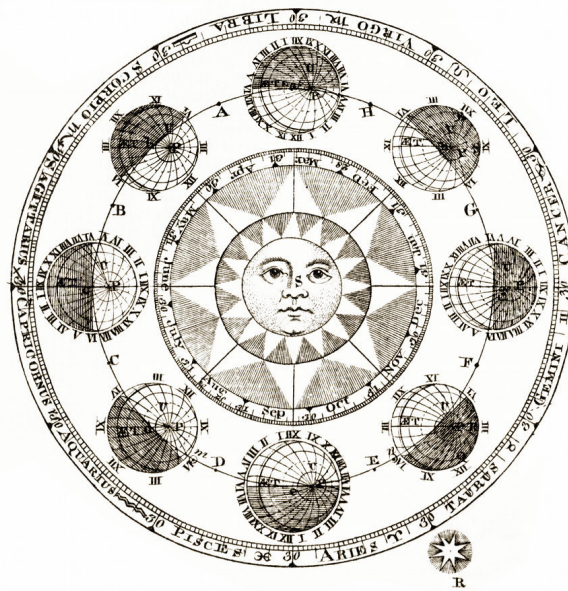


ASTRONOMIE

SBÍRKA ÚLOH



9. 10. 2019 10:00:00



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úlohy zpracovala a doprovodnými texty opatřila Mgr. Kamila Truparová.

Úlohy v části 6.4.1 sestavil Mgr. Martin Urbanec, Ph.D.

Na výsledném zpracování sbírky a formulaci některých jejích částí se podílel RNDr. Petr Slaný, Ph.D.

Sbírka byla vydána jako studijní materiál v rámci projektu *Intenzifikace internacionálních, mezioborových a intersektorálních přístupů při studiu* (CZ.1.07/2.2.00/28.0271) podpořeného operačním programem *Vzdělávání pro konkurenceschopnost*.

©Slezská univerzita v Opavě, 2014

Obsah

1	Sférická astronomie	1
1.1	Typy souřadných systémů	1
1.2	Souřadné systémy v astronomii	2
1.2.1	Obzorníkové (horizontální) souřadnice	2
1.2.2	Rovníkové (ekvatoriální) souřadnice	3
1.2.3	Transformace mezi horizontálními a rovníkovými souřadnicemi	5
1.2.4	Ekliptikální souřadnice	6
1.2.5	Galaktické souřadnice	7
1.3	Horní a dolní kulminace	8
1.4	Úlohy	8
1.5	Precese, nutace	14
1.5.1	Lunisolární precese	14
1.5.2	Planetární precese	15
1.5.3	Generální precese	15
1.5.4	Nutace	15
1.5.5	Úlohy	16
1.6	Paralaxa	17
1.6.1	Denní paralaxa	17
1.6.2	Rovníková paralaxa	18
1.6.3	Roční paralaxa	18
1.6.4	Úlohy	20
1.7	Aberace	21
1.7.1	Denní aberace	21
1.7.2	Roční aberace	22
1.7.3	Planetární aberace	23
1.7.4	Sekulární aberace	23
1.7.5	Úlohy	23
1.8	Refrakce	24
1.8.1	Úlohy	26
2	Sluneční soustava	29
2.1	Mechanika Sluneční soustavy	29
2.1.1	Planety	29

2.1.2	Trpasličí planety	29
2.1.3	Malá tělesa sluneční soustavy	30
2.2	Keplerovy zákony	30
2.2.1	I. Keplerův zákon - zákon drah	30
2.2.2	II. Keplerův zákon - zákon ploch	31
2.2.3	III. Keplerův zákon	31
2.2.4	Úlohy	32
2.3	Aspekty planet	37
2.3.1	Konjunkce	37
2.3.2	Opozice	37
2.3.3	Elongace	37
2.3.4	Kvadratura	38
2.3.5	Zdánlivé pohyby planet	38
2.3.6	Úlohy	38
2.4	Siderická a synodická oběžná doba	39
2.4.1	Úlohy	39
2.5	Elementy dráhy planety a anomálie	41
2.5.1	Elementy dráhy planety	41
2.5.2	Anomálie	42
2.5.3	Keplerova rovnice	43
2.5.4	Úlohy	44
3	Gravitace	47
3.1	Newtonovy zákony	47
3.1.1	I. Newtonův zákon	47
3.1.2	II. Newtonův zákon	47
3.1.3	III. Newtonův zákon	47
3.2	Centrální síla	47
3.3	Newtonův gravitační zákon	48
3.4	Intenzita gravitačního pole	48
3.5	Potenciální energie	49
3.6	Gravitační potenciál	49
3.7	Tíhové zrychlení	49
3.7.1	Úlohy	49
4	Zatmění	57
4.1	Zatmění	57
4.1.1	Zatmění Slunce	57
4.1.2	Zatmění Měsíce	59
4.1.3	Perioda Saros	59
4.2	Úlohy	59

5	Dalekohledy	61
5.1	Dalekohledy	61
5.1.1	Refraktory	61
5.1.2	Reflektory	62
5.1.3	Katadioptrické dalekohledy	63
5.2	Vady optických soustav	63
5.3	Základní optické vlastnosti dalekohledů	64
5.3.1	Zvětšení dalekohledu	64
5.3.2	Rozlišovací schopnost dalekohledu	65
5.3.3	Světelnost dalekohledu	65
5.4	Úlohy	65
6	Hvězdy	69
6.1	Hvězdná velikost, Pogsonova rovnice	69
6.1.1	Absolutní hvězdná velikost	70
6.1.2	Modul vzdálenosti	71
6.1.3	Absorpce světla	71
6.1.4	Úlohy	72
6.2	Záření absolutně černého tělesa	75
6.2.1	Povrchové teploty hvězd	75
6.2.2	Solární konstanta	76
6.2.3	Zářivost Slunce L_{\odot}	76
6.2.4	Zářivost hvězd	77
6.2.5	Úlohy	77
6.3	Spektrální třídy	79
6.3.1	Harvardská klasifikace	79
6.3.2	Třídy svítivosti	81
6.3.3	Hertzsprungův-Russellův diagram	81
6.3.4	System UB V a UB VRI	84
6.3.5	Barevný index $B - V$	84
6.3.6	Barevný exces E_{B-V}	86
6.3.7	Bolometrická korekce	86
6.3.8	Poloměry hvězd	87
6.3.9	Úhlové průměry hvězd	87
6.3.10	Hmotnosti hvězd	88
6.3.11	Hustoty hvězd	88
6.3.12	Úlohy	88
6.4	Stavba hvězd a procesy ve hvězdném nitru	93
6.4.1	Úlohy	96
7	Kinematické znaky hvězd	99
7.1	Kinematické znaky hvězd	99
7.1.1	Vlastní pohyb hvězd	99
7.1.2	Tangenciální rychlost	100

7.1.3	Radiální rychlost	101
7.1.4	Prostorová rychlost	101
7.1.5	Úlohy	101
8	Dvojhvězdy	105
8.1	Úlohy	105
	Seznam použité literatury	107

1

Sférická astronomie

1.1 Typy souřadných systémů

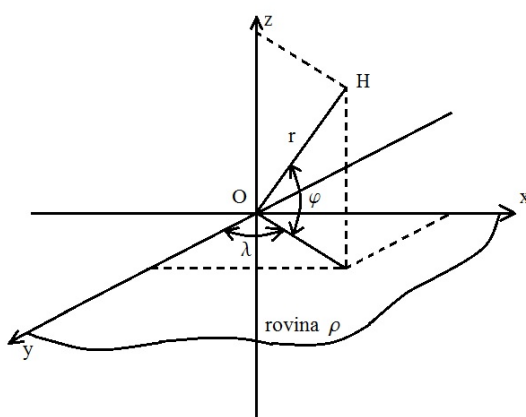
Jednou ze základních úloh při pozorování pohybu tělesa je určení jeho polohy v daném okamžiku. K popisu používáme vhodný souřadný systém. Zdánlivě nejjednodušší jsou *souřadnice pravoúhlé (kartézské)*. V astronomii se však nejvíce používají *sférické souřadnice*. Každá souřadná soustava je definována *základní rovinou*, která prochází počátkem souřadnic a *základním směrem*. Podle toho, kam položíme počátek souřadného systému, rozlišujeme v astronomii souřadnice *topocentrické* (počátek souřadnic leží v místě pozorovatele), *geocentrické* (počátek souřadnic leží ve středu Země), nebo *heliocentrické* (počátek souřadnic leží ve středu Slunce).

Pravoúhlé souřadnice jsou dány počátkem O , rovinou ρ , ve které leží na sebe kolmé osy x a y a osou z , která je kolmá na rovinu ρ . Pokud bodem H proložíme sféru s počátkem v bodě O a poloměrem r odpovídajícím vzdálenosti OH , můžeme zavést souřadnice *sférické*. Poloha bodu H je pak jednoznačně určena souřadnicemi x, y, z .

Poloha libovolného bodu na sféře je dána pouze úhly λ a φ , viz obr. 1.2. Průvodič r je pro všechny body na povrchu sféry stejný. Pokud středem koule proložíme libovolnou rovinu, vznikne na povrchu koule tzv. *hlavní kružnice*. Jednou z hlavních kružnic je i rovník, který vznikne průsečíkem základní roviny s povrchem koule. Osa z protne kouli ve dvou protilehlých bodech, *pólech*. Oběma póly lze vést libovolné množství hlavních kružnic, které kolmo protínají rovník a nazývají se *poledníky*. V případě zeměpisných souřadnic je základní rovinou rovina rovníku a základní směr je určen průsečíkem základního (nultého) poledníku s rovníkem. Podobně můžeme sférické souřadnice použít i k určování poloh nebeských objektů. Konkrétně v astronomii se jedná o určení polohy průmětu planety, hvězdy apod. na nebeskou sféru.¹

Při určování poloh nebeských objektů můžeme použít několik různých souřadných systémů na kouli (které se budou lišit právě námi zvolenou základní rovinou a základním směrem). Vybíráme vždy takové, které se nejlépe hodí k řešení dané úlohy.

¹Nebeská (taky světová) sféra je myšlená koule s $r \rightarrow \infty$. Jedná se pouze o pomocnou konstrukci pro zavedení dvou astronomických úhlových (sférických) souřadnic a nemá nic společného se starověkou sférou stálic.



