

základy astronomie a astrofyziky

mechanismy záření,
záření AČT,
teploty

1.4 Elektromagnetické záření. Základy astronomické fotometrie

Elektromagnetické záření. Fotony

Nedílnou součástí materiálu hvězdy je *elektromagnetické záření*. Ve většině hvězd zprostředkovává přenos energie z centrálních oblastí na povrch, v nitru hmotnějších, tedy relativně horkých a řídkých hvězdách, se též významně podílí na tlaku hvězdného materiálu. Zcela jedinečnou roli má při přenosu energie z povrchu hvězd do prostoru, jelikož se dokáže šířit i vakuem. Podtrhněme, že právě tato vlastnost elektromagnetického záření je pro nás životně důležitá. Elektromagnetické záření navíc přenáší důležité informace o hvězdách, bez nichž bychom jinak o těchto důležitých kosmických objektech stěží cokoli věděli.

Elektromagnetické záření nebo též jen *záření*, je podle Maxwellovy ³⁰) teorie elektromagnetického pole příčným vlněním, kde proměnné vektory magnetické indukce a elektrické intenzity jsou vzájemně kolmé a současně kolmé ke směru šíření (ten udává tzv. Poyntingův vektor). Základními charakteristikami elektromagnetického záření jsou *frekvence (kmitočet)* ν udávaná v hertzech ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$) nebo *vlnová délka* λ udávaná v metrech nebo jeho zlomcích.

Ve vakuu se elektromagnetické záření šíří rychlostí světla c , která patří k základním fyzikálním konstantám. Je to současně maximální a nepřekročitelná rychlost, jíž se může reálný objekt v inerciální soustavě pohybovat. Frekvence a vlnová délka elektromagnetického záření ve vakuu jsou spolu vázány relací:

$$c = \nu \lambda.$$

V optickém prostředí, čili obecně mimo vakuum, se toto záření šíří rychlostí v , $v = c/n$, kde n je tzv. *index lomu* ($n \geq 1$). Při přechodu záření z jednoho optického prostředí do druhého se nemění frekvence³¹), vlnová délka je však funkcí indexu lomu podle vztahu:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n \nu}.$$

Pokud má záření pouze jedinou vlnovou délku (kmitočet), hovoříme o tzv. *monochromatickém* záření. Reálné zdroje však nikdy zcela monochromatické záření nevysílají, vždy je to směs záření o různých vlnových délkách. Funkce zastoupení záření podle vlnové délky se nazývá *spektrum záření*. Pokud toto spektrum v sobě obsahuje všechny vlnové délky a intenzita záření se v něm pomalu mění, říkáme, že jejich spektrum je *spojité*.

³⁰) JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879), skotský fyzik.

³¹) Poznamenejme, že v astronomii se běžně udává vlnová délka zkoumaného záření, správnější by ale bylo hovořit o frekvenci, neboť ta je primární charakteristikou elektromagnetického záření, nezávislou na prostředí, jímž se toto záření šíří.

Pokud v dalším textu nebude zmíněno jinak, pak budeme automaticky předpokládat, že vše se týká elektromagnetického záření šířícího se vakuem.

Důležitou charakteristikou elektromagnetického záření je jeho *polarizace*. U nepolarizovaného záření je rovina kmitů elektrické složky (všechny v astrofyzice používané detektory elektromagnetického záření jsou citlivé jen na tuto složku) náhodná. V záření *lineárně polarizovaném* se setkáváme pouze s jedinou rovinou kmitů elektrické složky, u *kruhově polarizovaného* elektromagnetického záření se rovina kmitů stáčí kolem směru šíření vlnění, přičemž amplituda záření se zachovává. Při *eliptické polarizaci* rovina kmitů rovněž rotuje, koncový bod vektoru amplitudy přitom opisuje elipsu.

Kruhová a eliptická polarizace podle smyslu své rotace může pak být *pravá* (z pohledu ve směru ke zdroji jde o směr matematicky záporný) nebo *levá*. Rovina kolmá ke směru šíření vlny, vůči níž je intenzita elektromagnetického záření maximální, se nazývá *rovinou polarizace*. Kosmické zdroje elektromagnetického záření generují vlnění s rozličnou polarizací. Vzhledem k tomu, že nejčastěji jde o tzv. tepelné záření, je jejich záření převážně nepolarizované. Při průchodu mezihvězdným prostředím s částicemi orientovanými elektrickými či magnetickými silami se původně nepolarizované světlo hvězd může změnit na polarizované. To však více vypovídá o vlastnostech tohoto prostředí, než o zdrojích záření. Někdy se však tento údaj může hodit jako dodatečná informace o vzdálenosti dotyčného objektu.

Elektromagnetické záření je podle kvantové teorie tvořeno tzv. *fotony*. Fotony se počítají mezi ostatní elementární částice, jako jsou elektrony nebo protony, tzn. že je lze charakterizovat stejnými fyzikálními charakteristikami, zajišťují též elektromagnetickou interakci.

Pojem fotonu byl zaveden počátkem 20. století, aby se tak popsala pozorovaná skutečnost, že energie přechází mezi zářením a látkou vždy nespojitě – po kvantech. Na odhalení vlastností fotonu se podíleli fyzikové MAX PLANCK, ALBERT EINSTEIN³²) (1879-1955) a řada dalších. Foton se v různých situacích projevuje jako vlna nebo částice, což je konečně vlastností všech elementárních částic. Pro foton je specifické, že má nulový náboj, jednotkový spin (je to tedy tzv. bozon) a nulovou klidovou hmotnost. Fotony se ve vakuu pohybují právě rychlostí světla, každý z nich nese energii E_γ , která je určena výhradně jeho frekvencí ν . Pro foton o kmitočtu ν a vlnové délce ve vakuu λ platí:

$$E_f = h \nu = \frac{h c}{\lambda}.$$

Ve vztahu se kromě rychlosti světla vyskytuje i další ze základních fyzikálních konstant, a totiž *Planckova konstanta* h , $h = 6,626\ 07 \cdot 10^{-34}$ J s. Vzhledem k tomu, že se v astrofyzice z praktických důvodů pro vyjadřování malých energií využívá jednotky 1 eV, je užitečné uvést Planckovu konstantu též s touto jednotkou: $h = 4,135\ 67 \cdot 10^{-15}$ eV s.

Mechanismy vzniku a zániku záření

Ekvivalentní hmotnosti fotonů, vypočtené podle Einsteinovy relace $E = mc^2$, jsou zpravidla velmi malé, například pro foton viditelného světla o kmitočtu $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Hz, tato hmotnost činí jen $3,7 \cdot 10^{-36}$ kg. Připomeňme, že nejlehčí z látkových částic – elektron je 250 tisíckrát hmotnější! Z toho vyplývá, že se fotony mohou relativně snadno tvořit a stejně lehce mohou i zanikat.

K vyzáření fotonu dochází nejčastěji v tom případě, kdy se mění hybnost elektricky nabitě částice. Čím je taková nabitá částice lehčí, tím snadněji se její hybnost může měnit, tím snadněji pak vyzářuje fotony. V astrofyzikální praxi se tak prakticky výhradně setkáváme se zářeními, které vzniklo v důsledku změn pohybového stavu elektronů. Záření elektronů ve vázaných soustavách (atomech, molekulách) budeme podrobněji probírat až v oddílu 3, pojednávajícím o hvězdných spektrech, nyní se omezíme jen na záření generované volnými elektrony.

Pohybový stav volných elektronů v plazmatu ovlivňuje jak elektrické tak magnetické pole. Elektrická (coulombovská) interakce se projevuje zejména při těsných přiblíženích elektronů k jiným iontům, čili při tzv. *srážkách* (ty tedy nemusí být fyzické). Při srážce se trajektorie elektronu procházejícího v těsné blízkosti kladně nabitého iontu zakříví natolik, že z místa blízkého setkání odlétávají jiným směrem.

Při průletu volného elektronu elektrickým polem kladně nabitého iontu, jímž může být buď holé jádro nebo ionizovaný atom prvku, se dráha elektronu zakříví a změna hybnosti může být vyrovnána vyzářením fotonu. Tím se ovšem sníží kinetická energie elektronu, elektron se zabrzdí. Mluvíme proto o tzv. *brzděném záření*. Takto vznikají fotony v nitrech hvězd,

v ionizovaném mezihvězdném plazmatu nebo ve sluneční koróně. Protože volný elektron může nabývat libovolně velké kladné energie, je spektrum brzdného záření obecně spojité. Rozložení energie ve spektru je dáno rozložením energií volných elektronů.

V rovnovážném stavu je ovšem stejně pravděpodobný i opačný proces, kdy elektron prolétávající kolem kladně nabitého iontu pohltí foton a jeho energie se tak příslušně zvýší. Upozorňuji, že z hlediska zákonů zachování energie a hybnosti není možný děj, kdy by samostatný volný elektron vyzářil nebo pohltil foton! K tomu je zapotřebí ještě další částice.

V řídkém plazmatu vnořeném do makroskopického magnetického pole se setkáváme i s *magnetickým brzdným zářením*. Zde zakřivuje dráhu elektronu Lorentzova³³) síla, která nutí volný elektron opisovat šroubovici s osou rovnoběžnou s magnetickou indukcí. Tím se mění hybnost elektronu, který pak vyzařuje buď *cyklotronové* nebo *synchrotronové záření*. Záření cyklotronové, vysílané pomalejšími, tzv. nerelativistickými elektrony, je monochromatické o kmitočtu odpovídajícímu *cyklotronové frekvenci*; ve spektru synchrotronového záření buzeného relativistickými elektrony se objevují i násobky této frekvence. Pro synchrotronové záření je charakteristická jeho silná polarizace a skutečnost, že převážná část energie se zde vyzařuje v oboru radiového nebo mikrovlňného záření. Synchrotronově září nestacionární objekty, aktivní jádra galaxií apod. V nitrech hvězd lze tento mechanismus zanedbat, nikoli však v jejich horkých a řídkých korónách.

Fotony s energiemi menšími než 0,5 MeV spolu vzájemně takřka neinteragují. Avšak při srážce dvou dostatečně energetických fotonů záření γ mohou vzniknout páry *částice-antičástice*, nejčastěji pak dvojice elektron-pozitron. Možný je i opačný proces, zvaný *anihilace* částice a antičástice, při níž vzniká dvojice fotonů odpovídající energie:

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^+ + e^-.$$

K takovéto tvorbě částic z fotonů dochází jen ve výjimečných situacích – při kolapsu hvězdy nebo na počátku vývoje vesmíru, kdy všude panovala nepředstavitelně vysoká teplota. Opačný proces – anihilace – probíhá naopak kdykoli, kdy se do kontaktu dostanou částice a odpovídající antičástice, tempo anihilace na teplotě nezávisí.

Tepelné záření. Záření absolutně černého tělesa

Je všeobecně známo, že rozžhavená pevná, kapalná tělesa nebo žhavý hustý plyn září, a to tím víc, čím více jsou zahřátá. Vysílají přitom spojité záření, jehož spektrální složení se s teplotou zvolna mění. Rozložení energie ve spektru pak nese informaci o teplotě vyzařujícího tělesa.

Jistou idealizací jejich záření je záření tzv. *absolutně černého tělesa*. V laboratoři jej lze realizovat pomocí dobře tepelně vodivého kovového bloku udržovaného na předem zvolené termodynamické teplotě T . Uvnitř bloku nechť pak je dutina s vyčerněnými stěnami, které dokáží velmi účinně pohlcovat elektromagnetické záření. V dutině se pohybují fotony záření, které vyzařují samotné stěny dutiny.³⁴⁾ Po krátké době se v dutině ustaví rovnováha popsána termodynamickou teplotou stěn dutiny. V dutině pak existuje tzv. *rovnovážné tepelné záření* nebo též *rovnovážný fotonový plyn* o teplotě T . Sledovat jej můžeme velice tenkým kanálkem spojujícím vnější svět se zmíněnou dutinu.

Kirchhoff už v roce 1859 ukázal, že charakteristiky záření absolutně černého tělesa závisí *pouze* na jeho teplotě, nikoliv na vlastnostech stěn, což poté svými precizními měřeními potvrdili v roce 1895 i OTTO LUMMER a WILHELM WIEN³⁵⁾. Fyzikové však dlouho tápali při sestavení vzorce pro popis spektra záření absolutně černého tělesa. Dílčím úspěchem bylo nalezení *Stefanova*³⁶⁾ *vztahu* pro celkový zářivý výkon: výkon je přímo úměrný 4. mocnině absolutní (termodynamické) teploty. Pro rozdělení energie ve spektru poskytl správný a teoreticky zdůvodněný vztah až v roce 1900 Max Planck. Dospěl k němu až poté, co učinil odvážný předpoklad, že zářivá energie není vysílána spojitě, ale po kvantech (po fotonech), jejichž energie je dána frekvencí záření (vlnovou délkou): $E = h\nu = hc/\lambda$, kde h je tzv. Planckova konstanta.

Planckův zákon pro záření absolutně černého tělesa vysvětlil již dříve známý Stefanův zákon, objasnil též jak a proč a se s rostoucí teplotou mění rozložení energie ve spojitém spektru hvězd.

