Veličiny a jednotky v mechanice

Veličina	Jednotka			Vztah	Poznámka
	Název	**Značka**	**SI**		
Prostorové míry					
délka	metr	m	ano	Základní jednotka SI	
	palec (USA)	in	ne	1 in = 25,40005080 mm	1 in = 1/36 yd
	palec (GB)	in	ne	1 in = 25,399978 mm	1 in = 1/36 yd
	stopa (USA)	ft	ne	1 ft = 0,30480061 m	1 in = 1/3 yd
	stopa (GB)	ft	ne	1 ft = 0,30479974 m	1 in = 1/3 yd
	yard (USA)	yd	ne	1 yd = 0,91440183 m	
	yard (GB)	yd	ne	1 yd = 0,91439921 m	
	míle (GB)	mile	ne	1 mile = 1,6093426 km	1 mile = 1 760 yd
	zákonná míle (USA)	mi	ne	1 mile = 1,6093472 km	1 mile = 1 760 yd
	námořní míle (GB)		ne	= 1,853181 km	1 mi = 6 080/3 yd
	mezinárodní námořní míle		ne	= 1,852 km	
	Ångström	Å	ne	1 Å = 10^{-10} m	
	typografický bod	p	ne	1 p = 0,376 mm	tiskařská míra sazby
	světelný rok	ly	ne	1 ly = (9,46051 ± 0,00009) 10^{12} km	draha, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden tropický rok
plošný obsah	čtverečný metr	m^2	ano		
	ar	a	ano	1 a = 10^2 m^2	pozemková míra
	hektar	ha	ano	1 ha = 10^4 m^2	pozemková míra
	jitro		ne	= 2500 m^2	1 jitro = 25 a = 1/4 ha (regionálně kolísa mezi 0,255 a 0,388 ha)
	čtverečný palec (USA)	sq in	ne	1 sq in = 6,4516258 cm^2	1 sq in = 1/1 296 sq yd
	čtverečný palec (GB)	sq in	ne	1 sq in = 6,4515888 cm^2	1 sq in = 1/1 296 sq yd
	čtverečný stopa (USA)	sq ft	ne	1 sq ft = 929,03412 cm^2	1 sq ft = 1/9 sq yd
	čtverečný stopa (GB)	sq ft	ne	1 sq ft = 929,02879 cm^2	1 sq ft = 1/9 sq yd
	čtverečný yard (USA)	sq yd	ne	1 sq yd = 0,83613070 m^2	
	čtverečný yard (GB)	sq yd	ne	1 sq yd = 0,83612591 m^2	
	acre (USA)	acre	ne	1 acre = 4046,8726 m^2	1 acre = 4 840 sq yd
	acre (GB)	acre	ne	1 acre = 4046,8494 m^2	1 acre = 4 840 sq yd
	čtverečná míle (USA)	sq mi	ne	1 sq mi = 2,5899985 km^2	
	čtverečná míle (GB)	sq mi	ne	1 sq mi = 2,5899836 km^2	
	barn	b	ne	1 b = 10^{-28} m^2	účinný průřez v atomové a jaderné fyzice
objem	krychlový metr	m^3	ano		
	litr	ly	ano	1 l = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3	
	krychlový palec (USA)	cu in	ne	1 cu in = 16,387162 cm^3	1 cu in = 1/46 656 cu yd
	krychlový palec (GB)	cu in	ne	1 cu in = 16,387021 cm^3	1 cu in = 1/46 656 cu yd
	krychlový stopa (USA)	cu ft	ne	1 cu ft = 0,28317916 m^3	1 cu ft = 1/27 cu yd
	krychlový stopa (GB)	cu ft	ne	1 cu ft = 0,28316773 m^3	1 cu ft = 1/27 cu yd
	krychlový yard (USA)	cu yd	ne	1 cu yd = 0,76455945 m^3	
	krychlový yard (GB)	cu yd	ne	1 cu yd = 0,764555287 m^3	
	kapalinová unce (USA)	fl. oz	ne	1 fl. oz = 29,573707 cm^3	1 fl. oz = 1/128 gal
	kapalinová unce (GB)	fl. oz	ne	1 fl. oz = 28,4134 cm^3	1 fl. oz = 1/160 gal
	pint (USA)	liq pt	ne	1 liq pt = 473,17934 cm^3	1 liq pt = 1/8 gal
	pint (GB)	liq pt	ne	1 liq pt = 568,261 cm^3	1 liq pt =1/8 gal
	quart (USA)	liq qt	ne	1 liq qt = 0,9463586 dm^3	1 liq qt = 1/4 gal
	quart (GB)	liq qt	ne	1 liq qt = 1,13652 dm^3	1 liq qt = 1/4 gal
	galon (USA)	gal	ne	1 gal = 3,7854345 dm^3	1 gal = 231 US cu in
	galon (GB)	gal	ne	1 gal = 4,54609 dm^3	
	petrochemický barel		ne	= 158,76 dm^3	petrochemická dutá míra
	dry pint (USA)	dry pt	ne	1 dry pt = 0,5506138 dm^3	1 dry pt = 1/64 bu
	dry quart (USA)	dry qt	ne	1 dry qt = 1,1012275 dm^3	1 dry qt =1/32 bu
	bušl (USA)	bu	ne	1 bu = 35,239282 dm^3	1 bu = 2 150,42 US cu in
	dry barrel	bbl	ne	1 bbl = 0,11562782 m^3	účinný průřez v atomové a jaderné fyzice
reciproční délka	reciproční metr	1/m	ano		
optická mohutnost	dioptrie	dpt	ano	1 dpt = 1 / m	jen pro hodnotu lomu optických systémů
protažení	metr na metr	m/m	ano		v praxi často v procentech
Úhly					
rovinný úhel	radián	rad	ano	1 rad = 1m/m	1 rad je rovinný úhel, který jkako středový úhel kružnice o poloměru 1 m vymezí na jejím obvodu oblouk o délce 1 m
	plný úhel		ano	= 2 π rad	
	pravý úhel	∟	ne	1 ∟ = π / 2rad	
	(úhlový) stupeň	°	ano	1 ° = π / 180 rad	
	(úhlový) minuta	'	ano	1 ° = π / 60 rad	
	vteřina	"	ano	1 ° = 1´/ 60 rad	
	gon	gon	ne	1 gon = π / 200 rad	
	nový stupeň (grad)	g	ne	1 g = 1 gon	
	nová minuta (centigrad)	c	ne	1 c = π/20 000 rad	
	nová sekunda	cc	ne	1 cc = π/2 000 000 rad	
Prostorový úhel	steradián	sr	ano	1 sr = $1m^2/m^2$	

Hmotnost					
hmotnost	kilogram	kg	ano	Základní jednotka SI	
	gram	g	ano	1 g = 10^{-3} kg	
	tuna	t	ano	1 t = 103 kg	
	atomová hmotnostní jednotka	u	ano	1 u = 1,66053 ×10^{-27}kg	
	metrický karát	ct	ano	1 ct = 2 × 10^{-4} kg	jen pro drahokamy
	grain	gr	ne	1 gr = 64,79892 mg	1 gr = 1/7 000 lb
	unce	oz	ne	1 oz = 28,349527 g	1 oz = 1/16 lb
	libra (USA)	lb	ne	1 lb = 0,4535924277 kg	
	libra (GB)	lb	ne	1 lb = 0,45359243 kg	
	cent (hundredweight - GB)	cwt	ne	1 cwt = 50,802352 kg	1 cwt = 122 lb
	metrický cent	q	ne	1 q = 100 kg	
	malá tuna (short ton - USA)	sh tn	ne	1 sh tn = 907,18486 kg	
	tuna (ton - GB)	tn	ne	1 tn = 1016,0470 kg	1 tn = 2 240 lb
	velká tuna (long ton - USA)	l tn	ne	1 l tn = 1016,0470 kg	1 l tn = 2 240 lb
	pennyweight	dwt	ne	1 dwt = 1,5551740 g	1 dwt = 24/7 000 lb
délková hmotnost	kilogram na metr	kg/m	ano		
	tex	tex	ano	1 tex = 1 g / km	jen pro textilní vlákna a přízi
plošná hmotnost	kilogram na čtverečný metr	kg/m^2	ano		
hustota	kilogram na krychlový metr	kg/m^3	ano		
měrný objem	krychlový metr na kilogram	m^3/kg	ano		
moment setrvačnosti	kilogram metr na druhou	$kg.m^2$	ano		
Čas					
čas	sekunda	s	ano	Základní jednotka SI	
	minuta	min	ano	1 min = 60 s	
	hodina	ha	ano	1 h = 3 600 s	
	den	d	ano	1 d = 86 400 s	
	rok	a	ne		v energetice 1 rok = 8 760 hodin
kmitočet	hertz	Hz	ano	1 Hz = 1/s	
počet otáček	reciproční sekunda	1/s	ano		
úhlový kmitočet	reciproční minuta	1/min	ano	1/min = 1/(60 s)	
rychlost	metr za sekundu	m/s	ano		
	kilometr za hodinu	km/h	ano	1 km/h = 1/3,6 m/s	
zrychlení	metr za sekundu na druhou	m/s^2	ano		
	gal	gal	ne	1 gal = 10^{-2} m/s^2	
úhlová rychlost	radián za sekundu	rad/s	ano		
úhlové zrychlení	radián za sekundu na druhou	rad/s^2	ano		
objemový tok	krychlový metr za sekundu	m^3/s	ano		
hmotnostní tok	kilogram za sekundu	kg/s	ano		
difůzní koeficient	čtverečný metr za sekundu	m^2/s	ano		
Síla, energie, výkon					
síla	newton	N	ano	1 N = 1 kg m/s^2	
	dyn	dyn	ne	1 dyn = 10^{-5} N	
	kilopond	kp	ne	1 kp = 9,80665 N	
	poundal		ne	= 0,1382549 N	
	pound - weight	lb wt	ne	1 lb wt = 4,44822 N	
	short ton - weight	sh tn wt	ne	1 sh tn wt = 8896,44 N	1 sh tn wt = 2 000 lb wt
impuls	newtonsekunda	N s	ano	1 N s = 1 kg m/s	
tlak	pascal, newton na čtverečný metr	Pa	ano		
mechanické napětí		N/m^2	ano	1 Pa = 1 N/m^2	
	bar	bar	ano	1 bar = 10^5 Pa	jen pro měření tlaku
	fyzikální atmosféra	atm	ne	1 atm = 101 325 Pa	
	technická atmosféra	atm	ne	1 at = 98 066,5 Pa	1 at = 1 kp/cm^2
	torr	torr	ne	1 torr = 133,3224 Pa	1 torr = 1/760 atm
	milimetr rtuťového sloupce	mm Hg	ne	1 mm Hg = 133,3224 Pa	1 mm Hg = 1,00000014 torrů
	milimetr vodního sloupce	mm H_2O	ne	1 mm H_2O = 9,80665 Pa	1 mm H_2O = 1 kp/m^2
energie,	joule	J	ano	1 J = 1 N m = 1 W s = 1 kg m^2/s^2	
teplo,	kilowatthodina	kWh	ano	1 kWh = 3,6 MJ	
práce	elektronvolt	eV	ano	1 eV = 1,602 × 10^{-19} J	
	koňská síla - hodina	KS h	ne	1 KS h = 2,64779 × 10^6 J	
	mezinárodní kilokalorie	kcal	ne	1 kcal = 4,18684 × 10^3 J	
	britská tepelná jednotka	BTU	ne	1 BTU = 1,05579 × 10^3 J	
	kilopondmetr	kp m	ne	1 kp m = 9,80665 J	
moment síly, moment ohybu, otočný moment	newtonmetr, joule	N m, J	ano	1 N m = 1 J = 1 W s	
otočný impuls	newton sekunda metr	N s m	ano	1 N s m = 1 kg m^2/s	
výkon, tepelný tok	watt	W	ano	1 W = 1 J/s = 1 N m/s = 1 var	Pro zdánlivý elektrický výkon je to VA, pro jalový výkon var
	koňská síla	KS	ne	1 KS = 7,3550 × 10^2 W	
	horsepower	h.p.	ne	1 h.p. = 7,4570 × 10^2 W	
	kilopondmetr za sekundu	kp m/s	ne	1 kp m/s = 9,80665 W	
Viskozimetrické veličiny					
dynamická viskozita	pascalsekunda	Pa s	ano	1 Pa s = N s/m^2 = 1 kg/(s m)	
	poise	P	ne	1 P = 0,1 Pa s	
kinematická viskozita	čtverečný metr za sekundu	m2/s	ano		
	stok	St	ne	1 St = 10^{-4} m^2/s	
Teplota a teplo					
teplota	kelvin	K	ano	Základní jednotka SI	
	stupeň Celsia	° C	ano	x [° C] = X – 273,16 [K]	
	stupeň Kelvinův	° K	ne	1 [°K] = 1 [K]	
	stupeň	grd	ne	1 [grd] = 1 [K]	
	stupeň Fahrenheita	° F	ne	x [° C] = (9/5 X + 32) [° F]	
	stupeň Réaumura	° R	ne	x [° C] = (4/5) X [° R]	
	stupeň Rankina	° Rank	ne	x [° C] = (9/5) X [° Rank]	
teplotní vodivost	čtverečný metr za sekundu	m^2/s	ano		
tepelná kapacita, entropie	joule na kelvin	J/K	ano		
tepelná konduktivita	watt na metr a kelvin	W/(m K)	ano		
koeficient prostupu tepla	watt na čtvereřný metr a kelvin	W/(m^2 K)	ano		