Obrázek 1.1: U pravouhlých souřadnic je poloha bodu H jednoznačně zadána třemi souřadnicemi x , y , z nebo pomocí dvou úhlů λ a φ a průvodičem r .

1.2 Souřadné systémy v astronomii

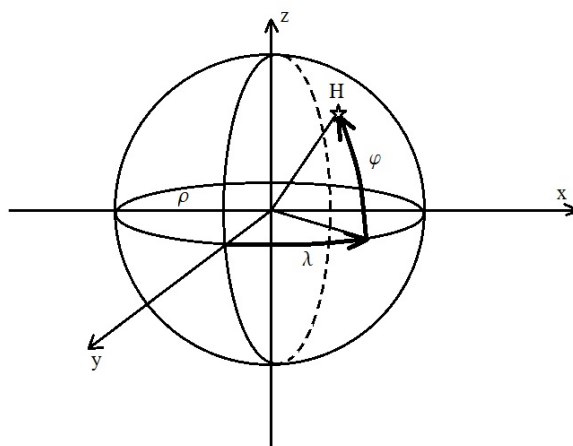
1.2.1 Obzorníkové (horizontální) souřadnice

Pro pozorovatele na Zemi se (v ideálním případě) okolní krajina jeví jako rovina, která zdánlivě protíná oblohu na horizontu. Tato *horizontální rovina* tvoří základní rovinu. Přímka vedená kolmo k horizontální rovině protne oblohu ve dvou bodech, v *zenitu* Z (nadhlavníku) a *nadiru* N_d (podnožníku). Zenitem a nadirem můžeme vést nekonečné množství hlavních kružnic, tzv. *výškových kružnic*. Jedna z nich protíná obzor v severním N a jižním bodě S a nazývá se místní poledník - *meridián*. Meridián tedy určuje směr severo-j jižní a právě směr k jižnímu bodu S je zvolen za základní směr a jižní bod se stává výchozím bodem horizontálních souřadnic.

K určení horizontálních souřadnic libovolné hvězdy H potřebujeme znát její úhlovou výšku h nad obzorem a azimut A , viz obr. 1.3. Úhlová výška h je úhel, který svírá spojnice pozorovatel – hvězda s rovinou obzoru. Výšky nad obzorem mají znaménko „+“, pod obzorem znaménko „-“. Hvězda nacházející se na obzoru bude mít úhlovou výšku $h = 0^\circ$, hvězda v zenitu $h = +90^\circ$ a hvězda v nadiru $h = -90^\circ$. Někdy se namísto úhlové výšky používá tzv. *zenitová vzdálenost* z , což je doplněk výšky do 90° ,

$$z = 90^\circ - h. \quad (1.1)$$

Azimut A je úhel, který svírá svislá rovina procházející zenitem a hvězdou s rovinou místního poledníku. Počítá se od jižního bodu S ($A = 0^\circ$) záporným směrem (po směru hodinových ručiček), tedy přes západ W ($A = 90^\circ$), sever N ($A = 180^\circ$) na východ E ($A = 270^\circ$). Průchod nebeského tělesa meridiánem se nazývá *kulminace*. Podle toho, na které straně se těleso nachází, rozlišujeme kulminaci horní (těleso se nachází nad jižním bodem, má azimut $A = 0^\circ$ a nejmenší zenitovou vzdálenost) a kulminaci spodní (těleso se nachází nad severním bodem, má azimut $A = 180^\circ$ a největší zenitovou vzdálenost). Příkladem horní kulminace může být Slunce v pravé poledne. Oproti tomu příkladem spodní



Obrázek 1.2: U sférických souřadnic je poloha libovolného bodu H na sféře dána úhly λ a φ . Průvodičem r je zbytečný. Pokud pro poloměr koule můžeme uvažovat $r \rightarrow \infty$, pak se pozorovatel nachází vždy ve středu sféry. Z tohoto vycházejí i astronomické souřadnice.

kulminace bude Slunce o půlnoci.

Nevýhodou obzorníkových souřadnic je, že se mění jak s časem, tak i s místem pozorování.

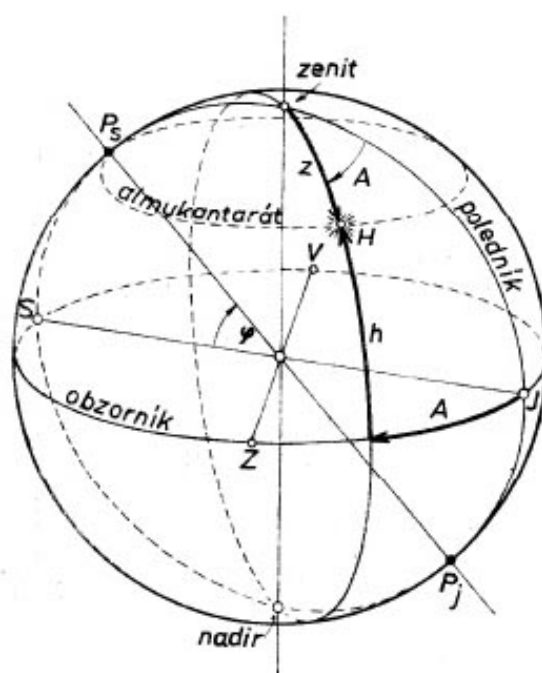
1.2.2 Rovníkové (ekvatoriální) souřadnice

Zemská rotační osa protíná nebeskou sféru v severním a jižním pólu (P_S, P_J). Oba póly leží na nebeském poledníku - *meridiánu*. Protože nebeská sféra má nekonečně velký poloměr, můžeme každým pozorovacím místem vést rovnoběžku se zemskou osou - světovou osu. Tato osa určuje polohu základní roviny - *roviny rovníku*, která je ke světové ose kolmá. Průsečík roviny rovníku s nebeskou sférou se nazývá *nebeský rovník (ekvátor)*. Severním a jižním pólem lze vést libovolné množství hlavních kružnic, tzv. *deklináčnů kružnic*; příkladem deklináčnů kružnic je i meridián. Podle toho, jak zvolíme základní směr, rozlišujeme dva typy rovníkových souřadnic:

Rovníkové souřadnice I. druhu

Základní rovinou je *rovina rovníku* a základní směr je průsečík rovníku s meridiánem, označený jako M . Od tohoto bodu M počítáme *hodinový úhel* t . Ten je definovaný jako úhel, který svírá deklináčnů kružnice proložená hvězdou s meridiánem. Hodinový úhel je obdobou azimutu a roste ve směru denního pohybu oblohy. Hvězdy procházející meridiánem mají $t = 0^\circ$. Hodinový úhel není pro daný objekt na obloze stále stejný, ale mění se s tím, jak se obloha otáčí, tedy jak s časem (rovnoměrně), tak i se zeměpisnou délkou pozorovacího místa. Vyjadřuje se buď v časové míře nebo ve stupních, přičemž platí:

$$\begin{aligned} 1^{\text{h}} &= 15^\circ & 1^\circ &= 4^{\text{min}} \\ 1^{\text{min}} &= 15' & 1' &= 4^{\text{s}} \\ 1^{\text{s}} &= 15'' & 1'' &= 0,06^{\text{s}}. \end{aligned}$$



Obrázek 1.3: U obzorníkových souřadnic je základní rovinou rovina obzoru. Poloha libovolného bodu na sféře je dána úhlovou výškou h nad obzorem a azimutem A , který se počítá od jižního bodu J směrem na západ. Zdroj: Široký, Široká: *Základy astronomie v příkladech*.

Druhou souřadnicí je *deklinace* δ . Ta je definována jako úhel, který svírá spojnice pozorovatel – hvězda s rovinou rovníku, viz obr. 1.4. Od nebeského rovníku k severnímu pólu se deklinace značí kladně, sev. pól má $\delta = +90^\circ$, směrem k jižnímu pólu záporně, jižní pól má $\delta = -90^\circ$. Někdy se namísto deklinace používá pólová vzdálenost p , což je doplněk deklinace do 90° .

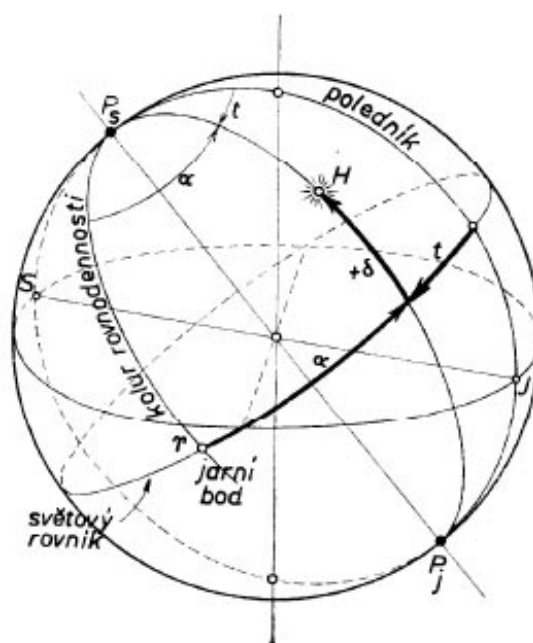
$$p = 90^\circ - \delta. \quad (1.2)$$

Deklinace je pro danou hvězdu stále stejná, nemění se ani s časem (pokud neuvažujeme precesi zemské osy), ani s místem pozorování.

Rovníkové souřadnice II. druhu

Základní rovinou je opět *rovina světového rovníku*. Za základní směr se u těchto souřadnic zvolil směr k tzv. *jarnímu bodu* Υ , jež leží na rovníku a sám se účastní denního rovnoměrného pohybu oblohy. V jarním bodě kde se Slunce nachází v okamžiku jarní rovnodennosti. Slunce se během roku zdánlivě pohybuje po obloze. Dráha, kterou urazí během roku na pozadí vzdálených hvězd, se nazývá *ekliptika* a protíná nebeský rovník ve dvou bodech, v jarním bodě Υ a podzimním bodě \sphericalangle . Rovina rovníku svírá s rovinou ekliptiky úhel $\varepsilon \doteq 23^\circ 27'$, který se nazývá *sklon ekliptiky*.

