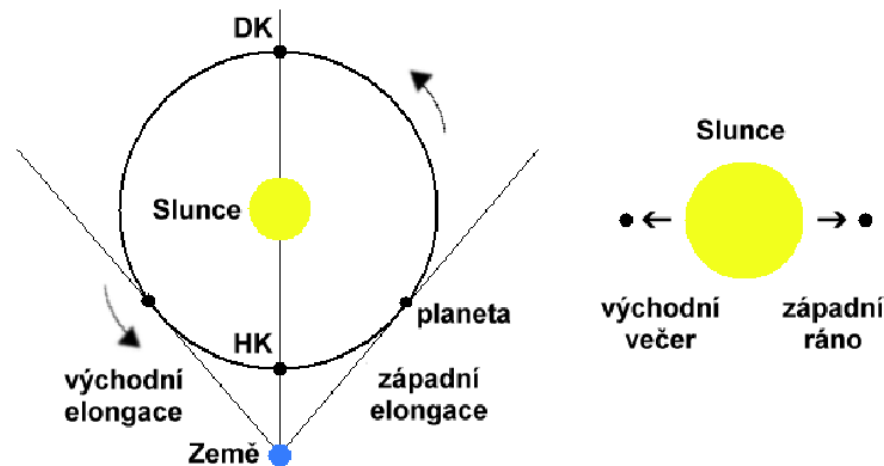


základy astronomie a astrofyziky

pohyb Měsíce, zatmění Slunce a
Měsíce, slapové síly, albedo

3.1 Pohyby planet a Měsíce po hvězdné obloze

Již starověcí astronomové si všimli odlišného chování v pohybech planet, jejichž historické dělení bylo na planety dolní, dnes vnitřní (Merkur a Venuše), a horní - vnější (Mars, Jupiter, Saturn). Toto dělení vzniklo na základě rozdílných pohybů vzhledem ke Slunci.



Obrázek 26: Východní a západní elongace, horní a dolní konjunkce pro vnitřní planety.

Vnitřní planety se nacházejí vždy v témže nebo v sousedním souhvězdí jako Slunce, od kterého se mohou odchýlit o určitý maximální úhel, kterému se říká *elongace*. Pro planetu Merkur je elongace v rozmezí $18^\circ \div 28^\circ$, u Venuše pak $45^\circ \div 48^\circ$ v závislosti na vzájemné poloze planety, Slunce a Země.

| Merkur | | |
|------------|------------------------|--|
| datum | střed přechodu (UT) | minimální vzdálenost od středu ☉ v '' |
| 07.05.2003 | 07:52 | 708,3 |
| 08.11.2006 | 21:41 | 422,9 |
| 09.05.2016 | 14:57 | 318,5 |
| 11.11.2019 | 15:20 | 75,9 |
| 13.11.2032 | 08:54 | 572,1 |
| 07.11.2039 | 08:46 | 822,3 |

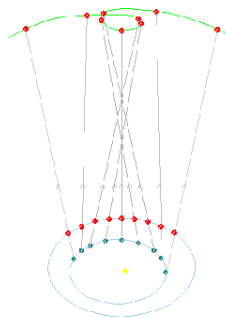
| Venuše | | |
|------------|------------------------|--|
| datum | střed přechodu (UT) | minimální vzdálenost od středu ☉ v '' |
| 09.12.1874 | 04:07 | 829,9 |
| 06.12.1882 | 17:06 | 637,3 |
| 08.06.2004 | 08:20 | 626,9 |
| 06.06.2012 | 01:29 | 554,4 |
| 11.12.2117 | 02:48 | 723,6 |
| 08.12.2125 | 16:01 | 736,4 |

Tabulka 3: Data přechodů vnitřních planet před slunečním kotoučem mezi lety 2000–2040 pro Merkur a 1800–2200 pro Venuši [E11].

Elongace jsou dvojího druhu, *východní*, která nastává večer po západu Slunce (planeta je vzhledem ke Slunci více na východ), a *západní* nastávající ráno před východem Slunce (planeta je více na západ od Slunce).

Pohyb planety vůči Slunci si popíšeme dle obrázku 26. Vyjdeme z bodu, kdy je planeta v největší západní elongaci. V tomto okamžiku má i největší úhlovou vzdálenost od Slunce a je pozorovatelná na západě ráno před východem Slunce. Od tohoto okamžiku se začíná přibližovat ke Slunci, vychází stále později a pohybuje se proti směru otáčení hvězdné oblohy. Tak se dostává do místa zvaného dolní konjunkce, kdy vychází ve stejný čas jako Slunce a není pozorovatelná. Po průchodu dolní konjunkcí se dostává východněji od Slunce a začíná být pomalu pozorovatelná navečer hned po západu Slunce nad západním obzorem. Období, kdy lze planetu na večerní obloze pozorovat se stále prodlužuje, až se planeta dostane do bodu své největší východní elongace, její pohyb vůči Slunci se zastaví a od tohoto okamžiku se začne opět úhlově přibližovat ke Slunci a pohybuje se ve směru otáčení hvězdné oblohy až se dostane do místa horní konjunkce, kdy je sice nejbližší Zemi, ale není viditelná. Existují ovšem výjimky, kdy můžeme vnitřní planety pozorovat i během horní konjunkce (viz tabulka 3), např. v případě přechodů před slunečním kotoučem nebo z družic zkoumající Slunce (jak horní tak dolní konjunkce).

Vnější planety vykazují zcela odlišné pohyby. Většinu času se pohybují proti směru otáčení hvězdné oblohy, ale pomaleji než Slunce. Proto se úhlová vzdálenost planety od Slunce zmenšuje, až je planeta nepozorovatelná v paprscích zapadajícího Slunce. Slunce se poté dostane před planetu, tj. je východněji než planeta

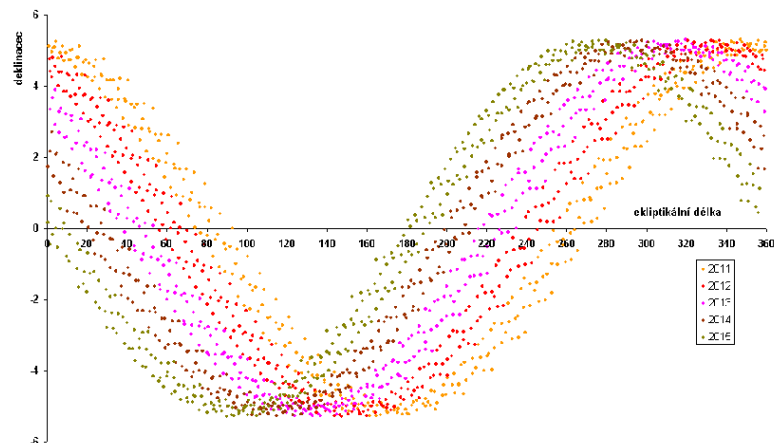


Obrázek 27: Znázornění vzniku retrográdního pohybu (vlevo) a skutečná pozorování planety Mars Tezelem (vpravo) [E12].

a planeta tak začne být pozorovatelná těsně před východem Slunce na ranní obloze. Úhlová vzdálenost planety a Slunce se stále zvětšuje, planeta je pozorovatelná postupně nad ránem, později po většinu noci, její pohyb po hvězdné obloze se zpomaluje, až se dostane do tzv. zastávky a začne vykonávat *retrográdní pohyb* (pohyb ve směru otáčení hvězdné oblohy) až do další zastávky, kdy se pohyb změní opětovně proti směru otáčení hvězdné oblohy a planetu ze západu dožene Slunce a je opět nepozorovatelná.

Pohyb Měsíce po hvězdné obloze je pohybem nejkomplicovanějším. Na rozdíl od planet se Měsíc pohybuje jen v přímém směru proti otáčení oblohy a stejně jako planety se nachází pouze poblíž roviny ekliptiky. Trajektorie Měsíce kolem Země je elipsa s velkou poloosou $a = 384000$ km a excentricitou $e = 0,055$. Rozdíl mezi vzdáleností perigea a apogea tak činí 42200 km, což se výrazně projevuje na změně úhlové velikosti Měsíce. Vzhledem k tomu, že měsíční dráha a rovina ekliptiky mají sklon cca. $5^{\circ} 9'$, můžeme v pásu o šířce přibližně $10^{\circ} 18'$ nalézt Měsíc. Měsíční dráha mezi hvězdami není tatáž vzhledem k tomu, že se uzly měsíční dráhy stáčí (posouvají se proti jeho oběhu, na každou otočku Měsíce je stočení uzlů o cca. 1,5 stupně) a tím pádem se Měsíc dostává do různých míst v tomto pásu (obr. 28). Skutečný pohyb Měsíce je však mnohem komplikovanější a jeho popis je svízelný. Je to dáno hlavně značnými poruchami měsíční trajektorie, kdy jsou i ty nejmenší odchylky díky malé vzdálenosti Měsíce od Země nápadné a rozdílností geocentrické a topocentrické polohy. Parametry měsíční dráhy se neustále mění v širokém rozmezí (např. sklon měsíční trajektorie se mění v rozmezí od $4^{\circ} 58'$ do $5^{\circ} 20'$), pro jejich přesný popis je zapotřebí i několika set periodických členů. Sekulární pohyby postihují i délku výstupného uzlu a délku perigea. Uzlová přímka se pohybuje proti pohybu Měsíce, perioda stáčení (základní) je 18 let a 7 měsíců (6793 dní), přímka apsid (perigeum) se naproti tomu stáčí k východu s periodou 9 let (3232 dní).

Pohyb uzlů určuje podmínky viditelnosti Měsíce, je-li výstupný uzel v blízkosti jarního bodu, pak je dráha Měsíce mezi hvězdami vně prostoru mezi rovníkem



Obrázek 28: Graf polohy Měsíce vůči rovině ekliptiky v letech 2011–15, na kterém je zřetelně viditelný posun uzlů měsíční dráhy proti jeho pohybu.