- Vlastnosti rovnovážného tepelného záření:
 - a) je izotropní (ve všech směrech má tytéž vlastnosti),
 - b) je homogenní (ve všech místech dutiny má stejné vlastnosti),
 - c) koncentrace fotonů a jejich rozdělení podle energií (podle kmitočtu) závisí pouze na teplotě záření – nezávisí tedy ani na mechanismu vzniku záření, ani na absorpčních vlastnostech stěn,
 - d) spektrum popisuje tzv. Planckův zákon *záření absolutně černého tělesa*,
 - e) absolutně černé těleso je tzv. *kosinový zářič*, neboli zdroj záření, jehož jas nezávisí na orientaci zářící plochy. Kosinové zářiče s konstantní teplotou po povrchu pak nebudou jevit žádné okrajové ztemnění.
- Vlastnosti spektra vyzařovaného absolutně černým tělesem:
 - a) zvýšíme-li teplotu absolutně černého tělesa, bude zářit více, a to ve všech vlnových délkách.
 - b) zvyšujeme-li teplotu, vlnová délka maxima λ_{\max} vyzařované energie klesá. Kvantitativně závislost popisuje tzv. *Wienův zákon posuvu* (též Wienův posunovací zákon), který byl znám už před formulací Planckova zákona:

$$\lambda_{\max} T = 2,8977685 \cdot 10^{-3} \text{ K m.}$$

Důsledkem tohoto zákona je dobře známý fakt, že zabarvení absolutně černého tělesa se s rostoucí teplotou mění od červenavé, přes nažloutlou, čistě bílou až po namodralou.

- c) plocha absolutně černého tělesa o výměře S a teplotě T vysílá do poloprostoru zářivý výkon Φ_e :

$$\Phi_e = \sigma S T_{ef}^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = (5,670400 \pm 0,000040) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

kde σ je *Stefanova-Boltzmannova*³⁷⁾ konstanta. Výše uvedený *Stefanův zákon* je stěžejním astrofyzikálním vztahem, neboť dává do souvislosti celkové množství vyzářené energie a tzv. efektivní teplotu povrchovou teplotu vyzařujícího tělesa. Umožňuje tak „na dálku“ měřit teplotu kosmických objektů, což se v případě hvězd velice hodí.

- d) *Planckův zákon* vyjadřuje závislost *monochromatické hustoty zářivého toku* absolutně černého tělesa (tedy množství energie vyzářené jednotkovou plochou tělesa v jednotkovém intervalu frekvencí za jednotku času, v astrofyzice se používá pojem tok záření) $B_\nu(\nu, T)$ na teplotě a frekvenci:

$$B_\nu(\nu, T) = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

- e) v dlouhovlnné oblasti spektra, kde již platí, že $h\nu \ll kT$, je argument exponenciály blízký nule, takže lze využít rozvoje: $\exp(h\nu/kT) \cong 1 + h\nu/kT$. Za těchto okolností přechází Planckův zákon v *Rayleighův-Jeansův*³⁸⁾ zákon, objevený v roce 1900 a dobře známý zejména v radioastronomii:

$$B_\nu(\nu, T) = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} kT.$$

Příznačné je, že se zde nevyskytuje Planckova konstanta h , což je vyjádřením faktu, že v dlouhovlnné oblasti se elektromagnetické záření chová jen jako vlnění.

- f) V krátkovlnné oblasti ($h\nu \gg kT$), kde je $h\nu/kT$ mnohem větší než 1, takže lze 1 ve jmenovateli v Planckově zákonu zanedbat, přechází tento v tzv. *Wienův zákon*, formulovaný v roce 1896:

$$B_\nu(\nu, T) = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Tam se ovšem Planckova konstanta již objevuje.

Astronomové, kteří se na počátku 20. století zabývali měřením rozložení energie ve spektrech Slunce i dalších hvězd, došli k významnému závěru, že *naprostá většina hvězd září v prvním přiblížení jako absolutně černá tělesa*. Tento fakt jim umožnil určovat efektivní teplotu hvězdných atmosfér z průběhu jejich spojitého spektra, respektive z jejich barevných indexů.

Efektivní teploty hvězd

Už v roce 1837 se podařilo fyziku CLAUDU POUILLETOVI pomocí primitivního bolometru změřit bolometrickou jasnost Slunce, čili tzv. *sluneční konstantu*. Téhož roku tato měření zopakoval John Herschel v jihoafrickém Kapském Městě, aby došel k témuž výsledku. Třebaže šlo spíše jen o hrubé odhady, dostali se docela blízko k dnešní hodnotě: $K = (1367 \pm 3) \text{ W m}^{-2}$. Při známém úhlovém poloměru slunečního kotouče lze ze sluneční konstanty určit i *zářivý výkon* vystupující z jednotky plochy Slunce. Všeobecně se tehdy soudilo, že tato veličina úzce souvisí s teplotou.

Bohužel, nevědělo se jak. Názory se v tomto směru dosti různily: Isaac Newton měl za to, že obě veličiny jsou přímo úměrné. Odtud WATERSON našel sluneční povrchovou teplotu 7 milionů stupňů, ANGELO SECCH⁴³) 10 milionů. Naproti tomu PIERRE-LOUIS DULONG a ALEXIS soudili, že výkon závisí na teplotě exponenciálně. Ti obdrželi teploty Slunce mnohem nižší: 1500 °C, což ovšem bylo v rozporu s tím, že železo, které je na Slunci prokazatelně v plynné podobě, taje při 2500 °C!

⁴³) PIETRO ANGELO SECCHI (1818-78), italský astrofyzik zabývající se zejména spektroskopií, dlouholetý ředitel vatikánské observatoře, objevitel slunečních spikulí. PIERRE-LOUIS DULONG (1785-1838), fyzik a ALEXIS THÉRÈSE PETIT (1791-1820), rovněž fyzik.

Teprve v roce 1879, kdy nalezl slovinšský fyzik Josef Stefan správný vztah mezi hustotou zářivého výkonu vystupujícího z povrchu absolutně černého tělesa zahřátého na absolutní teplotu T , bylo možné odvodit tzv. *efektivní teplotu sluneční fotosféry*, jež činí 5779 K. Byl to současně první případ, kdy se podařilo změřit teplotu hvězdy.

Efektivní teplota hvězdy T_{ef} je definována jako teplota, kterou by měla koule o poloměru hvězdy R zářící jako absolutně černé těleso, jež do prostoru vysílá zářivý výkon L , odpovídající zářivému výkonu hvězdy. Podle Stefanova zákona platí:

$$L = \sigma T_{\text{ef}}^4 4\pi R^2,$$

kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, $\sigma = 5,670400 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Zavedeme-li bolometrické hvězdné velikosti M_{bol} a m_{bol} vyjadřované v magnitudách, lze odvodit:

$$M_{\text{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma}{L_0} \right) - 5 \log R - 10 \log T_{\text{ef}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R_{\odot}^2}{L_0} \right) - 5 \log \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) - 10 \log T_{\text{ef}}$$

$$\begin{aligned} m_{\text{bol}} &= -2,5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi F_0 r^2} \right) = -2,5 \log \left(\frac{\sigma}{F_0} \right) - 5 \log \left(\frac{R}{r} \right) - 10 \log T_{\text{ef}} = \\ &= -2,5 \log \left(\frac{\sigma}{F_0} \right) - 5 \log \alpha - 10 \log T_{\text{ef}}, \end{aligned}$$

kde α je pozorovaný úhlový poloměr kulového tělesa vyjádřený v radiánech. Předpokládáme-li přitom, že poloměr Slunce, určený na základě dlouhodobého pozorování úhlového poloměru slunečního disku: $\alpha = (958,97 \pm 0,04)''$, pak $1 R_{\odot} = \sin \alpha \cdot 1 \text{ AU} = (6,95508 \pm 0,00026) \cdot 10^8 \text{ m}$.

Všechny výše uvedené vztahy patří mezi základní. Vyskytují se samozřejmě i v jiných modifikacích, občas se setkáte i s jinými konstantami, což je zpravidla důsledkem toho, že autoři vycházejí z jiných (často již zastaralých) definic výše uvedených veličin, i z jiných hodnot poloměru a zářivého výkonu Slunce. Vyčíslení numerických konstant vyskytujících se v uvedených vztazích je předmětem úlohy 23.

Výše naznačený postup stanovení efektivní teploty hvězdných fotosfér zdaleka nelze použít u většiny hvězd. Přímé (interferometrické) měření úhlového průměru hvězd lze provést jen u těch největších a nejbližších hvězd, s výjimkou zákrytových dvojhvězd neznáme u většiny hvězd jejich poloměry. Naštěstí se ukazuje, že efektivní teplotu můžeme alespoň odhadnout na základě rozložení energie ve spektru hvězd reprezentovaného např. barevnými indexy,

polohou maxima vyzařování ve spektru nebo vzhledem některých detailů samotného spektra, jimiž mohou být třeba výskyt a intenzita spektrálních čar citlivých na teplotu.

Barevný index hvězdy CI je rozdílem hvězdných velikostí téže hvězdy určených ve dvou rozdílných barvách c_1 a c_2 , pro jejichž efektivní vlnové délky λ_{c1} a λ_{c2} platí: $\lambda_{c1} < \lambda_{c2}$:

$$CI = m_{c1} - m_{c2}.$$

Všeobecně pak platí, že čím vyšší je teplota hvězdy, tím menší je její barevný index. Vztah je to monotónní, takže barevný index může teplotu nahradit. Barevný index ovšem není jenom funkcí efektivní povrchové teploty (jak by tomu bylo v případě, kdyby povrch hvězd zářil přesně jako absolutně černé těleso), takže tato náhrada není stoprocentní.

Až donedávna se pro určení tzv. *barevné teploty* nejvíce používal barevný index ($B - V$), odpovídající poměru hustot toků záření v modré a žluté barvě.⁴⁴) Tento barevný index ovšem často bývá zkreslen vinou mezihvězdné extinkce, která jej obecně zvyšuje (mezihvězdné zčervenání) a vytváří dojem, že pozorovaná hvězda má nižší teplotu než je tomu ve skutečnosti. Proto se v poslední době jako spolehlivější indikátory efektivní teploty hvězd prosazují barevné indexy využívající měření v dlouhovlnné oblasti spektra, např. ($V - R$) nebo ještě lépe ($R - I$), které jsou účinky extinkce deformovány jen zcela nepatrně.

Asi nejspolehlivějším ukazatelem efektivní teploty konkrétní hvězdy je její spektrální typ. Soudobá spektrální klasifikace se opírá o systém vybudovaný na sklonku 19. století na Harvardově observatoři EDWARDEM PICKERINGEM a WILLAMINOU FLEMINGOVOU, později do skutečné dokonalosti dovedený ANTONIÍ MAURYOVOU^{45, 46}) Zmínění astronomové vytvořili jednoparametrickou posloupnost spektrálních tříd O-B-A-F-G-K-M s vnitřním desetinným

dělením, která se pak ukázala jako posloupnost teplotní. Nejvyšší teplotu mají namodralé hvězdy třídy O (až 50 000 K), nejnižší pak načervenalé hvězdy pozdních podtypů spektrální třídy M (2 500 K). Výhodou teploty odvozené ze vzhledu spektra je fakt, že spektrální klasifikace prakticky nezávisí na mezihvězdné extinkci, nevýhodou (zejména zpočátku) tu byly poměrně velké nároky hvězdné spektroskopie na dostatek světla. Proto se spektrální klasifikace zprvu omezovala jen na dostatečně jasné hvězdy.

3.3 Základy atomové fyziky

Stavba atomu

O atomech (řecké „atomos“ odpovídá českému „nedělitelný“), jako o nejmenších částech hmoty, hovořili již řečtí filozofové, nicméně správná představa o vlastnostech těchto diskrétních součástí hmoty vznikla až ve 20. letech tohoto století, poté, co se konstituovala *kvantová mechanika*. Předně, atom není nedělitelný, ale sestává ze dvou vzájemně elektrostaticky vázaných součástí – rozměrově malého kladně nabitého jádra, v němž je uložena rozhodující část hmotnosti atomu, a z elektronového obalu.

Jádro je tvořeno kladně nabitými protony a neutrálními neutrony s hmotnostmi: $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg a $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27}$ kg. Tyto hmotnostně nepatrně odlišné částice, zvané též *nukleony*, v jádru o velikosti asi 10^{-15} m pospolu poutají přitažlivé krátkodosahové jaderné síly (projev tzv. silné interakce), které mezi protony a neutrony nečiní rozdíl. Počet nukleonů v jádru atomu udává tzv. *nukleonové (hmotnostní) číslo* A , počet protonů je dán tzv. *protonovým (atomovým) číslem* Z čísle, jež určuje jak celkový náboj jádra ($1,602 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot Z$), tak i chemické vlastnosti prvku. Název prvku je rovněž dán protonovým číslem ($Z = 1$ – vodík, $Z = 2$ – helium, atp.). Počet neutronů v jádru udává *neutronové číslo* N , $N = A - Z$. Hmotnost jádra m_j je dána součtem hmotnosti jednotlivých nukleonů a hmotnosti odpovídající konfigurační energii E_{kon} :

$$m_j = Z m_p + N m_n + \frac{E_{\text{kon}}}{c^2}.$$

Konfigurační energie E_{kon} , neboli energie jaderné vazby je vždy nekladná a obvykle nezanedbatelná. Hraje závažnou roli při jaderných procesech, při nichž se mění struktura jádra. Pokud pojednáváme o jádrech s jistou kombinací protonového a neutronového čísla, mluvíme určitých nuklidech. Různé nuklidy určitého prvku (stejně Z a různá N) jsou tzv. izotopy tohoto prvku, izobary naopak jsou nuklidy se stejným nukleonovým číslem a různými protonovými a neutronovými čísly. Označují se zpravidla takto: A_Z chemická značka prvku . Například ${}^3_2\text{He}$ znamená, že se tu jedná o jeden z nuklidů helia, v najdete celkem 3 nukleony, z toho 2 protony, nebo to může označovat izotop helia – atom s příslušným jádrem.