Vůči jarnímu bodu se určuje *rektascenze* α , která je definována jako úhel, který svírá deklinační kružnice proložená hvězdou s deklinační kružnicí procházející jarním bodem, tzv. *kolurem rovnodennosti*,



Obrázek 1.4: U rovníkových souřadnic je základní rovinou rovina rovníku. Podle zvoleného základního směru rozdělujeme rovníkové souřadnice I. a II. druhu. U rovníkových souřadnic I. druhu je základním směrem průsečík meridiánu M (na obrázku označen jako "poledník") s rovníkem. Od tohoto bodu počítáme hodinový úhel t . Druhou souřadnicí je deklinace δ , která je společná pro oba typy souřadnic. U souřadnic II. druhu je základním směrem směr k jarnímu bodu Υ . Od tohoto bodu se počítá rekascenze α , která se měří opačným směrem než hodinový úhel t . Zdroj: Široký, Šíroká: *Základy astronomie v příkladech*.

viz obr. 1.4. Rektascenze roste opačným směrem než azimut či hodinový úhel, měří se totiž proti směru denního pohybu oblohy (ze západu na východ) a vyjadřuje se buď v časové míře (od 0^h do 24^h) nebo ve stupních (od 0° do 360°).

Výhodou rovníkových souřadnic II. druhu je skutečnost, že se nemění s místem pozorování. S časem se mění jen velmi pomalu a rovnoměrně, díky posouvání jarního bodu po ekliptice (podrobněji v kapitole o precesi). Tato soustava souřadnic se proto hodí ke konstrukci astronomických map hvězdné oblohy a k vyznačení polohy dalších významných objektů na obloze (hvězdokupy, mlhoviny, planety, komety, ...).

1.2.3 Transformace mezi horizontálními a rovníkovými souřadnicemi

V astronomii se používá několik odlišných druhů souřadnic. Podle typu úlohy se pak rozhodneme, které souřadnice jsou pro její popis nejvhodnější. Občas ale potřebujeme přejít z jedné souřadné soustavy do druhé. K tomuto účelu se používají převodní vztahy mezi jednotlivými souřadnými systémy, které vycházejí z pravidel sférické trigonometrie. Nejčastěji je potřeba pro daný okamžik pozorování převést rovníkové souřadnice některé hvězdy do obzorníkových nebo naopak. Vždy k tomu potřebujeme znát zeměpisnou šířku φ daného místa a místní hvězdný čas Θ (pro danou zeměpisnou délku λ).

Hvězdný čas je hodinový úhel jarního bodu. V okamžiku svrchního průchodu jarního bodu meridiánem je $0^{\text{h}} 0^{\text{min}} 0^{\text{s}}$ hvězdného času. Vztah mezi hvězdným časem Θ , rektascenzí α hvězdy a jejím hodinovým úhlem t je

$$\Theta = \alpha + t. \quad (1.3)$$

Výpočet rovníkových souřadnic z obzorníkových:

$$\sin t \cos \delta = \sin A \cos h \quad (1.4)$$

$$\cos t \cos \delta = \sin h \cos \varphi + \cos A \cos h \sin \varphi \quad (1.5)$$

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \varphi \cos h \cos A. \quad (1.6)$$

Výpočet obzorníkových souřadnic z rovníkových:

$$\sin A \cos h = \sin t \cos \delta \quad (1.7)$$

$$\cos A \cos h = \cos t \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \quad (1.8)$$

$$\sin h = \cos t \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi \quad (1.9)$$

$$t = \Theta - \alpha. \quad (1.10)$$

Úhlová vzdálenost Δ dvou hvězd na sféře

Úhlovou vzdálenost Δ dvou hvězd na sféře, jež mají souřadnice (δ_1, α_1) a (δ_2, α_2) , určíme ze vztahu

$$\cos \Delta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (1.11)$$

1.2.4 Ekliptikální souřadnice

Ekliptikální souřadnice je vhodné použít při výpočtu drah těles v naší sluneční soustavě. Základní rovinou je *rovina ekliptiky*. Příímka vedená k ní kolmo protíná nebeskou sféru ve dvou protilehlých bodech, *pólech ekliptiky*. Jimi můžeme vést *šířkové kružnice*, podobně jako jsme nebeskými póly vedli deklinační kružnice. Po těchto kružnicích se měří *ekliptikální šířka* β , kladně k severnímu pólu ekliptiky, záporně k jižnímu (obdoba deklinace). Druhou souřadnicí je *ekliptikální délka* λ , která se měří od jarního bodu ve směru ročního zdánlivého pohybu Slunce, viz obr. 1.5.

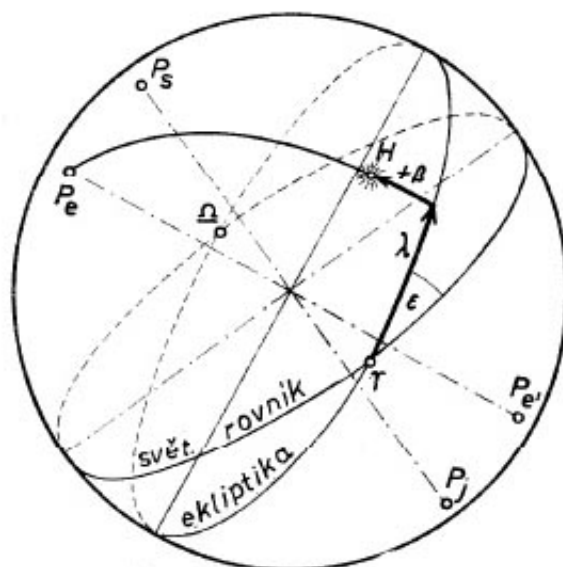
Transformace mezi ekliptikálními a rovníkovými souřadnicemi

Výpočet ekliptikálních souřadnic z rovníkových:

$$\sin \lambda \cos \beta = \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \quad (1.12)$$

$$\cos \lambda \cos \beta = \cos \delta \cos \alpha \quad (1.13)$$

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha. \quad (1.14)$$



Obrázek 1.5: U ekliptikálních souřadnic je základní rovinou rovina ekliptiky. Poloha bodu se určuje pomocí ekliptikální šířky β a ekliptikální délky λ . Zdroj: Široký, Široká: *Základy astronomie v příkladech*.

Výpočet rovníkových souřadnic z ekliptikálních:

$$\sin \alpha \cos \delta = \sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \quad (1.15)$$

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \lambda \quad (1.16)$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda, \quad (1.17)$$

kde ε je sklon ekliptiky ke světovému rovníku. Pro naše potřeby postačí brát její současnou střední hodnotu $\varepsilon \doteq 23^\circ 27''$. Díky nutaci zemské osy dochází k její pozvolné kvaziperiodické změně ve zlomcích úhlových minut.

1.2.5 Galaktické souřadnice

Tyto souřadnice jsou vhodné k popisu pohybu hvězd a struktury naší Galaxie.² Základní rovinou je *rovina Galaxie*, procházející Mléčnou dráhou. Protože pás Mléčné dráhy má jisté nepravidelnosti a není přesně ohraničený, byla rovina Galaxie stanovena mezinárodní úmluvou, ve které byly přesně určeny souřadnice galaktických pólů. Základním směrem je směr k předpokládanému středu Galaxie ležící v souhvězdí Střelce, kde se nachází výrazný rádiový zdroj Sgr A* ($\alpha = 17^{\text{h}} 45,7^{\text{min}}$, $\delta = -29^\circ 0'$). Galaktické souřadnice jsou *galaktická délka* l (měřená od základního směru podobně jako rektascenze, tj. proti směru hodinových ručiček) a *galaktická šířka* b (objekty nacházející se nad rovinou Galaxie mají $b > 0$, pod rovinou Galaxie $b < 0$).

²V zahraniční literatuře se místo Galaxie používá název Mléčná dráha pro celou naši Galaxii. My se však budeme držet české tradice a pod pojmem Mléčná dráha budeme rozumět toliko výrazný pás hvězd táhnoucí se přes celou noční oblohu.

1.3 Horní a dolní kulminace

Jak jsme se již zmínili v kapitole o obzorníkových souřadnicích, hvězda kulminuje, pokud prochází meridiánem. Podle toho, zda je její zenitová vzdálenost největší nebo nejmenší rozlišujeme kulminaci dolní a horní. Při horní kulminaci se může hvězda nacházet na dvou protilehlých stranách zenitu. Pokud má hvězda deklinaci δ větší než je zeměpisná šířka φ pozorovacího místa, vrcholí mezi zenitem a světovým pólem, viz obr. 1.6a. Její zenitová vzdálenost je pak

$$z_0 = \delta - \varphi. \quad (1.18)$$

Pokud pro hvězdu platí $\delta < \varphi$, pak vrcholí mezi zenitem a světovým rovníkem, viz obr. 1.6b. a pro její zenitovou vzdálenost platí:

$$z_0 = \varphi - \delta. \quad (1.19)$$

Při dolní kulminaci, viz obr. 1.6c, je zenitová vzdálenost

$$z_1 = 180^\circ - \varphi - \delta. \quad (1.20)$$

Hvězda, která se při dolní kulminaci na dané zeměpisné šířce nedostane pod obzor (nikdy zde nezapadá), patří mezi tzv. *cirkumpolární hvězdy*, viz obr. 1.6d. Ze vztahu (1.20) je zřejmé, že na zeměpisné šířce φ budou cirkumpolární všechny hvězdy, jejichž deklinace je $\delta > 90^\circ - \varphi$.