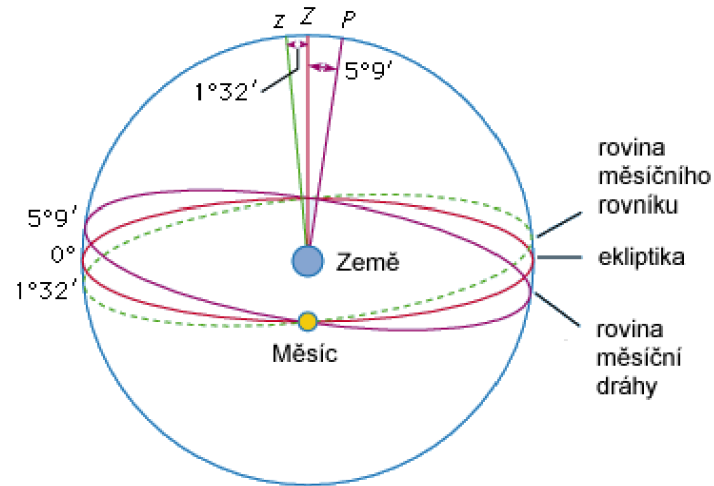
a ekliptikou, sklon měsíční dráhy k zemskému rovníku může být až $28^{\circ} 36'$ ($23^{\circ} 27' + 5^{\circ} 9'$), naopak, je-li poblíž jarního bodu uzel sestupný, sklon měsíční dráhy vůči rovníku je jen $18^{\circ} 18'$ ($23^{\circ} 27' - 5^{\circ} 9'$). Z toho plynou změny deklinace Měsíce během roku v rozmezích $-28^{\circ} 36'$ až $28^{\circ} 36'$ pro první případ a $-18^{\circ} 18'$ až $18^{\circ} 18'$ pro případ druhý. Jak je vidět na obrázku 28, druhý případ nastane v druhé půli roku 2015.

Doba, která uplyne mezi průchody Měsíce týměž uzlem, se nazývá *drakonický měsíc*, který je kratší než měsíc siderický (je to způsobeno pohybem uzlové přímky proti směru jeho oběhu) a to 27,212 dne (27 dní 5 hodin a 6 minut) oproti 27,321 dne *měsíce siderického*. Tento rozdíl činí 0,109 dne a až po 18,6 letech se uzlová přímka dostane do původní polohy. Měsíční fáze se střídají s periodou *synodického měsíce* 29,530 dní (29 dní 12 hodin a 44 minut). Anomalistický měsíc má periodu 27,55 dní a měsíc tropický je jen o 7 sekund kratší než měsíc siderický.

3.2 Rotace a librace Měsíce

Rotace Měsíce kolem osy je vázaná s jeho oběhem kolem Země a je totožná se siderickým měsícem (27,321 dne). Rotační osa Měsíce svírá s kolmicí k rovině měsíční trajektorie úhel $6^{\circ} 39'$ ($\pm 10'$), s rovinou ekliptiky pak úhel $1^{\circ} 32'$. V roce 1693 formuloval Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) tři zákony o pohybu Měsíce, ze kterých vyplývá, že roviny ekliptiky, dráhy Měsíce a měsíčního rovníku se stále protínají v téže uzlové přímce (obr. 29).

V daný okamžik je ze Země viditelných 50 % měsíčního povrchu, dlouhodobějšími pozorováními můžeme zmapovat až 60 % díky tzv. *libracím Měsíce*. Optické librace (geometrické) pak rozdělujeme na *v délce*, *v šířce* a *paralaktickou*.



Obrázek 29: Cassiniho zákon o pohybu Měsíce.

Librace v selenografické délce souvisí s pohybem Měsíce po eliptické trajektorii. Rotace Měsíce je víceméně rovnoměrná, vlivem eliptické dráhy se však Měsíc pohybuje nerovnoměrně. Úhlová rychlost se mění jako důsledek 2. Keplerova zákona a za 1/4 měsíce průvodič po průchodu perigeem opíše větší úhel než 90° , tím se podhalí východní část odvrácené strany, naopak po průchodu apogeem se odhalí více část západní. Perioda librací v délce souvisí s anomalistickým měsícem, amplituda librací je $7^\circ 54'$.

Librace v selenografické šířce je dána sklonem rotační osy Měsíce k jeho dráze, perioda librací je úměrná délce drakonického měsíce, jejich amplituda je $6^\circ 41'$.

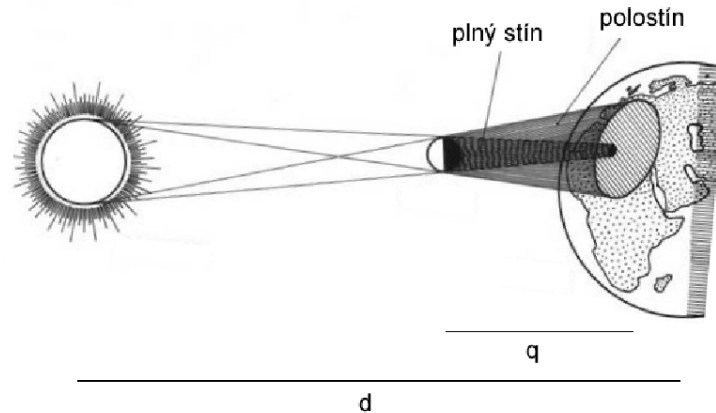
Paralaktická (půldenní) librace souvisí v blízkosti Měsíce od Země. Pozorovateli se během jednoho dne, díky otáčení jeho vlastní polohy kolem osy rotace naší planety, naskýtají na Měsíc pohledy z různých úhlů. Maximální amplituda paralaktické librace je cca. 1 stupeň.

Skutečné „pohupování“ Měsíce je dáno fyzickou librací, která souvisí s jeho elipsoidálním tvarem. Velká poloosa Měsíce se periodicky odklání od směru na Zemi, amplituda těchto změn je však nepatrná a činí kolem $2'$.

3.3 Sluneční a měsíční zatmění

Průběh slunečního zatmění, kdy je na zemský povrch vrhán měsíční stín (polostín), závisí na konkrétním místě na Zemi. Na obrázku 30 je znázorněno geometrické

uspořádání při zatmění Slunce. Délka kužele plného stínu q je dána poměrem velikostí Měsíce $r_2 = 1738$ km a Slunce $r_1 = 696000$ km a dále vzdáleností Slunce od Země $d = 149,7 \times 10^6$ km. Z podobnosti trojúhelníků pak pro délku kužele plného stínu vychází $q = dr_2/r_1 = 374000$ km. Střední vzdálenost Měsíce a Země je sice 384400 km, ale vzhledem k tomu, že se vzdálenost mění v rozmezí od 363300 do 405500 km a i zemský poloměr 6378 km je nezanedbatelný, pak jsou možná i úplná zatmění Slunce. Je-li vzdálenost místa větší než q , pak nastává zatmění prstencové.



Obrázek 30: Geometrie zatmění Slunce (upraveno dle [E41]).

I za nejlepších podmínek není velikost oblasti úplného zatmění (totality) větší než 270 km, úplná zatmění Slunce jsou na jednom místě Země vzácná. Sluneční zatmění mají shodný průběh. Měsíc ukusuje ze západního okraje Slunce (1. kontakt) a končí na východním okraji (4. kontakt). Druhý a třetí kontakt pak mají smysl u zatmění prstencového. Nejdelší úplné zatmění může trvat okolo 7 minut, délka celého úkazu (včetně částečné fáze) může trvat i kolem 2 hodin.

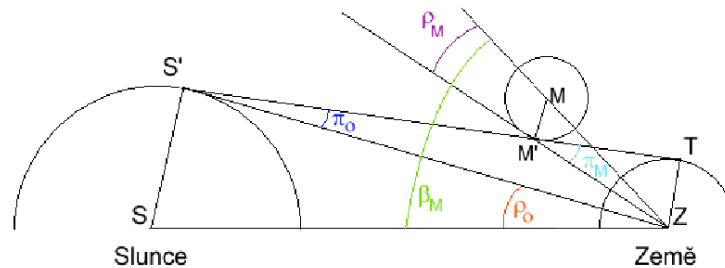
3.3.1 Podmínky pro sluneční a měsíční zatmění

Kdyby roviny měsíční dráhy a ekliptiky byly tytéž, pak by nastávala sluneční a měsíční zatmění každý synodický měsíc. Ve skutečnosti tyto roviny spolu svírají úhel $5^\circ 9'$, proto se během konjunkce (opozice) Slunce a Měsíc nacházejí nad (pod) sebou. Aby nastalo zatmění, musí být splněny následující podmínky. Měsíc musí být buď v novu (sluneční zatmění) nebo v úplňku (měsíční zatmění) a zároveň se musí nacházet v blízkosti uzlu (výstupného či sestupného) své dráhy, tj. nedaleko roviny ekliptiky. Pro okamžik začátku slunečního zatmění (1. kontakt) si můžeme dle obrázku 31 definovat měsíční π_M a sluneční π_\odot paralaxu, střední úhlové poloměry Měsíce ρ_M a Slunce ρ_\odot a geocentrickou ekliptikální šířku Měsíce β_M , pro kterou

někde na Zemi proběhne aspoň částečné zatmění Slunce. Uvážíme-li, že střední hodnoty pro paralaxy Měsíce a Slunce jsou $\pi_M = 57'$, $\pi_\odot = 8,8''$ a velikosti jejich středních úhlových poloměrů $\rho_M = 15,5'$, $\rho_\odot = 16,3'$, pak pro geocentrickou ekliptikální šířku Měsíce dostaneme

$$\beta_M = \sphericalangle MZM' + \sphericalangle M'ZS' + \sphericalangle S'ZS, \quad (80)$$

kde $\sphericalangle MZM' = \rho_M$, $\sphericalangle S'ZS = \rho_\odot$ a $\sphericalangle M'ZS' = \pi_M - \pi_\odot$. Po dosazení dostaneme ekliptikální geocentrickou šířku Měsíce rovnu $\beta_M = 88,7'$. Po přepočtení do ekliptikální geocentrické délky nám vychází $\sin \Delta\lambda = \tan \beta_M / \tan i$, což pro hodnoty $i = 5^\circ 9'$ a $\beta_M = 88,7'$ nám dává $\Delta\lambda = 16,5^\circ$. Zatmění Slunce tak může nastat, je-li střed měsíce v úplňku vzdálen $\pm 16,5^\circ$ od výstupného (sestupného) uzlu. Tento úsek (33°) uběhne Slunce za 34 dní. Během této doby určitě nastane alespoň jeden nov, ne-li dva (délka synodického měsíce je 29,5 dne). Během roku tak nastanou minimálně dvě sluneční zatmění (jedno u výstupného, druhé u sestupného uzlu) a maximálně pět a to tehdy, když první ze zatmění je krátce po 1. lednu, druhé nastane následující nov a třetí a čtvrté dříve než za půl roku. Páté pak bude pozorovatelné po 354 dnech od 1. zatmění. Musíme však poznamenat, že jde o všechny ty

