Nejistoty měření

26. října 2021

1 Základní vztahy

1.1 Standardní nejistota typu A

Pokud opakovaně měříme tutéž veličinu X, za stejných podmínek, se stejnými měřicími metodami a stejnými měřícími prostředky, určujeme tzv. **standardní nejistotu typu A** (dále jen nejistota typu A), kterou budeme označovat $\mathbf{u_A}$, stejně jako tzv. výběrovou směrodatnou odchylku n opakovaných měření x_i, které mají aritmetický průměr $\bar{x}$, tj. podle vztahu

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{1}$$

Tato nejistota je tedy dána statistickým zpracováním, její příčiny se považují za neznámé (náhodné vlivy vstupující do procesu měření) a její hodnota klesá s počtem n opakovaných měření. Pokud je $n < 10$, pak z teorie plyne, že tuto nejistotu je nutné vynásobit korekčním faktorem k_A, kde např.pro $n = 5$ je $k_A = \sqrt{2} \approx 1.4$. Tedy pro 5 měření budeme tuto nejistotu počítat podle vztahu

$$u_A = \sqrt{2}u'_A, \tag{2}$$

kde výraz u'_A nyní označuje pravou stranu vztahu (1).

1.2 Standardní nejistota typu B

Standardní nejistota typu B (dále jen nejistota typu B), označovaná $\mathbf{u_B}$, je nejistota daná měřicí metodou, popř. měřicím přístrojem, chybou odečtu, reakční dobou experimentátora, atd.. Pro naše účely ji budeme brát jako polovinu nejmenšího dílku na stupnici měřicího prostředku, v případě, že je opatřen stupnicí s noniem, tj. stupnicí pro jemnější odečítání délek, pak je to polovina nejmenšího dílku této stupnice. V našem praktiku budeme pracovat s těmito nejistotami:

Měřicí prostředek	u_B
svinovací metr	$0.5mm$
posuvné měřítko (šuplera)	$0.05mm$
mikrometr	$0.005mm$
hodinkový indikátor (viz úl. 6)	$0.005mm$
stopky	$0.1s$
obchodní váhy	$2g$
kuchyňské digitální váhy	$1g$
analytické váhy	$0.05g$
odměrný válec	$1ml$

1.3 Kombinovaná nejistota

Výsledná, tzv. **kombinovaná nejistota $\mathbf{u_C}$** v sobě zahrnuje oba dva předchozí typy. Z teorie plyne

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \tag{3}$$

přičemž jednotka je shodná s jednotkou měřené veličiny X. Výsledek pak zapíšeme ve tvaru

$$X = (\bar{x} \pm u_{x,C})j. \tag{4}$$

Zde "j"značí příslušnou jednotku a přidaný index x příslušnost výsledné nejistoty u_C k veličině X. Toto je vhodné provést, pokud je v dané úloze měřeno více veličin, zatímco index "C"lze vynechat. Např. v úloze 1, kde měříme hustotu dřeva, z něhož je zhotovena deska s rozměry a, b, c o hmotnosti m, označíme celkovou (kombinovanou) nejistotu u příslušné veličiny postupně u_a, u_b, u_c, u_m.

Za účelem sjednocení použitého značení zaveďme následující konvenci, kterou si vysvětlíme na konkrétním příkladě: v úloze 4, kde měříme doby kmitu reverzního kyvadla T_1, T_2, T_3 postupně pro tři různé polohy závaží, označme nejistotu typu A pro periodu T_1 jako u_{T1A} (a ne např. U_{T1a}, nebo T_{1uA}) a čtěme "nejistota periody T_1 typu A", podobně pro nejistotu typu B. Vynecháním typu nejistoty (indexu C) budeme rozumět nejistotu celkovou (kombinovanou).

Zápis (4) budeme vždy doplňovat vyjádřením v alternativním tvaru podle předpisu

$$X = (\bar{x} \pm u_x)j = \bar{x}(1 \pm u_{r,x})j, \tag{5}$$

z něhož je ihned patrná <u>relativní</u> nejistota

$$u_{r,x} = \frac{u_x}{\bar{x}}, \tag{6}$$

která je zjevně bezrozměrným číslem (jednotku píšeme až vně závorky).