Pokud je vazební energie (záporně vzatá konfigurační energie) přepočtená na jeden nukleon malá, jádro se samovolně rozpadá (*přirozená radioaktivita*) nebo přeměňuje na pevněji vázané součásti. Charakteristikou rozpadu je tzv. *poločas rozpadu*. Pokud je tento poločas několikanásobně delší než stáří vesmíru, pak hovoříme o tzv. *stabilních izotopech*. Nejstabilnější jsou takové jaderné konfigurace, kde v jádru neutrony mírně převažují nad protony.

Jaderná síla je zprostředkována výměnou *mezonů*. Nukleony spolu s rodinou podobných těžších částic nazývaných *baryony* i částice střední hmotnostní kategorie – mezony jsou tvořeny ještě elementárnějšími částicemi – *kvarky*. Známe tři rodiny kvarků. První rodina kvarků u a d vytváří běžné nukleony. Druhá rodina kvarků s a c a třetí rodina kvarků b a t vytvářejí částice, které na Zemi můžeme generovat jen pomocí urychlovačů. Ke každému kvarku existuje i jeho antičástice – antikvark. Baryony jsou pak tvořeny třemi kvarky a mezony dvojicí kvark-antikvark. Důležitou fyzikální veličinou, která odlišuje baryony od nebaryonů je tzv. *baryonové číslo*. Kvarky mají baryonové číslo $1/3$, antikvarky $-1/3$, baryony charakterizuje baryonové číslo 1, mezony pak 0. Kvarky spojuje do elementárních částic silná interakce, zprostředkovaná osmicí částic zvaných *gluony*. Silná interakce stojí též v pozadí jaderné síly držící pohromadě nukleony v atomovém jádru. Záporně nabitě elektrony¹⁷⁾ váže ke kladnému jádru elektrostatičká¹⁸⁾, Coulombova síla. Rozměry elektronového obalu jsou řádově 10^{-10} m. Pokud je počet protonů a elektronů

v atomu týž, je jeho celkový elektrický náboj přesně nulový, jde tudíž o tzv. *neutrální atom*. Dodáme-li atomu dostatečnou (ionizační) energii, může se elektron z vázaného systému atomu uvolnit, dojde k ionizaci atomu. Atom se stává elektricky nabitým, *iontem*. V iontech povětšinou elektrony v elektronovém obalu chybějí, jde tedy o tzv. *pozitivní ionty*, výjimečně se však setkáme i se stabilními ionty, kde elektron přebývá – nejznámější je *negativní iont* vodíku tvořený protonem a dvěma elektrony.

Ionty jsou označovány podle svého celkového elektrického náboje atomu: neutrální vodík – H, ionizovaný vodík, čili samostatný proton – H^+ , vodík se dvěma elektrony, čili negativní iont vodíku – H^- . Více chybějících elektronů v obalu se označuje příslušným počtem znamének + v exponentu. Při označování spektrálních čar, ale i odpovídajících iontů, se ujal jiný, alternativní způsob označování – spektrální čáry neutrálních prvků se označují symbolem I – Ca I je neutrální vápník. Pokud jde o spektrální čáry prvku jednou ionizovaný, označuje se římskou číslicí II: He II, čáry n-krát ionizovaného prvku (n+1) v římských číslicích: Fe XV – čáry čtrnáctkrát ionizovaného železa.

Atom vodíku. Energiové hladiny

Nejjednodušším neutrálním atomem je atom vodíku sestávající pouze ze dvou částic: kladného a hmotného protonu a lehkého elektronu.

Pokud bychom soustavu dvou opačně nabitých částic, jež drží pohromadě elektrostatickou silou, řešili klasicky (a zanedbali přitom případné vyzařování elektronu pohybujícího se zakřivené dráze), dospějeme k trajektoriím obdobným trajektoriím planet ve sluneční soustavě. Je to přímý důsledek skutečnosti, že síla gravitační i elektrostatická je nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti. Trajektorie elektronu v „klasickém“ atomu vodíku jsou kuželosečky, v jejichž jednom ohnisku se nachází kladné jádro, tedy proton. Velká poloosa kuželosečky je a , přičemž energie (součet kinetické a potenciální energie) $E \sim -1/a$. Tvoří-li elektron s protonem vázanou soustavu, pak $E < 0$ a trajektorií je elipsa. Limitní případ je

$E = 0$, kdy se elektron pohybuje po parabole $a \rightarrow \infty$. Elektron je volný, jestliže $E > 0$, tehdy se pohybuje kolem protonu po hyperbole – i v nekonečnu má nenulovou rychlost.

Pokud jde o velikost energie, kterou by vázaný systém sestávající z protonu a elektronu mohl nabýt, neklade klasická teorie žádná omezení. Energie atomu může být libovolná. Tomu však pozorování nenasvědčují. Elektron v atomu se nechová jako klasická, bezrozměrná záporně nabitá částice, ale spíše jako stojatá vlna. Kvantová mechanika, kterou je nutno v případě popisu chování elektronů v atomu použít, povoluje jen některé energie atomu, některé stavy.

K správnému výpočtu energie kvantových stavů atomu vodíku sestávajícího z kladně nabitého jádra s nábojem q a záporně nabitého elektronu s nábojem $-e$ je zapotřebí vyřešit trojrozměrnou Schrödingerovu rovnici elektronu lapeného v potenciálové jámě s potenciální energií ve tvaru:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-eq}{r},$$

kde r je vzdálenost elektronu o zanedbatelné hmotnosti od kladně nabitého jádra a ϵ_0 je permitivita vakua. Řešením zmíněné rovnice najdeme, že energie kvantových stavů elektronu jsou dány vztahem:

$$E_n = -\frac{m_e e^2 q^2}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,5984 \text{ eV}}{n^2} \left(\frac{q}{e}\right)^2 = \frac{E_1}{n^2},$$

kde E_n je energie n -té energiové hladiny, m_e je hmotnost elektronu, \hbar Planckova konstanta a n je tzv. hlavní kvantové číslo a E_1 je energie nejnižší, tedy první energiové hladiny. V případě, že v jádru našeho jednoelektronového atomu se nachází právě jeden proton, pak bude výraz v závorce roven 1, protože náboje protonu a elektronu jsou až na znaménko stejné.

Výpočet ukazuje, že pro atom vodíku platí, že energie nejnižšího možného vázaného (základního) stavu odpovídajícího hlavnímu kvantovému číslu $n = 1$ činí: $E_1 = -13,5984 \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,602\,176\,462 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). $-E_1$ pak odpovídá minimální energii, kterou je nutno dodat atomu v základním stavu, aby elektron atom opustil. Označuje se běžně jako *ionizační potenciál*.

Dosazením do výše uvedeného stavu dostáváme následující sled povolených energií vodíku:

$$E_2 = -3,4 \text{ eV}, E_3 = -1,5 \text{ eV}, E_4 = -0,85 \text{ eV}, E_5 = -0,54 \text{ eV} \dots \text{ pro } n \rightarrow \infty, E \rightarrow 0.$$

Kvalitativně podobnou strukturu povolených energiových hladin mají i atomy a ionty s větším počtem elektronů. Ukazuje se, že soubor „povolených“ energií je pro každý iont zcela charakteristický. Vždy je zde možné najít tzv. *základní energetickou hladinu* – minimální energii, kterou může atom dosáhnout. Nad touto hladinou existuje nekonečný počet diskrétních energiových hladin, a to až do stavu, kdy se energie soustavy elektron+zbytek atomu blíží nule. Nad touto hranicí se již elektron od zbytku atomu odpoutává – jde tedy o volný elektron. Ten skutečně může nabývat libovolně velké energie (v nerelativistické aproximaci libovolně velké rychlosti v , $E = \frac{1}{2} m v^2$).

Stav elektronu v atomu je dán uspořádanou čtveřicí *kvantových čísel* $\langle n, l, m, s \rangle$. V atomu vodíku je energie příslušného stavu funkcí pouze hlavního kvantového čísla n . Výběrová pravidla daná zákony kvantové mechaniky připouštějí pro pevně zvolené hlavní kvantové číslo celkem $2n^2$ kombinací ostatních, vedlejších kvantových čísel. Říkáme, že každá energetická hladina je $2n^2$ -násobně degenerována. K rozlišení energií odpovídajících jednotlivým stavům může dojít vložím vnějšího elektrického nebo magnetického pole. Jejich působením dojde k tzv. sejmutí degenerace.

Excitace, deexcitace. Role fotonů

Přejde-li atom nebo iont ze základního stavu s minimální možnou energií do jiného, energeticky bohatšího stavu, říkáme, že atom je nabuzen neboli *excitován*. Proces vybuzení je označován jako tzv. *excitace*, opačným procesem je pak *deexcitace*. Ve vybuzeném, excitovaném stavu setrvává atom jen krátce: řádově 10^{-9} s. Pak dojde k úplné deexcitaci nebo k přechodu do nižší energetické hladiny tím, že:

- a) atom nebo iont přejde do nižšího energetického stavu, tím že emituje foton o energii odpovídající rozdílu energií původního a výsledného stavu
- b) v materiálu s vyšší frekvencí srážek může být excitovaný atom či iont „setřesen“ do nižší hladiny při tzv. „superpružné“ srážce s jiným atomem, iontem nebo elektronem. Po takové srážce od sebe kolidující částice odskočí a suma jejich kinetických energií se zvýší o rozdíl energií excitovaného a neexcitovaného atomu.

Do excitovaného stavu se atom může dostat:

- a) pohlcením fotonu o energii odpovídající rozdílu mezi energiovými hladinami atomu ΔE . Frekvence fotonu ν musí odpovídat relaci: $h\nu = \Delta E$
- b) nepružnou srážkou s jiným atomem, iontem nebo elektronem, přičemž energie nezbytná pro excitaci se odčerpá z kinetické energie srazivších se částic.

Čárové spektrum záření vodíku

Čárové spektrum záření vodíku vzniká v důsledku povolených přechodů mezi vázanými stavy s různými energiemi. Jde tedy o tzv. *vázaně-vázané přechody* (bound-bound transition) spojené s vyzářením nebo pohlcením fotonu o energii odpovídající energetickému rozdílu těchto hladin.

V čárovém emisním spektru vodíku byly již dávno vysledovány jisté spektrální série: *Lymanova série* v ultrafialové oblasti spektra, *Balmerova série* ve viditelné oblasti, *Paschenova*¹⁹), *Brackettova* a *Pfundova série* v infračerveném oboru. Tyto série jsou množinou čar vznikajících při přeskoku z libovolné vyšší hladiny do některé pevně zvolené hladiny. Lymanova série tak odpovídá přechodům do první, čili základní energetické hladiny, Balmerova série do druhé, Paschenova série do třetí, Brackettova do čtvrté, Pfundova do páté atd.

Čáry ve spektrálních sériích se označují písmeny řecké abecedy, přičemž se začíná vždy od zpravidla nejintenzivnější čáry s maximální vlnovou délkou, která vzniká při zářivém přechodu z nejbližší vyšší hladiny do hladiny zvolené. Kupříkladu přechodem z 2. do 1. hladiny vzniká vůbec nejsilnější čára vodíkového spektra – čára Lyman α ($L\alpha$), přechodem z 3. do 1. $L\beta$ atd. Přechodem z 3. do 2. hladiny vzniká čára Balmer α , která se ovšem označuje $H\alpha$ (nikoli $B\alpha$), přechodem ze 4. do 3. hladiny se generuje čára Paschen α ($P\alpha$) atd.

Vlnové délky čar jednotlivých sérií je možno snadno vypočítat, známe-li hodnoty energie dovolených energiových hladin:

$$h\nu = \Delta E = E_1 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_1}{hc} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right) = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right),$$

kde ν je frekvence vyzářeného fotonu, h je Planckova konstanta, ΔE je energiový rozdíl mezi počátečním stavem (i), popsaným hlavním kvantovým číslem n_i a výsledným stavem (j) charakterizovaným číslem n_j , E_1 je energie základní (nejnižší) hladiny charakterizované hlavním kvantovým číslem $n_1 = 1$, λ je vlnová délka vyzářeného fotonu, R je velice spolehlivě určená *Rydbergova konstanta*, $R = 1,097\,373\,156\,8525(73) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$. Pomocí těchto vztahů lze pak rychle vypočítat a předpovědět celé spektrum vodíkového atomu. Například vlnová délka spektrální čáry $L\alpha$: $1/\lambda = R(1/1^2 - 1/2^2) \rightarrow \lambda = 121,5 \text{ nm}$.

