nastavme proměnnou pi na hodnotu čísla π s přesností na 40 desetinných míst

```
In[69]:= pi=N[π, 40]
Out[69]= 3.141592653589793238462643383279502884197
In[70]:= pi
Out[70]= 3.141592653589793238462643383279502884197
```

- Druhá mocnina čísla uloženého v proměnné pi pak bude

```
In[71]:= pi^2
Out[71]= 9.869604401089358618834490999876151135313
```

Následující tabulka shrnuje způsoby definice proměnných.

přiřazení hodnoty prommĕné x	*x* = hodnota
přiřazení hodnoty proměnným x a y	x=y=hodnota
odstranění jakékoliv hodnoty přiřazené x	x=. nebo Clear[x]

Seznamy objektů

Během býpočtů je občas výhodné seskupit dohromady několik objektů a pracovat s nimi jako s jednou entitou. Systém *Mathematica* pro tento účel nabízí koncept seznamu - List.

Například seznam {2,3,5} je kolekcí tří objektů se kterým můžeme, v řadě algebraických manipulací, zacházet jako s jedním objektem. Vyzkoušejte následující příklady.

- Seznam tří čísel

```
In[72]:= {2, 3, 5}
Out[72]= {2, 3, 5}
```

- Umocnění každého čísla v seznamu a přidání jedničky

```
In[73]:= {2, 3, 5}^2+1
Out[73]= {5, 10, 26}
```

- Rozdíl dvou seznamů

```
In[74]:= {9, 4, 3}-{3, 2, 5}
Out[74]= {6, 2, -2}
```

- Hodnota předchozího seznamu

```
In[75]:= %
Out[75]= {6, 2, -2}
```

- Aplikace matematických funkcí na seznam

```
In[76]:= Exp[%]//N
Out[76]= {403.429, 7.38906, 0.135335}
```

- Přiřazení proměnné v seznam

```
In[77]:= v={2, 4, 5}
Out[77]= {2, 4, 5}
```

- Kdekoliv se teď v matematických operacích v objeví tak bude nahrazenou seznamem

```
In[78]:= v/(v-1)
```

Out[78]= $\left\{2, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right\}$

Manipulace s prvky seznamu

Na prvky seznamu se odkazujeme prostřednictvím jeho indexu. Číslování indexu začíná od 1. V následující tabulce jsou shrnuty základní informace o manipulaci se seznamy.

seznam	{a,b,c}
i–tý prvek seznamu	Part[seznam, i] nebo seznam[[i]]
seznam i–tých a j–tých prvků seznamu	Part[seznam,{i,j}] nebo seznam[[{i,j}]]

Vyzkoušejte následující příklady.

- Získání třetího prvku seznamu

```
In[79]:= {2, 9, 7, 5, 4}[[3]]
Out[79]= 7
```

- Získání seznamu prvků seznamu

```
In[80]:= {2, 9, 7, 5, 4}[[{4, 1, 5}]]
Out[80]= {5, 2, 4}
```

- Přiřazení seznamu proměnné v

```
In[81]:= v = {7, 9, 4}
Out[81]= {7, 9, 4}
```

- Získání druhého prvku zeznamu proměnné v

```
In[82]:= v[[2]]
Out[82]= 9
```

Čtyři typy závorek v Mathematica

V předchozím jsme se setkali se třemi typi závorek. Každá z nich má specifický význam a nelze je zaměňovat. Následující tabulka shrnuje tyto čtyři typy závorek.

kulaté závorky pro grupování	(výraz)
hranaté závorky pro funkce	f[x]
kroucené závorky pro seznamy	{a,b,c}
dvojité závorky pro indexaci	v[[i]]

Posloupnost matematických operací

Matematické operace zpravidla provádíme v několika krocích. Pokud chceme můžeme každý krok zapsat na zvláštní řádek. Občas se ale ukáže užitečné seskupit jednotlivé kroky do jednoho řádku. V takovém případě jsou jednotlivé kroky od sebe odděleny středníkem.

proveď několik operací *a* zobraz výsledek poslední	expr1;expr2;expr3
proveď operace ale výsledky nedávej na výstup	expr1;expr2;

- Budou provedeny tři operace a výsledek poslední je zobrazen ve výstupu

```
In[83]:= x = 4; y = 6; z = y + 6
Out[83]= 12
```

- Vložením středníku na konec řádku říkáme systému *Mathematica* aby výstup nezobrazoval

```
In[84]:= x = 67 - 5;
```

- Slále můžeme použít % k zobrazení výsledku

```
In[85]:= %
Out[85]= 62
```

Moduly a bloky

Mathematica umožňuje určitou sekvenci příkazů sloučit do jednoho prostředí ve které lze používat lokálně definované proměnné. K tomuto slouží Module. Vyzkoušejme následující příklad

- Definice modulu s lokálními proměnnými u,v a asociace s funkcí f

```
In[86]:= f[x_] := Module[{u, v},
                         u = x ^ 2 + 1;
                         v = u ^ 2;
                         v
              ];
```

- Nastavení globálních proměnných u,v

```
In[87]:= u = 1; v = 2;
```

- Zavolání funkce f a zobrazení hodnot globálních proměnných u,v

```
In[88]:= f[5]
u
v
Out[88]= 676
Out[89]= 1
Out[90]= 2
```

Další nástroj umožnující sloučení sekvence příkazů do jednoho bloku je Block. Tato struktura funguje tak, že globální proměnné se při spuštění Blocku nejprve vyprázdní, v rámci Blocku se naplní novými čísly a po ukončení Blocku jsou globální proměnné opět nastaveny na původní hodnoty.

- Nejprve se nastavi hodnoty proměnných a,b,c. V rámci struktury Block se změní jejich hodnoty. Na konci této struktury jsou obnoveny původní hodnoty a,b,c

```
In[91]:= a = 1; b = 2; c = 3;
In[92]:= Block[{a, b, c},
  a = 4;
  b = 5;
  c = a + b
]
Out[92]= 9
In[93]:= a
b
c
Out[93]= 1
Out[94]= 2
Out[95]= 3
In[96]:=
```

Definice funkce v systému Mathematica

Funkce je v systému *Mathematica* jednoznačně identifikována hranatými závorkami, [].

- Definujme funkci F s jedním argumentem x jako x^2

```
In[2]:= F[x_] = x^2
```

Out[2]= x^2

- Zpožděné přiřazení (Výraz na pravé straně je vyhodnocen až při použití funkce G)

```
In[3]:= G[x_] := x^2
```

Algebraické výpočty - symbolické výpočty

Rozdíl mezi numerickým a symbolickým výpočtem ukazují následující ukázky.