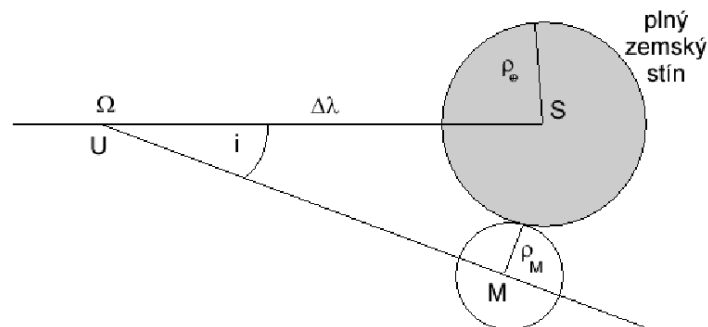


Obrázek 31: Sluneční zatmění.

Nyní se můžeme podívat, jak je to se zatměním Měsíce. Na obrázku 32 je znázorněn uzel měsíční dráhy Ω a plný zemský stín, který se dotýká Měsíce v bodě M' . Poloměr plného zemského stínu je dán $\rho_\oplus = \pi_M + \pi_\odot - \rho_\odot = 57' + 9'' - 16,3' \doteq 41'$. K alespoň částečnému plnostínovému zatmění Měsíce dojde, jsou-li středy zemského stínu a Měsíce vzdáleny méně než $41' + 15,5' = 56,5'$. Ze sférického trojúhelníku $\sphericalangle MUS$ můžeme pomocí sinovy věty vypočítat geocentrickou ekliptikální délku $\sin 56,5' = \sin \Delta\lambda \sin 5^\circ 9' \Rightarrow \Delta\lambda = 10,6^\circ$.

Zatmění (plnostínové) Měsíce, třeba jen krátkodobé, nastane tehdy, je-li střed zemského stínu vzdálen od uzlu měsíční dráhy méně než 10,6 stupně. Stín Země se po ekliptice pohybuje v průměru rychlostí 59 minut za den. Období, kdy se zemský stín pohybuje v okolí uzlu měsíční dráhy, tak trvá $2 \times 10,6(60/59) = 21,6$ dne. Je to výrazně méně, než činí synodická perioda. Proto, pokud v určitém měsíci došlo k zatmění Měsíce, v předchozím ani v následujícím k zatmění dojít nemohlo.

Během roku nemusí dojít k žádnému zatmění, maximálně mohou být tři, první hned po 1. lednu, druhé za půl roku a poslední těsně před jeho koncem. Musíme si ale uvědomit, že hovoříme o úplném zatmění, budeme-li se zabývat zatměním polostínovým, pak úhlová velikost polostínu Země je $\rho_{\oplus} = \pi_M + \pi_{\odot} + \rho_{\odot} \doteq 73,4'$ a maximální vzdálenost středů polostínu Země a Měsíce je pak rovna $89'$. Tomu odpovídá úsek od uzlu měsíční dráhy dlouhý $16,8^\circ$ (celkem pak $33,6^\circ$), ve kterém se realizuje polostínové zatmění Měsíce. To již odpovídá statistice slunečních zatmění, minimálně 2, maximálně 5.

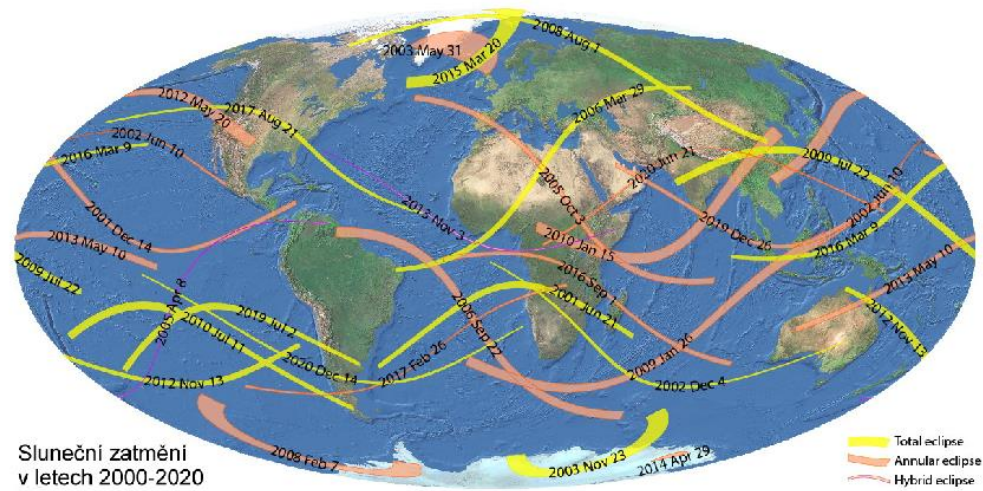


Obrázek 32: Zatmění Měsíce.

Z výše uvedených podmínek můžeme určit maximální počet zatmění Slunce (úplná, prstencová, částečná) + plnostínových zatmění Měsíce (vyloučena polostínová) na sedm a to buď 5 slunečních a 2 měsíční nebo 4 sluneční a 3 měsíční. To se děje však velmi výjimečně, nejčastější je případ dvou slunečních a měsíčních zatmění během jednoho kalendářního roku.

Posloupnost zatmění se opakuje takřka přesně s periodou zvanou saros (18 let 11,3 dne). Souvisí to s periodami střídání fází Měsíce (synodický měsíc 29,53 dne), průchodem uzly jeho dráhy (drakonický měsíc 27,21 dne) a drakonickým rokem (346,62 dne), který je dán dobou průchodu Slunce výspuným uzlem měsíční trajektorie. Nejmenší společná perioda, při které se dostanou všechny periody do přibližně téže fáze odpovídá 242 drakonickým měsícům (6585,36 dne), 223 synodickým měsícům (6585,32 dne, tj. 18 let 11 dní 7 hodin a 42 minut) a 19 drakonickým letům (6585,75 dne). Tyto rozdíly vedou k jistým malým změnám ($1/3$ dne), což má vliv na oblast viditelnosti zatmění, která se posouvá s každým cyklem saros o 120 stupňů směrem na západ.

Během každého sarosu dojde k 70 zatměním, z nichž je 41 slunečních a 29 měsíčních. Z konkrétního místa zemského povrchu je jich však viditelných velmi málo. To se týká hlavně úplných zatmění Slunce, i když jich bývá během sarosu 10, frekvence jejich opakování na jednom místě je jednou za 200 až 300 let. Z našich končin nastane pozorovatelné úplné zatmění Slunce až 7. října 2135 a bude pozorovatelné ze severní části České republiky s maximální dobou trvání totální fáze 4 minuty 50 sekund.



Obrázek 33: Místa slunečních zatmění pro roky 2000–2020 (podle [E42]).

3.15 Poruchy - rušivé gravitační síly

Pro poruchy, které způsobují rušící síly, je rozhodující nikoliv zrychlení, které působí rušící těleso na planetu, ale rozdíl zrychlení (planeta-družice) vůči centrálnímu tělesu. Pro systém Země-Měsíc je rušícím tělesem Slunce. Pro rozdíl zrychlení platí

$$a_p - a_s = \kappa M_\odot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + r_0)^2} \right) \text{ pro } r \gg r_0 \implies a_{\text{ruš.}} \doteq 2\kappa M_\odot \frac{r_0}{r^3}, \quad (188)$$

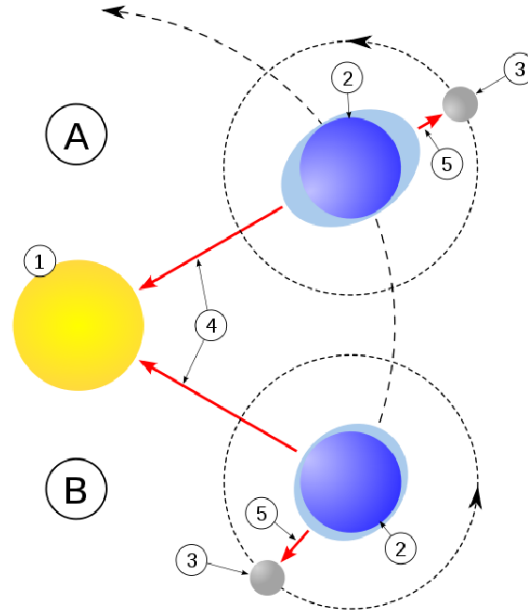
kde r je vzdálenost Země-Slunce, r_0 pak vzdálenost Země-Měsíc. Porucha způsobena rušícím tělesem je opětovně nepřímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti od rušícího tělesa. I když je zrychlení působené Sluncem na Měsíc větší než od Země, rušícím tělesem je Slunce. Které těleso je rušícím lze zjistit z poloměru tzv. *sféry aktivity* σ , daného přibližným vztahem [E19]

$$\sigma = r \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{2/5}, \quad (189)$$

kde r je vzdálenost těles m_1 a m_2 . Pro případ Země a Slunce vychází z tohoto vztahu sféra aktivity Země vůči Slunci 930000 km a pro Zemi a Měsíc je sféra Měsíce vůči Zemi 66000 km. Jestliže se do této sféry vlivu (např. Měsíce) dostane letící sonda, bude její trajektorie ovlivňována gravitačním polem tohoto tělesa. Poloměr sféry aktivity vychází z rovnosti podílů zrychlení způsobeného centrální

hmotou $m_1(m_2)$ ku rozdílovému zrychlení způsobeného hmotou $m_2(m_1)$ a je dán implicitním vztahem (Sekanina 1968)

$$\sigma = (r - \sigma) \left(\frac{r + \sigma}{2r - \sigma} \right)^{1/5} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{2/5}. \quad (190)$$