Vektory

1. Dokažte, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé.

Řešení
Pokládejme strany kosočtverce **a**, **b** i jeho úhlopříčky **c**, **d** za vektory.

Pro velikosti stran platí $a = b$.

Pro úhlopříčky platí $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Skalární součin $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$.

Protože $a = b$, pak také $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 0$ neboli úhlopříčky jsou na sebe kolmé.

2. Vypočtěte výslednici **d** vektorů $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ a $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a jednotkový vektor ve směru výslednice. Ověřte, že velikost jednotkového vektoru je rovna 1.

✓ $\mathbf{d} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{d}_0 = \frac{6}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$.

3. Jsou dány vektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Vypočítejte velikost průmětu vektoru **a** do směru vektoru **b** (a_b) a vektor tohoto průmětu ($\mathbf{a}_\mathbf{b}$).

✓ $a_b = \frac{11}{\sqrt{14}}$, $\mathbf{a}_\mathbf{b} = \frac{11}{14}\mathbf{i} + \frac{22}{14}\mathbf{j} - \frac{33}{14}\mathbf{k}$.

4. Trojúhelník je určen dvěma vektory $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Složky vektorů jsou dány v metrech. Určete velikost vektoru **c**, jež tvoří třetí stranu trojúhelníka.

✓ Jsou možná dvě řešení: a) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $c = 7$ m, b) $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $c = \sqrt{53}$ m.

5. Plavec plave přes řeku kolmo na její proud rychlostí 1m/s. Rychlost proudu v řece je 0,5 m/s. Jakou rychlostí v plave plavec vzhledem k břehu řeky? O kolik metrů x unese proud řeky plavce, je-li šířka řeky 40 m?

✓ $v = 1{,}12$ m/s, $x = 20$ m.

6. Jaká je plocha rovnoběžníka, jehož strany tvoří vektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, jestliže jsou složky vektorů udány v metrech?

✓ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 19{,}7$ m^2.

7. Pod jakým úhlem α musí plout člun, aby se dostal na protějším břehu přesně naproti místu, z něhož vyplul? Rychlost člunu je vzhledem k proudu v řece 3 m/s a rychlost proudu v řece je 1 m/s. Jakou rychlostí v vzhledem k břehu řeky se člun vzdaluje?

✓ $\alpha = 19{,}47^\circ$, $v = 2{,}82$ m/s.

8. Jsou dány dva trojúhelníky. Jeden má vrcholy v bodech $P_1(5, -2, 1)$, $P_2(6, 1, -1)$, $P_3(4, -3, 0)$, druhý v bodech $P_4(2,1,1)$, $P_5(-1,3,0)$, $P_6(2,-4,3)$. Souřadnice bodů jsou udány v metrech. Který z trojúhelníků má větší plochu?

✓ $S_1 = \dfrac{\sqrt{38}}{2} < S_2 = \dfrac{\sqrt{262}}{2}$, plocha druhého trojúhelníka je větší.

9. Rovnoběžnostěn je určen třemi vektory **a** = -3**i** + 2**j** - **k**, **b** = -**i** + **j** + 3**k**, **c** = 3**i** + 2**j** – **k**. Složky vektorů jsou udány v metrech. Jaký je objem rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou vektory **a**, **b**, **c**?

✓ V = 42 m^3.

10. Vektor **r** má velikost r = 7. Tento vektor začíná v bodě A(2,1,-1) a jeho složky jsou $r_x = 2$ a $r_y = -3$. Určete jeho chybějící souřadnici r_z a souřadnice bodu B, který je jeho koncovým bodem.

✓ $B_1(4,-2,5)$ nebo $B_2(4,-2,-7)$.

11. Tři vektory tvoří rovnoběžnostěn. Určete jeho plochu, když tyto vektory jsou **a** = 4**i** + **j**, **b** = **i** + 3**j** – **k**, **c** = **i** + **j** + 3**k**, když složky vektoru jsou udány v metrech.

✓ Plocha rovnoběžnostěnu je 70,7 m^2.

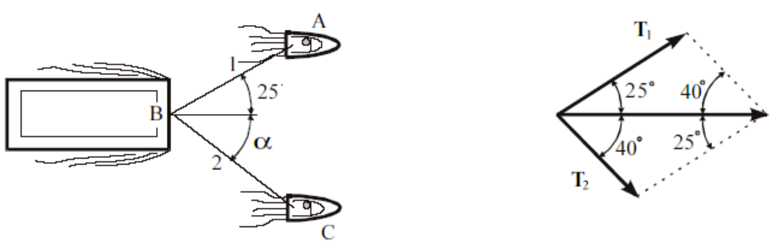
12. Vypočítejte velikost momentu síly **F** = 3**i** + 2**j** + 9**k** působící v bodě B(4, 2, -3) vzhledem k počátku souřadného systému. Moment síly **M** = **r** x **F** (Nm).

✓ $|\mathbf{M}| = \sqrt{2605}$ Nm.

13. Loďka je tažena dvěma vodními skútry na lanech podle obrázku. Výsledný směr, kterým je loďka tažena je shodný s její podélnou osou. Velikost výsledné tažné síly, kterou působí skútry na loďku je 30 kN. Vypočtěte

a) napětí v lanech T_1, T_2 (síly, kterými jsou lana napínána), když je znám úhel $\alpha = 40^\circ$,

b) velikost úhlu α, při kterém je napětí lana 2 minimální.



✓ a) $T_1 = 21{,}27$ kN, $T_2 = 13{,}99$ kN, b) $\alpha = 65^\circ$.

Kinematika

14. Polohový vektor $\mathbf{r}$ hmotného bodu závisí na čase t podle rovnice $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \frac{t^2}{2}$, kde $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ jsou konstantní vektory. Jaká je jeho rychlost $\mathbf{v}$ a její velikost a zrychlení $\mathbf{a}$ hmotného bodu?

Řešení

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t \qquad v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{c_1^2 + 2c_1c_2t + c_2^2t^2} \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{c}_2 = const.$$

Známe-li závislost $\mathbf{r}(t)$, můžeme určit rychlost $\mathbf{v}$ a zrychlení $\mathbf{a}$ v libovolném čase t.

A obrácená úloha?

Lze určit závislost $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$, když známe pouze závislost $\mathbf{a}(t)$?
Pro jednoznačné řešení takové úlohy je zadání nedostatečné. Potřebujeme znát počáteční podmínky, tj.