- Numerický výpočet

```
In[99]:= 13 + 2 - 5
Out[99]= 10
```

- Symbolický výpočet

In[100]:=
```
2 x + 1
```
Out[100]= 125

K symbolické manipulaci s algebraickými výrazy *Mathematica* definuje celou řadu funkcí. Některé z nich zde představíme v rámci příkladů. Zbylé funkce snadno naleznete v nápovědě systému *Mathematica*.

- Expand[] - tato funkce roznásobuje a umocňuje algebraické výrazy

In[101]:=
```
(x + 2 y + 1) (x - 2) ^2
```
Out[101]= 270 000

In[102]:=
```
Expand[%]
```
Out[102]= 270 000

- Factor[] - tato funkce dělá pravý opak funkce Expand[]

In[103]:=
```
Factor[%]
```
Out[103]= 270 000

In[104]:=

Mathematica také nabízí funkce, které se snaží standartními algebraickými operacemi výrazy zjednodušit.

- Simplify[] - tato funkce se snaží zjednodušit algrebraický výraz použitím standartních algebraických transformací

In[4]:=
```
Simplify [x^2 - 2 x + 1]
```
Out[4]= $(-1+x)^2$

In[5]:=
```
Integrate[1 / (x^4 - 1), x]
```
Out[5]= $-\frac{\text{ArcTan}[x]}{2}+\frac{1}{4}\text{Log}[1-x]-\frac{1}{4}\text{Log}[1+x]$

In[6]:=
```
D[%, x]
```
Out[6]= $-\frac{1}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}-\frac{1}{2(1+x^2)}$

In[7]:=
```
Simplify [%]
```
Out[7]= $\frac{1}{-1+x^4}$

- FullSimplify[] - tato funkce se snaží zjednodušit algebraický výraz zapojením širšího spektra transformací

In[8]:=
```
Simplify [Gamma   [x] Gamma   [1 - x]]
```
Out[8]= Gamma [1 − x] Gamma [x]

In[9]:=
```
FullSimplify [Gamma   [x] Gamma   [1 - x]]
```
Out[9]= $\pi\,\text{Csc}[\pi x]$

Pro algebraickou manipulaci s racionálními *Mathematica* definuje další sérii užitečných funkcí.

- ExpanAll[ ] - tato funkce aplikuje Expand[] všude (třeba , v případě racionálních výrazů, v čitateli i jmenovateli)

In[10]:=
```
e = (x - 1) ^2 (x + 2) / ((1 + x) (x - 3) ^2)
```
Out[10]= $\frac{(-1+x)^2(2+x)}{(-3+x)^2(1+x)}$

In[11]:=
```
ExpandAll[e]
```
Out[11]= $\frac{2}{9+3x-5x^2+x^3}-\frac{3x}{9+3x-5x^2+x^3}+\frac{x^3}{9+3x-5x^2+x^3}$

- Together[] - tato funkce dá všechny členy na společný jmenovatel

In[12]:=
```
Together[%]
```

Out[12]= $\frac{2-3x+x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

- Apart[] - v tomto případě rozdělí složidý zlomek na dílčí, jednodušší zlomky

In[13]:=
```
Apart[%]
```

Out[13]= $1+\frac{5}{(-3+x)^2}+\frac{19}{4(-3+x)}+\frac{1}{4(1+x)}$

- Cancel[] - vykrácení společné faktory mezi čitatelm a jmenovatelem

In[115]:=

Pokud máme výraz obsahující více proměných pak ,můžeme ve výrazu uspořádat členy do skupin tak, že jedna nebo druhá proměnná dominuje.

seskupení mocnin proměnné *x* ve výrazu expr	Collect[expr,x]
vytknout členy výrazu expr, které nezávisí na x	FactorTerms[expr,x]

- Definujme výraz dvou proměnných

In[14]:=
```
v = Expand[(3 + 2 x) ^2 (x + 2 y) ^2]
```

Out[14]= $9x^2+12x^3+4x^4+36xy+48x^2y+16x^3y+36y^2+48xy^2+16x^2y^2$

- Seskupíme členy výrazu v obsahující stejnou mocninu proměnné x

In[15]:=
```
Collect[v, x]
```

Out[15]= $4x^4+36y^2+x^3(12+16y)+x^2(9+48y+16y^2)+x(36y+48y^2)$

- Seskupíme členy výrazu v obsahující stejnou mocninu proměnné y

In[16]:=
```
Collect[v, y]
```

Out[16]= $9x^2+12x^3+4x^4+(36x+48x^2+16x^3)y+(36+48x+16x^2)y^2$

- Vytknutí členů ve výrazu v, které neobsahují proměnnou x

In[17]:=
```
FactorTerms [v, y]
```

Out[17]= $(9+12x+4x^2)(x^2+4xy+4y^2)$

Zatím jsme se zabývali pouze algebraickými výrazy, *Mathematica* nabízí taky funkce umožňující manipulaci s trigonometrickými výrazy.

Rozložení trigonometrického výrazu expr na sumu členů	TrigExpand[expr]
Vytvoření foktorovaného tvaru trigonometrického výrazu expr	TrigFactor[expr]
Redukce trigonometrického výrazu pomocí násobků úhlů	TrigReduce[expr]
Převedení trigonometrických funkcí na exponenciální	TrigToExp[expr]
Převedení exponenciálních funkcí na trigonometrické	ExpToTrig[expr]

- Rozložení trigonometrického výrazu

In[18]:=
```
TrigExpand[Tan[x] Cos[2 x]]
```

Out[18]= $\frac{3}{2}\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]-\frac{\mathrm{Tan}[x]}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[x]^2\,\mathrm{Tan}[x]$

- Získání faktorovaného tvaru trigonometrického výrazu

In[19]:= `TrigFactor[%]`

Out[19]= $2\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{4}-x\right]\text{Sin}\left[\frac{\pi}{4}+x\right]\text{Tan}[x]$

- Redukce výrazu pomocí násobků úhlů

In[20]:= `TrigReduce[%]`

Out[20]= $-\frac{1}{2}\text{Sec}[x]\,(\text{Sin}[x]-\text{Sin}[3\,x])$

Zjednodušení výrazů pomocí “Assumptions”

Využijme funkci Simplify ve tvaru Simplify[expr,assum], kde výraz expr je zjednodušen na základě předpokladů assum.

- *Mathematica* automaticky nezjednošuje obecný výraz $\sqrt{x^2}$ protože tento výraz neplatí pro všechna x

In[123]:= `Simplify [Sqrt[x^2]]`

Out[123]= 62

- Řekneme *Mathematica* aby předpokládala, že platí x>0

In[21]:= `Simplify [Sqrt[x^2], x > 0]`

Out[21]= x

- Další výraz *Mathematica* taky automaticky nezjednoduší

In[22]:= `2 a + 2 Sqrt[a - Sqrt[-b]] Sqrt[a + Sqrt[-b]]`

Out[22]= $2\,a+2\,\sqrt{a-\sqrt{-b}}\,\sqrt{a+\sqrt{-b}}$

- Za předpokladu, že je a>0 a současně b>0 pak *Mathematica* výraz zjednoduší

In[23]:= `Simplify [%, a > 0 && b > 0]`

Out[23]= $2\left(a+\sqrt{a^2+b}\right)$

V dalším využijeme funkci Element[x,dom], jejíž výstupem je tvrzení, že x je prvkem množiny (intervalu) dom.