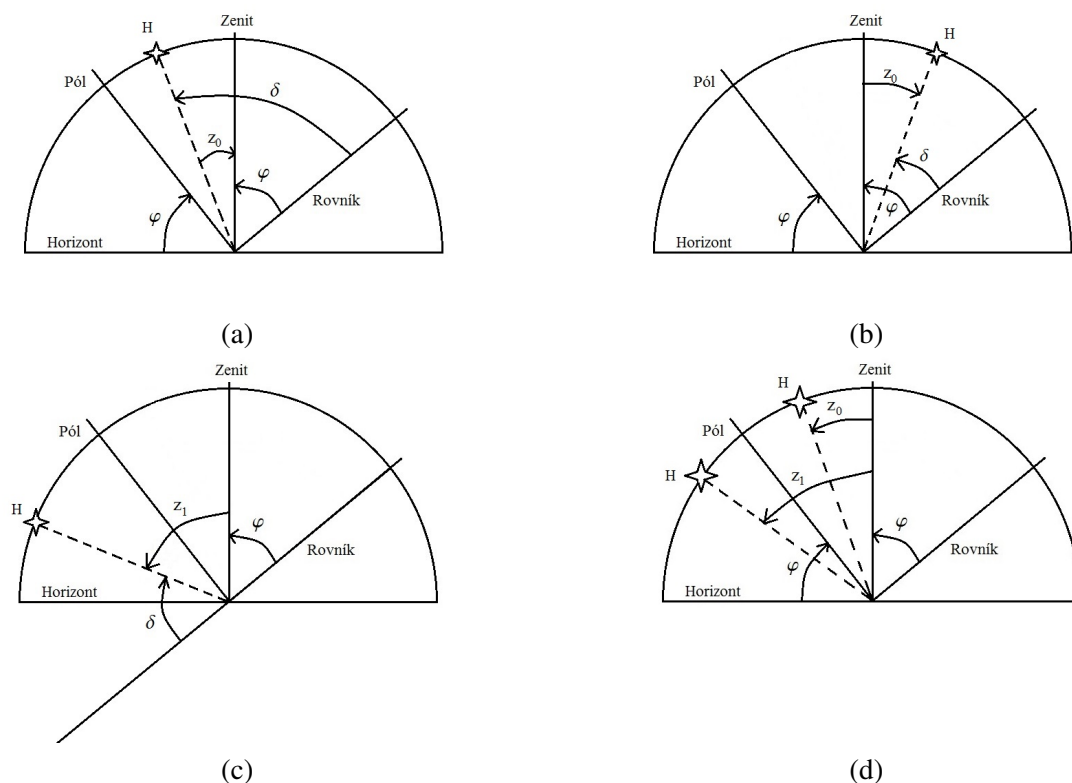
Pomocí zenitových vzdáleností při horní a dolní kulminaci můžeme určit zeměpisnou šířku φ pozorovacího místa:

$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}(z_1 + z_0), \quad \text{je-li } \delta > \varphi \quad (1.21)$$

$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}(z_1 - z_0), \quad \text{je-li } \delta < \varphi. \quad (1.22)$$

1.4 Úlohy

1. Rektascenze hvězdy je $\alpha = 14^{\text{h}} 30^{\text{min}}$. Určete její hodinový úhel t v $21^{\text{h}} 14^{\text{min}}$ hvězdného času.
[Po dosazení do (1.3) dostaneme: $t = 6^{\text{h}} 44^{\text{min}}$.]
2. Hodinový úhel hvězdy je $t = 14^{\text{h}} 22^{\text{min}}$. Rektascenze $\alpha = 13^{\text{h}} 2^{\text{min}}$. Určete hvězdný čas v okamžiku pozorování.
[$\Theta = 3^{\text{h}} 24^{\text{min}}$]
3. Určete hvězdný čas, je-li hodinový úhel hvězdy $t = 98^\circ 11' 15''$, měřeno směrem východním! Rektascenze hvězdy je $\alpha = 21^{\text{h}} 9^{\text{min}} 23^{\text{s}}$.
[$\Theta = 14^{\text{h}} 36^{\text{min}} 37,7^{\text{s}}$]
4. V kolik hodin hvězdného času byla hvězda s rektascenzí $\alpha = 158^\circ 27' 00''$ v dolní kulminaci?
[Hvězda v dolní kulminaci má hodinový úhel $t = 12^{\text{h}}$. Proto $\Theta = 22^{\text{h}} 33^{\text{min}} 48^{\text{s}}$.]



Obrázek 1.6: Na obrázcích je znázorněna horní a dolní kulminace hvězdy: a) v případě že se hvězda při horní kulminaci nachází mezi zenitem a pólem, b) nebo mezi zenitem a nebeským rovníkem. Na obr. c) je znázorněna situace při dolní kulminaci hvězdy a na obr. d) je situace kdy známe zenitové vzdálenosti jedné hvězdy při horní i dolní kulminaci a jak pomocí nich můžeme určit zeměpisnou šířku φ pozorovacího místa.

5. Rektascenze Vegy (α Lyr) je $\alpha = 18^{\text{h}} 37^{\text{min}}$. Určete její hodinový úhel v okamžiku horní kulminace jarního bodu.

[Při horní kulminaci se jarní bod nachází na meridiánu, což nastává pro hvězdný čas $\Theta = 0^{\text{h}} 0^{\text{min}} 0^{\text{s}}$. Pak $t = 5^{\text{h}} 23^{\text{min}}$.]

6. Rektascenze hvězdy Arcturus (α Boo) je $\alpha = 14^{\text{h}} 16^{\text{min}}$. Určete její hodinový úhel v okamžiku dolní kulminace jarního bodu.

[$t = 21^{\text{h}} 44^{\text{min}}$]

7. Hvězda Capella (α Aur) má rektascenzi $\alpha = 5^{\text{h}} 16^{\text{min}} 41^{\text{s}}$. Určete její hodinový úhel t v $4^{\text{h}} 8^{\text{min}}$ hvězdného času. Na které světové straně od meridiánu se hvězda nachází?

[$t = -1^{\text{h}} 8^{\text{min}} 41^{\text{s}}$. Hodinový úhel vyšel záporný, proto se hvězda nachází na východ od meridiánu.]

8. Hvězda Sírius (α CMa) má rektascenzi $\alpha = 6^{\text{h}} 45^{\text{min}}$. Určete její hodinový úhel t v okamžiku, kdy hodiny s hvězdným časem ukazují a) $18^{\text{h}} 45^{\text{min}}$, b) $6^{\text{h}} 45^{\text{min}}$. Popište, kde a proč se v těchto časech hvězda nachází.
- [a) $t = 12^{\text{h}}$, Sírius se nachází v dolní kulminaci, tzn. nad severním bodem, b) $t = 0^{\text{h}}$ Sírius se nachází v horní kulminaci, tedy nad jižním bodem.]
9. Rektascenze Capelly (α Aur) je $\alpha_C = 5^{\text{h}} 17^{\text{min}}$, Vegy (α Lyr) je $\alpha_V = 18^{\text{h}} 37^{\text{min}}$. Určete hodinový úhel Capelly v okamžiku: a) horní kulminace Vegy, b) dolní kulminace Vegy.
- [a) Při horní kulminaci Vegy je její hod. úhel $t_V = 0^{\text{h}} 0^{\text{min}} 0^{\text{s}}$, pak $\Theta = \alpha_V = 18^{\text{h}} 37^{\text{min}}$ a hod. úhel Capelly $t_C = 13^{\text{h}} 20^{\text{min}}$. b) Při dolní kulminaci Vegy je $t_V = 12^{\text{h}} 0^{\text{min}} 0^{\text{s}}$, pak $\Theta = 6^{\text{h}} 37^{\text{min}}$ a hod. úhel Capelly vychází $t_C = 1^{\text{h}} 20^{\text{min}}$.]
10. Rektascenze hvězdy Arcturus (α Boo) je $\alpha_A = 14^{\text{h}} 16^{\text{min}}$, hvězdy Deneb (α Cyg) je $\alpha_D = 20^{\text{h}} 41^{\text{min}}$. Určete hodinový úhel Arctura v okamžiku: a) horní kulminace Denebu, b) dolní kulminace Denebu.
- [a) $t_A = 6^{\text{h}} 25^{\text{min}}$, b) $t_A = 18^{\text{h}} 25^{\text{min}}$.]
11. Určete zenitovou vzdálenost a azimut Arctura (α Boo) pro zeměpisnou šířku $\varphi = 51^{\circ} 32' 00''$ ve $13^{\text{h}} 34^{\text{min}} 54^{\text{s}}$ hvězdného času. Rektascenze Arctura je $\alpha_A = 14^{\text{h}} 15^{\text{min}} 39,7^{\text{s}}$, deklinace $\delta_A = +19^{\circ} 10' 56,7''$.
- [Z rovnice (1.3) pro hvězdný čas vypočteme hodinový úhel, $t = 23^{\text{h}} 19^{\text{min}} 14,3^{\text{s}}$ a převedeme na stupně $t = 349^{\circ} 48' 34,5''$. Z převodních vztahů mezi rovníkovými a obzorníkovými souřadnicemi určíme výšku hvězdy h a azimut A . Konkrétně z (1.9) dostáváme $h = 56^{\circ} 40' 4,75''$, čemuž odpovídá $z = 33^{\circ} 19' 55,25''$.
- Z (1.7) dostáváme $\sin A \doteq -0,30409$. Protože azimut A může nabývat hodnot od 0° do 360° , není touto rovnicí jeho hodnota určena jednoznačně; potřebujeme určit ještě $\cos A$. Z (1.8) $\cos A \doteq 0,95257$.
- Jelikož $\sin A < 0$ a $\cos A > 0$ bude azimut ležet ve čtvrtém kvadrantu a tedy $A = 342^{\circ} 17' 47''$.]
12. Určete zenitovou vzdálenost a azimut Vegy (α Lyr) pro Opavu se zeměpisnou šířkou $\varphi = 49^{\circ} 57' 00''$ ve $13^{\text{h}} 34^{\text{min}} 54^{\text{s}}$ hvězdného času. Rektascenze Vegy je $\alpha = 18^{\text{h}} 36^{\text{min}} 56,3^{\text{s}}$, deklinace $\delta = +38^{\circ} 47' 1,3''$.
- [$t = 284^{\circ} 29' 25,5''$, $z = 52^{\circ} 46' 20''$, $A = 251^{\circ} 24' 53''$]
13. Určete rektascenzi a deklinaci hvězdy, která má v místě se zeměpisnou šířkou $\varphi = 55^{\circ} 46'$ v $11^{\text{h}} 11^{\text{min}} 36^{\text{s}}$ hvězdného času obzorníkové souřadnice $h = 40^{\circ} 44' 50''$, $A = 298^{\circ} 28' 50''$.
- [Z rovnice (1.6) určíme deklinaci: $\delta = 19^{\circ} 39' 27''$.
- Hodinový úhel t vypočítáme z rovnice (1.7): $t = -45^{\circ} 0' 4''$.
- Rektascenze se pak rovná $\alpha = \Theta - t = 14^{\text{h}} 11^{\text{min}}$.]
14. V kolik hodin bude 21. června v Olomouci zenitová vzdálenost Slunce $z = 53^{\circ} 08'$? Zeměpisná šířka Olomouce $\varphi = 49^{\circ} 36'$, deklinace Slunce 21. června v období letního slunovratu je $\delta = +23,5^{\circ}$.

