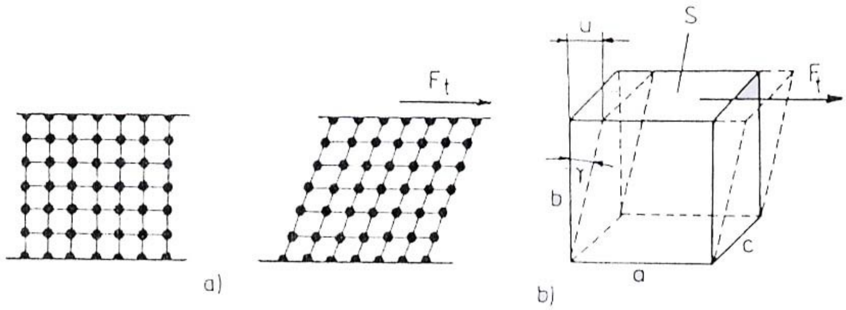
Slezská univerzita v Opavě – Filosoficko-přírodovědecká fakulta			
Fyzikální praktikum I – Mechanika a molekulová fyzika			
Jméno:	**Ročník, obor:** První,	**Vyučující:**	**Datum měření:**
Akademický rok:	**Název úlohy:** **Modul pružnosti ve smyku**		**Datum odevzdání:**
Číslo úlohy: 7			**Hodnocení:**

1 Pracovní úkoly:

Určete modul pružnosti ve smyku ocelové struny.

2 Teoretický úvod:

Při namáhání materiálu smykem se jeho jednotlivé vrstvy navzájem posouvají (smýkají po sobě). Vzdálenost vrstev však zůstává zachována. Na obrázku 1. je znázorněna taková deformace. Tečná síla F_t, působící v rovině horní stěny malého hranolu o hranách a,b,c, posunula tuto stěnu o vzdálenost u.



Obr. 2.1 Deformace tuhého tělesa při smyku.

Zaveďme veličiny nezávislé na rozměrech zvoleného hranolku: poměrné (relativní) posunutí γ a tečné (smykové) napětí τ :

$$\gamma = \frac{u}{b},$$

$$\tau = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{ac},$$

Hookeův zákon pro smyk má potom tvar:

$$\tau = G\gamma \text{, nebo } \gamma = \tau \frac{1}{G},$$

kde konstantu úměrnosti G nazveme modulem pružnosti ve smyku. Můžeme tedy modul pružnosti ve smyku definovat vztahem:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \qquad [G] = \mathrm{Nm^{-2}} = \mathrm{Pa} \qquad \textbf{(1)}$$

K namáhání materiálu smykem dochází např. při zkrucování tyče kruhového průřezu, která je na jednom konci upevněna a na jejíž druhý konec působí dvojice sil kroutícím momentem *M*. Mezi tímto momentem a úhlem zkroucení tyče φ platí vztah

$$M = G\frac{\pi r^4}{2l}\cdot\varphi, \qquad \textbf{(2)}$$

kde *r* je poloměr a *l* délka tyče.

Použijeme-li tenkou a dlouhou tyč, je poměrné posunutí γ dostatečně malé i při velkém úhlu zkroucení φ. Usnadní nám to udržet namáhání materiálu v oblasti malých deformací a tedy i v mezích platnosti Hookeova zákona. Tento požadavek snadno splníme, když místo tyče užijeme tenký dlouhý drát o průměru *d*. Po dosazení $r = d/2$ dostává vztah tvar:

$$M = G\frac{\pi d^4}{32\cdot l}\cdot\varphi. \qquad \textbf{(3)}$$

Zavěsme na dolní konec drátu těleso o momentu setrvačnosti *J* a působením momentu *M* drát zkruťme. Protože se pohybujeme v intervalu platnosti Hookeova zákona a tedy pod mezí pružnosti materiálu, bude se drát po skončení působení deformujících sil vracet do původního stavu. Na těleso přitom bude působit moment –*M*. Pohybová rovnice tělesa:

$$J\ddot{\varphi} = -M\ .$$

Přejde po dosazení za *M* z (3) na

$$\ddot{\varphi} + G\frac{\pi d^4}{32Jl}\cdot\varphi = 0.$$

To je ovšem diferenciální rovnice harmonického pohybu, pro jehož úhlovou frekvenci ω platí:

$$\omega^2 = G\frac{\pi d^4}{32Jl}. \qquad \textbf{(4)}$$

Zavěšené těleso tedy vykonává torzní kmity. Při výpočtu jsme nebrali v úvahu odpor prostředí a ztráty v drátu, které způsobují tlumení. Jejich vliv však lze obvykle zanedbat.

Dosadíme-li $\omega = 2\pi/T$ do (4), získáme po úpravě:

$$G = \frac{128\pi Jl}{d^4T^2}. \qquad \textbf{(5)}$$

Kde *T* je doba torzních kmitů tělesa a *J* jeho moment setrvačnosti.

Těleso (obr.1) vykonávající kmitavý pohyb je složeno z tyče o hmotnosti M a momentu setrvačnosti J_T a dvou stejných symetricky vzhledem k ose rotace umístěných přídavných těles o hmotnostech m_V a momentech setrvačnosti k vlastní ose rotace procházející těžištěm J_V. Jelikož přídavná závaží mají tvar dutých válců nasunutých na tyč, lze pro moment setrvačnosti J celé kmitající sestavy napsat vztah:

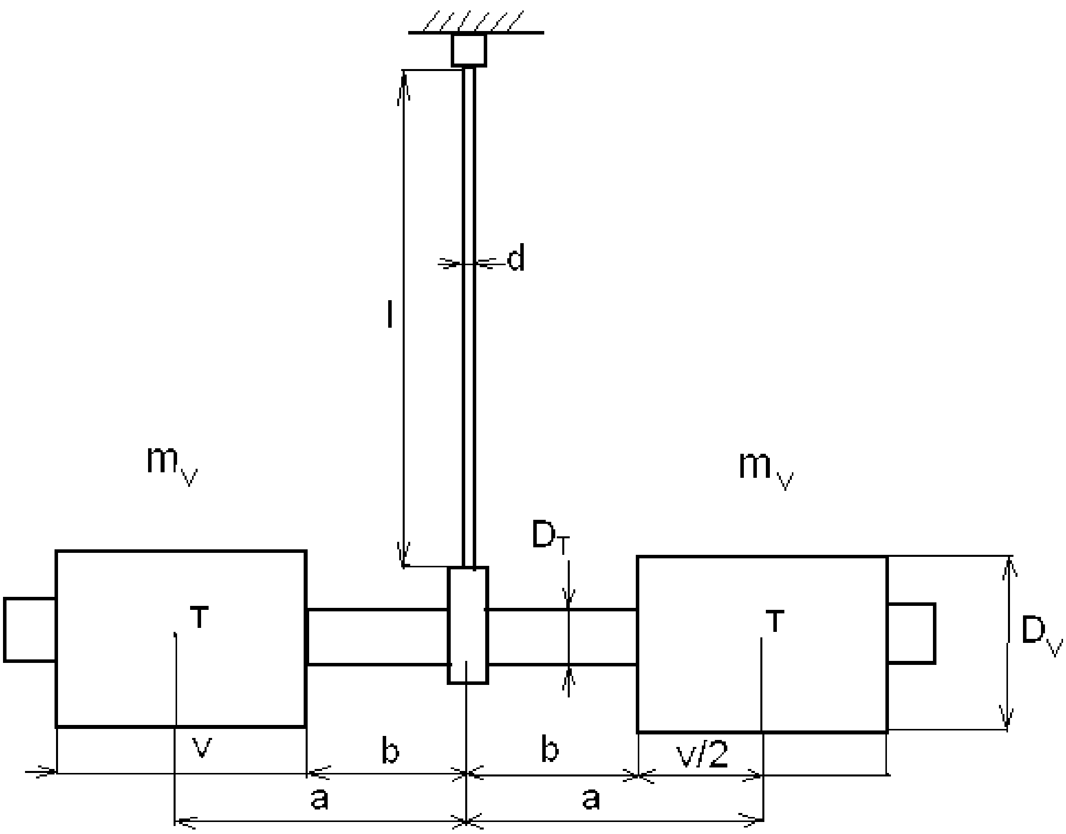
$$J = J_T + 2\left(J_V + m_V a^2\right) \qquad (6)$$