Rozestupy mezi čarami se u vyšších členů série stále zmenšují, nulové jsou pro případ, kdy $n_2 \rightarrow \infty$. Odpovídající vlnová délka λ_n je minimální vlnovou délkou čáry série a nazývá se *hrana série*:

$$\lambda_n = \frac{n_1^2}{R}.$$

Lymanova série

$L\alpha$	$2 \Rightarrow 1$	121,5 nm	$L\delta$	$5 \Rightarrow 1$	95,0 nm
$L\beta$	$3 \Rightarrow 1$	102,6 nm
$L\gamma$	$4 \Rightarrow 1$	97,2 nm	hrana	$\infty \Rightarrow 1$	91,2 nm

Balmerova série

$H\alpha$	$3 \Rightarrow 2$	656,3 nm	$H\delta$	$6 \Rightarrow 2$	410,2 nm
$H\beta$	$4 \Rightarrow 2$	486,2 nm
$H\gamma$	$5 \Rightarrow 2$	434,1 nm	hrana	$\infty \Rightarrow 2$	364,4 nm

Stavba a čárové spektrum složitějších atomů

Velmi podobnou stavbu jako atom neutrálního vodíku mají i jednoelektronové ionty, jakým je třeba D I – neutrální deuterium či He II – jednou ionizované helium. Podobné je i jejich čárové spektrum.

U deuteria je stavba elektronového obalu a čárového spektra prakticky identická jako u běžného vodíku. Neutron v jádru navíc však zvyšuje hmotnost jádra a frekvence fotonů vzniklých při přechodech mezi hladinami je tak poněkud vyšší. Ve viditelné oblasti jsou vlnové délky spektrálních čar zhruba o 0,15 nm kratší. To v principu umožňuje stanovit poměr mezi deuteriem a vodíkem ve hvězdných atmosférách.

U jednoelektronových atomů prvků s větším protonovým číslem pozorujeme rovněž obdobu vodíkových spektrálních sérií, vše je však posunuto směrem ke kratším vlnovým délkám. Je to důsledek skutečnosti, že elektron je zde k jádru poután mnohem silněji. Platí, že ionizační potenciál jednoelektronového atomu s jádrem o protonovém čísle Z je Z^2 krát větší (viz vztah pro energii kvantových stavů jednoelektronového atomu), vlnové délky čar jsou dány vztahem:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Nejdůležitějším jednoelektronovým iontem je ionizované helium He II, jehož čáry pozorujeme u velmi horkých hvězd spektrálního typu O. Ionizační potenciál He II je $13,5982 \text{ eV} \cdot 2^2 = 54,393 \text{ eV}$.

Spektrální série odpovídající sérii Brackettové (přechod na 4. hladinu) se objevuje ve vizuální oblasti a nazývá se po svém objeviteli *série Pickeringova*. Pro vlnovou délku jejich čar platí:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n/2)^2} \right),$$

Vlnové délky přechodu ze sudých hladin odpovídají vlnovým délkám čar Balmerovy série vodíku, čáry vznikající přechodem z lichých hladin jsou mezi nimi.

Struktura elektronového obalu u atomů s více elektrony je mnohem složitější, neboť se zde navíc kromě interakce elektronu s jádrem uplatňuje i interakce elektronu s ostatními elektrony v obalu. Nicméně i zde nutně existuje jistá základní energetická hladina s minimální energií a celé rodiny diskretních energetických hladin jednotlivých stavů popsaných čtveřicí kvantových čísel například $\langle n, l, m, s \rangle$ nebo obdobných parametrů. V těchto atomech platí, že každé této čtveřici odpovídá jiná energie. Nesetkáváme se tu tedy s existencí nerozlišených (degenerovaných) energetických hladin.

Kvantová čísla nemohou nabývat libovolných hodnot, pro zvolené hlavní kvantové číslo n ($n \geq 0$) je možných kombinací právě $2n^2$. Další omezení platí pro konkrétní přechody mezi jednotlivými

hladinami. Ukazuje se, že pravděpodobnosti přechodů mezi nimi se velmi liší. Relativně vysoké jsou pro tzv. *povolené přechody*, o několik řádů menší pak pro tzv. *zakázané přechody*. To zda jde o povolený či zakázaný přechod nám stanovují tzv. *výběrová pravidla*, při nichž se sleduje změna kvantových čísel toho či onoho přechodu. Některé změny jsou povolené (třeba $\Delta l = \pm 1$), jiné naopak zakázané.

K zajímavým situacím dochází zejména tehdy, kdy atom přejde do takového excitovaného stavu, z něhož nemůže povoleným přechodem přejít do základního stavu. Takovýmto stavům se říká *metastabilní*. Pokud má atom excitovaný do metastabilní stavu dostatek času (tj. nachází se v prostředí, kde nedochází k častým srážkám) přejde do základní stavu zakázaným přechodem a vyšle při tom foton odpovídající vlnové délky. Běžně se ale přechod do základního stavu realizuje bez vyzáření fotonu, prostřednictvím tzv. „superpružné“ srážky, po níž si energiový rozdíl odnášejí ve své kinetické energii oba srazivší se atomy.

Se *zakázanými čarami* se obvykle setkáváme ve spektrech velmi řídkých planetárních mlhovin nebo jiných forem mezihvězdné látky. Ve spektrech relativně hustých hvězdných atmosfér je nenajdeme.

Záření atomů v kontinuu. Přehled interakcí atomů s fotony

Jak jsme si ukázali, atomy dokáží účinně zářit a pohlcovat světlo určitých vlnových délek, které jsou pro příslušný typ atomu charakteristické. Tato interakce atomu se zářením souvisí s přechody mezi vázanými kvantovými stavy, jejichž energie jsou diskrétní. Atomy však navíc mohou zářit a pohlcovat světlo i mimo tyto vlnové délky, čili v tzv. *kontinuu*. Děje se tak mj. i *vázaně-volnými přechody*, při nichž elektrony vázané v atomu se stávají volnými, opouštějí atom libovolnou rychlostí. Tomuto procesu se též říká ionizace. Opačným procesem je pak *rekombinace*, kdy elektron srazivší se s iontem libovolnou rychlostí je tímto atomem zachycen v některém z jeho vázaných stavů.

Další možností, jak mohou vznikat fotony spojitého záření, jsou tzv. *volně-volné přechody*. Při nich elektron při těsném průletu kolem iontu vyšle foton a ztratí přitom část své kinetické energie, která však i potom postačí k tomu, aby elektron od iontu unikl do nekonečna. Komplementárním volně-volným přechodem je pohlcení fotonu elektronem prolétávajícím kolem iontu. Energie fotonu přispěje ke kinetické energii elektronu, který pak odlétává větší rychlostí. Tento děj bez iontu není možný, neboť iont přebírá část energie a hybnosti pohlceného fotonu tak, aby bylo učiněno zádost zákonům zachování energie i hybnosti.

Schématicky si teď můžeme znázornit veškeré důležité situace, které v interakci atomů s fotonem přicházejí v úvahu:

Zvýšení energie:

<i>elektron:</i>	<i>přechod:</i>	<i>název děje:</i>	<i>popis procesu:</i>
zůstává v atomu	vázaně-vázaný $E_n \Rightarrow E_m$	excitace	a) nepružná srážka atomu s jinou částicí b) absorpce fotonu o energii $h\nu = E_m - E_n$
opustí atom	vázaně-volný	ionizace srážková fotoionizace	nepřužná srážka absorpce fotonu o energii $h\nu > -E_n$, kinetická energie elektronu: $E_{\text{kin}} = E_n + h\nu$
zůstává volný	volně-volný	absorpce fotonu	absorpce fotonu po trojně srážce volného elektronu, kladného iontu a fotonu

Snížení energie:

zůstává v atomu	vázaně-vázaný $E_n \Rightarrow E_m$	deexcitace srážková deexcitace zářivá	„superpružná“ srážka s jinou částicí emise fotonu o energii $h\nu = E_m - E_n$
zachycen iontem	volně-vázaný	tříčásticová rekombinace rekombinace zářivá	srážka iontu, elektronu a další částice, která odebere část energie elektronu emise fotonu o energii $h\nu = E_{\text{kin}} - E_n$
zůstává volný	volně-volný	brzděné záření	emise fotonu

Samostatný atom, je-li excitován, setrvá ve vybuzeném stavu jen krátkou dobu a pak spontánně přechází do základního stavu. Tomuto procesu se říká *spontánní přechod*. Může tak učinit přímo nebo postupně, kaskádovitým procesem, tzv. *fluorescencí*. Kromě stabilní základní hladiny v některých atomech existují i hladiny *metastabilní*, kde může elektron pobýt mnohem déle než onu miliardtinu sekundy, kdy dojde k samovolnému přechodu do základní hladiny. Takovému přechodu, který je málo pravděpodobný, se říká „*zakázaný*“ *přechod*. Okamžitý přechod z metastabilní hladiny do základní může vyvolat interakce atomu s fotonem o energii přesně odpovídající energetickému rozdílu mezi metastabilní a základní hladinou. V tomto případě na atom dopadne foton, a z nabuzeného atomu v metastabilním

stavu vyletí další foton se stejnou vlnovou délkou, fází i směrem, přičemž atom přejde do stavu neexcitovaného. Mluvíme tu pak o tzv. *vynuceném (stimulovaném) přechodu*, či o *vynucené (stimulované) emisi*²⁰). Tento mechanismus se uplatňuje v generaci záření laserů a maserů. Existují i přírodní masery, podmínkou zde je, že vše probíhá ve velmi zředěném prostředí, kde takřka vůbec nedochází ke srážkové deexcitaci.

Astrofyzikálně nejdůležitějším prvkem je vodík. Ten, kromě svého čárového spektra, září a pohlcuje i v kontinuu. Nejvýznamnější jsou zde vázaně-volné přechody, při nichž dochází k přechodu elektronu z některé z nižších energiových hladin do prostoru nebo naopak k zachycení kolem letícího elektronu vodíkovým iontem na některou z nižších hladin. Nejvyšší pravděpodobnost mají ty přechody, kdy kinetická energie uniknuvšího nebo polapeného elektronu je co nejmenší. Znamená to, že nejvíce vyzářených a pohlcených fotonů v kontinuu je těsně za hranami spektrálních sérií.

Vůbec nejsilněji vodík interaguje se spojitým zářením za hranou Lymanovy série ($\lambda < 91,2$ nm), čili v tzv. *Lymanově kontinuu*, ve vzdálené ultrafialové oblasti spektra. Méně výrazně se projevuje za hranou Balmerovy série ($\lambda < 364,6$ nm, tzv. *Balmerovo kontinuum*) v blízké ultrafialové oblasti. V optické části spektra je rozhodující tzv. *Paschenovo kontinuum* s hranou v blízké infračervené oblasti – 820,4 nm. Vodík zde spojitě září nebo absorbuje v důsledku rekombinace elektronu seskakujícího do 3. hladiny, respektive ionizace atomu nabuzeného do 3. hladiny.

Při teplotách běžných pro atmosféry hvězd podobných Slunci je vodíkových atomů vybuzených do 3. hladiny mizivě málo a proto není tento mechanismus tvorby kontinua příliš produktivní. Daleko účinnější je příspěvek daný fotoionizací *negativního iontu vodíku* s velmi nízkým ionizačním potenciálem. Právě tento nevšední iont hraje v atmosférách hvězd pozdního typu zcela rozhodující roli.

Záření řídkého a hustého horkého plynu

Učiňme si nyní malý myšlenkový experiment. Představme si, že máme k dispozici laboratorní zařízení, kde máme možnost sledovat zářivé projevy určitého objemu vodíku měnitelné hustoty. Zařízení je navíc schopno v rámci sledovaného objemu udržovat stálou a všude stejnou teplotu.

Nejdříve začneme s velice řídkým plynem, jehož teplotu zvyšujeme. S tím jak roste teplota, zvyšuje se frekvence i energie vzájemných srážek. Ve chvíli, kdy jsou tyto srážky natolik prudké, že jsou schopny atomy excitovat do vyšších energetických hladin a počne též docházet k prvním ionizacím, začne plyn zářit. Atomy vodíku vysílají fotony v důsledku zářivé deexcitace a zářivé rekombinace. Pokud jsou k dispozici volné elektrony vzniklé ionizací, pak se může zářivou „rekombinací“ vytvářet i negativní iont vodíku. Vzhledem k tomu, že plyn je dle předpokladu mimořádně řídký, naprostá většina takto vzniklých fotonů z plynu unikne. Odnášejí však sebou jistou energii a tím plyn ochlazují. K udržení jeho stálé teploty je nutno jej neustále přehřívat.

Spektrum zářícího vodíku je emisní a dominují v něm čáry Lymanovy, Balmerovy, Paschenovy a dalších spektrálních sérií. Směrem k hranám sérií se intenzita čar poněkud zeslabuje, roste však jejich četnost, poblíž hran se jednotlivé čáry začínou slévat a spojitě přejdou do kontinua příslušných sérií. Tato kontinua jsou patrna jen v bezprostřední blízkosti hrany série, směrem ke kratším vlnovým délkám intenzita kontinua rychle slábne. Přes celé spektrum se překládá emisní kontinuum s fotony vzniklými zachycením volného elektronu neutrálním iontem vodíku, kterýmžto procesem vzniká již zmiňovaný negativní iont vodíku.

Intenzita spektrálních čar a kontinua závisí na teplotě. Zpočátku rychle roste, nabude jistého maxima, při vyšší teplotě však začne intenzita záření vodíku klesat. To souvisí se skutečností, že se zvyšující se teplotou začne rapidně klesat zastoupení slabě vázaného negativního iontu vodíku a naopak začne narůstat podíl ionizovaných atomů, protonů a volných elektronů, které samy nezáří. Mění se i poměry intenzity záření v jednotlivých čarách.