- Necháme opět *Mathematica* upravit výraz $\sqrt{x^2}$ za předpokladu, že x je reálné číslo

In[24]:= `Simplify [Sqrt[x^2], Element [x, Reals]]`

Out[24]= Abs[x]

- V další ukázce zjednodušíme goniometrickou funkci, za předpokladu, že proměnná i je celočíselná

In[25]:= `Simplify [Sin[x + 2 n Pi], Element [n, Integers]]`

Out[25]= Sin[x]

Části algebraických výrazů

Mathematica vám umožní prostřednictvím integrovaných funkcí vybírat z výrazu jeho části, které lze dál použít k následujícím výpočtům. Zde prezentujeme pět těcho funkcí.

Coefficient [expr, form]	vrátí z výrazu expr koeficient v požadovaném tvaru form
Exponent[expt, form]	vrátí z výrazu expr maximální mocninu ve tvaru form
Part[expr,n] nebo expr[[n]]	vrátí n–tý člen ve výrazu expr
Numerator[expr]	vrátí čitatel výrazu expr
Denominator[expr]	vrátí jmenovatel výrazu expr

Na následujících příkladech si vyzkoušejte požití těchto funkcí.

- Uvažujme algebraický výraz

In[26]:=
```
e = Expand[(1 + 3 x + 4 y^2) ^2]
```

Out[26]= $1 + 6 x + 9 x^2 + 8 y^2 + 24 x y^2 + 16 y^4$

- Koeficient u x ve výrazu e bude

In[27]:=
```
Coefficient[e, x]
```

Out[27]= $6 + 24 y^2$

- Nejvyšší mocnina y ve výrazu e

In[28]:=
```
Exponent[e, y]
```

Out[28]= 4

- Čtvrtý člen ve výrazu e

In[29]:=
```
Part[e, 4]
```

Out[29]= $8 y^2$

In[30]:=
```
e[[4]]
```

Out[30]= $8 y^2$

- Nyní uvažujme racionální výraz

In[31]:=
```
r = (1 + x) / (2 (2 - y))
```

Out[31]= $\frac{1 + x}{2 (2 - y)}$

- Čitatel výrazu r bude

In[32]:=
```
Numerator [r]
```

Out[32]= $1 + x$

- Jmenovatel výrazu r bude

In[33]:=
```
Denominator [r]
```

Out[33]= $2 (2 - y)$

Základní matematické operace pro symbolické výpočty

Následující tabulka obsahuje seznam funkcí, které *Mathematica* poskytuje pro diferenciální počet.

parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$	D[f,x]
neurčitý integrál $\int f \, dx$	Integrate[f,x]
suma $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$	Sum[f,{i,imin,imax}]
řešení rovnice pro proměnnou x	Solve[lhs==rhs,x]
rozvoj funkce f do mocninné řady v okolí x=x_0	Series[f,{x,x_0, order}]
limita $\lim_{x\to x0}$f(x)	Limit[x,x->x0]
Dataminimalizace funkce vzhledem k x	Minimize[f,x]

- derivace funkce x^n

In[34]:=
```
D[x^n, x]
```

Out[34]= $n x^{-1+n}$

- třetí derivace funkce x^n

In[35]:= `D[x^n, {x, 3}]`

Out[35]= $(-2+n)(-1+n)\,n\,x^{-3+n}$

Mathematica kromě parciálních derivací nabízí i totální derivace. K tomu definuje funkci Dt[f,x].

- Totální derivace funkce x^n. *Mathematica* implicitně předpokládá, že n je funkcí x.

In[36]:= `Dt[x^n, x]`

Out[36]= $x^n\left(\frac{n}{x}+\mathrm{Dt}[n,x]\,\mathrm{Log}[x]\right)$

Zde výraz Dt[n,x] znamená $\frac{dn}{dx}$.

- Integrací funkce x^nobdržíme

In[37]:= `Integrate[x^n, x]`

Out[37]= $\frac{x^{1+n}}{1+n}$

- Nebo integrací složitější funkce

In[38]:= `Integrate[1/(x^4-a^4), x]`

Out[38]= $-\frac{\mathrm{ArcTan}\left[\frac{x}{a}\right]}{2a^3}+\frac{\mathrm{Log}[a-x]}{4a^3}-\frac{\mathrm{Log}[a+x]}{4a^3}$

- Určitý integrál je určený mezemi. Zkuste si následující příklad $\int_a^b \sin^2(x)\,dx$

In[39]:= `Integrate[Sin[x]^2, {x, a, b}]`

Out[39]= $\frac{1}{2}(-a+b+\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{Sin}[a]-\mathrm{Cos}[b]\,\mathrm{Sin}[b])$

- *Mathematica* nám nedá symbolický výraz pro určitý integrál $\int_0^1 x^x\,dx$

In[40]:= `Integrate[x^x, {x, 0, 1}]`

Out[40]= $\int_0^1 x^x\,dx$

- Nicméně pořád můžete dostat numerický výsledek

In[41]:= `N[%]`

Out[41]= 0.783431

In[145]:=

Rovnice

Operace “=” je operace přiřazení. Pro rovnost je v *Mathematica* vyhrazena operace “==”. Vyzkoušejme následující příklady.

- Přiřadíme proměnné a číslo 4

In[42]:= `a = 4`

Out[42]= 4

- Když se zeptáte co je v a získáte 4, tj.

In[43]:= `a`

Out[43]= 4

- Můžeme taky otestovat jaká hodnota je v a

In[44]:= `a == 4`

Out[44]= True

```
In[45]:= a == 7
Out[45]= False
```

- Vyčistíme proměnnou a

```
In[46]:= a =.
```

- Když teď budeme chtít otestovat je -li v a třeba číslo 5 pak *Mathematica* se nebude ani snažit najít odpověď, protože a nemá definoanou hodnotu.

```
In[47]:= a == 5
Out[47]= a == 5
```

- A když nahradíme a specifickou hodnotou, třeba 4 dostaneme výsledek předchozí akce false.

```
In[48]:= % /. a → 4
Out[48]= False
```

- Pokud budou dva symbolické výrazy identické pak Mahematica vrátí true

```
In[49]:= 2 x + x ^ 2 == 2 x + x ^ 2
Out[49]= True
```

- Ovšem stačí upravit výraz na pravé straně (například) a *Mathematica* se nebude ani snažit najít odpověď.

```
In[50]:= 2 x + x ^ 2 == x (2 + x)
```

Out[50]= $2 x + x^2 == x (2 + x)$

- Mějme nyní rovnici

```
In[51]:= x ^ 2 - 3 x + 5 == 0
```

Out[51]= $5 - 3 x + x^2 == 0$

- Přiřadíme jí jméno

```
In[52]:= eq = %
```

Out[52]= $5 - 3 x + x^2 == 0$

```
In[53]:= eq
```

Out[53]= $5 - 3 x + x^2 == 0$

Pro řešení algebraických rovnic, *Mathematica* poskytuje funkci Solve.