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t=0) \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t=0),$$

protože platí

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 \quad \text{a} \quad \mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 .$$

15. Pohyb hmotného bodu je dán rovnicí

$$s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 8t - 7{,}5 \ ,$$

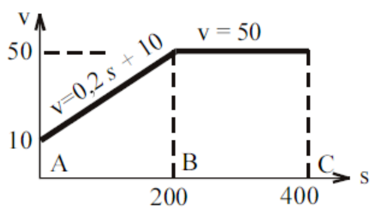
do níž dosadíme-li čas t v sekundách, vyjde dráha s v metrech. a) Určete polohu hmotného bodu za čas $t = 3$ s. b) Najděte rovnici rychlosti. c) Jaká je počáteční rychlost v_0 ? d) Jaká je rovnice zrychlení? e) Jaké je počáteční zrychlení a_0 ? f) Ve kterém okamžiku je zrychlení nulové?

✓ a) $s = 3$ m, b) $v = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 8$, c) $v_0 = 8\,\mathrm{ms^{-1}}$, d) $a = t - 4$, e) $a_0 = -4\,\mathrm{ms^{-2}}$, f) $t = 4$ s

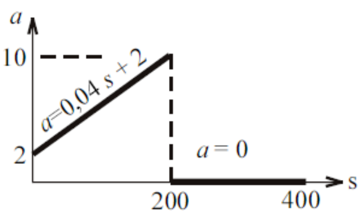
16. Pro rychlost hmotného bodu platí rovnice $v = 9t^2 - 8t + 3$, do níž dosadíme-li čas v sekundách, vyjde rychlost v m/s. a) Jakou dráhu urazí hmotný bod v časovém intervalu od $t_1 = 2$ s do $t_2 = 5$ s? b) Kdy je zrychlení tohoto bodu nulové? c) Ve kterém okamžiku je hmotný bod nehybný?

✓ a) $s = 276$ m, b) $t = \frac{4}{9}$ s, c) nikdy.

17. Pohyb auta je znázorněn grafem závislosti rychlosti *v* na uražené dráze *s* na obrázku křivkou *v* – *s*. Vypočtěte velikost zrychlení *a* auta a sestrojte graf závislosti jeho zrychlení na dráze *s* (*a* – *s*).



✓



18. Pilot letadla je od svého cíle vzdálen o s = 200 km na západ a přitom vane severozápadní vítr o rychlosti u = 30 km/h. Určete vektor rychlosti **v** letadla, které chce dosáhnout svého cíle za čas t = 40 min.

✓ $\mathrm{v} = (278{,}8\,;\,21{,}2)$ km/h.

19. Pohyb částice je dán rovnicemi $x = A\cos\omega t,\ y = B\cos 2\omega t$. Určete rovnici a tvar její trajektorie.

✓ $y = \frac{2B}{A^2}x^2 - B, \quad -A \le x \le A,$ což je rovnice paraboly.

20. Určete rovnici trajektorie a rychlost hmotného bodu, jehož pohyb je popsán rovnicemi:
$x = at^3,\ y = bt^2,\ z = 0,\ a, b =$ konst.

✓ $b^3x^2 = a^2y^3,\quad |\mathbf{v}| = \sqrt{9a^2t^4 + 4b^2t^2}$.

21. * Částice se pohybuje v rovině x, y z počátku souřadného systému rychlostí $\mathbf{v} = c_1\mathbf{i} + c_2x\mathbf{j}$, kde c_1 a c_2 jsou konstanty a $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ jsou jednotkové vektory na osách x a y. Jaká je rovnice trajektorie částice $y(x)$?

✓ $y = \frac{c_2}{2c_1}x^2$, takže trajektorií je parabola.

22. * Částice se pohybuje přímočaře z bodu A do bodu B se zrychlením a, které je určeno vztahem $a = c_1 - c_2x$, kde c_1 a c_2 jsou kladné konstanty a x je její vzdálenost od bodu A. Určete vzdálenost mezi body A a B a maximální rychlost částice.

✓ $x_0 = \frac{2c_1}{c_2},\ v_{max} = \frac{c_1}{\sqrt{c_2}}$.

23. Časový interval mezi přijetím signálu k zastavení automobilu a sešlápnutím brzdového pedálu je u průměrného řidiče asi 0,6 s. Může-li automobil brzdit se zpožděním $a = 5\ \mathrm{ms}^{-2}$, vypočtěte celkovou dráhu, kterou urazí od okamžiku, kdy řidič zpozoroval signál do okamžiku, kdy zastaví, byla-li počáteční rychlost automobilu $50\ \mathrm{km/h}$.

✓ $s \cong 27{,}66$ m.

24. Dvě tělesa se pohybují po přímce proti sobě s konstantním zrychlením $a_1 = 6\ \mathrm{ms}^{-2}$, $a_2 = 4\ \mathrm{ms}^{-2}$. Jejich počáteční rychlosti jsou $v_{01} = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$, $v_{02} = 15\ \mathrm{ms}^{-1}$. Počáteční vzdálenost je s = 750 m. Za jaký čas se obě tělesa střetnou?

✓ Tělesa se střetnou za 10 s.

25. Těleso pohybující se přímočaře s konstantním zrychlením urazí vzdálenost s =180 m mezi dvěma body za čas t = 6 s. Jeho rychlost v okamžiku, kdy prochází druhým bodem je $v = 45\ \mathrm{ms}^{-1}$. Jaké je jeho zrychlení? Jakou rychlost v_0 mělo v okamžiku, když procházelo prvním bodem?

✓ $a = 5\ \mathrm{ms}^{-2}$, $v_0 = 15\ \mathrm{ms}^{-1}$.

26. Těleso se pohybuje konstantní rychlostí $v_0 = 6\ \mathrm{ms}^{-1}$. V čase t = 0 s začne působit konstantní zpoždění tak, že se těleso zastaví a) za čas t = 30 s, b) na dráze s = 120 m. Jaké je jeho zpoždění v obou případech?

✓ a) $a = -0{,}2\ \mathrm{ms}^{-2}$, b) $a = -0{,}15\ \mathrm{ms}^{-2}$.

27. Z určité výšky padá těleso A. Po čase $\Delta t = 0{,}5\ \mathrm{s}$ začne padat z výšky menší o $\Delta h = 4{,}9\,\mathrm{m}$ těleso B. Jak dlouho padalo těleso A, jestliže obě dopadla současně?

✓ Pro dobu pádu tělesa A platí $t \cong 1{,}23$ s.

28. Vlak se rozjíždí z klidu s konstantním zrychlením $a_1 = 0{,}3\ \mathrm{ms}^{-2}$ po dobu t_1 = 30 s. Po nějakou dobu se pohybuje stálou rychlostí a pak brzděním se jeho rychlost zmenšuje se stálým zpožděním $a_2 = 0{,}4\ \mathrm{ms}^{-2}$ až se vlak zastaví. Vypočítejte dobu t_r, po kterou se vlak pohyboval rovnoměrně a dobu trvání t_c celé cesty, urazil-li vlak celkem dráhu s = 4 km.

✓ $t_r \cong 418$ s, $t_c \cong 470{,}5$ s.

29. Polohový vektor $\mathbf{r}$ hmotného bodu se mění s časem podle rovnice

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}_1 \sin \omega t + \mathbf{c}_2 \cos \omega t\,,$$

kde $\boldsymbol{c}_1$ a $\boldsymbol{c}_2$ jsou konstantní na sebe kolmé vektory a ω je kladná konstanta. Jaké je zrychlení hmotného bodu a rovnice jeho trajektorie $y(x)$, jestliže směr vektoru $\boldsymbol{c}_1$ odpovídá orientaci osy x a směr vektoru $\boldsymbol{c}_2$ orientaci osy y ?

✓ $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$, $x^2/c_1^2 + y^2/c_2^2 = 1$, což je rovnice elipsy s poloosami c_1 a c_2.

30. Z pušky se střílí po autě délky b, které se dá při pozorování úplně zakrýt tužkou o průměru c, jež je ve svislé poloze ve vzdálenosti d před okem. a) O kolik délek auta n se musí mířit před auto, které se pohybuje rovnoměrně po přímé silnici rychlostí v, aby se zasáhl cíl, je-li průměrná rychlost střely u ($u >> v$)? b) Jaká je vzdálenost r auta od pušky v okamžiku, kdy je zasaženo střelou? c) Jakou dobu t trvá pohyb střely, než po opuštění hlavně zasáhne cíl?

✓ a) $n \approx \dfrac{dv}{cu}$, b) $r \approx \dfrac{db}{c}$, c) $t \approx \dfrac{db}{cu}$, vše s ohledem na $u >> v$.

31. Vodák plul proti proudu řeky a právě pod středem mostu mu vypadl z loďky nafouknutý míč. Vodák zpozoroval ztrátu až za dobu t = 0,5 hod. Ihned se pak po řece vrátil a dostihl míč ve vzdálenosti d = 5 km od středu mostu. Vypočtěte rychlost vody v proudící v řece za předpokladu, že rychlost loďky u vzhledem k vodě byla stále stejná.

✓ $v = 5$ km/h.

Úhlové veličiny

32. Vlak se pohybuje po kruhové dráze o poloměru 800 m mezi dvěma body. V počátečním bodě dráhy měl vlak rychlost 54 km/h a v koncovém bodě 18 km/h. Mezi počátečním a koncovým bodem vlak urazil 800 m. Určete dobu potřebnou k uražení této dráhy a velikost zrychlení v počátečním a koncovém bodě.

Řešení

Nejdříve budeme uvažovat (posuvný) pohyb po kolejnicích, pak tvar dráhy. Protože nebylo o brždění nic uvedeno, budeme předpokládat, že vykonávaný pohyb je rovnoměrně zpožděný. Pro rovnoměrně zpožděný pohyb platí vztahy

$$a = const. < 0 \qquad v = v_0 + at \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 ,$$

kde a je zrychlení, v a v_0 je rychlost a počáteční rychlost, s a s_0 poloha a počáteční poloha a t označuje čas. Volíme-li počáteční časový okamžik $t_0 = 0$, počáteční polohu $s_0 = 0$ a koncový okamžik jako t, dostaneme rovnice

$$v = v_0 + at \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 ,$$

kde v je koncová rychlost a s uražená dráha. Získali jsme tak dvě rovnice o dvou neznámých a a t, jejichž řešením je

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \qquad t = \frac{2s}{v + v_0} .$$

Po převodu jednotek a dosazení dostaneme

$$a = -0{,}125 \text{ m/s}^2 , \qquad t = 80 \text{ s.}.$$

Vypočtené zrychlení odpovídá změně rychlosti a je tedy s ohledem vykonávaný křivočarý (kruhový) pohyb zrychlením tečným a_t .