Kde $$J_T = \frac{1}{12} \cdot ML^2 \qquad (7)$$

$$J_V = \frac{m_V}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_T}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_V}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{3}\right] \qquad (8)$$

Po dosazení :

$$J = \frac{1}{12} \cdot ML^2 + 2\left\{\frac{m_V}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_T}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_V}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{3}\right] + m_V a^2\right\} \qquad (10)$$



Obr.1

Vypočteme–li tedy moment setrvačnosti J tělesa podle rovnice (10), můžeme poté vypočítat i hodnotu modulu pružnosti ve smyku ocelové struny podle rovnice (5).

Abychom se vyhnuli použití teoretického vztahu pro J_V a J_T, vyloučíme je z měření následovně. Válce umístíme postupně do vzdálenosti *a1* , *a2* .Odpovídající časy T_1, T_2 Platí

$$J_{a1} = J_T + 2\left(J_V + m_V a_1^{\ 2}\right) \qquad (11)$$

$$J_{a2} = J_T + 2\left(J_V + m_V a_2^{\ 2}\right) \qquad (12)$$

Rovnice odečteme

$$J_{a2} - J_{a1} = 2m_V\left(a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}\right) \qquad (13)$$

Z rovnice (5) vyjádříme J a pro dvě různé vzdálenosti a a příslušné časy T platí

$$J_{a2} - J_{a1} = \frac{Gd^4}{128\pi l}\left(T_2^{\ 2} - T_1^{\ 2}\right) \qquad (14)$$

Porovnáním pravých stran rovnic (13) a (14) dostaneme

$$G = \frac{128\pi l 2m_V\left(a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}\right)}{d^4\left(T_2^{\ 2} - T_1^{\ 2}\right)} \qquad (15)$$

3 Použité měřící přístroje a pomůcky

- Mikrometrické měřítko
- Pravítko
- Stolní váhy
- Posuvné měřítko
- Stopky
- Svinovací metr

4 Postup měření - metoda A

1) Nejprve jsem proměřil průřez drátu d mikrometrickým měřítkem a jeho délku l svinovacím metrem.
2) Potom jsem změřil délku tyče L pravítkem, její hmotnost M na stolních vahách a její průřez D_T posuvným měřítkem.
3) Dále jsem změřil průměr závaží D_V, jejich výšku v a jejich hmotnost m_V a tím jsem měl připraveny všechny hodnoty pro výpočet jednotlivých momentů setrvačnosti.
4) Provedl jsem měření 10ti kmitů torzního kyvadla bez závaží, pouze s upevněnou tyčí.
5) Provedl jsem měření 10ti kmitů torzního kyvadla se závažími vzdálenými o délku a od středu tyče. Celkem pro tři různé délky a.
6) Podle vztahu (10) vypočetl J a dosadil do vztahu (5).

5 Postup měření - metoda B

1) Nejprve jsem proměřil průřez drátu d mikrometrickým měřítkem a jeho délku l svinovacím metrem.
2) Dále jsem změřil hmotnost závaží m_V .
3) Provedl jsem měření 10ti kmitů torzního kyvadla se závažími vzdálenými o délku a od středu tyče. Celkem pro tři různé délky a.
4) Podle vztahu (15) vypočetl G

6 Naměřené a vypočtené hodnoty