[Nejdříve určíme pro požadovanou zenitovou vzdálenost úhlovou výšku Slunce. Z (1.9) vypočteme $\cos t \doteq 0,5$, čemuž odpovídají dvě hodnoty hodinového úhlu: $t = \pm 60^\circ$, neboli $t = \pm 4^h$.

Slunce se tedy bude nacházet v dané zenitové vzdálenosti, pokud jeho vzdálenost od meridiánu bude rovna $\pm 4^h$. Protože Slunce se nachází na meridiánu ve 12 hod, nastane tato situace v 8 a 16 hodin místního času.]

15. V místě se zeměpisnou šířkou $\varphi = 46^\circ 29'$ byla změřena zenitová vzdálenost hvězdy Sirius při horní kulminaci $z = 63^\circ 12'$. Určete deklinaci Síría.

[$\delta = -16^\circ 43'$.]

16. Určete zeměpisnou šířku místa, v němž hvězda Capella je při dolní kulminaci právě na obzoru. Deklinace hvězdy je $\delta = +45^\circ 59'$.

[Zenitová vzdálenost hvězdy při dolní kulminaci je dána relací (1.20). Nachází-li se hvězda při dolní kulminaci na horizontu, je $z_1 = 90^\circ$, pak $\varphi = 44^\circ 01'$.]

17. Určete zeměpisnou šířku místa, v němž hvězda Vega je při dolní kulminaci právě na obzoru. Deklinace hvězdy je $\delta = +38^\circ 47'$.

[$\varphi = 51^\circ 13'$.]

18. Pro které zeměpisné šířky bude Vega ze souhvězdí Lyry cirkumpolární? Její deklinace je $\delta = 38^\circ 47'$.

[$\varphi \geq 90^\circ - \delta$; $\varphi \geq 51^\circ 13'$.]

19. Pro které zeměpisné šířky bude hvězda Sheliak (β Lyr) cirkumpolární? Její deklinace je $\delta = +33^\circ 21' 45''$. Určete její zenitovou vzdálenost při horní i dolní kulminaci pro místo se zeměpisnou šířkou $\varphi = 70^\circ$. Rozhodněte, zda se hvězda při horní kulminaci nachází mezi nebeským rovníkem a zenitem nebo mezi severním nebeským pólem a zenitem.

[Hvězda bude cirkumpolární pro místa s $\varphi > 56^\circ 38' 15''$. Protože $\varphi > \delta$, kulminuje hvězda mezi zenitem a rovníkem a její zenitová vzdálenost při horní kulminaci bude $z_0 = 36^\circ 38' 15''$ a při dolní kulminaci $z_1 = 76^\circ 38' 15''$.]

20. Cirkumpolární hvězda má v horní kulminaci zenitovou vzdálenost $z_0 = 29^\circ 47'$, v dolní kulminaci $z_1 = 41^\circ 49'$, obě měřeny k severnímu bodu. Určete zeměpisnou šířku pozorovacího místa.

[Z (1.21) dostáváme $\varphi = 54^\circ 12'$.]

21. Hvězda Dubhe (α UMa) má v horní kulminaci zenitovou vzdálenost $z_0 = 11^\circ 48'$, v dolní kulminaci $z_1 = 68^\circ 18'$, obě měřeny k severnímu bodu! Určete zeměpisnou šířku pozorovacího místa.

[$\varphi = 49^\circ 57'$ (Opava).]

22. Určete zeměpisnou šířku Prahy, jestliže výška kulminujícího Arctura ze souhvězdí Pastýře činí v Praze $h = 59^\circ 21'$. Arctur má deklinaci $\delta = +19^\circ 10' 56,7''$.

[Nejdříve určíme zenitovou vzdálenost z_0 hvězdy v horní kulminaci. Z (1.19) pak dostáváme $\varphi = 49^\circ 49' 56,7''$.]

23. V Pardubicích byla změřena výška Capelly ze souhvězdí Vozky při horní kulminaci $h_1 = 85^\circ 55'$ na jihu a při dolní kulminaci $h_2 = 5^\circ 59'$ na severu. Odvoďte obecný vztah pro určení zeměpisné šířky pozorovacího místa pomocí úhlových výšek při dolní a horní kulminaci. Vypočtěte zeměpisnou šířku Pardubic.

[Pro horní a dolní kulminaci platí:

$$h_1 = 90^\circ - (\varphi - \delta), \quad (1.23)$$

$$h_2 = \varphi + \delta - 90^\circ. \quad (1.24)$$

Po odečtení h_2 od h_1 obdržíme pro φ vztah:

$$\varphi = \frac{180^\circ - (h_1 - h_2)}{2} = 50^\circ 2'.$$

24. Pozorovatel v Norském Bergenu změřil výšku hvězdy Algol (β Per) ze souhvězdí Persea při horní kulminaci $h_1 = 70^\circ 34'$ na jihu a při dolní kulminaci $h_2 = 11^\circ 21'$ na severu. Vypočtěte zeměpisnou šířku Bergenu.

[$\varphi = 60^\circ 23, 5'$.]

25. Jak vysoko se nachází Slunce v poledne v den letního slunovratu pro pozorovatele na rovníku, na obratníku Raka, na severním polárním kruhu a na severním pólu? Situaci pro každý případ načrtněte.

[Deklinace Slunce je v den letního slunovratu rovna $\delta_\odot = +23^\circ 27'$.

Pro pozorovatele na rovníku: zeměpisná šířka rovníku je $\varphi = 0^\circ$. Nebeský rovník se tedy nachází v zenitu, viz obr. 1.7a. Slunce je od nebeského rovníku vzdáleno $+23^\circ 27'$ směrem k severnímu bodu S, proto je jeho úhlová výška $h = 90^\circ - 23^\circ 27' = 66^\circ 33'$, ale měřeno od severního bodu!

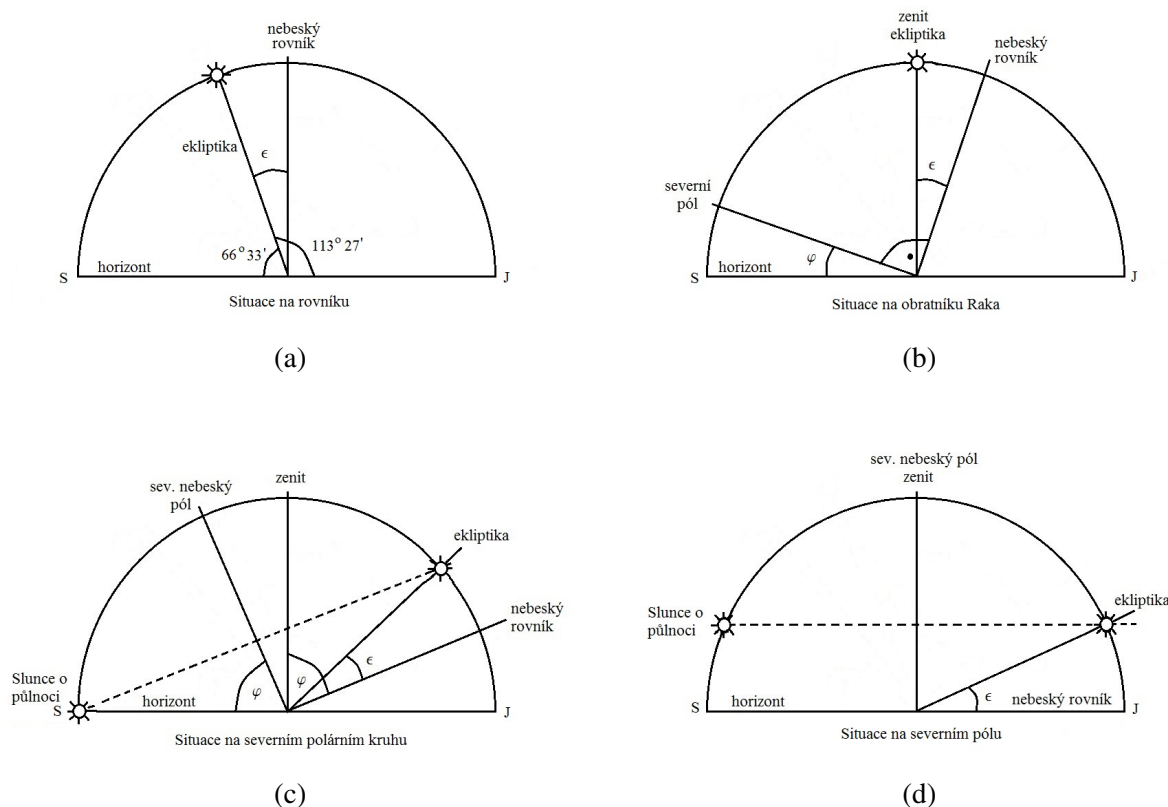
Pro pozorovatele na obratníku Raka je jeho zeměpisná šířka $\varphi = +23^\circ 27'$. Rovník se nachází $66^\circ 33'$ vysoko nad jižním bodem J a Slunce se tedy v poledne musí nacházet přímo v nadhlavníku (v zenitu), viz obr. 1.7b.

Pro pozorovatele na severním polárním kruhu je jeho zeměpisná šířka $\varphi = +66^\circ 33'$ a Slunce je v poledne $46^\circ 54'$ nad jižním bodem a o půlnoci se dotkne horizontu v severním bodě, aniž by zapadlo, viz obr. 1.7c.

Na severním pólu se Slunce nachází po celý den ve výšce $23^\circ 27'$ nad horizontem, viz obr. 1.7d.]

26. Vypočtěte hvězdný čas v okamžiku východu a západu hvězdy Prokyon (α CMi), jejíž souřadnice jsou $\alpha = 7^{\text{h}} 39^{\text{min}} 18, 1^{\text{s}}$, $\delta = 5^\circ 13' 30''$, na zeměpisné šířce 50° .