Normálové zrychlení $a_n = \frac{v^2}{R}$, kde R je poloměr dráhy. Velikost výsledného zrychlení, označíme ho a_c, vyplývá z Pythagorovy věty

$$a_c = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\frac{v^2}{R^4} + \frac{\left(v^2 - v_0^2\right)^2}{4s^4}} .$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme pro celkové zrychlení na počátku a na konci dráhy

$$a_c(t = 0) = 0{,}308 \text{ m/s}^2 \text{ a } a_c(t = 80) = 0{,}129 \text{ m/s}^2.$$

33. Vyšetřete pohyb hmotného bodu, jehož polohový vektor **r** závisí na čase dle rovnice

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot A \cdot \cos bt + \mathbf{j} \cdot A \cdot \sin bt, \text{ kde } \quad A = 6\,\text{m}, \quad b = \frac{\pi}{4}\,\text{s}^{-1}.$$

Určete
a) vektor rychlosti **v,** jeho velikost a směr pomocí jednotkového vektoru,
b) vektor zrychlení **a,** jeho velikost a dále tečné a normálové zrychlení,
c) tvar trajektorie pohybu a poloměr křivosti trajektorie R,
d) a dokažte, že vektor rychlosti **v** a polohový vektor **r** jsou vzájemně kolmé,
e) vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ a dokažte, že $\boldsymbol{\omega}$ je kolmé na rovinu, ve které se pohyb děje, tedy $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$.

✓ a) $\mathbf{v} = \frac{3\pi}{2}\left(-\mathbf{i} \cdot \sin\frac{\pi}{4} + \mathbf{j} \cdot \cos\frac{\pi}{4} t\right)$, $v = \frac{3}{2}\pi \ \text{ms}^{-1}$, $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}t + \mathbf{j}\cos\frac{\pi}{4}t$,

b) $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{3}{8}\pi^2\left(-\mathbf{i} \cdot \cos\frac{\pi}{4}t - \mathbf{j} \cdot \sin\frac{\pi}{4}t\right)$, $a = \frac{3}{8}\pi^2 \ \text{ms}^{-2}$, $a_t = 0$, $a_n = \frac{3}{8}\pi^2 \ \text{ms}^{-2}$,

c) Trajektorií je kružnice, jedná se tedy o kruhový pohyb. $R = 6\,\text{m}$,

d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$,

e) $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$.

34. * Hmotný bod se pohybuje zpomaleně po kružnici o poloměru R tak, že v libovolném čase pro normálové zrychlení $\mathbf{a}_n$ a tečné zrychlení $\mathbf{a}_t$ platí $|\mathbf{a}_n| = |\mathbf{a}_t|$. Počáteční rychlost hmotného bodu byla v_0. Jaká je rychlost a velikost zrychlení hmotného bodu v závislosti na dráze s ?

✓ $v = v_0 e^{-2s/R}$, $a = \frac{v_0^2}{R}\sqrt{2}\, e^{-2s/R}$.

35. Hmotný bod se pohybuje po kruhovém oblouku o poloměru R. Jeho rychlost v závisí na uražené dráze l podle vztahu $v = c\sqrt{l}$, v němž c je kladná konstanta. Určete úhel α svíraný vektorem rychlosti a zrychlení hmotného bodu.

✓ Pro hledaný úhel α platí $\mathrm{tg}\alpha = 2l/R$..

36. Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru R = 0,1m tak, že jeho úhlová souřadnice je dána vztahem $\vartheta = 2 + 4t^3$. Jaké jsou velikosti normálového a tečného zrychlení v čase t = 2 s, tedy $a_n(t = 2s)$ a $a_t(t = 2s)$? Při jaké hodnotě ϑ bude jeho celkové zrychlení svírat s poloměrem kružnice úhel $\alpha = 45°$?

✓ $a_n = 230{,}4\,\text{ms}^{-2}$, $a_t = 4{,}8\,\text{ms}^{-2}$, $\vartheta = 2{,}6\,\text{rad}$.

37. Dokažte, že jestliže se těleso roztočí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením ε kolem pevné osy, pak dostředivé zrychlení a_n libovolného bodu tělesa je přímo úměrné úhlu φ, o který se těleso otočilo. O jaký úhel ϑ se těleso otočilo, jestliže celkové zrychlení libovolného bodu svírá s dostředivým zrychlením a_n úhel $\alpha = 60°$?

✓ Pro funkční závislost $a_n(\varphi)$ platí $a_n = 2\varepsilon R\varphi$. Pro úhel platí $\vartheta = 0{,}2887$ rad.

38. Rotor o průměru 20 cm zvýšil své otáčky ze 400 otáček/min na 9000 otáček/min za 15 s. Určete úhlové zrychlení rotoru, počet otáček N vykonaný po dobu zrychlování, konečnou obvodovou rychlost a obvodové zrychlení určitého bodu na obvodu rotoru.

✓ $\varepsilon = 60{,}0\ \mathrm{rad/s^2}$, $N = 1175$ otáček, $v = 94{,}3\ \mathrm{m/s}$, $a =$ 88 800 m/s^2.

39. Kruhová otáčivá plošina průměru d = 20 m se otočila o 180°. Prvních 10° byl pohyb rovnoměrně zrychlený a konečná obvodová rychlost okrajových bodů byla $v_1 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. S touto rychlostí se pak plošina rovnoměrně otočila o 160°. Posledních 10° se plošina otáčela rovnoměrně zpožděně a zastavila se.

a) Jak dlouho trvaly jednotlivé tři částečné pohyby?
b) Jak velké bylo úhlové zrychlení (zpoždění) na začátku (konci) pohybu?
c) Jak velké bylo normálové zrychlení okrajových bodů při rovnoměrném pohybu?
d) Jak velké bylo tečné zrychlení (zpoždění) okrajových bodů na začátku (konci) pohybu?

✓ a) Časy podle úseků: $t_1 \cong 1{,}74\ \mathrm{s}$, $t_2 \cong 13{,}95\ \mathrm{s}$, $t_3 = t_1 \cong 1{,}74\ \mathrm{s}$.
b) Úhlové zrychlení (zpoždění) v prvním (třetím) úseku $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \cong 0{,}115\ \mathrm{s^{-2}}$.
c) Normálové zrychlení ve druhém úseku $a_n = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
d) Tečné zrychlení (zpoždění) v prvním (třetím) úseku $a_t \cong 1{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

40. Jakou rychlostí v se pohybuje střed koule o poloměru R, valí-li se koule rovnoměrně bez klouzání úhlovou rychlostí ω po dvou rovnoběžných kolejnicích, mezi nimiž je vzdálenost $d < 2R$, jestliže pro d platí a) $d = R/2$, b) $d = R$.

✓ a) $v \cong 0{,}97 R\omega$, b) $v \cong 0{,}87 R\omega$.

41. Jakou rychlostí v_0 je nutno hodit těleso svisle dolů z výšky h, aby dopadlo o čas τ dříve než při volném pádu?

✓ $$v_0 = g\tau \frac{\sqrt{8gh} - g\tau}{\sqrt{8gh} - 2g\tau}.$$

42. Po absolutně hladkém svahu klouže těleso bez tření dolů. Úhel sklonu svahu je $\alpha = 30°$, délka svahu je $l = 10{,}2\ \mathrm{m}$. Za jaký čas urazí těleso celou dráhu, jestliže jeho počáteční rychlost byla $v_0 = 3\ \mathrm{ms^{-1}}$?

✓ $t \cong 1{,}24\ \mathrm{s}$.

43. Těleso volně padá ve vakuu z výšky h. Rozdělte tuto výšku na n částí tak, aby čas pádu v každé části byl stejný. Vypočtěte délku jednotlivých částí pro h = 245 m a n = 5.

✓ $x_n = \dfrac{2n-1}{n^2} \cdot h$. Z rekurentního vztahu pak vypočteme pro h = 245 a n = 5:
$x_1 = 9{,}2\ \mathrm{m}$, $x_2 = 29{,}4\ \mathrm{m}$, $x_3 = 49{,}0\ \mathrm{m}$, $x_4 = 68{,}6\ \mathrm{m}$, $x_5 = 88{,}2\ \mathrm{m}$.

44. * Hmotný bod vržený počáteční rychlostí v_0 pod úhlem α opíše ve vakuu parabolu. Určete velikost rychlosti, tečné a normálové zrychlení hmotného bodu v obecném bodě dráhy.

✓ $v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gy}$, $a_t = -\dfrac{g(v_0 \sin\alpha - gt)}{v}$, $a_n = \dfrac{g \cdot v_0 \cos\alpha}{v}$.

Dynamika

Hybnost, síla, impuls síly

45. Pohyb hmotného bodu o hmotnosti m = 0,5 kg je dán rovnicemi $x = 2t^2 + 1$, $y = t^2 + 1$, $z = t^3 - 1$ [m,s]. Určete velikost a směr působící síly v čase t = 1 s.

Řešení

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$$a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \Rightarrow a_x(t) = 4 \Rightarrow a_x(t=1) = 4\ \mathrm{ms}^{-2} \Rightarrow F_x = ma_x \Rightarrow F_x = 2\ \mathrm{N}$$

$$a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \Rightarrow a_y(t) = 2 \Rightarrow a_x(t=1) = 2\ \mathrm{ms}^{-2} \Rightarrow F_y = ma_y \Rightarrow F_y = 1\ \mathrm{N}$$

$$a_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} \Rightarrow a_z(t) = 6t \Rightarrow a_z(t=1) = 6\ \mathrm{ms}^{-2} \Rightarrow F_z = ma_z \Rightarrow F_z = 3\ \mathrm{N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \Rightarrow F = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}\ \mathrm{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

46. Dráha tělesa o hmotnosti m = 2 kg, které se pohybuje po ose x je dána vztahem $x = 10t^3 - 5t$ [m,s]. Jaká je síla působící na těleso v libovolném okamžiku?

✓ $F = 120 \cdot t$.