Nyní si představme, že při téže teplotě začneme zvětšovat hustotu plynu. Spektrum plynu se zpočátku nebude měnit, jen se bude zvyšovat intenzita záření, a to zhruba úměrně zvyšující se koncentraci atomů. Teprve při dalším nárůstu hustoty začneme pozorovat jisté odlišnosti. Co se

změnilo? Veškeré procesy probíhají tak jako předtím, ovšem s tím rozdílem, že sám zkoumaný plyn začne pro unikající fotony představovat překážku. Ne všechny emitované fotony stačí uniknout. Atomy vodíku začnou tyto fotony rozptylovat a též absorbovat. Celá situace se tím patřičně zkomplikuje.

Nejvýrazněji se to projeví právě ve spektrálních čarách, kde je plyn opticky nejhustější. Většina vzniklých fotonů je pak vzápětí znovu pohlcena. Upozorňuji, že už **nemusí** být znovu vyzářena, neboť v hustějším plynu často dochází k srážkové deexcitaci, jež vede k nahřívání plynu. Růst intenzity spektrálních čar se značně zpomalí, později takřka zastaví.

Tento proces se z počátku nijak nedotkne kontinua, kde je fotonů jen poskrovnu. S rostoucí hustotou však začne kontinuum, co do intenzity spektrální čáry dohánět. V limitě se prostor mezi nimi kontinuem zcela vyplní a emisní čáry ze spektra vymizí. Rozložení energie ve spektru bude přesně odpovídat záření absolutně černého tělesa příslušné teploty. Bude tedy zcela lhostejné, že zářící, opticky hustý plyn je právě vodík. Mohl by to být zcela jiný plyn nebo též kapalné či pevné těleso zahřáté na příslušnou teplotu.

K stejnému výsledku, jako zvýšením koncentrace částic, lze ovšem dospět i jinak – dostatečným zvětšením zkoumaného objemu tak, aby rozměry nádrže s plynem byly o dost větší než střední volná dráha fotonu libovolné vlnové délky. I takto rozsáhlý objem plynu bude pouze spojitě záření odpovídající záření absolutně černého tělesa.

V astrofyzikální praxi se s touto situací běžně setkáváme v nitrech hvězd, kde je střední volná dráha fotonu nesrovnatelně menší, než jsou rozměry hvězdy. Naproti tomu ve hvězdných fotosférách je střední volná dráha fotonu srovnatelná s tloušťkou fotosféry, tj. z atmosféry mohou již fotony volně unikat.

Kapitola z knihy
Fundamental
Astronomy

5. Radiation Mechanisms

In the previous chapters we have studied the physical properties and detection of electromagnetic radiation. Next we shall briefly discuss concepts related to emission and absorption of radiation. Since we can give here only a summary of some essential results without delving into quantum mechanical explanations, the reader interested in the details is advised to consult any good physics textbook.

5.1 Radiation of Atoms and Molecules

Electromagnetic radiation is emitted or absorbed when an atom or a molecule moves from one energy level to another. If the energy of the atom decreases by an amount ΔE , the atom emits or radiates a quantum of electromagnetic radiation, called a *photon*, whose frequency ν is given by the equation

$$\Delta E = h\nu, \quad (5.1)$$

where h is the *Planck constant*, $h = 6.6256 \times 10^{-34}$ J s. Similarly, if the atom receives or absorbs a photon of a frequency ν , its energy increases by $\Delta E = h\nu$.

The classical model describes an atom as a nucleus surrounded by a swarm of electrons. The nucleus consists of Z protons, each having a charge $+e$ and N electrically neutral neutrons; Z is the *charge number* of the atom and $A = Z + N$ is its *mass number*. A neutral atom has as many electrons (charge $-e$) as protons.

An energy level of an atom usually refers to an energy level of its electrons. The energy E of an electron cannot take arbitrary values; only certain energies are allowed: the energy levels are *quantized*. An atom can emit or absorb radiation only at certain frequencies ν_{if} corresponding to energy differences between some initial and final states i and f : $|E_i - E_f| = h\nu_{if}$. This gives rise to the *line spectrum*, specific for each element (Fig. 5.1). Hot gas under low pressure produces an *emission spectrum* consisting of such discrete lines. If the same gas is cooled down and observed against a source of white light (which has a continuous spectrum), the same lines are seen as dark *absorption lines*.

At low temperatures most atoms are in their lowest energy state, the *ground state*. Higher energy levels are *excitation states*; a transition from lower to higher state is called *excitation*. Usually the excited atom will return to the lower state very rapidly, radiating a photon (*spontaneous emission*); a typical lifetime of an excited state might be 10^{-8} seconds. The frequency of the emitted photon is given by (5.1). The atom may return to the lower state directly or through some intermediate states, emitting one photon in each transition.

Downward transitions can also be induced by radiation. Suppose our atom has swallowed a photon and become excited. Another photon, whose frequency ν corresponds to some possible downward transition from the excited state, can now irritate the atom, causing it to jump to a lower state, emitting a photon with the same frequency ν . This is called *induced* or *stimulated emission*. Photons emitted spontaneously leave the atom randomly in all directions with random phases: the radiation is isotropic and incoherent. Induced radiation, on the other hand, is *coherent*; it propagates in the same direction as and in phase with the inducing radiation.

The zero level of the energy states is usually chosen so that a bound electron has negative energy and a free electron positive energy (cf. the energy integral of planetary orbits, Chap. 6). If an electron with energy $E < 0$ receives more energy than $|E|$, it will leave the atom, which becomes an ion. In astrophysics ionization is often called a *bound-free* transition (Fig. 5.2). Unlike in excitation all values of energy ($E > 0$) are now possible. The extraneous part of the absorbed energy goes to the kinetic energy of the liberated electron. The inverse process, in which an atom captures a free electron, is the *recombination* or free-bound transition.

When an electron scatters from a nucleus or an ion without being captured, the electromagnetic interaction can change the kinetic energy of the electron producing *free-free* radiation. In a very hot gas ($T > 10^6$ K) hydrogen is fully ionized, and the free-free radiation is the most important source of emission. It is then usually called *thermal bremsstrahlung*. The latter part of the name derives from the fact that decelerating electrons hitting the anode of an X-ray tube emit similar

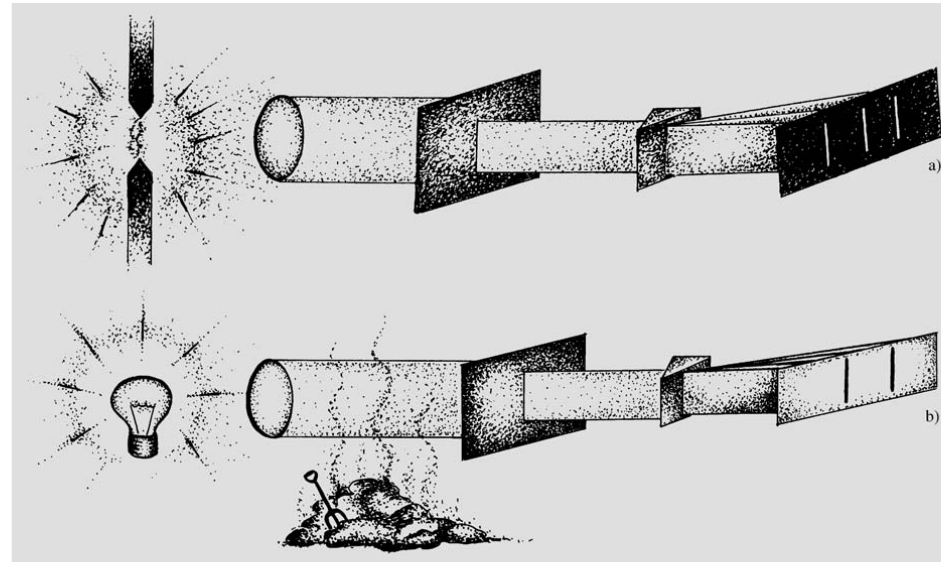


Fig. 5.1a,b. Origin of line spectra. (a) Emission spectrum. Atoms of glowing gas returning from excited states to lower states emit photons with frequencies corresponding to the energy difference of the states. Each element emits its own characteristic wavelengths, which can be measured by spread-

ing the light into a spectrum with a prism or diffraction grating. (b) Absorption spectrum. When white light containing all wavelengths travels through gas, the wavelengths characteristic of the gas are absorbed

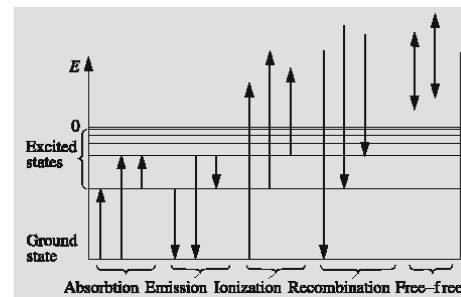


Fig. 5.2. Different kinds of transitions between energy levels. Absorption and emission occur between two bound states, whereas ionization and recombination occur between a bound and a free state. Interaction of an atom with a free electron can result in a free-free transition

radiation. In an analogous way the absorption process can be called a bound-bound transition.

Electromagnetic radiation is transverse wave motion; the electric and magnetic fields oscillate perpendicular to each other and also perpendicular to the direction of propagation. The light of an ordinary incandescent lamp has a random distribution of electric fields vibrating in all directions. If the directions of electric fields in the plane perpendicular to the direction of propagation are not evenly distributed, the radiation is *polarized* (Fig. 5.3). The direction of polarization of *linearly polarized* light means the plane determined by the electric vector and the direction of the light ray. If the electric vector describes a circle, the radiation is *circularly polarized*. If the amplitude of the electric field varies at the same time, the polarization is *elliptic*.

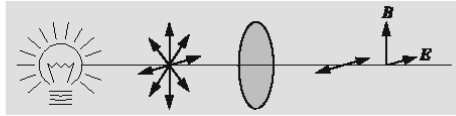


Fig. 5.3. Polarization of light. The light of an incandescent bulb contains all possible directions of vibration and is therefore unpolarized. Some crystals, for example, pass electric fields oscillating only in certain directions, and the transmitted part of the light becomes linearly polarized. E is the electric field and B the magnetic field

If polarized radiation travels through a magnetic field, the direction of the polarization will rotate. The amount of such *Faraday rotation* is proportional to the component of the magnetic field parallel to the line of sight, number of electrons along the line of sight, distance travelled, and square of the wavelength of the radiation.

Scattering is an absorption followed by an instantaneous emission at the same wavelength but usually in a new direction. On the macroscopic scale, radiation seems to be reflected by the medium. The light coming from the sky is sunlight scattered from atmospheric molecules. Scattered light is always polarized, the degree of polarization being highest in the direction perpendicular to the direction of the original radiation.

5.2 The Hydrogen Atom

The hydrogen atom is the simplest atom, consisting of a proton and an electron. According to the Bohr model the electron orbits the proton in a circular orbit. (In spite of the fact that this model has very little to do with reality, it can be successfully used to predict some properties of the hydrogen atom.) Bohr's first postulate says that the angular momentum of the electron must be a multiple of \hbar :

$$mvr = n\hbar, \quad (5.2)$$

where

- m = mass of the electron ,
- v = speed of the electron ,
- r = radius of the orbit ,

n = the principal quantum number ,

$$n = 1, 2, 3, \dots ,$$

$$\hbar = \hbar/2\pi ,$$

\hbar = the Planck constant .

The quantum mechanical interpretation of Bohr's first postulate is obvious: the electron is represented as a standing wave, and the "length of the orbit" must be a multiple of the de Broglie wavelength, $\lambda = \hbar/p = \hbar/mv$.

A charged particle in a circular orbit (and thus in accelerated motion) should emit electromagnetic radiation, losing energy, were it to obey the rules of classical electrodynamics. Therefore our electron should spiral down towards the nucleus. But obviously, Nature does not behave this way, and we have to accept Bohr's second postulate, which says that an electron moving in an allowed orbit around a nucleus does not radiate. Radiation is emitted only when the electron jumps from a higher energy state to a lower one. The emitted quantum has an energy $h\nu$, equal to the energy difference of these states:

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} . \quad (5.3)$$

We shall now try to find the energy of an electron in the state E_n . Coulomb's law gives the force pulling the electron towards the proton:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}, \quad (5.4)$$

where

- ϵ_0 = the vacuum permittivity
= $8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$,
- e = the charge of the electron = $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$,
- r_n = the distance between the electron
and the proton .