Solve[lhs == rhs, *x*]	Řeší rovnici vzhedem k x, dostáváme toto řešení ve formě pravidel vzhledem k x
x/.solution	ze seznamu řešení získáme jednotlivá řešení
expr/.solution	použití seznamu řešení (pravidel) k zístání hodnoty pro výraz expr

- *Mathematica* umí vždy vyřešit agebraickou rovnici jedné proměnné symbolicky, pokud je její řád menší než 5

In[54]:= `Solve[x^4 - 2 x^3 + 3 x^2 - 6 x + 12 == 0, x]`

Out[54]=
$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-2-\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}-\frac{8}{\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}}\right)}\right\},\right.$$
$$\left\{x\to\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-2-\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}-\frac{8}{\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}}\right)}\right\},$$
$$\left\{x\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-2-\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}+\frac{8}{\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}}\right)}\right\},$$
$$\left.\left\{x\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-2-\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}+\frac{8}{\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}}\right)}\right\}\right\}$$

- První kořen předchozí rovnice pak bude

In[55]:= `x /. %[[1]]`

Out[55]=
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-2-\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}-\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}-\frac{8}{\sqrt{-1+\frac{13}{\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}+\left(-11+2\,i\sqrt{519}\right)^{1/3}}}\right)}$$

In[56]:= **N[%]**

Out[56]= -0.611432-1.69854 ⅈ

- Dokáže si poradit i s některými rovnicemi vyššího řádu než 4

In[57]:= **Solve[x^6 == 1, x]**

Out[57]= $\{\{x\to-1\},\{x\to1\},\{x\to-(-1)^{1/3}\},\{x\to(-1)^{1/3}\},\{x\to-(-1)^{2/3}\},\{x\to(-1)^{2/3}\}\}$

- Ovšem existují algebraické rovnice jejichž řešení neumí *Mathematica* vyjádřit symbolicky

In[58]:= **Solve[x^5 - 3 x^4 + 6 x^3 - 2 x + 16 == 0, x]**

Out[58]= $\{\{x\to\text{Root}[16-2\#1+6\#1^3-3\#1^4+\#1^5\&,1]\},$
$\{x\to\text{Root}[16-2\#1+6\#1^3-3\#1^4+\#1^5\&,2]\},\{x\to\text{Root}[16-2\#1+6\#1^3-3\#1^4+\#1^5\&,3]\},$
$\{x\to\text{Root}[16-2\#1+6\#1^3-3\#1^4+\#1^5\&,4]\},\{x\to\text{Root}[16-2\#1+6\#1^3-3\#1^4+\#1^5\&,5]\}\}$

- V takovém případě je nutné sáhnout k numerickému řešení

In[59]:= **N[%]**

Out[59]= {{x → -1.18751}, {x → 0.458263 - 1.48994 ⅈ},
{x → 0.458263 + 1.48994 ⅈ}, {x → 1.63549 - 1.69411 ⅈ}, {x → 1.63549 + 1.69411 ⅈ}}

- V některých případech dokáže *Mathematica* řešit i rovnice zahrnující i jiné funkce

In[60]:= **Solve[Sin[x] == a, x]**

Out[60]= {{x → ConditionalExpression[π - ArcSin[a] + 2 π C[1], C[1] ∈ Integers]},
{x → ConditionalExpression[ArcSin[a] + 2 π C[1], C[1] ∈ Integers]}}

- Ve většině nealgebraických rovnic ovšem neuspěje

In[61]:= **Solve[Cos[x] == x, x]**

Out[61]= Solve[Cos[x] == x, x]

- Pak je možné hledat přibližné řešení numericky

In[62]:= **FindRoot[Cos[x] == x, {x, 0}]**

Out[62]= {x → 0.739085}

Mathematica samozřejmě umí rešit systémy rovnic pro více neznámých. V takovém případě se používá ve formátu jak uvádí tabulka

Solve[{lhs1 == rhs1, lhs2 == rhs2, ...}, {*z*, *y*, ...}]	řeší systém rovnic pro proměnné x,y,...

- Řešme například systém dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé x,y

In[63]:= **Solve[{a x + y == 0, 2 x + (1 - a) y == 1}, {x, y}]**

Out[63]= $\left\{\left\{x\to-\frac{1}{-2+a-a^2},\ y\to-\frac{a}{2-a+a^2}\right\}\right\}$

- *Mathematica* dokáže řešit systém nelineárních algebraických rovnic

In[64]:= **Solve[{x^2 + y^2 == 1, x + 3 y == 0}, {x, y}]**

Out[64]= $\left\{\left\{x\to-\frac{3}{\sqrt{10}},\ y\to\frac{1}{\sqrt{10}}\right\},\left\{x\to\frac{3}{\sqrt{10}},\ y\to-\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}\right\}$

- Toto řešení teď můžeme vzít a použít k vyčíslení výrazu (řešení je totiž vráceno ve formě pravidelm , jako x-> 4)

In[65]:= **x + y /. %**

Out[65]= $\left\{-\sqrt{\frac{2}{5}},\ \sqrt{\frac{2}{5}}\right\}$

- Když pracujeme se systémem rovnic pak bývá užitečné reorganizovat tento systém eliminací jedné z proměnných

In[66]:=
```
Eliminate [{a x + y == 0, 2 x + (1 - a) y == 1}, y]
```

Out[66]= $(2 - a + a^2)\, x == 1$

Numerické výpočty v Mathematica

Mathematica implementuje komplexní numerické metody do funkcí umožňující řešit daný problém voláním vhodných funkcí a předávání parametrů získaných v předchozích výpočtech. Nakonec, zde máme celou řadu funkcí, které nám dovolí získané výsledky vizualizovat. My se zde omezíme na funkce umožňující numerickou integraci, řešení diferencialních rovnic, řešení algebraických rovnic, hledání kořene transcendentních rovnic.