[Při východu a západu je úhlová výška hvězdy $h = 0^\circ$. Ze vztahu (1.9) určíme $\cos t$, čemuž odpovídají dvě hodnoty hodinového úhlu, $t = \pm 6^{\text{h}} 25^{\text{min}}$. Kladná hodnota odpovídá západu a záporná východu hvězdy. Východ hvězdy se bude nacházet na opačné straně od meridiánu. Pak s využitím (1.3) dostáváme pro hvězdný čas východu a západu $\theta_v = 1^{\text{h}} 14^{\text{min}}$ a $\theta_z = 14^{\text{h}} 4^{\text{min}}$.]



Obrázek 1.7: Na obrázcích jsou načrtnuty situace, kde se nachází Slunce v poledne (popřípadě i o půlnoci) v okamžiku letního slunovratu pro různá místa na Zemi: a) na rovníku, b) na obratníku Raka, c) na severním polárním kruhu a d) na severním pólu.

27. V místě se zeměpisnou šířkou $\varphi = 50^\circ$ je určitá hvězda nad obzorem 16 hodin. Určete deklinaci hvězdy a azimut místa západu.

[Od jihu k západu to hvězdě trvá polovinu doby strávené nad obzorem, tedy 8 hodin a proto hodinový úhel místa západu je $t = 120^\circ$.

Při západu hvězdy je její úhlová výška $h = 0^\circ$. Z rovnice (1.9) určíme deklinaci hvězdy: $\operatorname{tg} \delta = 0,419$, $\delta = 22^\circ 44' 11''$.

Protože azimut A může nabývat hodnot od 0° do 360° , musíme pro jeho jednoznačné určení znát $\sin A$ i $\cos A$, které určíme z rovnic (1.7) a (1.8): $\sin A \doteq 0,798$ a $\cos A \doteq -0,6008$. Protože $\sin A > 0$ a $\cos A < 0$, bude azimut ležet ve druhém kvadrantu, tedy $A = 126^\circ 55' 41''$.]

28. Pozorovatel v Českých Budějovicích určil zenitovou vzdálenost světového pólu $z = 41^\circ 01'$. Vypočtete a) zeměpisnou šířku φ Českých Budějovic, b) výšku Slunce v horní a dolní kulminaci pro dny: 21. března, 21. června a 21. prosince. Sklon ekliptiky k rovníku je $\varepsilon = 23,5^\circ$.

[a) $\varphi = 90^\circ - z = 48^\circ 59'$.

b) Dne 21. března se Slunce nachází na rovníku, deklinace Slunce tedy je $\delta = 0^\circ$. Úhlová výška Slunce při horní kulminaci je tedy $h_1 = 90^\circ - \varphi = 41^\circ 01'$ a úhlová výška Slunce při dolní kulminaci $h_2 = -h_1 = -41^\circ 01'$.

Dne 21. června se Slunce nachází na obratníku Raka, deklinace Slunce tedy je $\delta = \varepsilon$. Pro úhlovou výšku Slunce při horní kulminaci pak platí: $h_1 = 90^\circ - \varphi + \delta = 64^\circ 31'$. Pro dolní kulminaci: $\varphi + \delta - h_2 = 90^\circ$, odtud $h_2 = -17^\circ 31'$.

Dne 21. prosince se Slunce nachází na obratníku Kozoroha, deklinace Slunce tedy je $\delta = -\varepsilon$. Pro úhlovou výšku Slunce při horní kulminaci platí: $h_1 = 90^\circ - \varphi + \delta = 17^\circ 31'$. Pro dolní kulminaci: $\varphi + \delta - h_2 = 90^\circ$, odtud $h_2 = -64^\circ 31'$.]

29. Pozorovatel ve finských Helsinkách určil zenitovou vzdálenost světového pólu $z = 29^\circ 49'$. Vypočtete a) zeměpisnou šířku φ Helsinek, b) úhlovou výšku Slunce v horní a dolní kulminaci pro dny: 21. června a 21. prosince. Sklon ekliptiky k rovníku je $\varepsilon = 23,5^\circ$.

[a) $\varphi = 90^\circ - z = 60^\circ 11'$.

b) Dne 21. června: Úhlová výška Slunce při horní kulminaci: $h_1 = 53^\circ 19'$, při dolní kulminaci: $h_2 = -6^\circ 19'$.

Dne 21. prosince: Úhlová výška Slunce při horní kulminaci: $h_1 = 6^\circ 19'$, při dolní kulminaci: $h_2 = -53^\circ 19'$.]

1.5 Precese, nutace

Polohu tělesa na obloze rozlišujeme na pozorovanou (tu kterou opravdu naměříme) a skutečnou (pozorovanou polohu opravenou o jevy, které mohou skutečnou polohu tělesa na obloze pozměnit). V následujících kapitolách si přiblížíme jevy, které ovlivňují pozorované polohy těles na obloze. Z dlouhodobého hlediska jsou takovým jevem jsou takovými jevy precese a nutace zemské osy, dalšími jevy jsou paralaxa, aberace a atmosférická refrakce.

Precese je z fyzikálního pohledu krouživý pohyb osy rotujícího tělesa po plášti dvojkužele způsobený působením dvojice vnějších sil. Astronomickou precesi objevil již kolem roku 125 př.n.l. Hipparchos, když porovnával polohy nejjasnějších hvězd ve zvířetníku s polohami zaznamenanými astronomy před stoletím. Zjistil, že ekliptikální délky hvězd vesměs vzrostly a poznal, že tento nárůst je způsoben pohybem jarního bodu. Fyzikálně se tento jev podařilo vysvětlit až Newtonovi na základě jeho gravitačního zákona.

1.5.1 Lunisolární precese

Země není dokonalá koule, ale rotační elipsoid, který má v oblasti rovníku přebytky hmoty, na které působí rušivé síly - gravitační síly Měsíce a Slunce - a ty se snaží dostat rovník do oběžné roviny Měsíce a do ekliptiky, viz obr. 1.8a. V důsledku toho vykonává Země *precesní pohyb*, tzv. *lunisolární precesi*, při níž zemská osa opíše kužel jednou za tzv. *Platónský rok*, což je zhruba 25 800 let. Poloviční vrcholový úhel je roven sklonu rovníku vůči ekliptice ($\varepsilon \doteq 23,5^\circ$).

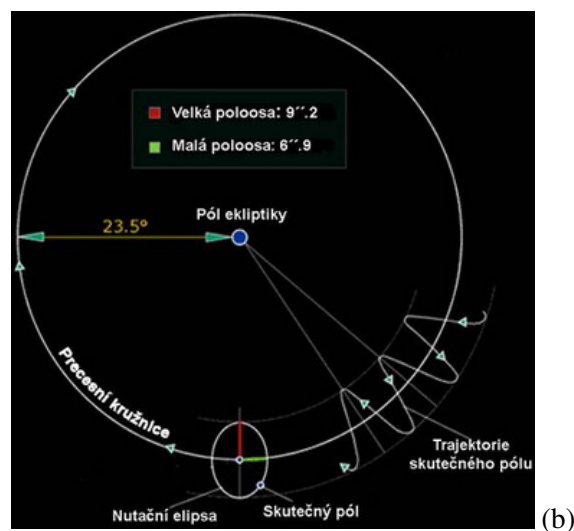
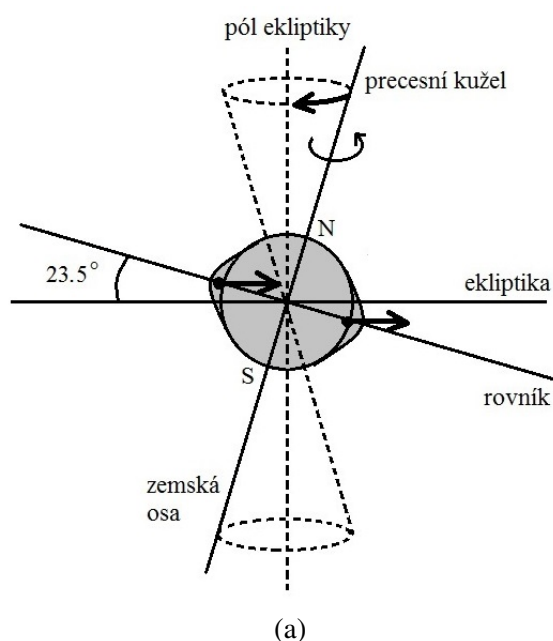
Vlivem precese se mění poloha světového pólu. Dnes je asi 1° od Polárky, za 12 000 let se světový pól posune do blízkosti hvězdy Vegy (αLyr). S pohybem zemské osy souvisí i změna polohy světového rovníku a tedy i jeho průsečíků s ekliptikou, tj. jarního a podzimního bodu. Ty se posouvají po ekliptice západním směrem, tedy proti zdánlivému ročnímu pohybu Slunce, rychlostí $50,377''/\text{rok}$.

1.5.2 Planetární precese

Planetární precese je způsobená gravitačním působením planet a mění polohu zemské dráhy. Tím vzniká periodická změna polohy ekliptiky na obloze! Za předpokladu pevného rovníku by planetární precese vedla k posuvu jarního bodu o $0,125''$ /rok v opačném směru než lunisolární precese.

1.5.3 Generální precese

Souhrné působení lunisolární a planetární precese se nazývá *generální precese* a posouvá jarní bod o $50,246''$ /rok proti zdánlivému pohybu Slunce. Za rok tedy Slunce neopíše plných 360° , ale $359^\circ 59' 9,754''$. Proto je *tropický rok* (doba mezi po sobě následujícími průchody Slunce jarním bodem) o něco kratší než *siderický rok* (plných 360°).



Obrázek 1.8: a) Precese zemské osy. Přitažlivé síly Měsíce a Slunce působí dvojicí sil na rovníkovou výduť Země a snaží se dostat rovník do oběžné roviny Měsíce a do ekliptiky. Osa Země vykonává precesní pohyb, při kterém opíše kužel jednou za 25 800 let (tzv. Platónský rok). b) Nutace zemské osy je periodické kolísání zemské osy překládající se přes precesní pohyb. Díky nutaci neopisuje zemská osa hladký povrch kuželu, ale nutace společně s precesí způsobuje „vlnivý“ pohyb zemské osy kolem pólu ekliptiky. Zdroj: <http://planety.astro.cz/zeme/1939-pohyby-zeme>.