The acceleration of a particle moving in a circular orbit of radius r_n is

$$a = \frac{v_n^2}{r_n},$$

and applying Newton's second law ($F = ma$), we get

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}. \quad (5.5)$$

From (5.2) and (5.5) it follows that

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{n}, \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2.$$

The total energy of an electron in the orbit n is now

$$\begin{aligned} E_n = T + V &= \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} \\ &= -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \equiv -C \frac{1}{n^2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

where C is a constant. For the ground state ($n = 1$), we get from (5.6)

$$E_1 = -2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}.$$

From (5.3) and (5.6) we get the energy of the quantum emitted in the transition $E_{n_2} \rightarrow E_{n_1}$:

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} = C \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (5.7)$$

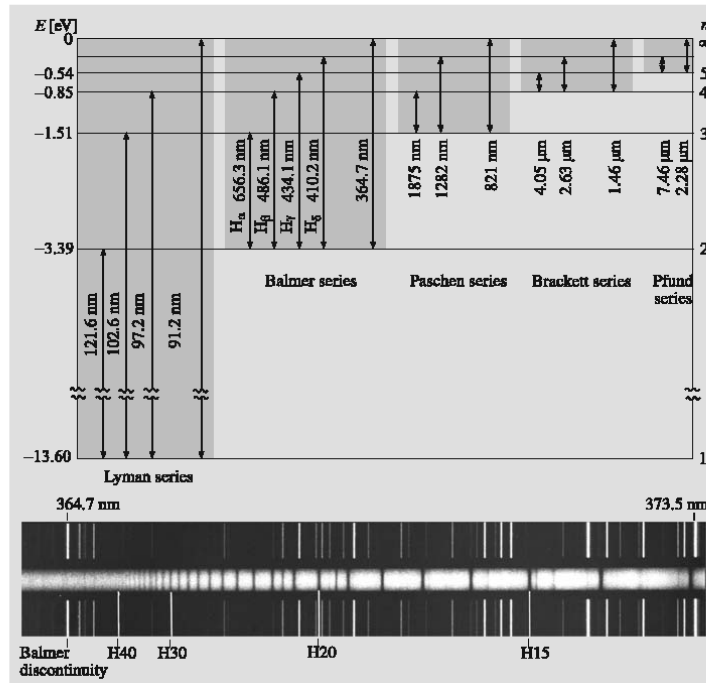
In terms of the wavelength λ this can be expressed as

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{C}{hc} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \equiv R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (5.8)$$

where R is the *Rydberg constant*, $R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Equation (5.8) was derived experimentally for $n_1 = 2$ by Johann Jakob Balmer as early as 1885. That is why we call the set of lines produced by transitions $E_n \rightarrow E_2$ the *Balmer series*. These lines are in the visible part of the spectrum. For historical reasons the Balmer lines are often denoted by symbols H_α , H_β , H_γ , etc. If the electron returns to its ground state ($E_n \rightarrow E_1$), we get the *Lyman*

Fig. 5.4. Transitions of a hydrogen atom. The lower picture shows a part of the spectrum of the star HD193182. On both sides of the stellar spectrum we see an emission spectrum of iron. The wavelengths of the reference lines are known, and they can be used to calibrate the wavelengths of the observed stellar spectrum. The hydrogen Balmer lines are seen as dark absorption lines converging towards the Balmer ionization limit (also called the Balmer discontinuity) at $\lambda = 364.7 \text{ nm}$ to the left. The numbers (15, ..., 40) refer to the quantum number n of the higher energy level. (Photo by Mt. Wilson Observatory)



series, which is in the ultraviolet. The other series with specific names are the *Paschen series* ($n_1 = 3$), *Brackett series* ($n_1 = 4$) and *Pfund series* ($n_1 = 5$) (see Fig. 5.4).

5.3 Line Profiles

The previous discussion suggests that spectral lines would be infinitely narrow and sharp. In reality, however, they are somewhat broadened. We will now consider briefly the factors affecting the shape of a spectral line, called a *line profile*. An exact treatment would take us too deep into quantum mechanics, so we cannot go into the details here.

According to quantum mechanics everything cannot be measured accurately at the same time. For example, even in principle, there is no way to determine the x coordinate and the momentum p_x in the direction of the x axis with arbitrary precision simultaneously. These quantities have small uncertainties Δx and Δp_x , such that

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar.$$

A similar relation holds for other directions, too. Time and energy are also connected by an uncertainty relation,

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar.$$

The natural width of spectral lines is a consequence of this *Heisenberg uncertainty principle*.

If the average lifetime of an excitation state is T , the energy corresponding to the transition can only be determined with an accuracy of $\Delta E = \hbar/T = \hbar/(2\pi T)$. From (5.1) it follows that $\Delta\nu = \Delta E/\hbar$. In fact, the uncertainty of the energy depends on the lifetimes of both the initial and final states. The *natural width* of a line is defined as

$$\gamma = \frac{\Delta E_i + \Delta E_f}{\hbar} = \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_f}. \quad (5.9)$$

It can be shown that the corresponding line profile is

$$I_\nu = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{I_0}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2/4}, \quad (5.10)$$

where ν_0 is the frequency at the centre of the line and I_0 the total intensity of the line. At the centre of the line the intensity per frequency unit is

$$I_{\nu_0} = \frac{2}{\pi\gamma} I_0,$$

and at the frequency $\nu = \nu_0 + \gamma/2$,

$$I_{\nu_0 + \gamma/2} = \frac{1}{\pi\gamma} I_0 = \frac{1}{2} I_{\nu_0}.$$

Thus the width γ is the width of the line profile at a depth where the intensity is half of the maximum. This is called the *full width at half maximum* (FWHM).

Doppler Broadening. Atoms of a gas are moving the faster the higher the temperature of the gas. Thus spectral lines arising from individual atoms are shifted by the Doppler effect. The observed line consists of a collection of lines with different Doppler shifts, and the shape of the line depends on the number of atoms with different velocities.

Each Doppler shifted line has its characteristic natural width. The resulting line profile is obtained by giving each Doppler shifted line a weight proportional to the number of atoms given by the velocity distribution and integrating over all velocities. This gives rise to the *Voigt profile* (Fig. 5.5), which already describes most spectral lines quite well. The shapes of different profiles don't

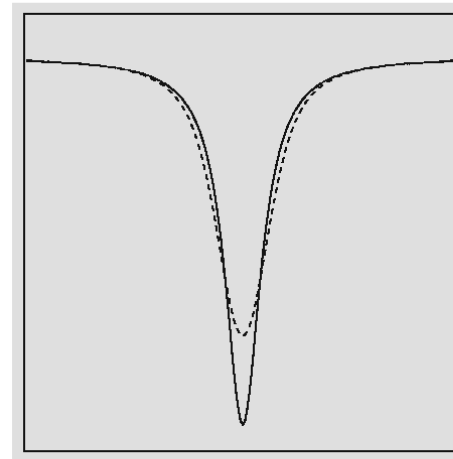


Fig. 5.5. Each spectral line has its characteristic natural width (solid line). Motions of particles broaden the line further due to the Doppler effect, resulting in the Voigt profile (dashed line). Both profiles have the same area

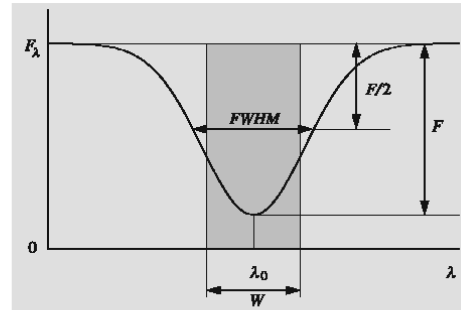


Fig. 5.6. The full width at half maximum (FWHM) of a spectral line is the width at the depth where the intensity is half of the maximum. The equivalent width W is defined so that the line and the shaded rectangle have the same area in the picture. The two measures are not generally the same, although they usually are close to each other

seem very different; the most obvious consequence of the broadening is that the maximum depth decreases.

One way to describe the width of a line is to give its full width at half maximum (Fig. 5.6). Due to Doppler broadening this is usually greater than the natural width. The *equivalent width* is another measure of a line strength. It is the area of a rectangular line that has the same area as the line profile and that emits no light at all. The equivalent width can be used to describe the energy corresponding to a line independently of the shape of the line profile.

5.4 Quantum Numbers, Selection Rules, Population Numbers

Quantum Numbers. The Bohr model needs only one quantum number, n , to describe all the energy levels of the electron. This can explain only the coarse features of an atom with a single electron.

Quantum mechanics describes the electron as a three dimensional wave, which only gives the probability of finding the electron in a certain place. Quantum mechanics has accurately predicted all the energy levels of hydrogen atoms. The energy levels of heavier atoms and molecules can also be computed; however, such calculations are very complicated. Also the existence of

quantum numbers can be understood from the quantum mechanical point of view.

The quantum mechanical description involves four quantum numbers, one of which is our n , the *principal quantum number*. The principal quantum number describes the quantized energy levels of the electron. The classical interpretation of discrete energy levels allows only certain orbits given by (5.6). The orbital angular momentum of the electron is also quantized. This is described by the *angular momentum quantum number* l . The angular momentum corresponding to a quantum number l is

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar.$$

The classical analogy would be to allow some elliptic orbits. The quantum number l can take only the values

$$l = 0, 1, \dots, n-1.$$

For historical reasons, these are often denoted by the letters s, p, d, f, g, h, i, j .

Although l determines the magnitude of the angular momentum, it does not give its direction. In a magnetic field this direction is important, since the orbiting electron also generates a tiny magnetic field. In any experiment, only one component of the angular momentum can be measured at a time. In a given direction z (e.g. in the direction of the applied magnetic field), the projection of the angular momentum can have only the values

$$L_z = m_l \hbar,$$

where m_l is the *magnetic quantum number*

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

The magnetic quantum number is responsible for the splitting of spectral lines in strong magnetic fields, known as the *Zeeman effect*. For example, if $l = 1$, m_l can have $2l + 1 = 3$ different values. Thus, the line arising from the transition $l = 1 \rightarrow l = 0$ will split into three components in a magnetic field (Fig. 5.7).

The fourth quantum number is the *spin* describing the intrinsic angular momentum of the electron. The spin of the electron is

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar,$$

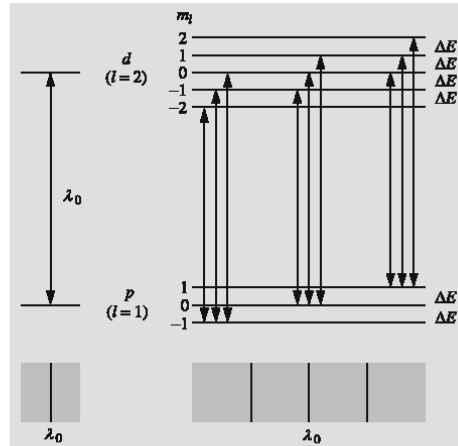


Fig. 5.7. The Zeeman effect. In strong magnetic fields each energy level of a hydrogen atom splits into $(2l + 1)$ separate levels, which correspond to different values of the magnetic quantum number $m_l = l, l - 1, \dots, -l$. The energy differences of the successive levels have the same constant value ΔE . For example the p state ($l = 1$) splits into three and the d state ($l = 2$) into five sublevels. The selection rules require that in electric dipole transitions Δm_l equals 0 or ± 1 , and only nine different transitions between p and d states are possible. Moreover, the transitions with the same Δm_l have the same energy difference. Thus the spectrum has only three separate lines

where the spin quantum number is $s = \frac{1}{2}$. In a given direction z , the spin is

$$S_z = m_s \hbar,$$

where m_s can have one of the two values:

$$m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

All particles have a spin quantum number. Particles with an integral spin are called *bosons* (photon, mesons); particles with a half-integral spin are *fermions* (proton, neutron, electron, neutrino etc.).

Classically, spin can be interpreted as the rotation of a particle; this analogy, however, should not be taken too literally.

The total angular momentum J of an electron is the sum of its orbital and spin angular momentum:

$$J = L + S.$$

Depending on the mutual orientation of the vectors L and S the quantum number j of total angular momentum can have one of two possible values,

$$j = l \pm \frac{1}{2},$$

(except if $l = 0$, when $j = \frac{1}{2}$). The z component of the total angular momentum can have the values

$$m_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm j.$$

Spin also gives rise to the fine structure of spectral lines. Lines appear as close pairs or doublets.

Selection Rules. The state of an electron cannot change arbitrarily; transitions are restricted by selection rules, which follow from certain conservation laws. The selection rules express how the quantum numbers must change in a transition. Most probable are the *electric dipole transitions*, which make the atom behave like an oscillating dipole. The conservation laws require that in a transition we have

$$\begin{aligned} \Delta l &= \pm 1, \\ \Delta m_l &= 0, \pm 1. \end{aligned}$$

In terms of the total angular momentum the selection rules are

$$\begin{aligned} \Delta j &= \pm 1, \\ \Delta j &= 0, \pm 1, \\ \Delta m_j &= 0, \pm 1. \end{aligned}$$

The probabilities of all other transitions are much smaller, and they are called *forbidden transitions*; examples are magnetic dipole transitions and all quadrupole and higher multipole transitions.

Spectral lines originating in forbidden transitions are called *forbidden lines*. The probability of such a transition is so low that under normal circumstances, the transition cannot take place before collisions force the electron to change state. Forbidden lines are possible only if the gas is extremely rarified (like in auroras and planetary nebulae).

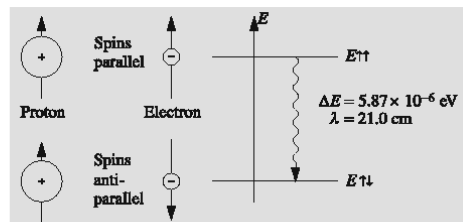


Fig. 5.8. The origin of the hydrogen 21 cm line. The spins of the electron and the proton may be either parallel or opposite. The energy of the former state is slightly larger. The wavelength of a photon corresponding to a transition between these states is 21 cm

The spins of an electron and nucleus of a hydrogen atom can be either parallel or antiparallel (Fig. 5.8). The energy of the former state is 0.0000059 eV higher. But the selection rules make an electric dipole transition between these states impossible. The transition, which is a magnetic dipole transition, has a very low probability, $A = 2.8 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$. This means that the average lifetime of the higher state is $T = 1/A = 11 \times 10^6$ years. Usually collisions change the state of the electron well before this period of time has elapsed. But in interstellar space the density of hydrogen is so low and the total amount of hydrogen so great that a considerable number of these transitions can take place.