47. Těleso o hmotnosti m = 10 kg se pohybuje účinkem proměnlivé síly $F = p(q - t)$, kde p = 100 N/s a q = 1 s. Za jak dlouho se těleso zastaví a jakou dráhu přitom urazí, jestliže v čase t = 0 mělo rychlost v_0 = 0,2 m/s a síla má směr rychlosti tělesa?

✓ $t = 1 + \dfrac{\sqrt{104}}{10}$ s, $s \cong 7{,}07$ m.

48. Na těleso o hmotnosti m = 10 kg, které je v klidu v počátku souřadného systému, začne působit proměnlivá síla $F = 100 - 20t$ [N,s]. Najděte výraz pro polohu a rychlost tělesa v libovolném čase.

✓ $v = 10t - t^2$, protože pro $t = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow c = 0$,

$s = 5t^2 - \dfrac{1}{3}t^3$, protože pro $t = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow c = 0$.

49. Na těleso o hmotnosti m ležící na podlaze působí síla F pod úhlem α vzhledem k podlaze. Jak dlouho musí síla působit, aby těleso nabylo rychlosti v? Tření neuvažujte.

✓ $\Delta t = \dfrac{mv}{F\cos\alpha}$.

50. Těleso se pohybuje působením tíhy po nakloněné rovině o sklonu $\alpha = 30^{o}$ z bodu A do bodu B. Určete rychlost tělesa v bodě B, je-li vzdálenost mezi body 2 m, koeficient smykového tření μ_T = 0,01 a rychlost tělesa v bodě A je nulová.

✓ $v_B \cong 4{,}39$ m/s.

51. Dřevěný hranol o hmotnosti m_2 = 3 kg leží na vodorovné podložce. Je zasažen střelou o hmotnosti m_1 = 5 g. Střela v něm zůstane a hranol se posune po podložce po dráze délky s = 25 cm. Koeficient smykového tření mezi hranolem a podložkou je μ_T = 0,2. Vypočítejte rychlost střely v.

✓ $v = 600$ m s^{-1}.

52. Přes pevnou kladku otáčející se kolem vodorovné osy je vedeno vlákno, na jehož koncích jsou zavěšena závaží o hmotnostech m_1 = 1 kg a m_2 = 1,1 kg. Hmotnost kladky a vlákna lze zanedbat. Jak velké je zrychlení a pohybu závaží? Jakou tlakovou silou F působí čep kladky na svá ložiska při pohybu závaží?

✓ $a \cong 0{,}48$ ms^{-2}, $F \cong$ 21 N.

53. Síla F působí na těleso o hmotnosti m = 14,6 kg a vrůstá podle vztahu $F = 10 + 2t$ [N,s]. a) Jaký impuls I udělí síla tělesu v prvních dvou sekundách svého působení? b) Jak dlouho musí síla působit, aby její impuls byl roven 119 Ns? c) Jaká bude rychlost tělesa na konci časového intervalu vypočteného dle předchozího bodu, byla-li jeho počáteční rychlost v_0 = 3m/s?

✓ a) $I = 24$ Ns, b) $t \cong 7$ s, c) $v = 4{,}64$ m/s.

54. Střela o hmotnosti m = 2 g opustí ústí hlavně rychlostí v = 300 m/s. Síla v hlavni je dána vztahem $F = 400 - \dfrac{40000}{3}t\ [\mathrm{N,s}]$. Jak dlouho trvá pohyb střely v hlavni?

✓ $t = 3$ ms.

55. Stálá síla F působí na těleso tíhy G. V okamžiku, kdy začne síla na těleso působit, pohybuje se těleso rychlostí v_0. Za jakou dobu t se rychlost tělesa zvýší na n násobek počáteční rychlosti v_0?

✓ $t = \dfrac{Gv_0(n-1)}{Fg}$.

56. * Kvádr o tíze G_1 leží fixován v klidu na nakloněné rovině a je spojen lanem přes kladku umístěnou na vrcholu nakloněné roviny se závažím tíhy G_2 , které visí kolmo dolů. Po uvolnění se kvádr působením tíhové síly dá do pohybu po nakloněné rovině s úhlem sklonu $\alpha = 30^\circ$. a) Jak velký je poměr G_2/G_1 , jestliže kvádr vykoná za dobu t = 0,8 s dráhu s = 1 m směrem dolů? b) Jakou velkou hodnotu musí mít poměr G_2/G_1 , má-li kvádr konat po nakloněné rovině pohyb rovnoměrný? Tření a otáčivý pohyb kladky zanedbejte.

✓ a) $G_2/G_1 \cong 0{,}14$, b) $G_2/G_1 = 0{,}5$.

57. Míč o hmotnosti m = 125 g je vržen vodorovně proti svislé stěně. Jeho rychlost před nárazem je v_0 = 20 m/s a po odrazu v = 15 m/s. Doba, po kterou se míč dotýkal stěny je t = 0,05 s. Vypočtěte hybnost míče před nárazem a po něm a střední hodnotu síly, kterou stěna na míč působila.

✓ $p_{pred} = 2{,}5$ kgm/s, $p_{po} = -1{,}875$ kgm/s, $F = 87{,}5$ N .

58. Granát o hmotnosti m_0 = 20 kg letící rychlostí v_0 = 100 m/s vybuchne a roztrhne se na dvě střepiny. První střepina o hmotnosti m_1 = 12 kg pokračuje ve směru pohybu, který je shodný se směrem pohybu granátu, rychlostí v_1 = 200 m/s. Určete velikost a směr rychlosti druhé střepiny.

✓ $v_2 = -50$ m/s .

59. * Těleso o hmotnosti m je vrženo po nakloněné rovině (úhel sklonu α) směrem vzhůru s počáteční rychlostí v_0 v čase $t = t_0 = 0$. Vypočítejte délku trajektorie s, po jejímž proběhnutí se těleso zastaví a příslušnou dobu t, je-li pohyb tělesa ovlivňován pouze tíhou tělesa G a smykovým třením, jehož koeficient je μ_T .

✓ $s = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu_T \cos\alpha)}$, $t = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu_T \cos\alpha)}$.

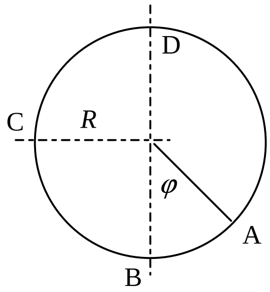
60. Závaží připevněné ke svislé ose otáčení nití délky l = 0,25 m se otáčí ve vodorovné rovině na odstředivém stroji. Při frekvenci f = 17/11 Hz se nit přetrhne. S jakým zrychlením a je nutno zvedat totéž závaží zavěšené na niti stejného druhu vzhůru, aby se nit přetrhla?

✓ $a \cong 6\,\mathrm{ms}^{-2}$.

61. Cyklista projíždí vodorovnou zatáčkou o poloměru R = 10 m rychlostí v_0 = 5 m/s. Hmotnost cyklisty a kola je 80 kg. Jakou nejmenší hodnotu musí mít koeficient smykového tření μ_T mezi gumou a povrchem silnice, aby cyklista nedostal smyk? O jaký úhel α se musí cyklista s kolem naklonit od svislé roviny? Jaký je výsledný tlak F na povrch silnice?

✓ $\mu_T = 0{,}255$, $\mathrm{tg}\alpha = \mu_T$, $F = \dfrac{m}{R}\sqrt{v_0^4 + R^2 g^2}$.

62. Hmotný bod o hmotnosti m je přivázaný na niti délky R a je nucen obíhat po kružnici ve svislé rovině kolem vodorovné osy s frekvencí f. Určete napětí nitě v bodech A, B, C, D na obrázku!



✓ $F_A = mR4\pi^2 f^2 + mg\cos\varphi = m\left(4\pi^2 f^2 R + g\cos\varphi\right),$
$F_B = m\left(4\pi^2 f^2 R + g\right), \qquad F_C = 4\pi^2 f^2 Rm, \qquad F_D = m\left(4\pi^2 f^2 R - g\right).$

63. Hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na niti opisuje ve vodorovné rovině kruhovou dráhu. Délka závěsu je l a hmotnost závěsu můžeme zanedbat. Závěs svírá s těžnicí úhel β. Určete rychlost a oběžnou dobu tohoto bodu a sílu, která napíná závěs.

✓ $v = \sqrt{g \cdot l \cdot \sin\beta \cdot \mathrm{tg}\beta}\,, \quad T = \dfrac{2\pi \cdot l\sin\beta}{v}\,, \quad F = \dfrac{mg}{\cos\beta}.$

64. * Na povrchu absolutně hladké koule je hmotný bod v metastabilní poloze. Když ho vychýlíme, bude se pohybovat nejprve po povrchu koule. Jak velká je vzdálenost h průmětu místa, v němž bod opustí povrch koule, do svislého průměru koule a vrcholu koule? V jaké vzdálenosti d od svislého průměru koule dopadne na vodorovnou podložku? Poloměr koule R = 1,5 m.

✓ $h = 0{,}5\ \mathrm{m}\,, \quad d = 2{,}2\ \mathrm{m}\,.$

Práce, výkon

65. Jak velkou práci vykoná proměnlivá síla $\mathbf{F} = t^2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j} + 4 \cdot \mathbf{k}$ $[\mathrm{N,s}]$, jejíž působiště se posouvá po křivce $\mathbf{r} = 3t \cdot \mathbf{i} - 2t^2 \cdot \mathbf{j} + 15t \cdot \mathbf{k}$ $[\mathrm{m,s}]$ v době mezi okamžiky t_1 = 1 s a t_2 = 5 s? Jaký je průměrný výkon v udaném časovém intervalu a jaký je okamžitý výkon koncem čtvrté sekundy?