Obrázek 55: Znázornění skočného (A) a hluchého dmutí (B) (1-☉ 2-☾ 3-⊕ 4-směr přitahování Sluncem 5-směr přitahování Měsícem). [E20]

3.15.1 Slapové síly, příliv a odliv

Důsledkem gravitačních a odstředivých sil je přibližně šestihodinový hodinový interval stoupání a pak zase klesání vodní hladiny. Za polovinu doby mezi po sobě následujícími kulminacemi Měsíce, tj. 12 hodin 25 minut a 14 sekund, tak dojde opět k přílivu (či odlivu), hovoříme o půldenním dmutí, interval mezi přílivem a odlivem na stejném místě je pak 6 hodin 12 minut 37 sekund. Vlivem sklonu dráhy Měsíce se ne všude na Zemi výrazně projevuje půldenní dmutí (Atlantický a Severní ledový oceán), jinde se projevuje hlavně dmutí jednodenní (Jávské a Ochotské moře). Slapy se týkají nejenom vodní (vzdušné) masy, ale také zemské kůry. Už Newton se snažil vysvětlit příčiny slapového působení za předpokladu statického přístupu. Tvar Země má tendenci vyplnit ekvipotenciální plochu, která je reprezentovaná protaženým kapkovitým tělesem, které je navíc zploštělé.

Slapově nepůsobí pouze Měsíc, ale podílí se i Slunce, jeho účinek je však menší a to v poměru

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\zeta}} \left(\frac{r_{\zeta}}{r_{\odot}} \right)^3 \approx \frac{5}{11}. \quad (191)$$

Zesílení slapových účinků je v novu a úplňku, kdy jsou slapy maximální, tedy jsou středy těles v jedné rovině (skočné dmutí), což má za následek i maxima výšky přílivu. Naproti tomu je-li úhel Měsíc, Země, Slunce pravý, pak dochází k hluchému dmutí (obr. 55). Nejvyšší hranice na světě dosahuje příliv v zálivu Fundy v Kanadě, kde hladina stoupá až o 20 metrů.

Protože Země není absolutně tuhým tělesem, projevují se slapové síly i v kůře, dochází k deformacím, což má za následek disipaci energie (transformace na teplo). Důsledkem slapového působení je pak zpomalování rotace Země, která se těmito silami brzdí. Prodlužování periody činí přibližně 0,0016 s za sto let. Energie rotace se přesouvá do tepelné energie v zemském tělese a protože platí zákon nejenom zachování energie ale i momentu hybnosti, dochází k postupnému vzdalování Měsíce od Země. Jeho vzdálenost tak v současnosti každým rokem vzroste o cca 3,7 centimetry. V dřívějších dobách, kdy byl Měsíc blíže Zemi, byly i slapové síly, a tím pádem příliv a odliv, daleko markantnějšími (je to dáno tím, že závisí nepřímou úměrně třetí mocnině vzdálenosti).

Slapovými silami působí ale také Země na Měsíc, toto působení je 20 krát větší než ze strany Měsíce na Zemi, a to způsobilo, že došlo k vázané rotaci Měsíce (je natočen k Zemi stále stejnou stranou). Měsíc se bude neustále od Země vzdalovat, až dojde k vzájemné vázané rotaci obou těles, Měsíc bude vzdálen 556000 km a obíhat bude s periodou 47,4 dne. Podrobnější popis statické teorie slapů lze nalézt v článku V. Štefla (2011).

3.15.2 Poruchy v drahách těles sluneční soustavy

Tělesa sluneční soustavy mají různé hmotnosti, obíhají kolem hmotného středu (těžiště) sluneční soustavy. Nejbližší těžiště je Slunce, které se od něj může vzdálit i na více než dva své poloměry. Tento rozdíl je důležitý pro výpočet přesných efemerid, protože to mění časy východů a západů těles, nejdůležitější vychylující planetou je samozřejmě Jupiter, který, když je např. na ranní obloze, opožďuje východy ostatních těles.

Jupiter způsobuje největší poruchy na oběžných drahách ostatních těles, z původních drah se mohou stát dráhy chaotické (komety, planetky).

Za objevem planety Neptun byly zjištěny poruchy v dráze planety Uran, kterou objevil W. Herschel v roce 1781 zcela náhodně. Počátkem 19. století francouzský astronom A. Bouvard publikoval podrobné tabulky poloh tří tehdy známých obřích planet. Ukázalo se, že v případě planety Uranu se nová pozorování s tabulkovými propočty znatelně rozcházejí. Bouvard po dalším pečlivém zkoumání těchto nepravidelností v pohybu Uranu vyslovil hypotézu, že pozorované odchylky mají svůj původ v gravitačním působení další, dosud neznámé planety. Na základě analýz pohybu Uranu pak bylo vypočteno nezávisle na sobě J. C. Adamsem a U. Le Verrierem neznámé těleso, které má tyto poruchy vyvolávat a zároveň byla předpovězena

i jeho poloha. Neptun nakonec na základě žádosti Le Verriera objevil 23. září 1846 Johann Gottfried Galle.

Trpasličí planeta Pluto byla objevena v roce 1930 více méně náhodou, přestože se v pohybech Uranu a Neptuna vyskytovaly další nevysvětlené poruchy, ale podrobným rozborem se ukázalo, že za drahou Neptuna již žádné velké planety nejsou.

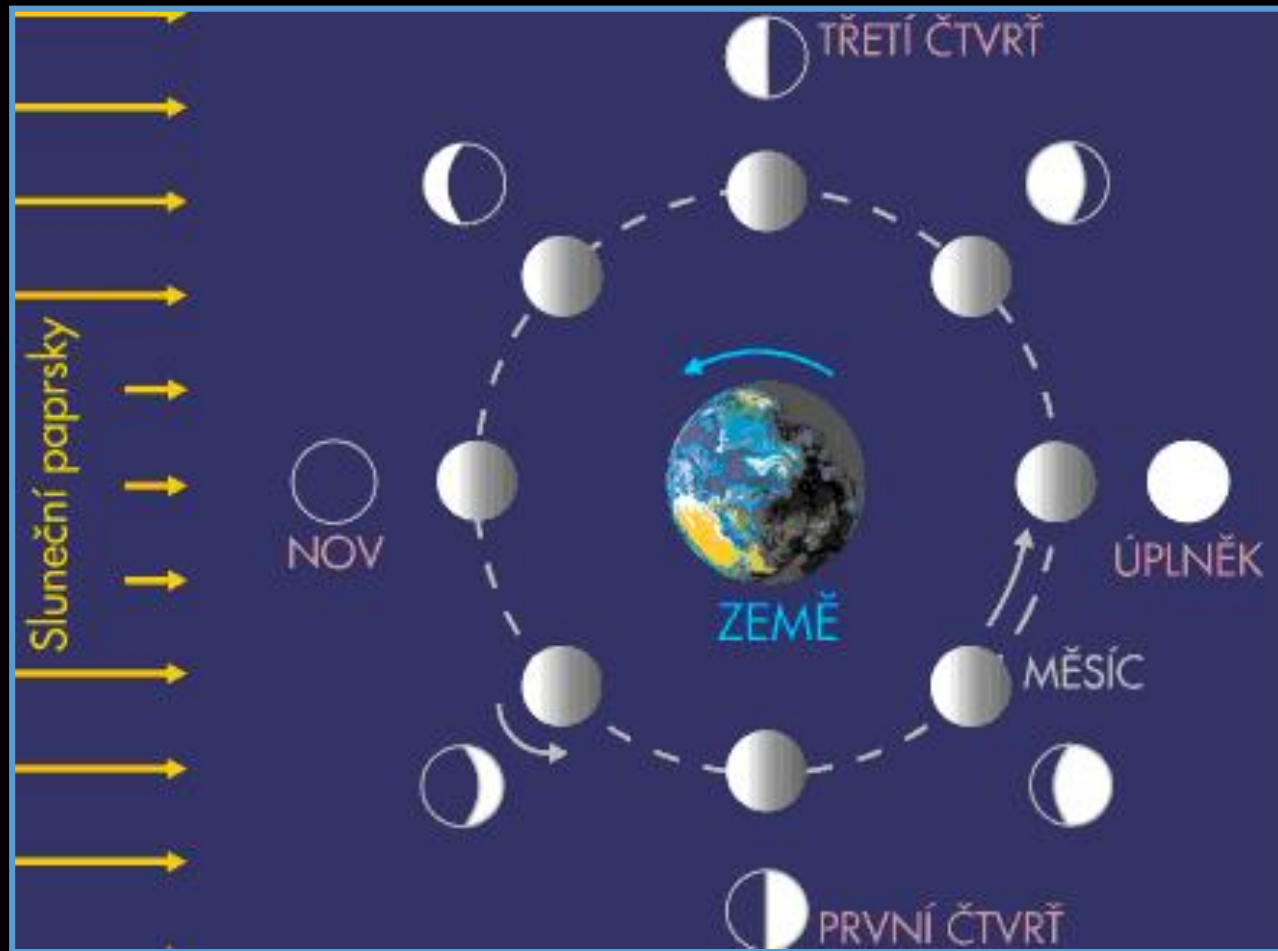
Gravitační poruchy v pohybu umělých družic planet nám dávají možnost detailního prošetření tvaru gravitačního potenciálu ústředních těles, jejichž rozborem můžeme zkoumat rozložení hmoty pod povrchem. Výsledné gravimetrické mapy Země pak přinášejí geofyzikům velmi cenné informace o hustotních nehomogenitách zemské kůry a svrchního pláště. Kvantitativní interpretací gravimetrických map lze vymezit průběhy zlomových linií a vyhledávat struktury perspektivní pro výskyt ložisek ropy a zemního plynu a dalších nerostných surovin.