NIntegrate[*f*, {*x*, xmin , xmax }]	Numericky integruje funkci f vzhledem k x v mezich od xmin do xmax
NDSolve[{odeys,initial conditions},{x,y},{t,tmin,tmax}]	Numericky řeší systém diferenciálních rovnic pro funkce x,y vzhedem k parametru t od tmin do tmax
NSolve[lhs==rhs,x]	Numericky řeší algebraickou rovnici pro neznámou x
FindRoot[lhs==rhs,{x,x0}]	Hledá kořen rovnici x s iniciálním odhadem x0

In[171]:=

In[172]:=

Aplikace

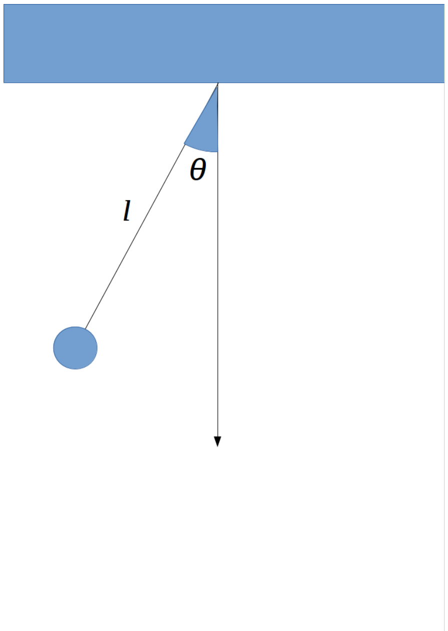
V této části jsou prezentovány problémy řešené v prostředí *Mathematica* .

Jednoduché kyvadlo

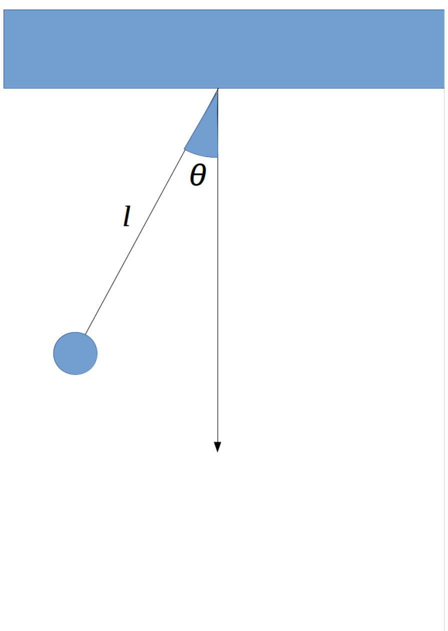
Budeme hledat numerické řešení rovnice popisující jednoduché kyvadlo. K popisu systému použijeme polární souřadnice (r,θ).

Nechť má kyvadlo délku l a nechť se pohybuje v tíhovém poli g.

In[173]:=



Out[173]=



Lagrangián této soustavy potom je

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(l\,\dot{\theta}\right)^2 + g\,l\,\mathrm{Cos}(\theta). \tag{0.1}$$

Pohybové rovnice pak určíme z Eulerových-Lagrangeových rovnic, které mají v našem případě tvar

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{Sin}(\theta) = 0. \tag{0.2}$$

Kyvadlo se pohybuje v konzervativním poli a tak se jeho celková energie zachovává. Velikost této energie udává následující výraz

$$E = T + V = \frac{1}{2}\left(l\,\dot{\theta}\right)^2 - g\,l\,\mathrm{Cos}(\theta). \tag{0.3}$$

Pro kyvadlo uvedené do pohybu s počáteční výchylkou θ_0a počáteční rychlostí $\dot{\theta}_0$=0 bude tato energie

$$E = -g\, l\, \mathrm{Cos}[\theta_0]. \tag{0.4}$$

- Vyčistíme a nastavíme parametry l a g

In[67]:=
```
Clear[l,g]
g=1;
l=5;
```

- Nastavíme počáteční podmínky

In[70]:=
```
θ0=-20.Degree;
```

- Řešíme pohybovou rovnici v časech od t=0 do t=tmax

In[71]:=
```
tmax =40;
dsol=NDSolve[{θ''[t]+ g/l Sin[θ[t]]==0,θ[0]==θ0,θ'[0]==0},{θ,θ'},{t,0,tmax }];
```

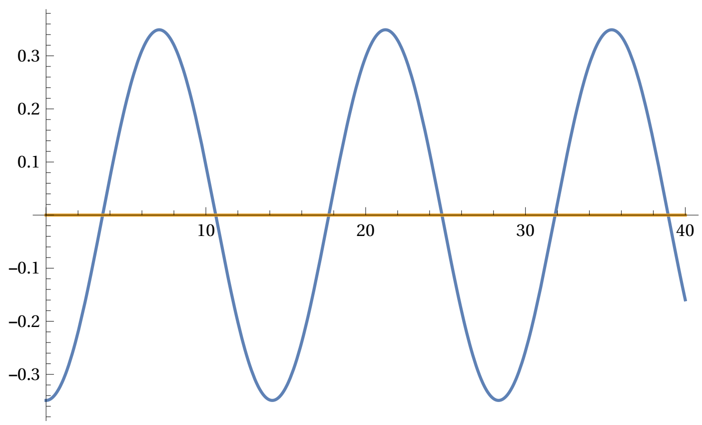
- Získáme interpolované funkce řešení

In[73]:=
```
fθ=θ/.dsol[[1]];
fv=θ'/.dsol[[1]];
```

- Zobrazíme výsledek v grafu

In[75]:=
```
Plot[{fθ[t],0},{t,0,tmax }]
```

Out[75]=



- Ze znalosti celkové energie určeme periodu kmitu

In[76]:=
```
E0=-g l Cos[θ0]
T=-2 NIntegrate[l/Sqrt[Abs[2(E0+g l Cos[θ])]],{θ,-θ0,θ0}]
```

Out[76]= -4.69846

Out[77]= 14.1574

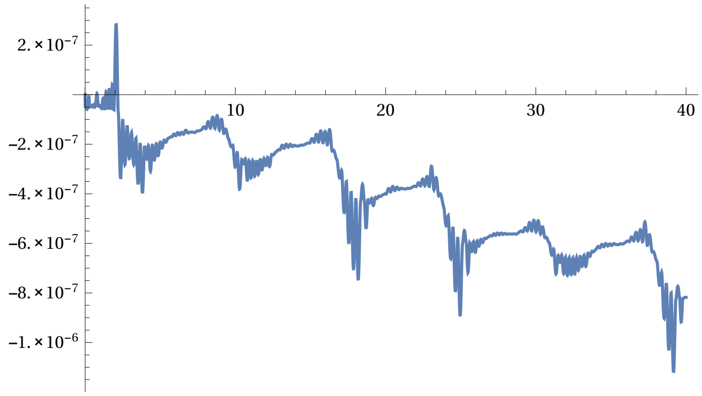
protože zřejmě platí

$$E = \frac{1}{2}\left(l\,\dot{\theta}\right)^2 - g\,l\,\mathrm{Cos}(\theta) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\sqrt{2\,(E + g\,l\,\mathrm{Cos}(\theta))}}{l} \Rightarrow T = 2\int_{-\theta 0}^{\theta 0} \frac{l}{\sqrt{2\,(E + g\,l\,\mathrm{Cos}(\theta))}}\, d\theta. \tag{0.5}$$

- Ověříme do jaké míry se zachovává energie při integraci

In[78]:=
```
Plot[(1/2(l fv[t])^2- g l Cos[fθ[t]])-E0,{t,0,tmax }]
```

Out[78]=



Během integrace dochází k numerické disipaci energie!