1.5.4 Nutace

Z astronomického hlediska je nutace malé, téměř periodické kolísání rotační osy Země překládající se přes precesní pohyb. Je vyvoláno gravitačním působením Měsíce. Jeho rovina dráhy není totožná s rovinou ekliptiky, ale skloněná k ní o úhel $5,1^\circ$, a proto se neustále mění velikost a směr jeho gravitační síly. Průsečnice těchto dvou rovin, tzv. *uzlová přímka*, se otáčí s periodou 18,6 roku. Ve výsledku světový

pól opisuje kolem střední polohy dané precesí navíc nutační elipsu s velkou poloosou $a = 9,2''$ a malou $b = 6,9''$, viz obr. 1.8b.

1.5.5 Úlohy

1. Za jak dlouho opíše v důsledku precese světový pól úhel 5° ? Jak dlouhý je Platónský rok?
[Každý rok se jarní bod posune o $50,246''$. Úhel 5° opíše za $\frac{5^\circ}{50,246''} \doteq 358$ roků. Platónský rok je dlouhý $360^\circ/50,246'' = 25\,800$ roků.]

2. V nynější době je bod letního slunovratu v souhvězdí Blíženců. Kdy byl v tomto souhvězdí jarní bod?

[Vzdálenost jarního bodu od bodu letního slunovratu je přibližně 90° . Jarní bod tuto vzdálenost urazí za $90^\circ/50,246'' = 6\,448$ roků, tzn. přibližně kolem roku 4 500 př. n. l.]

3. Délka siderického roku je přibližně 365,256 dní. Určete délku tropického roku, víte-li, že se jarní bod posouvá po ekliptice v důsledku precese o $50,246''$ za rok vstříc Slunci.

[Tropický rok je doba za kterou se Slunce bude opět nacházet v jarním bodě. Slunce se za 1 den posune o úhel $360^\circ/365,256 = 3\,548''$. Jarní bod se za rok posune o $50,246''$ v opačném směru než se pohybuje Slunce, takže tropický rok bude kratší než siderický o dobu

$$\Delta t = \frac{50,246''}{3\,548''} = 0,014 \text{ dne.} \quad (1.25)$$

Délka tropického roku bude $365,256 - 0,014 = 365,242$ dne.]

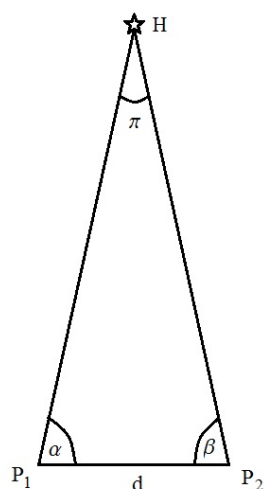
4. Regulus, nejjasnější hvězda v souhvězdí Lva, byla kdysi jednou ze 4 královských hvězd, které rozdělovaly rok na 4 roční období. Regulus označoval bod letního slunovratu. Před jakou dobou to bylo, když v současnosti bod letního slunovratu leží v souhvězdí Blíženců a má ekliptikální souřadnice: $\lambda = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$. Souřadnice Regula jsou $\alpha = 10^h 8^m$, $\delta = +11^\circ 58'$.

[Pomocí převodních vztahů mezi ekliptikálními a rovníkovými souřadnicemi určíme rovníkové souřadnice bodu, ve kterém se Slunce nachází v okamžiku letního slunovratu: $\alpha = 90^\circ = 6^h$, $\delta = +23^\circ 30'$. Nyní můžeme určit úhlovou vzdálenost Regula a bodu letního slunovratu ze vztahu (1.11). Po číselném vyjádření je $\Delta = 59,74^\circ$. Jarní bod se za 1 rok posune o $50,246''$. Regulus označoval bod letního slunovratu před přibližně 4 300 lety.]

5. Souhvězdí Raka bylo kdysi nejsevernějším souhvězdím zvířetníku. Nacházelo se v něm Slunce v okamžiku letního slunovratu. Proto se také nejsevernější rovnoběžka na Zemi, kde je Slunce jednou do roka v nadhlavníku (zenitu) nazývá *obratník Raka*. Kdy tomu tak bylo? Souřadnice bodu v souhvězdí Raka, v němž se Slunce nacházelo v okamžiku letního slunovratu, jsou $\alpha = 8^h 7^m$, $\delta = +20^\circ 14'$. V současnosti má bod letního slunovratu souřadnice: $\alpha = 90^\circ = 6^h$, $\delta = +23^\circ 30'$.

[Úhlová vzdálenost obou bodů $\Delta \doteq 30^\circ$. Jarní bod se o tuto vzdálenost posune za přibližně 2 150 let.]

6. V souhvězdí Panny dnes leží bod podzimní rovnodennosti. Odhadněte, bez použití kalkulátoru, kdy se v tomto souhvězdí nacházel bod letního slunovratu, který se dnes nachází v souhvězdí Blíženců.



Obrázek 1.9: Vzdálenost nedostupného bodu H můžeme určit pomocí měření dvou úhlů α a β ze dvou míst P_1 a P_2 . Spojnice těchto dvou bodů tvoří základnu trojúhelníku P_1, P_2, H , pomocí něhož můžeme určit paralaxu π bodu H . Paralaxa je tedy největší úhel, pod kterým je vidět základnu o délce d .

[Bod podzimní rovnodennosti je od bodu letního slunovratu vzdálen o 90° , tedy o čtvrtinu doby, kterou potřebuje jarní bod k vykonání celého oběhu (o čtvrtinu Platónského roku), což je 6 450 let.]

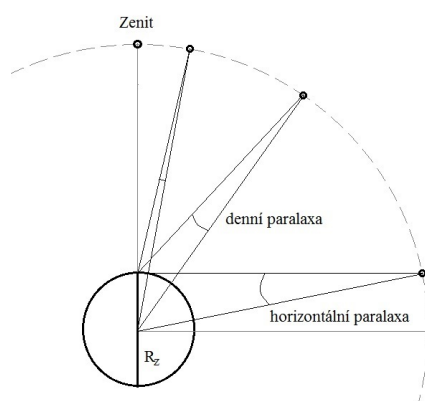
1.6 Paralaxa

Určování vzdáleností ve vesmíru (ať už blízkém či vzdáleném) patří k důležitým úkolům astronomie. Znalost skutečných vzdáleností nám umožnila udělat si správnou představu nejen o velikosti Slunce a celé sluneční soustavy, ale ze známých vzdáleností hvězd jsme schopni určit velikost i strukturu celé Galaxie a z proměřování vzdáleností ostatních galaxií odhalit další velkoškálové struktury ve vesmíru.

V této kapitole se budeme zabývat metodou měření vzdáleností vhodnou spíše pro blízké objekty. Při této metodě, převzaté z pozemské triangulace, měříme úhel π , v astronomi nazývaný *paralaxa*, o který se nebeské těleso H na obloze posune, budeme-li jej pozorovat ze dvou rozdílných míst P_1 a P_2 vzdálených od sebe o vzdálenost d , viz obr. 1.9. Změna zdánlivé polohy tělesa na obloze vůči vzdáleným hvězdám souvisí se změnou polohy pozorovatele. Ta může být způsobena buď rotací Země, pak se této paralaxe říká *denní*, nebo oběhem Země kolem Slunce, tzv. *roční paralaxa*, nebo pohybem celé sluneční soustavy, tzv. *sekulární paralaxa*.

1.6.1 Denní paralaxa

Zavádí se jen u těles ve sluneční soustavě, u hvězd je nulová, a je definována jako úhel, pod kterým bychom z nebeského tělesa viděli vzdálenost od středu Země k pozorovacímu místu na povrchu Země.



Obrázek 1.10: Denní paralaxa

Pokud se pozorované těleso nachází v zenitu, je jeho denní paralaxa nulová, pokud se nachází na obzoru, je jeho denní paralaxa maximální a nazývá se *horizontální paralaxa*, viz obr. 1.10.

1.6.2 Rovníková paralaxa

Průměr Země se pro různé geografické šířky liší, největší je na rovníku. Denní paralaxa měřená z rovníku se nazývá *rovníková paralaxa* a je definována jako úhel, pod kterým by z pozorovaného tělesa byl vidět rovníkový poloměr Země. *Rovníková horizontální paralaxa Slunce* p_{\odot} je úhel, pod kterým bychom viděli rovníkový poloměr Země ve vzdálenosti 1 au, kolmo k zornému paprsku, a činí $p_{\odot} = 8,79''$. Zkratka au označuje *astronomickou jednotku (astronomical unit)*, která je vhodná k vyjádření vzdáleností zejména ve sluneční soustavě; 1 au odpovídá střední vzdálenosti Země od Slunce.³ Obdobně existuje rovníková horizontální paralaxa Měsíce. Její hodnota činí $p_M = 57' 2,5''$.

Obecně je rovníková paralaxa p dána vztahem

$$p = \frac{R_Z}{r}, \quad [\text{rad}] \quad (1.26)$$

nebo v obloukových vteřinách

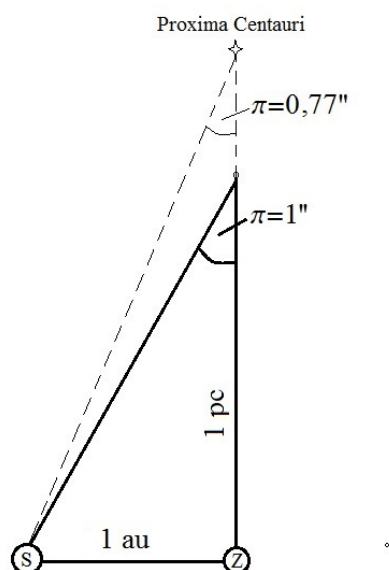
$$p = 206\,264,8 \frac{R_Z}{r}, \quad ['] \quad (1.27)$$

kde r je vzdálenost tělesa od Země [km] a R_Z je rovníkový poloměr Země [km], $R_Z \doteq 6\,378$ km.