Řešení

$$dA = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \quad \Rightarrow \quad dA = \left(t^2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j} + 4 \cdot \mathbf{k}\right) \cdot \left(3 \cdot \mathbf{i} - 4t \cdot \mathbf{j} + 15 \cdot \mathbf{k}\right) dt = \mathbf{(}3t^2 - 20t + 60\mathbf{)}dt$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dA = \int_{t_1}^{t_2} (3t^2 - 20t + 60)dt \quad \Rightarrow \quad A = \left[t^3 - 10t^2 + 60t\right]_1^5 = 124\ \mathrm{J}.$$

Průměrný výkon činí $\qquad \overline{P} = \dfrac{A}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = \dfrac{124}{4} = 31\ \mathrm{W}.$

Výkon $\qquad P = \mathbf{F} \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Pro výkon koncem čtvrté sekundy máme

$$\mathbf{F}(t=4)=16\cdot\mathbf{i}+5\cdot\mathbf{j}+4\cdot\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=3\cdot\mathbf{i}-4t\cdot\mathbf{j}+15\cdot\mathbf{k}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{v}(t=4)=3\cdot\mathbf{i}-16\cdot\mathbf{j}+15\cdot\mathbf{k}$$

$$P(t=4)=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=48-80+60=28\ \text{W}.$$

Mohli jsme také využít již vypočtený vztah $P(t)=3t^2-20t+60$.

66. Těleso o hmotnosti m = 20 kg je taženo po vodorovné rovině silou F, která s touto rovinou svírá úhel α. Během pohybu síla vzrůstá podle vztahu $F = 6x$, kde F je měřeno v N a x v m. Úhel α rovněž vzrůstá a to tak, že platí cos α = 0,7 – 0,02x. Jak velkou práci vykoná síla, jestliže přesune těleso z místa o souřadnici x = 10 m do místa o souřadnici x = 20 m?

✓ $A \cong 350$ J.

67. Jak velké práce je zapotřebí k odtažení bedny tíhy G do vzdálenosti s po vodorovné podlaze, je-li bedna tažena za provaz, který svírá s vodorovným směrem úhel α? Koeficient smykového tření mezi bednou a podlahou je μ_T.

✓ $A=\dfrac{\mu_T mgs}{1+\mu_T \operatorname{tg}\alpha}$.

68. Síla F = 80 N působí vodorovně na těleso o hmotnosti m = 30 kg, které leželo původně v klidu na vodorovné dokonale hladké podložce. Najděte (okamžitý) výkon, který vyvíjí síla na konci prvé a páté sekundy a také průměrný výkon vyvíjený silou během prvé sekundy a prvých pěti sekund.

✓ $P(t=1)=\dfrac{640}{3}$ W, $\quad P(t=5)=\dfrac{3200}{3}$ W

$\overline{P}(t=1)=\dfrac{320}{3}$ W, $\quad \overline{P}(t=5)=\dfrac{1600}{3}$ W.

69. Jakou práci musíme vykonat, abychom posunuli těleso o hmotnosti m = 20 kg po dráze s = 6 m vzhůru po nakloněné rovině, jejíž stoupání je $\alpha = 30^{\circ}$ a koeficient smykového tření μ_T = 0,1?

✓ $A \cong 600$ J.

70. Auto jede do velmi mírného kopce stálou rychlostí v_1 = 5 m/s. Tu část skutečného výkonu P motoru auta, která se využije na udržování vozidla v pohybu, označme P_1. Jede-li auto při stejné hodnotě P_1 z kopce dolů, nabude rychlosti v_2 = 20 m/s. Jaké rychlosti v_0 nabude při stejném výkonu P_1, pojede-li po vodorovné rovině?

✓ $v_0 \cong 8$ m/s.

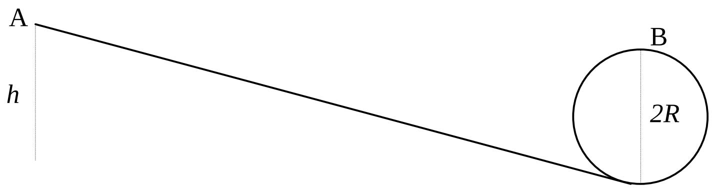
71. Homogenní krychli o hraně a přemístíme do vzdálenosti s jednou tak, že ji táhneme po podložce a podruhé tak, že ji překlápíme přes hranu. Koeficient smykového tření krychle a podložky je μ_T. Tření při překlápění krychle můžeme zanedbat. Při jakém koeficientu smykového tření μ_T jsou práce při obou způsobech přemístění stejné?

✓ $\mu_T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Zákony zachování

72. Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje bez tření po nakloněné rovině, která na konci přechází ve válcovou plochu o poloměru R. Z jaké výšky h se musí bod pohybovat, aby udělal celou obrátku a nespadl, když jeho počáteční rychlost je v_0?

Řešení



Podle obrázku musí v bodě B pro hmotný bod, aby nespadl, platit podmínka (v mezním tvaru)

$$G = F_S \quad \Rightarrow \quad mg = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = gR$$

a bodech A a B zákon zachování mechanické energie, tj. rovnost

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv^2,$$

z níž po dosazení za v^2 z první rovnice po úpravě obdržíme hledané řešení

$$h = \frac{5gR - v_0^2}{2g}.$$

73. Jakou nejmenší rychlostí v_0 musí vjet cyklista do svislé kruhové smyčky poloměru R = 5 m, aby smyčkou bez nehody projel? Těžiště kola a cyklisty je ve výšce 1,2 m. Tření zanedbejte.

✓ $v_0 \cong 13{,}65$ m/s.

74. Dvě loďky plují proti sobě rovnoběžným směrem. Když se setkají, vymění si cestující navzájem pytle o stejných hmotnostech m = 50 kg. Následkem toho se první loďka zastaví a druhá pluje dál rychlostí v = 8,5 m/s. Určete rychlosti loděk v_1 a v_2 před výměnou pytlů, jsou-li hmotnosti loděk s nákladem m_1 = 500 kg a m_2 = 1000 kg.

✓ v_1 = 1 m/s, v_2 = 9 m/s.

75. Nehybný granát se při explozi rozdělil na dvě části o hmotnostech m_1 a $m_2 = 4\,m_1$. Určete celkovou uvolněnou kinetickou energii *E*, víte-li, že část m_1 odletěla s kinetickou energií E_1 = 100 J.

✓ E = 125 J.

76. * Jaká je tažná síla *F* rakety, která spálí za sekundu 10 kg paliva a produkty hoření tryskají z rakety rychlostí $u = 10^3$ m s^{-1}? Jaké je počáteční zrychlení a_0 rakety a jaké je její zrychlení a_f těsně před shořením veškerého paliva, je-li vlastní hmotnost rakety m_0 = 50 kg a v raketě je před zapálením motorů M = 100 kg paliva? Jakou rychlost v_m dosáhne raketa těsně po shoření veškerého paliva, je-li její počáteční rychlost nulová? Předpokládejte, že na raketu kromě tažné síly motorů nepůsobí jiná síla.

✓ $F = 10^4$ N, $a_0 = 66{,}7\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $a_f = 200\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $v_m = 1{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Srážky

77. Dokažte, že po dokonale pružném necentrálním rázu částice s nehybnou částicí téže hmotnosti se částice rozletí v pravém úhlu.

Řešení

Označme hmotnost obou částic *m*, rychlost nalétávající částice **v**, rychlost této částice po srážce $\mathbf{v}_1$ a rychlost původně stojící částice po srážce $\mathbf{v}_2$.
Zákon zachování hybnosti má tvar

$$m \cdot \mathbf{v} = m \cdot \mathbf{v}_1 + m \cdot \mathbf{v}_2 \quad \text{resp.} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

a zákon zachování energie (pružná srážka) tvar

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot {v_1}^2 + \frac{1}{2} m \cdot {v_2}^2 \quad \text{resp.} \quad v^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2$$

kde jsme využili skutečnosti, že pro každý vektor je kvadrát jeho velikosti roven skalárnímu součinu toho vektoru se sebou samým.

Do výrazu vyplývajícího ze zákona zachování energie dosadíme závislost pro **v**

$$v^2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 = {v_1}^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + {v_2}^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2$$

Důsledkem této rovnice je vztah $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Buď je tedy některý z vektorů nulový nebo vektory jsou na sebe kolmé a požadovaný důkaz je proveden.

Zjistíme, co by znamenala nulovost některého z vektorů.

Je-li $v_1 = 0$, pak se první částice zastavila a druhá je uvedena do pohybu rychlostí rovnou rychlosti nalétávající částice. To je zřejmě případ centrálního rázu. Podle podmínek úlohy je ráz necentrální, tento případ je tedy vyloučen.

Jeli $v_2 = 0$, znamená to, že druhá částice zůstala v klidu a první se prostě pohybuje dále, takže k žádnému rázu nedošlo. I tento případ neodpovídá zadání úlohy a tvrzení je tedy dokázáno.

78. Na kouli hmotnosti m_2 pohybující se rychlostí $\mathbf{u}_2$ narazí jiná stejně velká koule hmotnosti m_1, která se pohybuje rychlostí $\mathbf{u}_1$ ve stejném směru. Koule jsou homogenní a jejich hmotné středy se pohybují po téže přímce. Spočítejte rychlosti $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ koulí po srážce.

✓ $$\mathbf{v}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}_2 , \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}_2 .$$

Jedná se o přímou centrální srážku. Rychlosti před a po srážce budou ležet v jedné přímce. Při rovnosti hmotností koulí si koule pouze vymění rychlosti: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1$.

79. Dva hmotné body o hmotnostech m_1 = 2 g, m_2 = 5 g mají před srážkou, během které se trvale spojí, rychlosti $\mathbf{v}_1 = (10,0,0)$ cm s^{-1}, $\mathbf{v}_2 = (3,5,0)$ cm s^{-1}. Jaká je rychlost hmotného středu soustavy $\mathbf{v}_S$? Jaká je hybnost spojených hmotných bodů $\mathbf{p}$? Jaká je hybnost spojených hmotných bodů v těžišťové souřadné soustavě $\mathbf{p}_0$? Jaký je poměr $\dfrac{E_k'}{E_k}$ kinetické energie po srážce ke kinetické energii před srážkou?

✓ $$\mathbf{v}_S = (5, \frac{25}{7}, 0)\ \mathrm{cm\,s^{-1}}, \quad \mathbf{p} = (35,25,0)\ \mathrm{g\,cm\,s^{-1}}, \quad \mathbf{p}_0 = 0, \quad \frac{E_k'}{E_k} = 0{,}72 .$$

80. * Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují proti sobě a srazí se. Srážka je dokonale nepružná. Před srážkou byly kinetické energie koulí v poměru $E_1 / E_2 = 20$. Za jaké podmínky se budou koule po srážce pohybovat ve směru původního pohybu druhé koule?