Pohyb testovací částice v centálním, konzervativním poli

Máme testovací částici, pohybující se v gravitačním gravitačním poli tří pevných těles. Celkové pole je popsáni gravitačním potenciálem

$$\phi_{\text{tot}} = \phi_I + \phi_{\text{II}} + \phi_{\text{III}} \tag{0.6}$$

kde je

$$\phi_i = -\frac{GM_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}. \tag{0.7}$$

Protože je pole konzervativní, tak se zachovává celková, specisfická energie E testovací částice

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \phi_{\text{tot}}. \tag{0.8}$$

Pohyb budeme sledovat v kartézké soustavě, kde polohu každého objektu popisuje vektor

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \tag{0.9}$$

a rychost určuje zřejmě vektor

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y + v_z\,\vec{e}_z. \tag{0.10}$$

Pohybová rovnice testovací částice pak zřejmě bude

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi_{\text{tot}}. \tag{0.11}$$

- Vyčistíme proměnné G (grav. konstanta),M1,M2,M3 (hmotnosti objektů generujících grav. pole),r1,r2,r3 (polohové vektory těchto těles)

In[105]:=
```
Clear[G,M1,M2,M3,r1,r2,r3];
```

- Vektor celkové gravitační síly v mítě určeném polohovým vektorem r

In[106]:=
```
Ftot[r_?VectorQ]:=-G M1 (r-r1)/((r-r1).(r-r1))^(3/2)-G M2 (r-r2)/((r-r2).(r-r2))^(3/2)-G
```

- Nastavení konfigurace systému tří hmotných center

In[107]:=
```
G=1;M1=0.5;M2=1.5;M3=2.5;
r1={0,5,0};
r2={0,-5,0};
r3={-5,0,0};
```

- Počáteční podmínky testovacé částice

In[111]:=
```
v0={0,0.1,0};(*pocatecni rychlost*)
r0={20,0,0};(*pocatecni polohovy vektor*)
```

- Integrace pohybove rovnice testovaci castice v case of t=0 do t=200

```
tmax =200;
dsol=NDSolve[{r''[t]==Ftot[r[t]],r'[0]==v0,r[0]==r0},{r,r'},{t,0,tmax }]
```

Out[117]=
```
{{r→InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 200.}} Output dimensions: {3} ],
  r′→InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 200.}} Output dimensions: {3} ]}}
```

- Získání interpolovaného řešení pro radiální průvodič testovací částice a vektor rychlosti

In[118]:=
```
fr=r/.dsol[[1]]
fv=r'/.dsol[[1]]
```

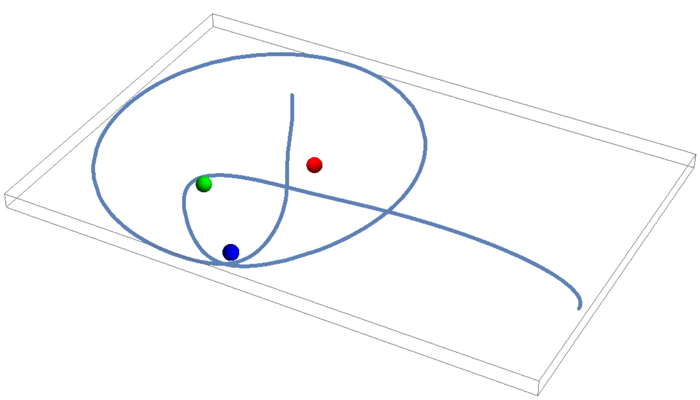
Out[118]=
```
InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 200.}} Output dimensions: {3} ]
```

Out[119]=
```
InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 200.}} Output dimensions: {3} ]
```

- Zobrazení trajektorie společně s polohami gravitujících center

In[120]:=
```
pl=ParametricPlot3D [fr[t],{t,0,tmax }];
sp=Graphics3D[{Red,Sphere[r1,1/2],Blue,Sphere[r2,1/2],Green,Sphere[r3,1/2]}];
Show[sp,pl]
```

Out[122]=



- Zachovávající se energie testovací částice je

In[123]:=
```
Energie0=1/2 v0.v0 -G M1/Sqrt[(r0-r1).(r0-r1)]-G M2/Sqrt[(r0-r2).(r0-r2)]-G M3/Sqrt[(r0-r3
```

Out[123]= -0.192014

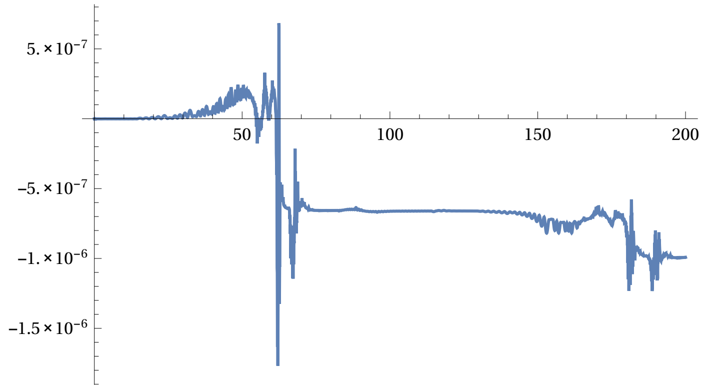
- Energie jako funkce

In[124]:=
```
Energie[v_?VectorQ,r_?VectorQ]:=1/2 v.v -G M1/Sqrt[(r-r1).(r-r1)]-G M2/Sqrt[(r-r2).(r-r2)]
```

- Graf funkce Energie[t]-Energie0

In[125]:=
```
Plot[Energie[fv[t],fr[t]]-Energie0,{t,0,tmax }]
```

Out[125]=



Rovnice vedení tepla

Uvažujme tenkou tyč délky L a s rozložením teploty T(x,t) v místě x a čase t. Udržujme konce tyče na konstantí teplotě

$$T(0,\ t) = T(L,\ t) = T_0. \tag{0.12}$$

Iniciální distribuce teploty je T(x,0), distribuce teploty v tyči v libovolném čase určuje rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{0.13}$$

Dále určeme následující integrál

$$\frac{d}{\text{dt}} \int_0^1 T(x,\ t)\, dx = \int_0^L \frac{d}{\text{dt}} T(x,\ t)\, dx = \alpha \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx = \alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_L - \alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0. \tag{0.14}$$

- Nechť naši tyč charakterizuje parametr α a délka tyče L

In[126]:=
```
α=1;
L=10;
```

- Počáteční rozložení teploty v tyči určuje funkce T0

In[128]:=
```
T0[x_]=Sin[x/L Pi];
```

- Hledání numerického řešení, při splnění okrajových podmínek T(0,t)=T(L,t)=0.