<https://en.wikipedia.org/wiki/Albedo>

Pohyb Měsíce

- Měsíc je jediný přirozený satelit Země, obíhá ve vzdálenosti asi 384 400 km, doba jeho vlastní rotace je rovna době oběhu kolem Země
- přivrací tak k Zemi stále jednu stranu., ale ze Země je možné vidět o něco více než 50 % povrchu Měsíce (vliv librací Měsíce)
- vznik tzv. *měsíčních fází* je důsledek geometrie soustavy Země - Slunce – Měsíc
- významné fáze mají ustálené názvy:

| | | | |
|----------------|---------|-----------------|-----------|
| • první čtvrt, | úplněk, | poslední čtvrt, | nov |
| • ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| • kvadratura | opozice | kvadratura | konjunkce |
| • ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| • | | se Sluncem | |



Pohyb Měsíce

- Měsíc obíhá po eliptické dráze $e = 0,0549$, těžiště soustavy je ve střední vzdálenosti 4 671 km od středu Země, rovina měsíční dráhy má sklon $i = 5^{\circ}8'43''$ k ekliptice (tato hodnota kolísá).
- střední vzdálenost Z - M 384 405 km
- největší (apogeum) 406 740 km
- nejmenší (perigeum) 356 410 km
- **siderická** oběžná doba (vůči hvězdám) 27,321 stř. slunečních dnů
- **synodická** oběžná doba (vůči Slunci) 29,530 stř. slunečních dnů
- je možné uvažovat i měsíc
 - **tropický** - vzhl. k jarnímu b. 27,321 stř. slunečních dnů
 - **anomalistický** - vzhl. k přímce apsid 27,554 stř. slunečních dnů
 - **drakonický** - vzhl. k uzlu dráhy měsíce 27,212 stř. slunečních dnů,
- vše vztaženo na střed Země

Pohyb Měsíce

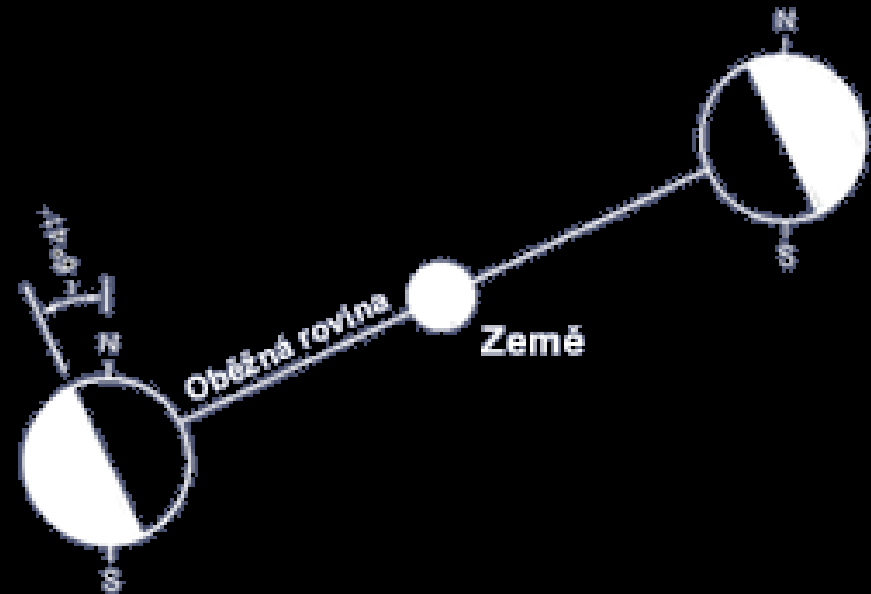
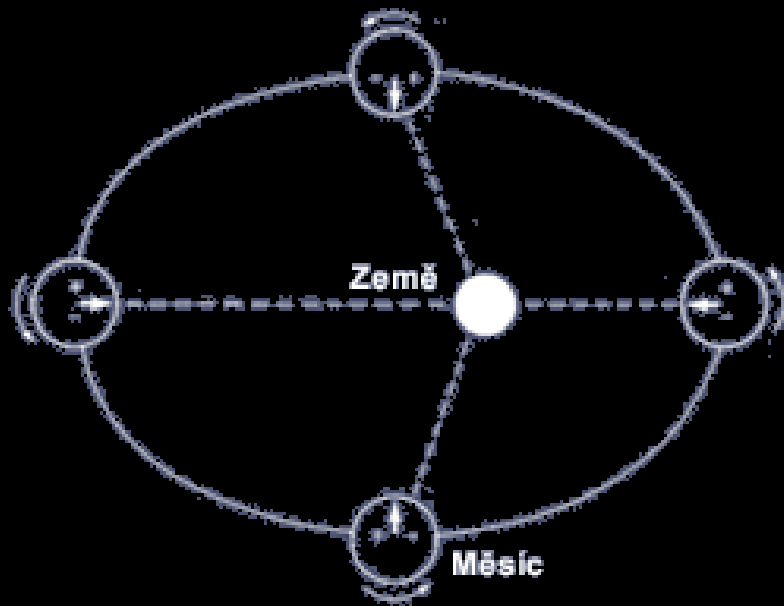
periodické kývavé pohyby měsíčního tělesa - **librace**.

1. **optické librace** (zdánlivé) - dané vzájemným postavením pozorovatele a Měsíce

- sklon osy rotace Měsíce k ekliptice = $88^{\circ}29'$, rovník Měsíce je tedy k ekliptice skloněn $1^{\circ}31'$. Spolu se sklonem roviny oběhu Měsíce k ekliptice to znamená změnu $\pm 6^{\circ}40'$ - tzv. **optická librace v šířce**.
- **optická librace v délce** vzniká rozdílem mezi rovnoměrnou rotací Měsíce kolem vlastní osy a Keplerovským pohybem ($\pm 7^{\circ}53'$)
- **librace paralaktická**, která je dána tím, že nepozorujeme Měsíc ze středu Země, ale z jejího povrchu, je-li Měsíc „na poledníku“, díváme se na něj zepředu, při západu a východu však pod nepatrně jiným úhlem ($\pm 1^{\circ}2'$).

2. **fyzické librace**

optické librace

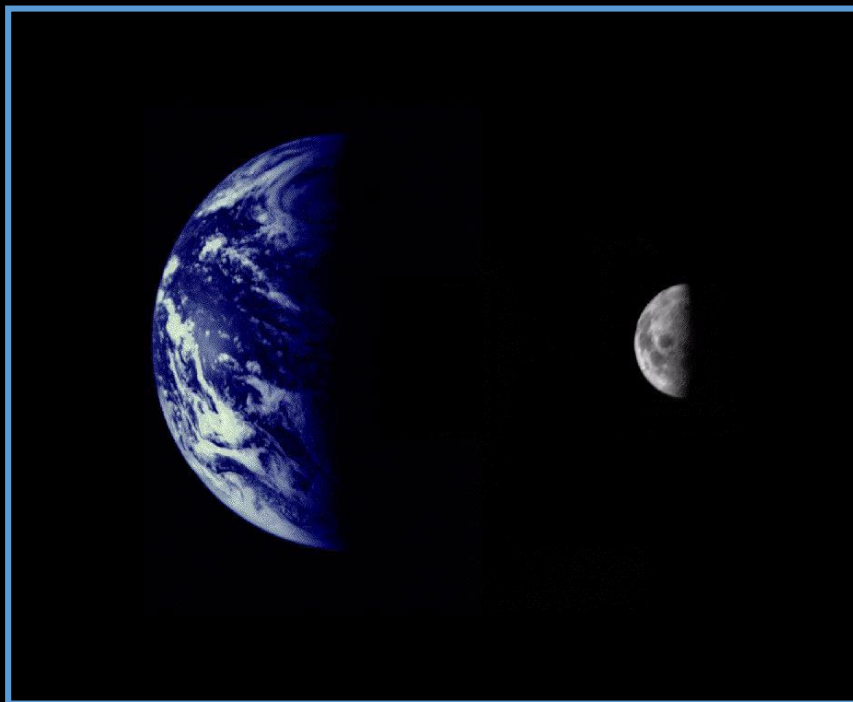


Pohyb Měsíce

- fyzická librace vzniká tím, že Měsíc není dokonalá homogenní koule, poruchy způsobované Sluncem - poruchovými silami
 - **Evekce** - variace závislé na postavení Slunce a přímky apsid. Vyvolává odchylky $1^{\circ}16'$ s periodou přibližně 32 dnů.
 - **Variace** v měsíční dráze - tečná složka zrychlení a_s , perioda 14 dnů, amplituda $40'$.
 - roční nerovnoměrnost (rozdílná vzdálenost od Slunce v peri- a apogeu) - cca 10 minut.
- stáčení přímky apsid má periodu 8,85 let, to znamená, že měsíční dráha vykonává jistý druh precesního pohybu s periodou 18,6 let