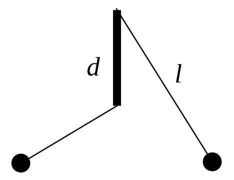
✓ $m_2 / m_1 > 20$.

81. Dvě koule o hmotnostech m_1 = 0,5 kg a m_2 = 1 kg pohybující se proti sobě rychlostmi v_1 = 5 m/s a v_2 = 8 m/s se nepružně srazí. Určete, jaká část kinetické energie této soustavy přejde na energii jiného druhu, např. tepelnou.

✓ $\Delta E = 1{,}5$ J .

Matematické kyvadlo

82. Jaká je perioda kmitu matematického kyvadla na obrázku pro délku závěsu l = 1,5 m a výšku velmi tenké překážky d = 0,54 m? Svislá překážka míří přesně do rovnovážné polohy kyvadla.



✓ $T \cong 2{,}21\,\mathrm{s}$.

83. Délka závěsu matematického kyvadla je l. Je-li hmotnému bodu kyvadla v rovnovážné poloze udělena rychlost v, jak daleko se kyvadlo vychýlí od rovnovážné polohy než se zastaví? Odpor prostředí samozřejmě neuvažujte.

✓ $x = v\sqrt{\dfrac{l}{g} - \dfrac{v^2}{4g^2}}$.

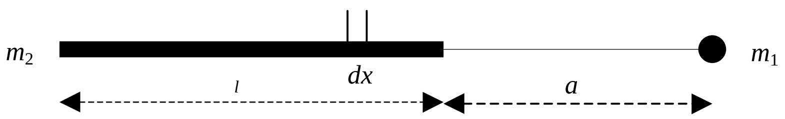
84. * Vyjádřete závislost rychlosti matematického kyvadla na poloze, tj. $v = v(\varphi)$, při jeho pohybu vlivem tíhové síly za předpokladu, že délka závěsu je l. Určete také sílu napínající vlákno.

✓ $v = \sqrt{v_0^2 + 2gl\cos\varphi}$, $\quad F_n = \dfrac{m}{l}\left(v_0^2 + 2gl\cos\varphi\right)$.

Gravitace

85. Kulička o hmotnosti m_1 leží ve vzdálenosti a od bližšího konce tenké přímé homogenní tyče hmotnosti m_2 a délky l. Střed kuličky leží na podélné ose tyče. Vypočítejte sílu, kterou se obě tělesa přitahují.

Řešení



$$dF = \chi \frac{m_1 \dfrac{m_2}{l} dx}{x^2} = \chi \frac{m_1 m_2}{l} \frac{dx}{x^2},$$

kde $\dfrac{m_2}{l} dx$ je hmotnost elementu tyče délky dx a x je vzdálenost tohoto elementu od středu kuličky. Integrací podél celé délky tyče dostaneme sílu F

$$F = \int dF = \chi \frac{m_1 m_2}{l} \int_a^{l+a} \frac{dx}{x^2} = \chi \frac{m_1 m_2}{l} \cdot \frac{l}{(l+a)\cdot a} = \chi \frac{m_1 m_2}{a\cdot(l+a)}.$$

86. Na 45° zeměpisné šířky dopadá na zemský povrch těleso o hmotnosti m = 10 kg rychlostí v = 100 m/s. Jaká je hodnota odstředivé a Coriolisovy síly, které na těleso působí při jeho dopadu?

✓ $F_{od} = 0{,}238$ N, $F_{cor} = 0{,}104$ N.

87. Jakou vodorovnou rychlost v je třeba udělit tělesu ve výšce h = 500 km nad zemským povrchem, aby se pohybovalo jako umělá družice Země po kruhové dráze, když zemský poloměr má hodnotu R = 6378 km?

✓ $v \cong 7{,}6\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

88. Těleso hmotnosti m je vrženo svisle vzhůru z povrchu Země rychlostí $v_0 = 10^3\,\mathrm{ms}^{-1}$. Do jaké výšky vystoupí, nepřihlížíme-li k odporu prostředí?

✓ Těleso vystoupí do výšky 51,4 km.

89. Vypočtěte hmotnost M Slunce, jestliže střední vzdálenost Země Slunce je $r = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ m a doba oběhu Země kolem Slunce je $T = 3{,}1557 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$.

✓ $M \cong 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg.

90. Tenká homogenní tyč hmotnosti m a délky l leží v ose x. Najděte výraz pro gravitační potenciál a intenzitu gravitačního pole v bodě P, který leží v ose x a má x-ovou souřadnici a, přičemž $a > l/2$.

✓ $$V = -\chi \frac{m}{l} \ln \frac{a + \frac{l}{2}}{a - \frac{l}{2}}, \qquad E = \chi m \frac{1}{a^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2}.$$

91. Určete sílu, kterou na sebe působí homogenní tyč hmotnosti m_0, délky l a hmotný bod hmotnosti m. Hmotný bod leží na ose symetrie tyče ve vzdálenosti a od tyče.

✓ $$F = \chi \frac{m \cdot m_0}{a\sqrt{a^2 + \frac{l^2}{4}}}.$$

92. * Určete intenzitu gravitačního pole v bodě P na ose tenkého prstence o hmotnosti m a poloměru R ve vzdálenosti x od středu prstence. Ve které vzdálenosti od středu prstence dosahuje intenzita pole maxima?

✓ $$E = \chi \frac{m \cdot x}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad x_{max} = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

93. Nechť je směrem do středu Země a dále k protinožcům vyvrtán kanál, z něhož je vyčerpán vzduch a předpokládejme, že do tohoto kanálu pustíme kuličku. Určete, jaký pohyb bude kulička vykonávat, a dále za jakou dobu t se dostane do středu Země a jakou tam bude mít rychlost v. Zdůvodněte, jak souvisí zkoumaný pohyb kuličky s kruhovým pohybem družice kolem Země v zanedbatelné výšce nad jejím povrchem. Hustotu Země považujte za konstantní. Poloměr Země nechť je R = 6400 km a tíhové zrychlení na jejím povrchu je 9,8 m/s^2. Návod. Sestavte a vyřešte pohybovou rovnici kuličky.

✓ Kulička bude vykonávat harmonický kmitavý pohyb.

$t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, $v = \sqrt{gR}$. Číselně t = 20,8 min a v = 7,9 km/s.

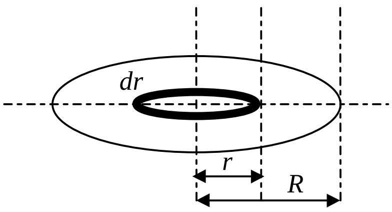
Rychlost, kterou jsme takto obdrželi, je rovna I. kosmické rychlosti. Pohyb kanálem vedoucím středem Země je totiž průmětem kruhového pohybu kolem Země, což lze snadno prokázat, zapíšeme-li x-ovou složku pohybové rovnice pro družici.

Rotace

Momenty setrvačnosti

94. Určete moment setrvačnosti tenkého kotouče vzhledem k ose jdoucí jeho středem kolmo na rovinu kotouče. Hmotnost kotouče je m a jeho poloměr R.

Řešení



$$J = \int r^2 dm$$

$m = \rho\pi R^2$ a $dm = \rho dV = 2\pi r\rho \cdot dr$

$$J = 2\pi\rho\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{1}{2}R^2\rho\pi R^2 = \frac{R^2}{2}m$$

95. Určete moment setrvačnosti obdélníka o rozměrech a, b a hmotnosti m a) vzhledem k ose, která je rovnoběžná se stranou b, leží v rovině obdélníka a prochází jeho těžištěm, b) vzhledem k ose, která prochází hranou b.

✓ a) $J = \frac{1}{12}ma^2$, b) $J = \frac{1}{3}ma^2$.

96. Určete moment setrvačnosti tenké tyče o hmotnosti m a délce l kolem osy, jdoucí koncem tyče. Tyč svírá s osou otáčení úhel φ.

✓ $J = \frac{1}{3}ml^2\sin^2\varphi$.

97. Určete moment setrvačnosti přímého rotačního kužele o výšce *h*, poloměru základny *R* a hmotnosti m kolem jeho geometrické osy.

✓ $J = \frac{3}{10} mR^2.$

98. Vypočtěte moment setrvačnosti válce o vnějším poloměru r_1 a vnitřním poloměru r_2 a o hmotnosti m vzhledem k ose, která prochází středem jeho podstav.

✓ $J = \frac{m}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right).$

99. * Určete moment setrvačnosti koule o hmotnosti m a poloměru *R*, vzhledem k ose jdoucí těžištěm koule.

✓ $J = \frac{2}{5} mR^2.$

Rotační pohyb

100. Setrvačník, jehož moment setrvačnosti je $J = 2\ \text{kgm}^2$ koná n = 1800 otáček/min. Na setrvačník působí brzdící moment daný vztahem $M = 0{,}18\pi t^2\ [\text{Nm}, \text{s}]$. a) Za jak dlouhý čas t se setrvačník zastaví? b) Kolik otáček N vykoná setrvačník za tento čas?

Řešení

a)

$$M = J \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M}{J} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{-0{,}18\pi t^2}{2} = -0{,}09\pi t^2$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \omega = \int \varepsilon dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \int -0{,}09 t^2 dt = -0{,}03\pi t^3 + \omega_0$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 60\pi\,\text{s}^{-1}, \quad f_0 = \frac{1800}{60} = 30\,\text{s}^{-1} = 30\,\text{Hz}$$

$$\omega = -0{,}03\pi t^3 + 60\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad t^3 = \frac{60\pi}{0{,}03\pi} \quad \Rightarrow \quad t^3 = 2000$$

$$t = 10 \cdot \sqrt[3]{2} \cong 12{,}6\,\text{s}.$$

b)

$$\varphi = \int \omega dt \quad \Rightarrow \quad \varphi = \int \left(-0{,}03\pi t^3 + 60\pi\right) dt = \frac{-0{,}03}{4}\pi t^4 + 60\pi t + c, \quad c = 0$$

$$\varphi = -\frac{0{,}03}{4}\pi \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 600\pi \cdot \sqrt[3]{2} = 450\pi \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{450\pi\sqrt[3]{2}}{2\pi} = 225 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

101. Setrvačník má moment setrvačnosti $J = 2000 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$ a otáčí se s frekvencí $f = 5$ Hz. Jaký třecí moment jej rovnoměrně zastaví za 900 s?