Např. ze zápisu

$$m = (85,00 \pm 0.05)g = 85(1 \pm 0.0006)g \tag{7}$$

lze ihned vidět, že hmotnost m byla změřena s relativní nejistotou $u_{r,m} = 0.06\%$. Všimněte si, že v zápise (7) jsme střední hodnotu m zaokrouhlili na stejný počet desetinných míst, jako nejistotu. Nelze proto např. psát $m = (85 \pm 0.05)g$.

1.4 Nejistota nepřímého měření

Pokud máme naměřeny veličiny

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} \pm u_a = \bar{a}(1 \pm u_{r,a}) \\ b &= \bar{b} \pm u_b = \bar{a}(1 \pm u_{r,a}) \\ c &= \bar{c} \pm u_c = \bar{a}(1 \pm u_{r,a}) \\ & ... \end{aligned} \tag{8}$$

na kterých závisí veličina $X = X(a, b, c, ..)$, bude hodnota X vypočtená z hodnot $a, b, c, ..$ daných soustavou (8) ve tvaru

$$X = \bar{X} \pm u_X, \tag{9}$$

kde

$$\bar{X} = X(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ..) \tag{10}$$

a výsledná nejistota u_X tohoto výsledku se vypočte podle vzorce

$$u_X = \sqrt{(\frac{\partial X}{\partial a}u_a)^2 + (\frac{\partial X}{\partial b}u_b)^2 + (\frac{\partial X}{\partial c}u_c)^2 + ...} \tag{11}$$

Podle typu funkční závislosti lze vzorec (11) dále modifikovat. Níže popíšeme dva speciální případy, ve kterých dojde k jeho výraznému zjednodušení.

1.4.1 X je funkcí součinu, podílu a mocnin proměnných $a, b, c, ..$

V případě, že funkční závislost $X = X(a, b, c, ..)$ obsahuje pouze součin, podíl a mocniny proměnných $a, b, c, ..$, tzn. je ve tvaru

$$X = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma ..}{k^\mu l^\nu m^\rho ..}, \tag{12}$$

lze ze vztahu (11) odvodit výhodnější vztah pro relativní nejistotu $u_{r,X}$ pomocí relativních nejistot $u_{r,a}$, $u_{r,b}$, .. Úprava spočívá ve vydělení obou stran rovnice (4) střední hodnotou $\bar{x}$, což nakonec vede ke vztahu

$$u_{r,X} = \sqrt{(\alpha u_{r,a})^2 + (\beta u_{r,b})^2 + (\gamma u_{r,c})^2 + .. + (\mu u_{r,k})^2 + (\nu u_{r,l})^2 + (\rho u_{r,m})^2 ...} \tag{13}$$

Např. pro

$$X = \frac{a^3 b^5}{c^2 d} \tag{14}$$

dostaneme

$$u_{r,X} = \sqrt{(3u_{r,a})^2 + (5u_{r,b})^2 + (2u_{r,c})^2 + u_{r,d}^2}. \tag{15}$$

Je vidět, že veličiny vystupující v nejvyšších mocninách (zde b) je nutno měřit co nejpřesněji, neboť vliv jejich relativních nejistot je násoben příslušnou mocninou.

Popíšeme nyní na konkrétní úloze dva způsoby, kterými lze postupovat při výpočtu měřené veličiny, přičemž v prvním případě užijeme vztah (11) a ve druhém vztah (13). Jako příklad vezměme úlohu č. 4, v níž budeme počítat hodnotu tíhového zrychlení podle vzorce

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2}, \tag{16}$$

kde l_r označuje redukovanou délku reverzního kyvadla a T dobu jeho kmitu. Mějme např. naměřeno

$$\begin{aligned} l_r &= (100.00 \pm 0.05)cm = 100(1 \pm 5 * 10^{-4})cm \\ T &= (2.00 \pm 0.01)s = 2(1 \pm 5 * 10^{-3})s, \end{aligned} \tag{17, 18}$$

tedy $\bar{l_r} = 100.00cm$, $u_l = 0.05cm$, $u_{r,l} = \frac{u_l}{l_r} = 5 * 10^{-4}$, a dále $\bar{T} = 2.00s$, $u_T = 0.01s$, $u_{r,T} = \frac{u_T}{\bar{T}} = 5 * 10^{-3}$.

a) Postup za použití vzorce (11)