In[131]:=
```
T=.
tmax =40;
dsol=NDSolve[{D[T[x,t],t]-α D[T[x,t],{x,2}]==0,T[x,0]==T0[x],T[0,t]==0,T[L,t]==0},{T},{x,0,L
```

Out[133]= {{T→InterpolatingFunction[Domain: {{0., 10.}, {0., 40.}} Output: scalar]}}

- Získání řešení

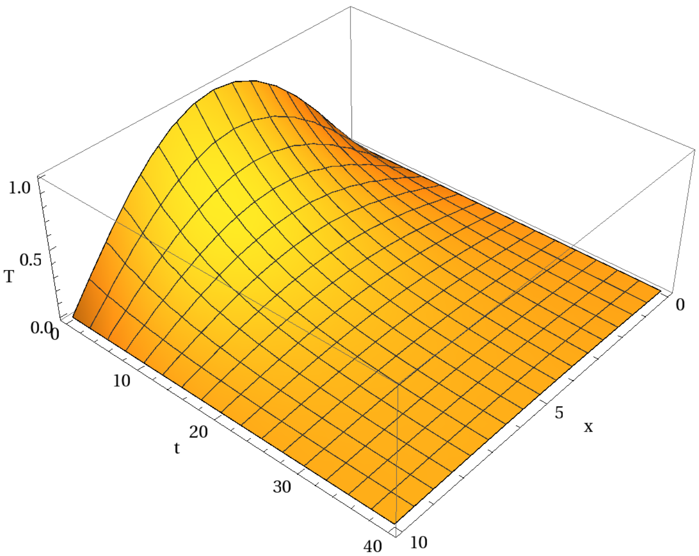
In[134]:=
```
fT=T/.dsol[[1]]
```

Out[134]= InterpolatingFunction[Domain: {{0., 10.}, {0., 40.}} Output: scalar]

- Zobrazení řešení

In[135]:=
```
Plot3D[fT[x,t],{x,0,L},{t,0,tmax },AxesLabel→{"x","t","T"}]
```

Out[135]=



Šíření vln na napnuté membráně

Membrána je tenká deska, která má téměř nulovou tuhost. Nechť membrána s plochou S leží v rovině x-y. Pro příčné kmity míří výchylka w podél osy z.

Pohybová rovnice vlny šířící se membránou je

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{0.15}$$

Nechť je membrána trvale v klidu, tj. w=0, tj. funkce w musí splňovat rovnice

$$w(x, 0, t) = w(a, y, t) = w(x, b, t) = w(0, y, t) = 0. \tag{0.16}$$

Dále je na počátku pohybu (t=0) známá poloha a rychlost každého bodu membrány, tj.

$$w(x, y, 0) = f(x, y), \ \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x, y), \tag{0.17}$$

kde f(x,y) a g(x,y) jsou dané funkce místa (souřadnic x,y).

- Nechť je rychlost šíření c=1 a rozměry čtvercové membrány a,b

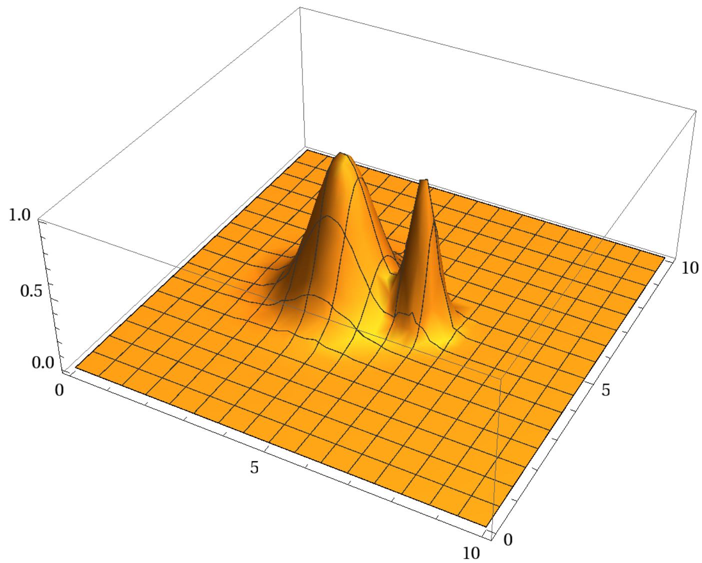
In[136]:=
```
c=1;
a=10;
b=10;
```

- Iniciální funkce popisující plochu membrány v čase t=0 je f(x,y)=Exp(-($(x-a)^2$+$(y-b)^2$)). Membrána je uvolněna z klidu, tj. $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = g(x, y) = 0.$

In[139]:=
```
f[x_,y_]=Exp[-5((x-(a/2)-1)^2+(y-b/2)^2)]+Exp[-1((x-(a/2)+1)^2+(y-b/2)^2)];
```

In[140]:=
```
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotRange→Full]
```

Out[140]=



- Numerické řešení vlnové rovnice

In[141]:=
```
tmax =20;
dw[t_,x_,y_]=D[w[t,x,y],t];
dsol=NDSolve[{D[w[t,x,y],{t,2}]-c (D[w[t,x,y],{x,2}]+D[w[t,x,y],{y,2}])==0,
w[t,x,0]==0,w[t,x,b]==0,w[t,0,y]==0,w[t,a,y]==0,w[0,x,y]==f[x,y],
dw[0,x,y]==0},{w},{x,0,a},{y,0,b},{t,0,tmax }];
```

- Získané řešení

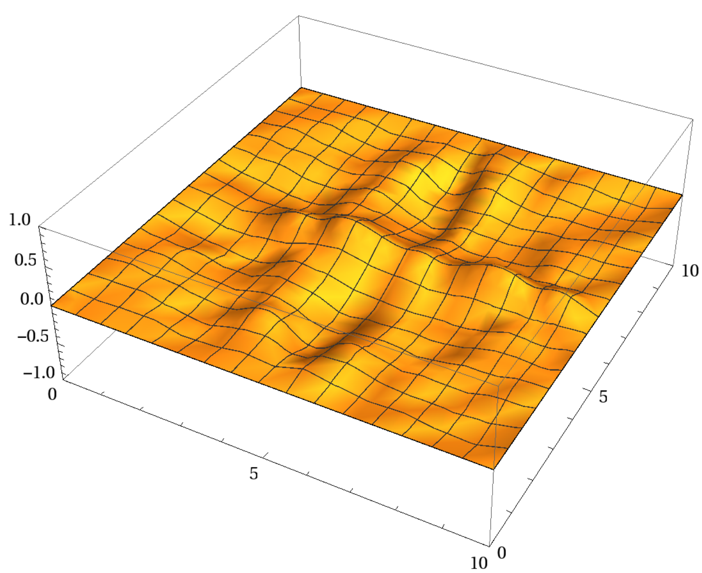
In[144]:=
```
fw=w/.dsol[[1]]
```

Out[144]= InterpolatingFunction[Domain: {{0., 20.}, {0., 10.}, {0., 10.}} Output: scalar]

- Zobrazení tvaru membrány v různých časových okamžicích.