✓ $M \cong 697{,}8\,\mathrm{Nm}$.

102. * Na rotor motoru, jehož počáteční úhlovou rychlost známe, působí brzdný moment úměrný úhlové rychlosti. Určete koeficient úměrnosti mezi brzdícím momentem a úhlovou rychlostí, je-li udán celkový počet otáček do zastavení. Návod. Vyjděte z pohybové rovnice.

✓ Je-li celkový úhel otočení ϑ roven 2π násobku počtu otáček do zastavení, pak neznámý koeficient úměrnosti k je dán vztahem $k = \omega_0 / \vartheta$. Poznamenejme, že prakticky nemusíme čekat „do nekonečna“. Například za dobu $t_7 = k/7$ klesne úhlová rychlost na méně než jedno promile původní rychlosti a úhel otočení se od limitního také liší méně než o jedno promile.

103. Na kolo otáčivé kolem pevné osy působí točivý moment $M_1 = 20 \ \mathrm{Nm}$ po dobu $t_1 = 10\,\mathrm{s}$. Za tuto dobu vzroste úhlová rychlost kola z nuly na $\omega = \frac{10}{3}\pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Vnější otáčivý moment pak přestane působit a kolo se zastaví třením za čas $t_2 = 100\,\mathrm{s}$. Určete moment setrvačnosti kola J, moment síly tření M_2 a celkový počet otáček N vykonaných kolem.

✓ $J \cong 19{,}1 \ \mathrm{kg\,m^2}$, $M_2 = -2 \ \mathrm{Nm}$, $N = \dfrac{550}{6}$.

104. Přes kladku o momentu setrvačnosti J a o poloměru R je vedeno lanko se zanedbatelnou hmotností, na jehož koncích jsou závaží o hmotnostech m_1, m_2, $m_1 > m_2$. S jakým zrychlením bude klesat těžší závaží? Lanko po kladce neklouže!

✓ $\dfrac{dv}{dt} = a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \dfrac{J}{R^2}} \cdot g$. Zrychlení je tedy konstantní.

105. Dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšena na dvou dokonale ohebných, nehmotných vláknech, která jsou navinuta na dvou vzájemně spojených kotoučích o celkovém momentu setrvačnosti J vzhledem k ose otáčení a různých poloměrech r_1 a r_2. Určete zrychlení každého ze závaží.

✓ $a_1 = \dfrac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J} \cdot r_1 g$, $\quad a_2 = \dfrac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J} \cdot r_2 g$.

106. * Po nakloněné rovině se sklonem α klouže bez tření těleso o hmotnosti m a pohání přitom přes kladku upevněnou na vrcholu nakloněné roviny homogenní válec hmotnosti m_1 a poloměru R_1 tak, že je s ním spojeno lanem. Určete úhlové zrychlení válce ε a tah lana F' za pohybu. Hmotnost kladky a lana neuvažujte. Lano v kladce neprokluzuje.

✓ $\varepsilon = \dfrac{2mg \cdot \sin\alpha}{(m_1 + 2m)R_1}$, $\quad F' = \dfrac{m_1 mg \cdot \sin\alpha}{m_1 + 2m}$.

107. * Vypočtěte zrychlení válce, valícího se po nakloněné rovině s úhlem sklonu α = 30°, je-li jeho moment setrvačnosti $J_T = \frac{1}{2}mR^2$.

✓ $a = \frac{g}{3}$.

108. * Tyč délky l je zavěšena v koncovém bodě a může se otáčet kolem vodorovné osy, kolmé na tyč. Jakou rychlost musíme udělit dolnímu konci tyče, aby se pootočila do vodorovné polohy? Pro moment setrvačnosti tyče vzhledem k její ose symetrie platí $J_T = \frac{1}{12}ml^2$.

✓ $v = \sqrt{3gl}$.

109. * Vodorovný kotouč o poloměru R s momentem setrvačnosti J se volně otáčí kolem svislé osy procházející jeho středem s konstantní úhlovou rychlostí ω_1. Na jeho okraji stojí člověk hmotnosti m. Určete úhlovou rychlost kotouče ω_2, přejde-li člověk z jeho okraje do středu. Jak se při tom změní kinetická energie celé soustavy?

✓ $\omega_2 = \left(1+\frac{mR^2}{J}\right)\omega_1$, $\quad E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2\left(1+\frac{mR^2}{J}\right)$.

Kmity a vlnění

110. Vypočítejte amplitudu A a fázovou konstantu α netlumeného harmonického pohybu po přímce, je-li doba kmitu $T = 3{,}15$ s a v čase $t = 0$ byla okamžitá výchylka $x_0 = 10$ cm a rychlost $v_0 = 0{,}4$ m/s.

Řešení

Pro okamžitou výchylku platí $\quad x = A\cos(\omega t + \alpha)$
a pro rychlost $\quad v = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$.

Pro uvedené počáteční podmínky platí

$$x_0 = A\cos\alpha \quad \text{a} \quad v_0 = -A\omega\sin\alpha\,.$$

Dosadíme-li do posledních dvou rovnic $\omega = 2\pi / T$, pak z nich amplitudu a fázovou konstantu vyjádříme

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0 T}{2\pi}\right)^2 + x_0^2}\,, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v_0 T}{2\pi x_0}\,.$$

Po dosazení $\quad A = 0{,}223$ m, $\quad \alpha \cong -63°30'$.

111. * Nezatížená pružina má délku l. Když se na ní zavěsí závaží o hmotnosti m, je po ustálení její délka $l + h$. Na závaží, které je v klidu, dopadne z výše h druhé závaží stejné o hmotnosti a zůstane na něm. Určete dobu kmitu T a amplitudu A tohoto systému. Hmotnost pružiny zanedbejte.

✓ $A = h\sqrt{2}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

112. Zaveďte do obecného výrazu pro tlumený kmit, který má tvar $y = Y\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$, tyto počáteční podmínky – pro $t = 0$ je $y = y_0$ a $v = 0$.

✓ $y = \dfrac{\omega_0}{\omega} y_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$.

113. Ve rtuťovém U manometru je 121 g rtuti. Plocha vnitřního průřezu U trubice je S = 0,3 cm^2. Je-li rtuť vychýlena z rovnovážného stavu, začnou hladiny kapaliny v obou ramenech vykonávat harmonický pohyb. Vypočítejte dobu kmitu T tohoto pohybu. Kapilární síly a tření zanedbejte. Hustota rtuti je ρ = 13,6 g/cm^3.

✓ $T \cong 0{,}77$ s .

114. Hustoměru válcového tvaru o průměru d, plovoucímu v kapalině hustoty ρ, byl udělen malý svislý impuls. Určete dobu kmitu T hustoměru o hmotnosti m. Pohyb kapaliny a tření zanedbejte.

✓ $T = \dfrac{4}{d}\sqrt{\dfrac{\pi m}{\rho g}}$.

115. Dvě částice vykonávají harmonický pohyb po téže přímce se stejnou amplitudou A = 10 cm. Kruhové frekvence těchto kmitů jsou $\omega_1 = 20\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 21\ \mathrm{s}^{-1}$. V čase t = 0 obě částice procházejí bodem x = 0 ve směru kladné osy x; jsou ve fázi. Určete, v jaké vzdálenosti se budou nacházet částice v čase t = 0,35 s.

✓ $x_2 - x_1 \cong 2{,}18$ cm .

116. Svislá pružná spirála o tuhosti k = 50 N/m je na jednom konci upevněna. Ke druhému konci je připevněna nit, na níž visí závaží o hmotnosti m = 0,1 kg. Jakou největší počáteční výchylku Y, směrem dolů, můžeme udělit závaží, aby při takto vzniklých kmitech byla nit stále napjatá?

✓ $Y = 1{,}96$ cm .

117. * Jaký pohyb vznikne superpozicí dvou rovnoběžných harmonických kmitů se stejnými kruhovými frekvencemi ω a amplitudami $a_1 = 1\ \mathrm{cm}$, $a_2 = 10$ cm a fázovými konstantami $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$?

✓ $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$, $a \cong 10{,}8$ cm.

Fázová konstanta tohoto kmitu α je dána vztahem

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha \cong 1{,}54, \quad \alpha \cong 57°.$$

118. * Jaký výsledný pohyb vznikne složením dvou harmonických kmitů stejného směru? Amplitudy kmitů jsou $a_1 = a_2 = 2$ mm a kruhové frekvence jsou $\omega_1 = 99\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 100\ \mathrm{s}^{-1}$.

✓ $x = 0{,}4 \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(99{,}5\,t + \frac{\alpha}{2}\right)$ cm. Jde o případ rázu s kruhovou frekvencí kmitů $\omega_s = 99{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$ a frekvencí rázů $f_r = \frac{1}{2\pi}\mathrm{s}^{-1}$. Fázová konstanta α závisí na fázovém posunu v čase $t = 0$, který nebyl udán.

119. Dvě rovinné sinusové vlny postupují stejným směrem rychlostmi v_1 a v_2. Těmto vlnám přísluší vlnové délky λ_1 a λ_2. Určete vzdálenost d mezi sousedními rovinami, ve kterých kmity vzbuzené oběma vlnami jsou ve fázi. Vyjádřete vztah pro rychlost u pohybu těchto rovin.

✓ $d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $u = \frac{v_1 \lambda_1 - v_2 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

120. Určete rychlost šíření vln v_1 vznikajících na vodní hladině za lodí, pluje-li loď rychlostí v_2 a přímé okraje brázdy za touto lodí svírají úhel φ.

✓ $v_1 = v_2 \sin\frac{\varphi}{2}$.

121. * Dokažte, že výraz $y = Ae^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)}$, kde k je vlnové číslo, vyhovuje vlnové rovnici

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$