Je možné použít přímo vzorec (11) pro výpočet nejistoty u_g, z níž následně určíme relativní nejistotu $u_{r,g} = u_g/\bar{g}$ a výsledek pak zapsat podle (4) ve tvaru

$$g = (\bar{g} \pm u_g)ms^{-2} = \bar{g}(1 \pm u_{r,g})ms^{-2}. \tag{19}$$

Tento způsob vyžaduje více numerických výpočtů, neboť každou z parciálních derivací ve vztahu (11) je nutno vyčíslit v bodech $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$... V našem případě máme funkční závislost $g = g(l_r, T)$, takže parciální derivaci

$$\frac{\partial g}{\partial l_r} = 4\pi^2 \frac{1}{T^2} \tag{20}$$

vyčíslíme v bodě $\bar{T} = 2.00$, což označíme jako

$$\frac{\partial g}{\partial l_r}|_{\bar{T}=2} = 4\pi^2 \frac{1}{2^2} = \frac{4\pi^2}{4} = \pi^2 = 9.8696, \tag{21}$$

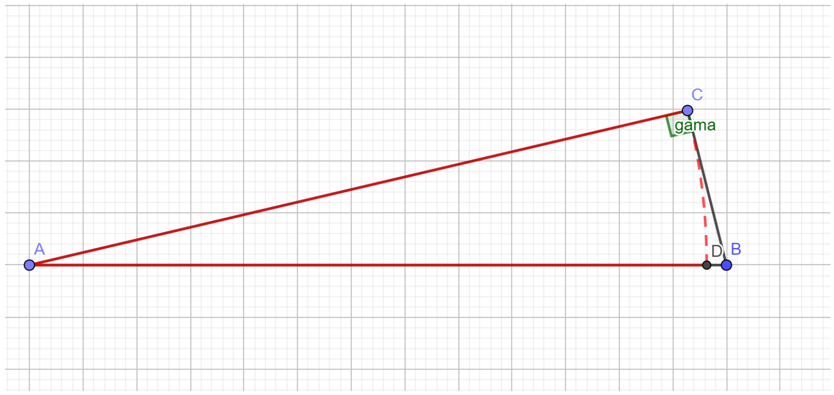
a podobně parciální derivaci

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -8\pi^2 \frac{l_r}{T^3} \tag{22}$$

vyčíslíme v bodech $\bar{l_r} = 1.00m$, $\bar{T} = 2.00s$ a označíme [1]

$$\frac{\partial g}{\partial T}|_{\bar{l_r}=1, \bar{T}=2} = -8\pi^2 \frac{1}{2^3} = -\pi^2 = -9.8696, \tag{23}$$

[1] Je třeba mít na paměti, že jednotlivé výrazy v kulatých závorkách ve vzorci (11) musí mít stejný rozměr jako veličina X, v našem případě g. Jelikož jednotkou tíhového zrychlení g je $m.s^{-2}$, musíme dosazovat v metrech a sekundách. Proto máme v (23) dosazeno $\bar{l_r} = 1$.



Obrázek 1: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Je vidět, že čím více je odvěsna BC kratší než odvěsna AC, tím více bude rozdíl mezi velikostí přepony AB a velikostí odvěsny AC, který je znázorněn úsečkou DB, zanedbatelný. Zde je BC kratší než AC pouze asi čtyřikrát.

a dosadíme do vzorce

$$u_g = \sqrt{(\frac{\partial g}{\partial l_r} u_l)^2 + (\frac{\partial g}{\partial T} u_T)^2}, \tag{24}$$

což vede k numerickému výpočtu

$$u_g = \sqrt{(9.8696 * 0.0005)^2 + (9.8696 * 0.01)^2} = 0.098701 m.s^{-2}. \tag{25}$$

Pozor, zde jsme opět museli dosadit nejistotu u_l v metrech, tj. $u_l = 0.0005m$, aby výsledek měl rozměr $m.s^{-2}$!

Poznámka: *Čtenáři dále doporučujeme ověřit numerickým výpočtem, že výsledek u_g je při zanedbání členu v první závorce, který je o dva řády nižší, roven*

$$u_g = 0.098690.$$

Tedy výsledek se liší od správné hodnoty nepatrně až na čtvrtém desetinném místě, přičemž tento rozdíl spolehlivě vymizí při následném zaokrouhlení podle pravidel uvedených v kapitole 2. Příčinu tohoto zanedbatelného rozdílu lze názorně vysvětlit: vzorec (24) připomíná Pythagorovu větu pro výpočet velikosti přepony pravoúhlého trojúhelníka u_g pomocí odvěsen, jejichž velikostem odpovídají výrazy v kulatých závorkách. Je zřejmé, že pokud je jedna z odvěsen výrazně nebo dokonce řádově delší než druhá odvěsna, viz obr. 1, budou délky přepony a delší odvěsny prakticky totožné. Je-li tedy součin v některé z kulatých závorek o jeden nebo více řádů nižší než je řád ostatních, je možné ji ihned zanedbat.