The wavelength of the radiation emitted by this transition is 21 cm, which is in the radio band of the spectrum. Extinction at radio wavelengths is very small, and we can observe more distant objects than by using optical wavelengths. The 21 cm radiation has been of crucial importance for surveys of interstellar hydrogen.

Population Numbers. The population number n_i of an energy state i means the number of atoms in that state per unit volume. In thermal equilibrium, the population

numbers obey the *Boltzmann distribution*:

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{g_i}{g_0} e^{-\Delta E/(kT)}, \quad (5.11)$$

where T is the temperature, k is the Boltzmann constant, $\Delta E = E_i - E_0 = h\nu$ is the energy difference between the excited and ground state, and g_i is the statistical weight of the level i (it is the number of different states with the same energy E_i). The subscript 0 always refers to the ground state. Often the population numbers differ from the values given by (5.11), but still we can define an *excitation temperature* T_{exc} in such a way that (5.11) gives correct population numbers, when T is replaced by T_{exc} . The excitation temperature may be different for different energy levels.

5.5 Molecular Spectra

The energy levels of an atom are determined by its electrons. In the case of a molecule, there are many more possibilities: atoms can vibrate around their equilibria and the molecule can rotate around some axis. Both vibrational and rotational states are quantized. Transitions between successive vibrational states typically involve photons in the infrared band, while transitions between rotational states involve photons in the microwave band. These combined with transitions of electrons produce a band spectrum, characteristic for molecules (Fig. 5.9). The spectrum has several narrow bands composed of a great number of lines.

5.6 Continuous Spectra

We have already mentioned some processes that produce continuous spectra. Continuous emission spectra can originate in recombinations and free-free transitions. In recombination, an atom captures a free



Fig. 5.9. Spectrum of carbon monoxide CO from 430 nm to 670 nm. The various bands correspond to different vibrational transitions. Each band is composed of numerous rotational lines. Near the right edge of each band the lines are so closely

packed that they overlap and at this resolution, the spectrum looks continuous. (R.W.B. Pearse, A.G. Gaydon: *The Identification of Molecular Spectra* (Chapman & Hall Ltd., London 1976) p. 394)

electron whose energy is not quantized; in free-free transitions, both initial and final states are unquantized. Thus the emission line can have any frequency whatsoever. Similarly, ionizations and free-free transitions can give rise to a continuous absorption spectrum.

Each spectrum contains a continuous component, or *continuum*, and spectral lines. Sometimes, however, the lines are so closely packed and so broad that they seem to form a nearly continuous spectrum.

When the pressure of hot gas is increased, the spectral lines begin to broaden. At high pressure, atoms bump into each other more frequently, and the close neighbors disturb the energy levels. When the pressure is high enough, the lines begin to overlap. Thus the spectrum of hot gas at high pressure is continuous. Electric fields also broaden spectral lines (the Stark effect).

In liquids and solids the atoms are more densely packed than in gaseous substances. Their mutual perturbations broaden the energy levels, producing a continuous spectrum.

5.7 Blackbody Radiation

A *blackbody* is defined as an object that does not reflect or scatter radiation shining upon it, but absorbs and re-emits the radiation completely. A blackbody is a kind of an ideal radiator, which cannot exist in the real world. Yet many objects behave very much as if they were blackbodies.

The radiation of a blackbody depends only on its temperature, being perfectly independent of its shape, material and internal constitution. The wavelength distribution of the radiation follows *Planck's law*, which is a function of temperature only. The intensity at a frequency ν of a blackbody at temperature T is

$$B_\nu(T) = B(\nu; T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}, \quad (5.12)$$

where

h = the Planck constant = 6.63×10^{-34} J s,

c = the speed of light $\approx 3 \times 10^8$ m s $^{-1}$,

k = the Boltzmann constant = 1.38×10^{-23} J K $^{-1}$.

By definition of the intensity, the dimension of B_ν is W m $^{-2}$ Hz $^{-1}$ sterad $^{-1}$.

Blackbody radiation can be produced in a closed cavity whose walls absorb all radiation incident upon them (and coming from inside the cavity). The walls and the radiation in the cavity are in equilibrium; both are at the same temperature, and the walls emit all the energy they receive. Since radiation energy is constantly transformed into thermal energy of the atoms of the walls and back to radiation, the blackbody radiation is also called *thermal radiation*.

The spectrum of a blackbody given by Planck's law (5.12) is continuous. This is true if the size of the radiator is very large compared with the dominant wavelengths. In the case of the cavity, this can be understood by considering the radiation as standing waves trapped in the cavity. The number of different wavelengths is larger, the shorter the wavelengths are compared with the size of the cavity. We already mentioned that spectra of solid bodies are continuous; very often such spectra can be quite well approximated by Planck's law.

We can also write Planck's law as a function of the wavelength. We require that $B_\nu d\nu = -B_\lambda d\lambda$. The wavelength decreases with increasing frequency; hence the minus sign. Since $\nu = c/\lambda$, we have

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}, \quad (5.13)$$

whence

$$B_\lambda = -B_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = B_\nu \frac{c}{\lambda^2}, \quad (5.14)$$

or

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}, \quad (5.15)$$

$$[B_\lambda] = \text{W m}^{-2} \text{m}^{-1} \text{sterad}^{-1}.$$

The functions B_ν and B_λ are defined in such a way that the total intensity can be obtained in the same way using either of them:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\lambda d\lambda.$$

Let us now try to find the total intensity using the first of these integrals:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

We now change the integration variable to $x = h\nu/(kT)$, whence $d\nu = (kT/h)dx$:

$$B(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{k^4}{h^4} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

The definite integral in this expression is just a real number, independent of the temperature. Thus we find that

$$B(T) = AT^4, \quad (5.16)$$

where the constant A has the value

$$A = \frac{2k^4}{c^2 h^3} \frac{\pi^4}{15}. \quad (5.17)$$

(In order to get the value of A we have to evaluate the integral. There is no elementary way to do that. We can tell those who are familiar with all the exotic functions so beloved by the theoretical physicists, that the integral can rather easily be expressed as $\Gamma(4)\zeta(4)$, where ζ is the Riemann zeta function and Γ is the gamma function. For integral values, $\Gamma(n)$ is simply the factorial $(n-1)!$. The difficult part is showing that $\zeta(4) = \pi^4/90$. This can be done by expanding $x^4 - x^2$ as a Fourier-series and evaluating the series at $x = \pi$.)

The flux density F for isotropic radiation of intensity B is (Sect. 4.1):

$$F = \pi B$$

or

$$F = \sigma T^4. \quad (5.18)$$

This is the *Stefan-Boltzmann law*, and the constant σ ($= \pi A$) is the *Stefan-Boltzmann constant*,

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

From the Stefan-Boltzmann law we get a relation between the luminosity and temperature of a star. If the radius of the star is R , its surface area is $4\pi R^2$, and if the flux density on the surface is F , we have

$$L = 4\pi R^2 F.$$

If the star is assumed to radiate like a blackbody, we have $F = \sigma T^4$, which gives

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4. \quad (5.19)$$

In fact this defines the *effective temperature* of the star, discussed in more detail in the next section.

The luminosity, radius and temperature of a star are interdependent quantities, as we can see from (5.19). They are also related to the absolute bolometric magnitude of the star. Equation (4.13) gives the difference of the absolute bolometric magnitude of the star and the Sun:

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol},\odot} = -2.5 \lg \frac{L}{L_\odot}. \quad (5.20)$$

But we can now use (5.19) to express the luminosities in terms of the radii and temperatures:

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol},\odot} = -5 \lg \frac{R}{R_\odot} - 10 \lg \frac{T}{T_\odot}. \quad (5.21)$$

As we can see in Fig. 5.10, the wavelength of the maximum intensity decreases with increasing total intensity (equal to the area below the curve). We can find the wavelength λ_{max} corresponding to the maximum intensity by differentiating Planck's function $B_\lambda(T)$ with

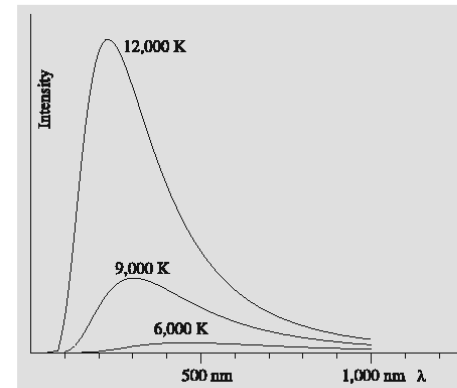


Fig. 5.10. Intensity distributions of blackbodies at temperature 12,000 K, 9000 K and 6000 K. Since the ratios of the temperatures are 4:3:2, the wavelengths of intensity maxima given by the Wien displacement law are in the proportions 1:4, 1:3 and 1:2, or 3, 4 and 6. The actual wavelengths of the maxima are 241.5 nm, 322 nm and 483 nm. The total intensities or the areas below the curves are proportional to 4^4 , 3^4 and 2^4

respect to λ and finding zero of the derivative. The result is the *Wien displacement law*:

$$\lambda_{\max} T = b = \text{const}, \quad (5.22)$$

where the *Wien displacement constant* b is

$$b = 0.0028978 \text{ K m}.$$

We can use the same procedure to find the maximum of B_ν . But the frequency ν_{\max} thus obtained is different from $\nu_{\max} = c/\lambda_{\max}$ given by (5.22). The reason for this is the fact that the intensities are given per unit frequency or unit wavelength, and the dependence of frequency on wavelength is nonlinear.

When the wavelength is near the maximum or much longer than λ_{\max} Planck's function can be approximated by simpler expressions. When $\lambda \approx \lambda_{\max}$ (or $\hbar c/(\lambda kT) \gg 1$), we have

$$e^{\hbar c/(\lambda kT)} \gg 1.$$

In this case we get the *Wien approximation*

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2\hbar c^2}{\lambda^5} e^{-\hbar c/(\lambda kT)}. \quad (5.23)$$

When $\hbar c/(\lambda kT) \ll 1$ ($\lambda \gg \lambda_{\max}$), we have

$$e^{\hbar c/(\lambda kT)} \approx 1 + \hbar c/(\lambda kT),$$

which gives the *Rayleigh-Jeans approximation*

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{\hbar c} = \frac{2ckT}{\lambda^4}. \quad (5.24)$$

This is particularly useful in radio astronomy.

Classical physics predicted only the Rayleigh-Jeans approximation. Were (5.24) true for all wavelengths, the intensity would grow beyond all limits when the wavelength approaches zero, contrary to observations. This contradiction was known as the ultraviolet catastrophe.

5.8 Temperatures

Temperatures of astronomical objects range from almost absolute zero to millions of degrees. Temperature can be defined in a variety of ways, and its numerical value depends on the specific definition used. All these different temperatures are needed to describe different

physical phenomena, and often there is no unique 'true' temperature.

Often the temperature is determined by comparing the object, a star for instance, with a blackbody. Although real stars do not radiate exactly like blackbodies, their spectra can usually be approximated by blackbody spectra after the effect of spectral lines has been eliminated. The resulting temperature depends on the exact criterion used to fit Planck's function to observations.

The most important quantity describing the surface temperature of a star is the *effective temperature* T_e . It is defined as the temperature of a blackbody which radiates with the same total flux density as the star. Since the effective temperature depends only on the total radiation power integrated over all frequencies, it is well defined for all energy distributions even if they deviate far from Planck's law.

In the previous section we derived the Stefan-Boltzmann law, which gives the total flux density as a function of the temperature. If we now find a value T_e of the temperature such that the Stefan-Boltzmann law gives the correct flux density F on the surface of the star, we have found the effective temperature. The flux density on the surface is

$$F = \sigma T_e^4. \quad (5.25)$$

The total flux is $L = 4\pi R^2 F$, where R is the radius of the star, and the flux density at a distance r is

$$F' = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} F = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sigma T_e^4, \quad (5.26)$$

where $\alpha = 2R/r$ is the observed angular diameter of the star. For direct determination of the effective temperature, we have to measure the total flux density and the angular diameter of the star. This is possible only in the few cases in which the diameter has been found by interferometry.

If we assume that at some wavelength λ the flux density F_λ on the surface of the star is obtained from Planck's law, we get the *brightness temperature* T_b . In the isotropic case we have then $F_\lambda = \pi B_\lambda(T_b)$. If the radius of the star is R and distance from the Earth r , the observed flux density is

$$F'_\lambda = \frac{R^2}{r^2} F_\lambda.$$

Again F_λ can be determined only if the angular diameter α is known. The brightness temperature T_b can then be solved from

$$F'_\lambda = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \pi B_\lambda(T_b). \quad (5.27)$$

Since the star does not radiate like a blackbody, its brightness temperature depends on the particular wavelength used in (5.27).

In radio astronomy, brightness temperature is used to express the intensity (or surface brightness) of the source. If the intensity at frequency ν is I_ν , the brightness temperature is obtained from

$$I_\nu = B_\nu(T_b).$$

T_b gives the temperature of a blackbody with the same surface brightness as the observed source.