Měsíc

- <http://moon.astronomy.cz>



Zákryty Měsícem

pohyb Měsíce po hvězdné obloze

- za hodinu se posune o 30´

- pohybuje se v pásu širokém asi 11°

zákryty hvězd Měsícem

zákryty planet Měsícem



zatemnění Slunce



Sklon dráhy Měsíce

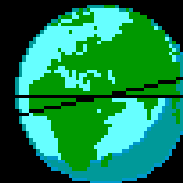
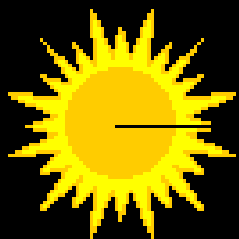


ekliptika – rovina zemské dráhy kolem Slunce

sestupný a vzestupný uzel

– průsečík dráhy tělesa s ekliptikou

sklon dráhy Měsíce k ekliptice asi $5,15^\circ$



Saros

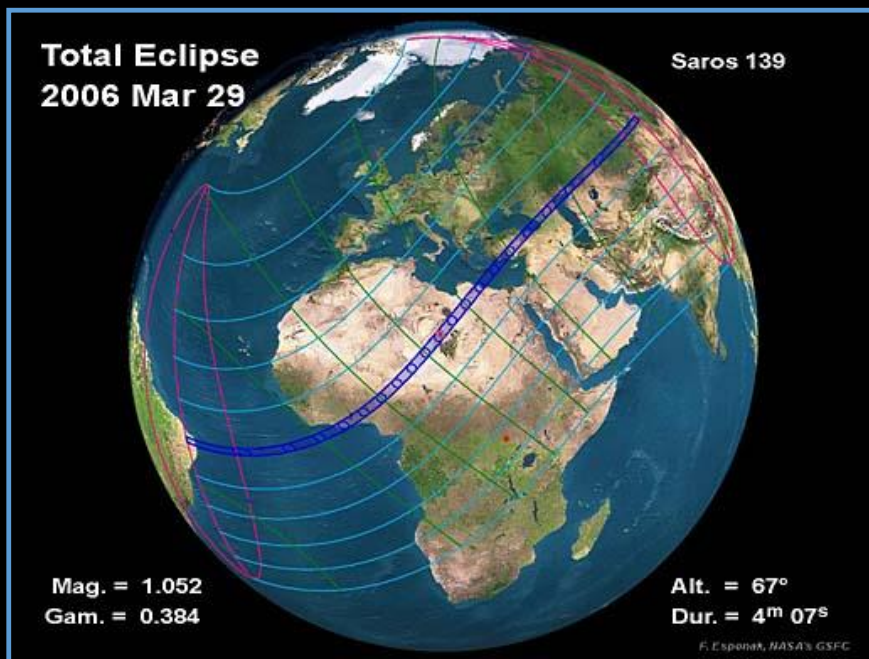
zatmění Slunce a Měsíce se periodicky opakují
v cyklu 6585 dní, 7 hod 42 min (asi 18 let, 11 dnů)
nastává 70 zatmění, 41 slunečných a 29 měsíčních

v následujícím cyklu nastane průchod uzlem
asi o hodinu později

větší přesnost dávají delší cykly (21 144 dnů, asi 58 let)

Zatmění Slunce:Zatmění Měsíce

úplné zatmění Měsíce ze všech míst, kde je nad obzorem
úplné zatmění Slunce z pásu totality o šířce max. 270 km

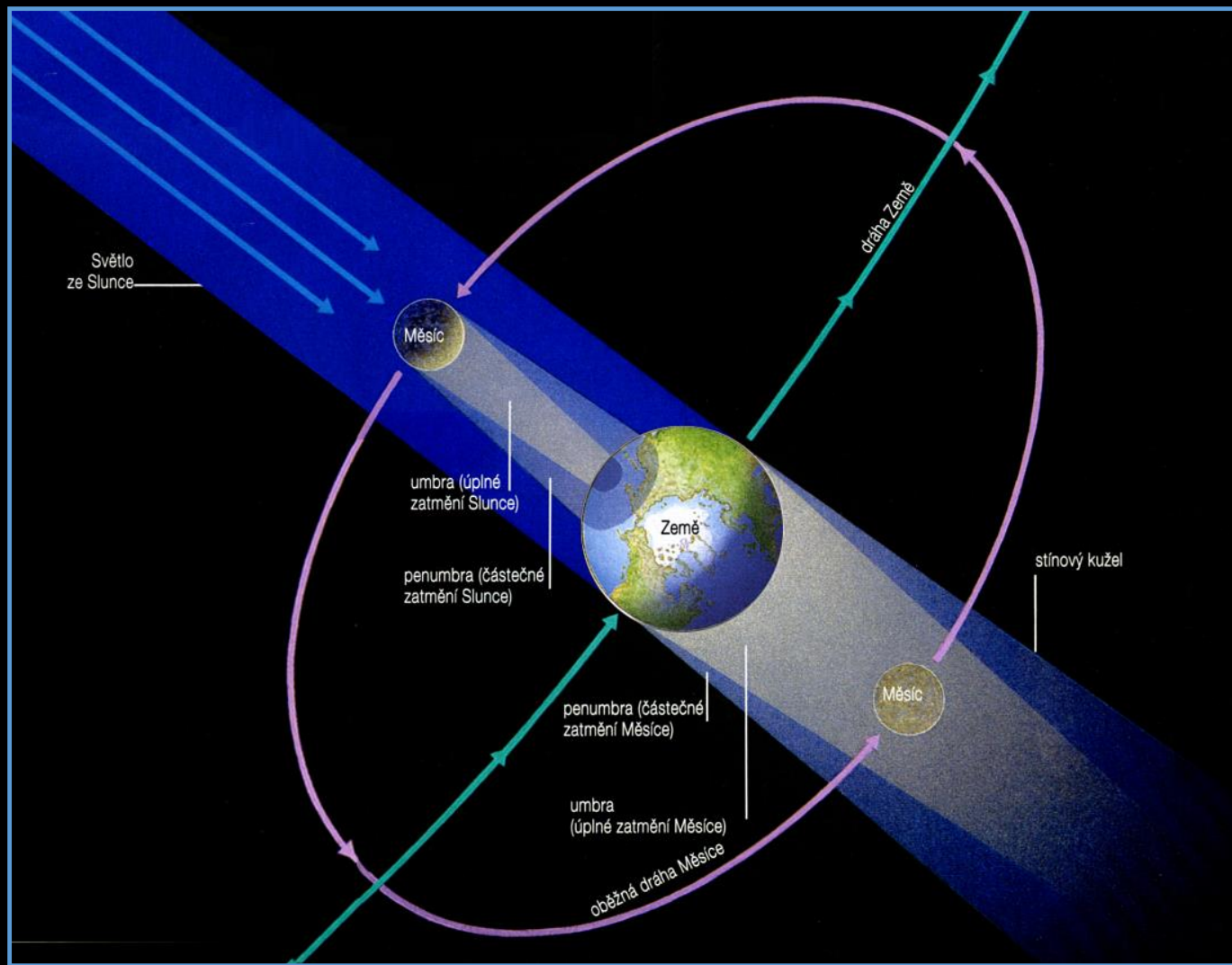


úplné zatmění Měsíce
max. 1 hod 44 min

úplné zatmění Slunce
max. 7 min 31 s

částečné zatmění Slunce u nás 1. srpna 2008 (24%)
úplné zatmění Slunce u nás 7. října 2135

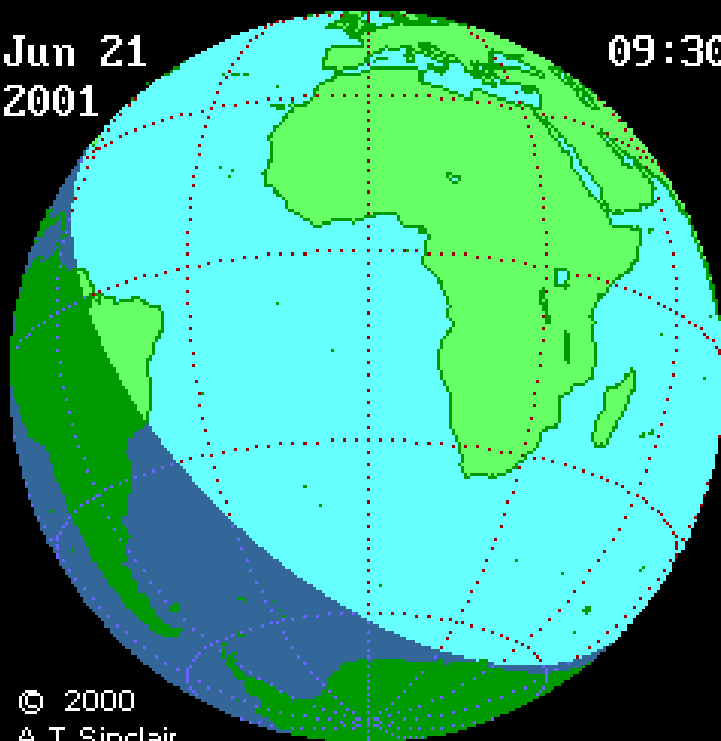
Zatmění Slunce a Měsíce



Zatmění Slunce z oběžné dráhy

Jun 21
2001

09:30



© 2000
A.T.Sinclair

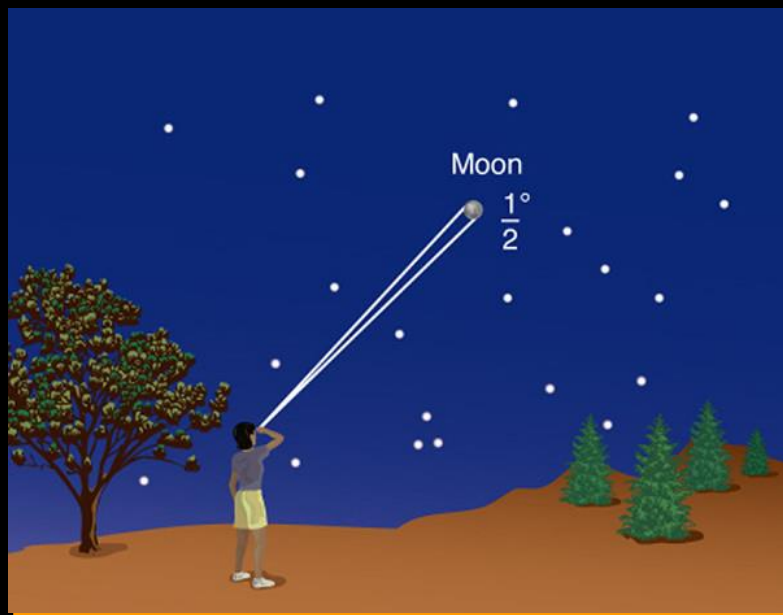
Espenak's Eclipse Home Page

11 Aug 1999 09:30



Stejná úhlová velikost Slunce a Měsíce

průměr Měsíce je 400krát menší než průměr Slunce
Měsíc je 400krát blíže k Zemi než Slunce