Střední hodnotu $\bar{g}$ vypočteme ze středních hodnot $\bar{l_r}, \bar{T}$ dosazením do vztahu (16), tj.

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l_r}}{\bar{T}^2} = 4\pi^2 \frac{1.00}{2^2} = 9.8696 m.s^{-2}. \tag{26}$$

Nyní je třeba správně zaokrouhlit výsledek i nejistotu (viz kap. 2)! Výsledek pak je

$$g = (9.9 \pm 0.1)ms^{-2} = 9.9(1.00 \pm 0.01)ms^{-2} \tag{27}$$

b) Postup za použití vzorce (13)

Druhou možností je nejprve spočítat relativní chybu jistou úpravou vzorce (4), kterou lze provést právě tehdy, když funkční závislost $X(a, b, c, ..)$ obsahuje pouze součin a/nebo podíl mocnin proměnných $a, b, c.., k, l, m, ..,$

Náš vzorec (16) svým tvarem odpovídá tvaru (12) (násobící faktor $4\pi^2$ je zde nepodstatný), můžeme proto podle (13) psát

$$u_{r,g} = \sqrt{u_{r,l}^2 + (2u_{r,T})^2}, \tag{28}$$

což po dosazení dá

$$u_{r,g} = \sqrt{(5.10^{-4})^2 + (2.5.10^{-3})^2} = 0.01001 = 0.01. \tag{29}$$

Poznámka: *Opět si zde může čtenář ověřit prakticky shodný výsledek při zanedbání členu v první závorce.*

Nyní již zbývá jen vypočíst střední hodnotu $\bar{g}$ podle (26), nejistotu u_g podle vztahu

$$u_g = u_{r,g}.\bar{g}, \tag{30}$$

numericky

$$u_g = 0.010 * 9.8696 = 0.098696, \tag{31}$$

kterou zaokrouhlíme na jednu platnou cifru nahoru podle pravidel v kap. 2, tj.

$$u_g = 0.1. \tag{32}$$

Střední hodnotu $\bar{g} = 9.8696$ je nyní třeba správně zaokrouhlit tak, aby se řád poslední platné cifry shodoval s řádem nejistoty (viz kap. 2), tedy

$$\bar{g} = 9.9. \tag{33}$$

Konečně můžeme zapsat výsledek

$$g = (9.9 \pm 0.1)ms^{-2} = 9.9(1.00 \pm 0.01)ms^{-2}. \tag{34}$$

Ze srovnání obou metod je vidět, že zejména při vyšším počtu proměnných, kdy je nutno vyčíslit odpovídající počet parciálních derivací, je druhá metoda mnohem rychlejší. Použijeme ji tedy s výhodou např. v úloze 6 u statické metody, kdy zjišťujeme Youngův modul pružnosti E v tahu, který pak počítáme podle vztahu

$$E = \frac{1}{4}\frac{16\pi^2 mg}{a^3 by}. \tag{35}$$

V případě první metody bychom počítali 4 parciální derivace postupně podle proměnných m, a, b, y, které by bylo nutno následně vyčíslit v bodech $\bar{m}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{y}$ a dosadit do (11), případě použití metody č. 2 dosadíme jednoduše do vzorce

$$u_{r,E} = \sqrt{u_{r,m}^2 + (3u_{r,a})^2 + u_{r,b}^2 + u_{r,y}^2}. \tag{36}$$

1.4.2 X je funkcí součtu a/nebo rozdílu proměnných $a, b, c, ..$

Pokud je funkční závislost $X(a, b, c, ..)$ ve tvaru

$$X = a \pm b \pm c \pm .., \tag{37}$$

kde jsou hodnoty $a, b, c, ..$ naměřeny ve tvaru (8), potom vzorec (13) nabude tvaru tzv. geometrického součtu

$$u_X = \sqrt{u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 + ...} \tag{38}$$