Since radio wavelengths are very long, the condition $h\nu \ll kT$ of the Rayleigh–Jeans approximation is usually satisfied (except for millimetre and submillimetre bands), and we can write Planck's law as

$$\begin{aligned} B_\nu(T_b) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT_b)} - 1} \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{1 + h\nu/(kT_b) + \dots - 1} \\ &\approx \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b. \end{aligned}$$

Thus we get the following expression for the radio astronomical brightness temperature:

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu = \frac{\lambda^2}{2k} I_\nu. \quad (5.28)$$

A measure of the signal registered by a radio telescope is the *antenna temperature* T_A . After the antenna temperature is measured, we get the brightness temperature from

$$T_A = \eta T_b, \quad (5.29)$$

where η is the *beam efficiency* of the antenna (typically $0.4 \lesssim \eta \lesssim 0.8$). Equation (5.29) holds if the source is wide enough to cover the whole beam, i.e. the solid angle Ω_A from which the antenna receives radiation. If the solid angle subtended by the source, Ω_S , is smaller than Ω_A , the observed antenna temperature is

$$T_A = \eta \frac{\Omega_S}{\Omega_A} T_b, \quad (\Omega_S < \Omega_A). \quad (5.30)$$

The *colour temperature* T_c can be determined even if the angular diameter of the source is unknown (Fig. 5.11). We only have to know the relative energy distribution in some wavelength range $[\lambda_1, \lambda_2]$; the absolute value of the flux is not needed. The observed flux density as a function of wavelength is compared with Planck's function at different temperatures. The temperature giving the best fit is the colour temperature in the interval $[\lambda_1, \lambda_2]$. The colour temperature is usually different for different wavelength intervals, since the shape of the observed energy distribution may be quite different from the blackbody spectrum.

A simple method for finding a colour temperature is the following. We measure the flux density F'_λ at two wavelengths λ_1 and λ_2 . If we assume that the intensity distribution follows Planck's law, the ratio of these flux densities must be the same as the ratio obtained from Planck's law:

$$\frac{F'_{\lambda_1}(T)}{F'_{\lambda_2}(T)} = \frac{B_{\lambda_1}(T)}{B_{\lambda_2}(T)} = \frac{\lambda_2^5 e^{hc/(\lambda_2 kT)} - 1}{\lambda_1^5 e^{hc/(\lambda_1 kT)} - 1}. \quad (5.31)$$

The temperature T solved from this equation is a colour temperature.

The observed flux densities correspond to certain magnitudes m_{λ_1} and m_{λ_2} . The definition of magnitudes gives

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = -2.5 \lg \frac{F'_{\lambda_1}}{F'_{\lambda_2}} + \text{const},$$

where the constant term is a consequence of the different zero points of the magnitude scales. If the temperature

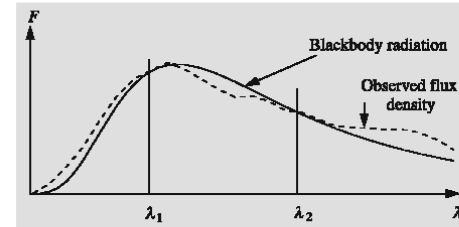


Fig. 5.11. Determination of the colour temperature. The ratio of the flux densities at wavelengths λ_1 and λ_2 gives the temperature of a blackbody with the same ratio. In general the result depends on the wavelengths chosen

is not too high, we can use the Wien approximation in the optical part of the spectrum:

$$\begin{aligned} m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} &= -2.5 \lg \frac{B_{\lambda_1}}{B_{\lambda_2}} + \text{const} \\ &= -2.5 \lg \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^5 \\ &\quad + 2.5 \frac{hc}{kT} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \lg e + \text{const}. \end{aligned}$$

This can be written as

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = a + b/T_c, \quad (5.32)$$

where a and b are constants. This shows that there is a simple relationship between the difference of two magnitudes and the colour temperature.

Strictly speaking, the magnitudes in (5.32) are monochromatic, but the same relation can be also used with broadband magnitudes like B and V . In that case, the two wavelengths are essentially the effective wavelengths of the B and V bands. The constant is chosen so that $B - V = 0$ for stars of the spectral type A0 (see Chap. 8). Thus the colour index $B - V$ also gives a colour temperature.

The *kinetic temperature* T_k is related to the average speed of gas molecules. The kinetic energy of an ideal gas molecule as a function of temperature follows from the kinetic gas theory:

$$\text{Kinetic energy} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT_k.$$

Solving for T_k we get

$$T_k = \frac{mv^2}{3k}, \quad (5.33)$$

where m is the mass of the molecule, v its average velocity (or rather its r.m.s velocity, which means that v^2 is the average of the squared velocities), and k , the Boltzmann constant. For ideal gases the pressure is directly proportional to the kinetic temperature (c.f. *Gas Pressure and Radiation Pressure, p. 238):

$$P = nkT_k, \quad (5.34)$$

where n is the number density of the molecules (molecules per unit volume). We previously defined the excitation temperature T_{exc} as a temperature which, if substituted into the Boltzmann distribution (5.11), gives

the observed population numbers. If the distribution of atoms in different levels is a result of mutual collisions of the atoms only, the excitation temperature equals the kinetic temperature, $T_{\text{exc}} = T_k$.

The *ionization temperature* T_i is found by comparing the number of atoms in different states of ionization. Since stars are not exactly blackbodies, the values of excitation and ionization temperatures usually vary, depending on the element whose spectral lines were used for temperature determination.

In *thermodynamic equilibrium* all these various temperatures are equal.

5.9 Other Radiation Mechanisms

The radiation of a gas in thermodynamic equilibrium depends on the temperature and density only. In astrophysical objects deviations from thermodynamic equilibrium are, however, quite common. Some examples of *non-thermal radiation* arising under such conditions are mentioned in the following.

Maser and Laser (Fig. 5.12). The Boltzmann distribution (5.11) shows that usually there are fewer atoms in excited states than in the ground state. There are, however, means to produce a *population inversion*, an excited state containing more atoms than the ground state. This inversion is essential for both the *maser* and the *laser* (Microwave/Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). If the excited atoms are now illuminated with photons having energies equal to the excitation energy, the radiation will induce downward transitions. The number of photons emitted greatly exceeds the number of absorbed photons, and radiation is amplified. Typically the excited state is a *metastable state*, a state with a very long average lifetime, which means that the contribution of spontaneous emission is negligible. Therefore the resulting radiation is coherent and monochromatic. Several maser sources have been found in interstellar molecular clouds and dust envelopes around stars.

Synchrotron Radiation. A free charge in accelerated motion will emit electromagnetic radiation. Charged particles moving in a magnetic field follow helices around the field lines. As seen from the direction of

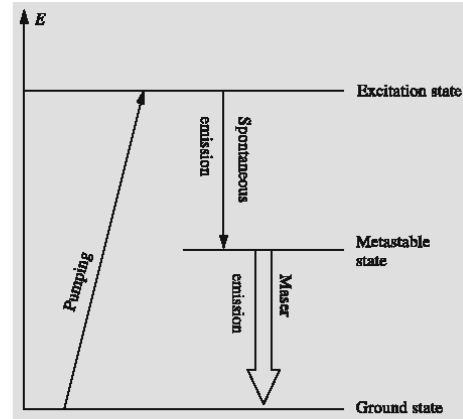


Fig. 5.12. The operational principle of the maser and the laser. A metastable state (a state with a relatively long average lifetime) stores atoms where they accumulate; there are more atoms in the metastable state than in the ground state. This population inversion is maintained by radiatively exciting atoms to a higher excitation state (“pumping”), from which they spontaneously jump down to the metastable state. When the atoms are illuminated by photons with energies equal to the excitation energy of the metastable state, the photons will induce more radiation of the same wavelength, and the radiation is amplified in geometric progression

the field, the motion is circular and therefore accelerated. The moving charge will radiate in the direction of its velocity vector. Such radiation is called *synchrotron radiation*. It will be further discussed in Chap. 15.

5.10 Radiative Transfer

Propagation of radiation in a medium, also called radiative transfer, is one of the basic problems of astrophysics. The subject is too complicated to be discussed here in any detail. The fundamental equation of radiative transfer is, however, easily derived.

Assume we have a small cylinder, the bottom of which has an area dA and the length of which is dr . Let I_ν be the intensity of radiation perpendicular to the bottom surface going into a solid angle $d\omega$ ($[I_\nu] = \text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$). If the intensity changes by an amount dI_ν in the distance dr , the energy changes

by

$$dE = dI_\nu dA d\nu d\omega dt$$

in the cylinder in time dt . This equals the emission minus absorption in the cylinder. The absorbed energy is (c. f. (4.14))

$$dE_{\text{abs}} = \alpha_\nu I_\nu dr dA d\nu d\omega dt, \quad (5.35)$$

where α_ν is the opacity of the medium at frequency ν . Let the amount of energy emitted per hertz at frequency ν into unit solid angle from unit volume and per unit time be j_ν ($[j_\nu] = \text{W m}^{-3} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$). This is called the *emission coefficient* of the medium. The energy emitted into solid angle $d\omega$ from the cylinder is then

$$dE_{\text{em}} = j_\nu dr dA d\nu d\omega dt. \quad (5.36)$$

The equation

$$dE = -dE_{\text{abs}} + dE_{\text{em}}$$

gives then

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu dr + j_\nu dr$$

or

$$\frac{dI_\nu}{\alpha_\nu dr} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (5.37)$$

We shall denote the ratio of the emission coefficient j_ν to the absorption coefficient or opacity α_ν by S_ν :

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (5.38)$$

S_ν is called the *source function*. Because $\alpha_\nu dr = d\tau_\nu$, where τ_ν is the optical thickness at frequency ν , (5.37) can be written as

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu. \quad (5.39)$$

Equation (5.39) is the basic equation of radiative transfer. Without solving the equation, we see that if $I_\nu < S_\nu$, then $dI_\nu/d\tau_\nu > 0$, and the intensity tends to increase in the direction of propagation. And, if $I_\nu > S_\nu$, then $dI_\nu/d\tau_\nu < 0$, and I_ν will decrease. In an equilibrium the emitted and absorbed energies are equal, in which case we find from (5.35) and (5.36)

$$I_\nu = j_\nu/\alpha_\nu = S_\nu. \quad (5.40)$$

Substituting this into (5.39), we see that $dI_\nu/d\tau_\nu = 0$. In thermodynamic equilibrium the radiation of the medium is blackbody radiation, and the source function is given by Planck's law:

$$S_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Even if the system is not in thermodynamic equilibrium, it may be possible to find an excitation temperature T_{exc} such that $B_\nu(T_{exc}) = S_\nu$. This temperature may depend on frequency.

A formal solution of (5.39) is

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-t)} S_\nu(t) dt. \quad (5.41)$$

Here $I_\nu(0)$ is the intensity of the background radiation, coming through the medium (e.g. an interstellar cloud) and decaying exponentially in the medium. The second term gives the emission in the medium. The solution is only formal, since in general, the source function S_ν is unknown and must be solved simultaneously with the intensity. If $S_\nu(\tau_\nu)$ is constant in the cloud and the background radiation is ignored, we get

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-t)} dt = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (5.42)$$

If the cloud is optically thick ($\tau_\nu \gg 1$), we have

$$I_\nu = S_\nu, \quad (5.43)$$

i.e. the intensity equals the source function, and the emission and absorption processes are in equilibrium.

An important field of application of the theory of radiative transfer is in the study of planetary and stellar atmospheres. In this case, to a good approximation, the properties of the medium only vary in one direction, say along the z axis. The intensity will then depend only on z and θ , where θ is the angle between the z axis and the direction of propagation of the radiation.

In applications to atmospheres it is customary to define the optical depth τ_ν in the vertical direction as

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dz.$$

Conventionally z increases upwards and the optical depth inwards in the atmosphere. The vertical line el-

ement dz is related to that along the light ray, dr , according to

$$dz = dr \cos \theta.$$

With these notational conventions, (5.39) now yields

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(z, \theta)}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu. \quad (5.44)$$

This is the form of the equation of radiative transfer usually encountered in the study of stellar and planetary atmospheres.

A formal expression for the intensity emerging from an atmosphere can be obtained by integrating (5.44) from $\tau_\nu = \infty$ (we assume that the bottom of the atmosphere is at infinite optical depth) to $\tau_\nu = 0$ (corresponding to the top of the atmosphere). This yields

$$I_\nu(0, \theta) = \int_0^\infty S_\nu e^{-\tau_\nu \sec \theta} \sec \theta d\tau_\nu. \quad (5.45)$$

This expression will be used later in Chap. 8 on the interpretation of stellar spectra.

5.11 Examples

Example 5.1 Find the wavelength of the photon emitted in the transition of a hydrogen atom from $n_2 = 110$ to $n_1 = 109$.

Equation (5.8) gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ &= 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \left(\frac{1}{109^2} - \frac{1}{110^2} \right) \\ &= 16.71 \text{ m}^{-1}, \end{aligned}$$

whence

$$\lambda = 0.060 \text{ m}.$$

This is in the radio band. Such radiation was observed for the first time in 1965 by an NRAO radio telescope.

Example 5.2 The effective temperature of a star is 12,000 K and the absolute bolometric magnitude 0.0. Find the radius of the star, when the effective temperature of the Sun is 5000 K and the absolute bolometric magnitude 4.7.

... konec :...