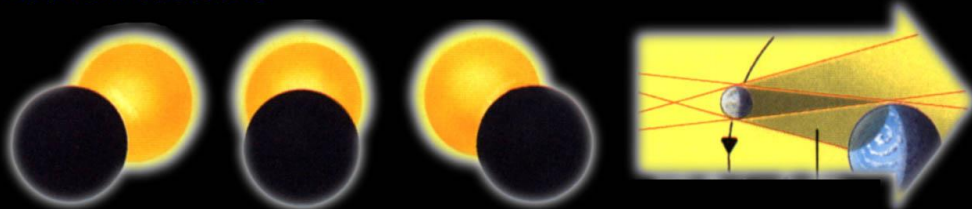


Typy zatmění Slunce

Zatmění úplné



Zatmění částečné



Zatmění prstencové



Měsíc obíhá kolem Země po eliptické dráze
v rozmezí 356 375 až 406 720 km

Úkazy při zatmění Slunce

diamantový prsten

Bailyho perly

koróna



Zabarvení Měsíce při zatmění

zabarvení je způsobeno rozptylem slunečního světla v zemské atmosféře

odstín a sytost závisí na přítomnosti ozónu, prachu a vulkanických aerosolů v horních vrstvách atmosféry.

www.MrEclipse.com

©2000 F. Espenak



www.MrEclipse.com

©2000 F. Espenak

zatmění a zákryty

- [zatmění pozorovatelná z ČR](#)
- [stránky věnované zatměním](#)



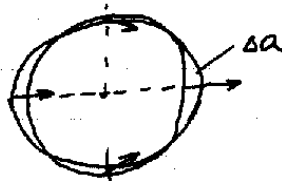
Slapy, príliv a odliv

- dôsledok gravitačnej a odstredivovej síly
v hĺbkách, takže sa pohybuje vodná
hladina

$\frac{1}{2}$ doby medzi po sebe nasledujúcimi
kulmináciami Mesiaca $\frac{1}{2}$ (24h 53min)

slapy sa ťhajú i kemsob' kúry

Prídava Newtonova - statická



rozdiel v rozložení

Tvar vodnej plochy má tendenciu vyplniť
ekvipotenciálnu plochu - protavené boky,
klesá, zplachtá

Slapové prílivy i Slunce - jeho účinnosť je
väčšou menšou $\frac{M_0}{M_C} \left(\frac{r_0}{r_C}\right)^3 \approx \frac{1}{11}$!

(77)

Posilujú a narušujú a úplne - slapy majú

součet \sim vysoký příliv

Země - není abs. kulhá - v kvě
přiliv a odliv

důsledek slapového působení -
zpomalování rotace Země - brzdění
prodloužení $\sim 0,002$ s / století

energie - disipace v zemském tělese
+ vzdalování Měsíce

moment hybnosti zachován - Měsíc

dal - průměr 3 cm / rok
(v minulosti \gg větší $\sim 1/a^3$)

Slapy δ na $\mathbb{C} \sim R_{\oplus} \cdot M_{\oplus} / M_{\odot} \sim 20$ krát

větší - už dávno vytvořily vázanou
rotaci

these points, the surface of the seas is highest (high tide, *flood*). About 6 h after flood, the surface is lowest (low tide, *ebb*). The tide generated by the Sun is less than half of the lunar tide. When the Sun and the Moon are in the same direction with respect to the Earth (new moon) or opposite each other (full moon), the tidal effect reaches its maximum; this is called *spring tide*.

The sea level typically varies 1 m, but in some narrow straits, the difference can be as great as 15 m. Due to the irregular shape of the oceans, the true pattern of the oceanic tide is very complicated. The solid surface of the Earth also suffers tidal effects, but the amplitude is much smaller, about 30 cm.

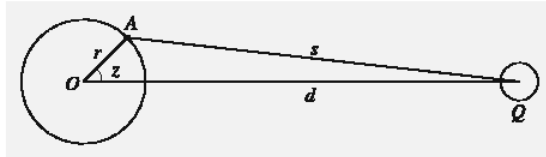
Tides generate friction, which dissipates the rotational and orbital kinetic energy of the Earth–Moon system. This energy loss induces some changes in the system. First, the rotation of the Earth slows down until the Earth also rotates synchronously, i. e. the same side of Earth will always face the Moon. Secondly, the semi-major axis of the orbit of the Moon increases, and the Moon drifts away about 3 cm per year.

* Tides

Let the tide generating body, the mass of which is M to be at point Q at a distance d from the centre of the Earth. The potential V at the point A caused by the body Q is

$$V(A) = \frac{GM}{s}, \quad (7.3)$$

where s is the distance of the point A from the body Q .



Applying the cosine law in the triangle OAQ , the distance s can be expressed in terms of the other sides and the angle $z = \angle AOQ$

$$s^2 = d^2 + r^2 - 2dr \cos z,$$

where r is the distance of the point A from the centre of the Earth. We can now rewrite (7.3)

$$V(A) = \frac{GM}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos z}}. \quad (7.4)$$

When the denominator is expanded into a Taylor series

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$$

where

$$x = \frac{r^2}{d^2} - 2\frac{r}{d} \cos z$$

and ignoring all terms higher than or equal to $1/d^4$ one obtains

$$V(A) = \frac{GM}{d} + \frac{GM}{d^2} r \cos z + \frac{GM r^2}{d^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 z - 1). \quad (7.5)$$

The gradient of the potential $V(A)$ gives a force vector per mass unit. The first term of (7.5) vanishes, and the second term is a constant and independent of r . It represents the central motion. The third term of the force vector, however, depends on r . It is the main term of the tidal force. As one can see, it depends inversely on the third power of the distance d . The tidal forces are diminished very rapidly when the distance of a body increases. Therefore the tidal force caused by the Sun is less than half of that of the Moon in spite of much greater mass of the Sun.

We may rewrite the third term of (7.5) as

$$V_2 = 2D \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right), \quad (7.6)$$

where

$$D = \frac{3}{4} GM \frac{r^2}{d^3}$$

is called *Doodson's tidal constant*. It's value for the Moon is $2.628 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ and for the Sun $1.208 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. We can approximate that z is the zenith angle of the body. The zenith angle z can be expressed in terms of the hour angle h and declination δ of the body and the latitude ϕ of the observer

$$\cos z = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi.$$

Inserting this into (7.6) we obtain after a lengthy algebraic operation

$$\begin{aligned}
 V_2 = & D \left(\cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2h \right. \\
 & + \sin 2\phi \cos 2\delta \cos h \\
 & \left. + (3 \sin^2 \phi - 1) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right) \\
 = & D(S + T + Z).
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Equation (7.7) is the traditional basic equation of the tidal potential, the *Laplace's tidal equation*.

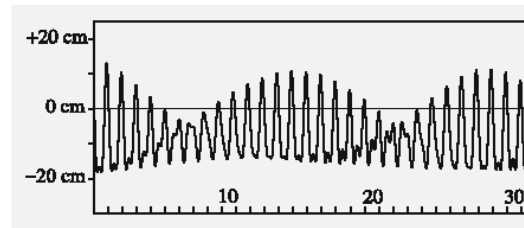
In (7.7) one can directly see several characteristics of tides. The term S causes the *semi-diurnal tide* because it depends on $\cos 2h$. It has two daily maxima and minima, separated by 12 hours, exactly as one can obtain in following the ebb and flood. It reaches its maximum at the equator and is zero at the poles ($\cos^2 \phi$).

The term T expresses the *diurnal tides* ($\cos h$). It has its maximum at the latitude $\pm 45^\circ$ and is zero at the equator and at the poles ($\sin 2\phi$). The third term Z is independent of the rotation of the Earth. It causes the *long period tides*, the period of which is half the orbital period of the body (about 14 days in the case of the Moon and 6 months for the Sun). It is zero at the latitude $\pm 35.27^\circ$ and has its maximum at the poles. Moreover, the time average of Z is non-zero, causing a permanent deformation of the Earth. This is called the *permanent tide*. It slightly increases the *flattening of the Earth* and it is inseparable from the flattening due to the rotation.

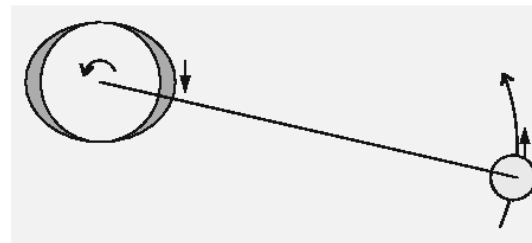
The total value of the tidal potential can be computed simply adding the potentials caused by the Moon and the Sun. Due to the tidal forces, the whole body of the Earth is deformed. The vertical motion Δr of the crust can be computed from

$$\Delta r = h \frac{V_2}{g} \approx 0.06 V_2 \text{ [m]}, \tag{7.8}$$

where g is the mean free fall acceleration, $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$ and h is a dimensionless number, the *Love number*, $h \approx 0.6$, which describes the elasticity of the Earth. In the picture below, one can see the vertical motion of the crust in Helsinki, Finland ($\phi = 60^\circ$, $\lambda = 25^\circ$) in January 1995. The non-zero value of the temporal mean can already be seen in this picture.



The tides have other consequences, too. Because the Earth rotates faster than the Moon orbits the Earth, the tidal bulge does not lie on the Moon–Earth line but is slightly ahead (in the direction of Earth's rotation), see below.



Due to the drag, the rotation of the Earth slows down by about 1–2 ms per century. The same reason has caused the Moon's period of rotation to slow down to its orbital period and the Moon faces the same side towards the Earth. The misaligned bulge pulls the Moon forward. The acceleration causes the increase in the semimajor axis of the Moon, about 3 cm per year.