In[145]:=
```
t=20;
Plot3D[fw[t,x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotRange→{{0,a},{0,b},{-1,1}}]
```

Out[146]=



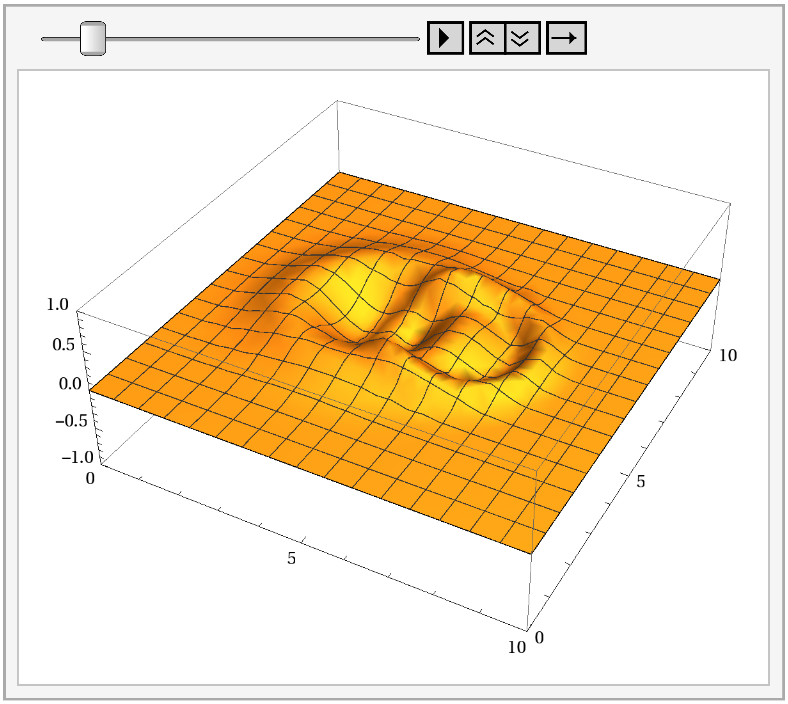
- Animace řešení (Pozor na pomalejších strojích může tato akce trvat pár minut!)

In[147]:=

```
lst=ListAnimate [Table[Plot3D[fw[t,x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotRange→{{0,a},{0,b},{-1,1}}],{t
```

In[148]:= `lst`

Out[148]=



In[224]:=

```
path="/home /kopernik/Lectures/SymbolickeVypocty /Doc/"
Export[path<>"wave.avi",lst,"AVI"]
```

Out[224]= /home /kopernik/Lectures/SymbolickeVypocty /Doc/

Export::nodir : Directory /home /kopernik /Lectures/SymbolickeVypocty /Doc/ does not exist . ≫

OpenWrite::noopen : Cannot open /home /kopernik /Lectures/SymbolickeVypocty /Doc/wave.avi . ≫

Out[225]= $Failed

Řešení Poissonovy rovnice

Poissonova rovnice reprezentuje lokální vyjádření gravitačního zákona a píšeme jej ve tvaru

$$\triangle \phi = -4\,\pi\,\rho. \tag{0.18}$$

Jestliže gravitační pole neovlivňuje rozložení hmoty, pak nám tato rovnice umožní ze zadaného rozložení hmoty určit výsledné gravitační pole. Uvažujme následující rozložení hmoty

$$\rho = \begin{cases} 0.01 \text{ pro } 0.1 < x < 0.3 \ \ \& \times\ 0.1 < y < 0.3 \\ 0.006 \text{ pro } -0.4 < x < -0.2 \ \ \& \ -0.4 < y < -0.2 \end{cases} \tag{0.19}$$

a určeme výsledný potenciál $u(x,\ y)$.

In[149]:=
```
Clear[ρ0];
podmn1 =x>0.1&&x<0.3&&y>0.1&&y<0.3;
podmn2 =x>-0.4&&x<-0.2&&y>-0.4&&y<-0.2;
PoissonEquation=D[u[x,y],{x,2}]+D[u[x,y],{y,2}]==-4π ρ[x,y];
ρ[x_,y_]:=Which[podmn1 ,0.01,podmn2 ,0.006,Not[podmn1 ]&&Not[podmn2 ],0];
dsol=NDSolve[{PoissonEquation,u[x,-1]==u[x,1]==u[-1,y]==u[1,y]==0},u,{x,-1,1},{y,-1,1}]
```

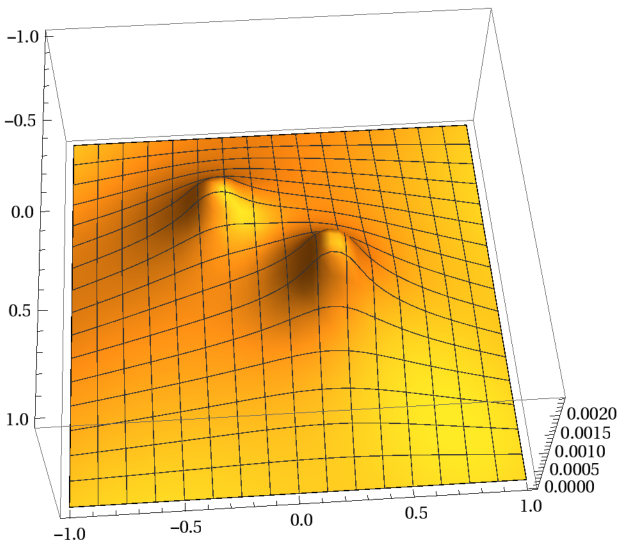
Out[154]= {{u→InterpolatingFunction[Domain: {{-1., 1.}, {-1., 1.}} Output: scalar]}}

In[155]:=
```
fu=u/.dsol[[1]]
```

Out[155]= InterpolatingFunction[Domain: {{-1., 1.}, {-1., 1.}} Output: scalar]

In[156]:=
```
Plot3D[fu[x,y],{x,-1,1},{y,-1,1},PlotPoints→50]
```

Out[156]=



Pohyb testovacích částic ve Schwarzchildově metrickém poli

In[234]:=

In[235]:=