Tento vzorec použijeme například v úlohách, ve kterých počítáme určitou veličinu vícekrát pro různé naměřené hodnoty, a nakonec z nich určujeme aritmetický průměr. Např. v úloze č. 4 počítáme tíhové zrychlení g z doby kmitu matematického kyvadla pro dvě různé délky závěsu l_1, l_2. Jim odpovídají hodnoty

$$\begin{aligned} g_1 &= \bar{g_1} \pm u_{g1} \\ g_2 &= \bar{g_2} \pm u_{g2}. \end{aligned} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

Výsledné g určíme jako aritmetický průměr

$$g = \frac{\bar{g_1} + \bar{g_2}}{2} \tag{41}$$

a nejistotu podle vzorce (38)

$$u_g = \frac{\sqrt{u_{g1}^2 + u_{g2}^2}}{2}. \tag{42}$$

Zde je nutno dělit geometrický součet počtem sčítanců v aritmetickém průměru (41), jak lze odvodit ze vzorce (11). Podobně postupujeme v úlohách 5, 7, kde počítáme hmotnost válečku m_v, resp. modul pružnosti ve smyku G pro různé kombinace časů T_1, T_2, T_3 a jim odpovídajícím vzdálenostem a_1, a_2, a_3, a ty nakonec zprůměrujeme.

1.4.3 X je obecnou funkcí mocnin proměnných $a, b, c, ..$

V případě dynamické metody úlohy č. 6 používáme vzorec

$$E = \frac{16\pi^2 l^3 m_p}{a^3 b(T_1^2 - T^2)}, \tag{43}$$

který neodpovídá žádnému z předchozích speciálních tvarů funkční závislosti $X(a, b, c, ..)$, a tudíž nelze použít žádný ze vztahů (13), (38). V tomto případě určíme nejistotu u_E buď užitím metody 1 popsané v kap. (1.4.1), anebo spočítáme mezní hodnoty E_{min}, E_{max} pro mezní hodnoty veličin $l, m_p, a, b, T_{1,2}$.

Zde jsme $E_{min/max}$ označili minimální/maximální hodnotu veličiny E, přičemž definujeme

$$E_{min} = \bar{E} - u_E \tag{44}$$

$$E_{max} = \bar{E} + u_E. \tag{45}$$

V tomto případě je třeba správně zvolit znaménko $\pm$ u těchto veličin. Zde např. bude

$$E_{max} = \frac{16\pi^2(\bar{l} + u_l)^3(\bar{m}_p + u_m)}{(\bar{a} - u_a)^3(\bar{b} - u_b)[(\bar{T}_1 - u_{T1})^2 - (\bar{T} + u_T)^2]}, \tag{46}$$

jak plyne z elementární úvahy pro maximální hodnotu zlomku (43). Příslušný vztah pro E_{min} si již laskavý čtenář snadno rozmyslí sám. Hodnotu E pak zapíšeme jako

$$E = \bar{E} \pm u_E = \bar{E}(1 \pm u_{r,E}), \tag{47}$$

kde

$$\bar{E} = \frac{E_{min} + E_{max}}{2}, \tag{48}$$

a

$$u_E = \frac{E_{max} - E_{min}}{2}. \tag{49}$$

2 Zaokrouhlování výsledků

Používáme nasledujících pravidel:

- Nejprve zaokrouhlíme nejistotu, a sice na jednu platnou číslici nahoru (platné číslice jsou všechny číslice včetně nuly, pokud je nula uprostřed nebo na konci, např. čísla 0.0120, 0.0102 jsou zaokrouhleny na tři platné číslice, ale číslo 0.0012 na dvě), tj. např. nejistotu 0.041 zaokrouhlíme na 0.05, ale 0.0409 na 0.04. Pokud je však nejvyšší platná číslice 1 nebo 2, zaokrouhlíme na dvě platné číslice, rovněž nahoru, takže např. 0.0123 zaokrouhlíme na 0.013.
- Střední hodnotu zaokrouhlujeme již podle standardních pravidel, a to tak, aby nejnižší řád nejistoty opravoval poslední platnou číslici střední hodnoty.

Příklady:

$$\begin{array}{rcl} 0.123 \pm 0.00123 & \rightarrow & 0.1230 \pm 0.0013 \\ 0.12345 \pm 0.0012 & \rightarrow & 0.1235 \pm 0.0012 \\ 0.12345 \pm 0.0031 & \rightarrow & 0.123 \pm 0.004 \end{array} \tag{50}$$