7.4 Eclipses and Occultations

An *eclipse* is an event in which a body goes through the shadow of another body. The most frequently observed eclipses are the lunar eclipses and the eclipses of the large satellites of Jupiter. An *occultation* takes place when an occulting body goes in front of another object; typical examples are stellar occultations caused by the Moon. Generally, occultations can be seen only in a narrow strip; an eclipse is visible wherever the body is above the horizon.

Solar and lunar eclipses are the most spectacular events in the sky. A *solar eclipse* occurs when the Moon is between the Earth and the Sun (Fig. 7.6). (According

7.7 Albedos

The planets and all other bodies of the solar system only reflect the radiation of the Sun (we may neglect here the thermal and radio wave radiation and concentrate mainly on the visual wavelengths). The brightness of a body depends on its distance from the Sun and the Earth, and on the albedo of its surface. The term *albedo* defines the ability of a body to reflect light.

If the luminosity of the Sun is L_{\odot} , the flux density at the distance r is (Fig. 7.19)

$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}. \quad (7.19)$$

If the radius of the planet is R , the area of its cross section is πR^2 , and the total flux incident on the surface

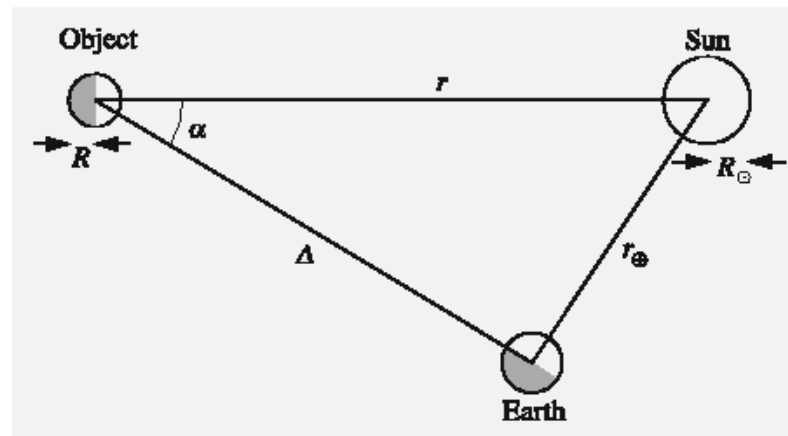


Fig. 7.19. Symbols used in the photometric formulas

of the planet is

$$L_{\text{in}} = \pi R^2 \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot} R^2}{4r^2}. \quad (7.20)$$

Only a part of the incident flux is reflected back. The other part is absorbed and converted into heat which is then emitted as a thermal emission from the planet. The *Bond albedo* A (or spherical albedo) is defined as the ratio of the emergent flux to the incident flux ($0 \leq A \leq 1$). The flux reflected by the planet is thus

$$L_{\text{out}} = AL_{\text{in}} = \frac{AL_{\odot}R^2}{4r^2}. \quad (7.21)$$

The planet is observed at a distance Δ . If radiation is reflected isotropically, the observed flux density should be

$$F = \frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2}. \quad (7.22)$$

In reality, however, radiation is reflected anisotropically. If we assume that the reflecting object is a homogeneous sphere, the distribution of the reflected radiation depends on the *phase angle* α only. Thus we can express the flux density observed at a distance Δ as

$$F = C\Phi(\alpha)\frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2}. \quad (7.23)$$

The function Φ giving the phase angle dependence is called the *phase function*. It is normalised so that $\Phi(\alpha = 0^\circ) = 1$.

Since all the radiation reflected from the planet is found somewhere on the surface of the sphere, we must have

$$\int_S C\Phi(\alpha)\frac{L_{\text{out}}}{4\pi\Delta^2} dS = L_{\text{out}} \quad (7.24)$$

or

$$\frac{C}{4\pi\Delta^2} \int_S \Phi(\alpha) dS = 1, \quad (7.25)$$

where the integration is extended over the surface of the sphere of radius Δ . The surface element of such a sphere is $dS = \Delta^2 d\alpha \sin\alpha d\phi$, and we have

$$\begin{aligned} \int_S \Phi(\alpha) dS &= \Delta^2 \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \Phi(\alpha) \sin\alpha d\alpha d\phi \\ &= \Delta^2 2\pi \int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin\alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (7.26)$$

The normalisation constant C is

$$C = \frac{4\pi\Delta^2}{\int_S \Phi(\alpha) dS} = \frac{2}{\int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin\alpha d\alpha}. \quad (7.27)$$

The quantity

$$q = 2 \int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin\alpha d\alpha \quad (7.28)$$

is the *phase integral*. In terms of the phase integral the normalisation constant is

$$C = \frac{4}{q}. \quad (7.29)$$

Remembering that $L_{\text{out}} = AL_{\text{in}}$, the equation (7.23) can be written in the form

$$F = \frac{CA}{4\pi} \Phi(\alpha) \frac{1}{\Delta^2} L_{\text{in}}. \quad (7.30)$$

The first factor is intrinsic for each object, the second gives the phase angle dependence, the third the distance dependence and the fourth, the incident radiation power. The first factor is often denoted by

$$\Gamma = \frac{CA}{4\pi}. \quad (7.31)$$

When we substitute here the expression of C (7.29), and solve for the Bond albedo, we get

$$A = \frac{4\pi\Gamma}{C} = \pi\Gamma\frac{4}{C} = \pi\Gamma q = pq. \quad (7.32)$$

Here $p = \pi\Gamma$ is called the *geometric albedo* and q is the previously introduced phase integral. These quantities are related by

$$A = pq. \quad (7.33)$$

The geometric albedo seems to have appeared as an arbitrary factor with no obvious physical interpretation. We'll now try to explain this quantity using a *Lambertian surface*. A Lambertian surface is defined as an absolutely white, diffuse surface which reflects all radiation, i.e. its Bond albedo is $A = 1$. Moreover, its surface brightness is the same for all viewing directions, which means that the phase function is

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} \cos\alpha, & \text{if } 0 \leq \alpha \leq \pi/2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7.34)$$

In reality, no such surface exists but there are some materials which behave almost like a Lambertian surface. A wall with a mat white finish is a good approximation; although it doesn't reflect all incident light, the distribution of the reflected light is about right, and its brightness looks the same from all directions.

For a Lambertian surface the constant C is

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{\int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha} \\ &= \frac{2}{\int_0^{\pi/2} \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha} \\ &= \frac{2}{1/2} = 4. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Thus the geometric albedo of a Lambertian surface is

$$p = \pi \Gamma = \frac{CA}{4} = \frac{4 \times 1}{4} = 1. \quad (7.36)$$

At the phase angle zero $\Phi(\alpha = 0^\circ) = 1$ and the reflected flux density is

$$F = \frac{CA}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2} L_{\text{in}}.$$

If we replace the object with a Lambertian surface of the same size, we get

$$F_{\text{L}} = \frac{4}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2} L_{\text{in}}.$$

The ratio of these flux densities is

$$\frac{F}{F_{\text{L}}} = \frac{CA}{4} = \pi \Gamma = p. \quad (7.37)$$

Now we have found a physical interpretation for p : the geometric albedo is the ratio of the flux densities at phase angle $\alpha = 0^\circ$ reflected by a planet and a Lambertian surface of the same cross section.

The geometric albedo depends on the reflectance of the surface but also on the phase function Φ . Many rough surfaces reflect most of the incident radiation directly backward. In such a case the geometric albedo p is greater than in the case of an isotropically reflecting surface. On some surfaces $p > 1$, and in the most extreme case, the specular reflection, $p = \infty$. The geometric albedo of solar system bodies vary between 0.03–1. The geometric albedo of the Moon is $p = 0.12$ and the greatest value, $p = 1.0$, has been measured for the Saturnian moon Enceladus.

It turns out that p can be derived from the observations, but the Bond albedo A can be determined only if the phase integral q is also known. That will be discussed in the next section.

7.8 Photometry, Polarimetry and Spectroscopy

Having defined the phase function and albedos we are ready to derive a formula for *planetary magnitudes*. The flux density of the reflected light is

$$F = \frac{CA}{4\pi} \Phi(\alpha) \frac{1}{\Delta^2} L_{\text{in}}.$$

We now substitute the incident flux

$$L_{\text{in}} = \frac{L_{\odot} R^2}{4r^2}$$

and the constant factor expressed in terms of the geometric albedo

$$\frac{CA}{4\pi} = \Gamma = \frac{p}{\pi}.$$

Thus we get

$$F = \frac{p}{\pi} \Phi(\alpha) \frac{1}{\Delta^2} \frac{L_{\odot} R^2}{4r^2}. \quad (7.38)$$

The observed solar flux density at a distance of $a = 1$ AU from the Sun is

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2}. \quad (7.39)$$

The ratio of these is

$$\frac{F}{F_{\odot}} = \frac{p\Phi(\alpha)R^2 a^2}{\Delta^2 r^2}. \quad (7.40)$$

If the apparent solar magnitude at a distance of 1 AU is m_{\odot} and the apparent magnitude of the planet m we have

$$\begin{aligned} m - m_{\odot} &= -2.5 \lg \frac{F}{F_{\odot}} \\ &= -2.5 \lg \frac{p\Phi(\alpha)R^2 a^2}{\Delta^2 r^2} \\ &= -2.5 \lg \frac{pR^2}{a^2} \frac{a^4}{\Delta^2 r^2} \Phi(\alpha) \\ &= -2.5 \lg p \frac{R^2}{a^2} - 2.5 \lg \frac{a^4}{\Delta^2 r^2} - 2.5 \lg \Phi(\alpha) \\ &= -2.5 \lg p \frac{R^2}{a^2} + 5 \lg \frac{\Delta r}{a^2} - 2.5 \lg \Phi(\alpha). \end{aligned} \quad (7.41)$$

the end ...

<https://phys.libretexts.org>