1.6.3 Roční paralaxa

Rovníková paralaxa je měřitelná jen u těles v naší sluneční soustavě. Už u druhé nejbližší hvězdy (po Slunci) je rovníková paralaxa neměřitelná. Proto při určování paralax hvězd musíme použít základnu větší než jen rovníkový poloměr Země. K tomuto účelu se využívá oběhu Země kolem Slunce a za

³V roce 2012 byla na Valném shromáždění Mezinárodní astronomické unie (IAU) v Pekingu přijata rezoluce stanovující přesnou hodnotu astronomické jednotky: $1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700$ m.



Obrázek 1.11: Roční paralaxa

základnu se bere v podstatě hlavní poloosa dráhy Země kolem Slunce, (přesněji úsečka o velikosti 1 au). Díky oběhu Země kolem Slunce každá hvězda na obloze zdánlivě opisuje malou paralakční elipsu, jejíž hlavní poloosa odpovídá právě roční paralaxě hvězdy. U hvězd ležících blízko pólu ekliptiky získává elipsa tvar kružnice, u hvězd ležících v rovině ekliptiky přechází elipsa v úsečku. Roční paralaxa π je definována jako úhel, pod nímž bychom z dané hvězdy viděli úsečku o velikosti 1 au, viz obr. 1.11. S jejím zavedením souvisí i definice parseku. *Parsek* (1 pc $\doteq 3,0857 \cdot 10^{13}$ km) je definovaný jako vzdálenost, ze které bychom viděli poloměr zemské dráhy (1 au) pod úhlem 1 obloukové vteřiny.

Mezi vzdáleností r udávanou v parsecích a paralaxou π udávanou v obloukových vteřinách platí následující vztah:

$$\pi = \frac{1}{r}. \quad (1.28)$$

Nachází-li se hvězda ve vzdálenosti 10 pc, bude její paralaxa 0,1". S rostoucí vzdáleností hvězd jejich paralaxa klesá a protože i našemu Slunci nejbližší hvězda, Proxima Centauri, se nachází ve vzdálenosti větší než 1 pc, je paralaxa u všech hvězd menší než 1".

V současné době se hodnoty paralax a vzdáleností blízkých hvězd uvádí v katalogu HIPPARCOS (*High Precision Parallax Collecting Satellite*), který byl sestaven s pomocí dat naměřených družicí Hipparcos mezi lety 1989 - 1993.⁴

V tabulce 1.1 jsou uvedeny paralaxy a odpovídající vzdálenosti hvězd nejbližších našemu Slunci. V tabulce 1.2 jsou tyto hodnoty uvedeny pro 6 nejjasnějších hvězd na noční obloze.

⁴Tato družice byla pojmenována po slavném starořeckém astronomovi Hipparchovi, který žil ve 2. st. př.n.l. a sestavil první astronomický katalog hvězd, který po něm používal i Ptolemaios, či Edmond Halley.

Tabulka 1.1: Tabulka paralax a vzdáleností hvězd nejbližších našemu Slunci.

Hvězda	ozn. v HIPPARCOS	π ["]	r [pc]
α Centauri C (Proxima)	HIP 70 890	0,7723	1,295
α Centauri B	HIP 71 681	0,7421	1,348
α Centauri A (Toliman)	HIP 71 683	0,7421	1,348
Barnardova Šipka	HIP 87 937	0,5490	1,821
Wolf 359		0,4183	2,391
HD 95735	HIP 54 035	0,3924	2,548
Sirius B (α CMA B)		0,3792	2,637
Sirius A (α CMA A)		0,3792	2,637
V 1216 Sgr	HIP 92 403	0,3365	2,972

Tabulka 1.2: Tabulka paralax a vzdáleností pro šest nejjasnějších hvězd na naší noční obloze.

Hvězda	ozn. v HIPPARCOS	π ["]	r [pc]
Sírius (α CMA)	HIP 32 349	0,3792	2,63
Canopus (α Car)	HIP 30 438	0,0104	95,87
Arcturus (α Boo)	HIP 69 673	0,0889	11,25
α Centauri C (Proxima)	HIP 70 890	0,7723	1,29
Vega (α Lyr)	HIP 91 262	0,1289	7,76
Capella (α Aur)	HIP 24 608	0,0773	12,87

1.6.4 Úlohy

- Určete rovníkovou paralaxu Slunce.
[$p_{\odot} = 206\,264,8'' \frac{R_Z}{r} = 8,8''$.]
- Určete rovníkovou paralaxu Měsíce. Střední vzdálenost Měsíce od Země je $r = 384\,400$ km.
[$p_M = 57'2''$.]
- Určete rovníkovou paralaxu Slunce pro pozorovatele na Měsíci. Průměr Měsíce je $0,27 R_Z$. Vzdálenost Země - Měsíc zanedbejte.
[$p_{\odot} = 2,38''$.]
- Určete rovníkovou paralaxu Marsu, nachází-li se tato planeta nejbližše Zemi ve vzdálenosti $r = 0,378$ au.
[$p = 23,3''$]
- V opozici je vzdálenost Jupitera od Země $r = 6,28 \cdot 10^8$ km a jeho úhlový průměr je $47,2''$. Určete rovníkovou paralaxu Jupitera a jeho skutečný průměr.
[$p = 2,2''$, $D = 1,44 \cdot 10^5$ km]

6. Rovníková paralaxa Neptuna je $0,29''$. Určete jeho vzdálenost od Země.
[$r \doteq 30 \text{ au}$].
7. Rovníková paralaxa Měsíce je $57'2,7''$ a jeho úhlový poloměr je $15'32,6''$. Vypočtete vzdálenost r Měsíce od Země a poloměr R_M Měsíce v jednotkách Země.
[$r = 60,3 R_Z, R_M = 0,272 R_Z$]
8. Pod jakým úhlem bychom viděli poloměr: a) zemské dráhy; b) dráhy Pluta z hvězdy Proxima Centauri, jejíž roční paralaxa $\pi = 0,76''$? Poloměr dráhy Pluta je 39 au .
[a) $0,76''$, b) $29,6''$]
9. Jaká je roční paralaxa Síria, který je ve vzdálenosti $8,67 \text{ ly}$ od Slunce? Pro jednotku délky světelný rok platí: $1 \text{ ly} \doteq 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} \doteq 0,3065 \text{ pc}$.
[$\pi = 0,376''$]
10. Roční paralaxa Barnardovy šipky je $\pi = 0,545''$. Určete její vzdálenost od Slunce v parsecích a ve světelných rocích.
[$r = 1,83 \text{ pc} = 5,97 \text{ ly}$]
11. Pod jakým úhlem bychom viděli poloměr Jupiterovy dráhy $R = 5,2 \text{ au}$ z hvězdy, která je ve vzdálenosti 10 pc ?
[$0,52''$]
12. Dvojhvězda Sirius má roční paralaxu $0,376''$. Její složky jsou na obloze vzdáleny $7,6''$. Vypočítejte jejich skutečnou vzdálenost v astronomických jednotkách za předpokladu, že jejich spojnice jsou kolmé k zornému paprsku.
[$d \doteq 20 \text{ au}$]

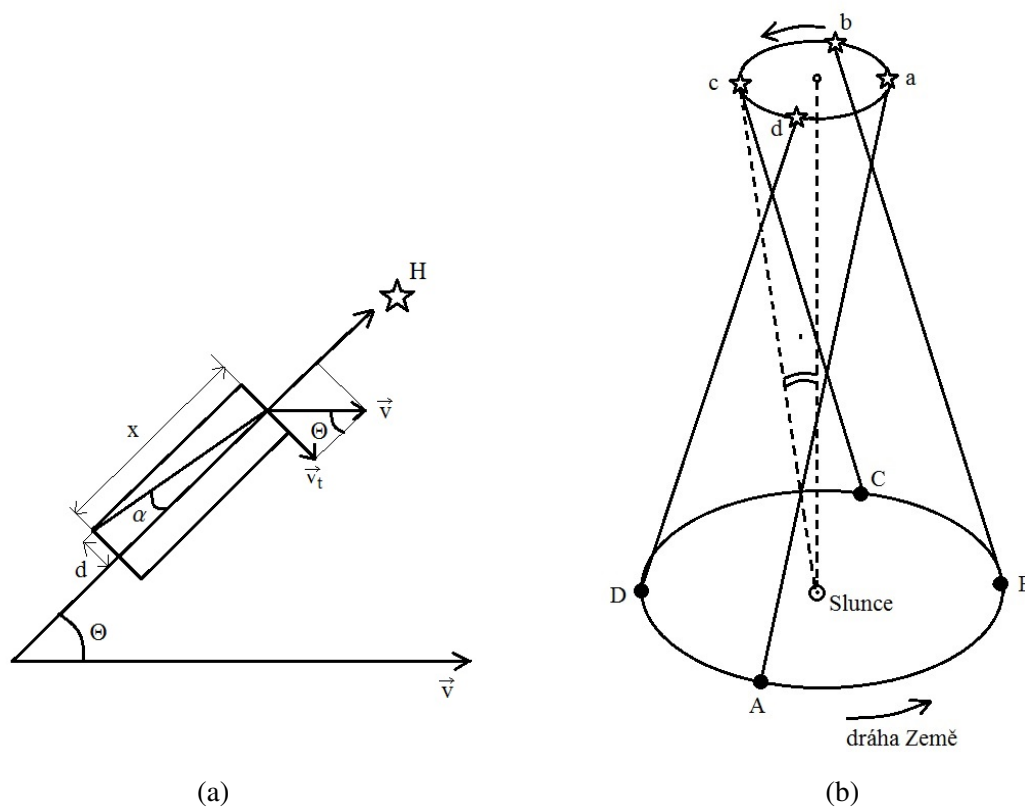
1.7 Aberace

Aberace je odchýlení světelného paprsku od původního směru podmíněné konečnou rychlostí světla a pohybem pozorovatele. Díky aberaci jsou všechny hvězdy na obloze posunuty ve směru pohybu Země. Okamžitý směr, kam se Země pohybuje, se nazývá APEX. Společně se Zemí se pohybují i dalekohledy na jejím povrchu, proto, abychom viděli hvězdu ve středu zorného pole dalekohledu, musíme dalekohled sklonit ve směru pohybu Země o úhel α , viz obr. 1.12a. Rozlišujeme čtyři druhy aberace:

1.7.1 Denní aberace

Denní aberace vzniká rotací Země kolem své osy. Země se otáčí od západu na východ a díky tomu se vlivem denní aberace zdají být všechny hvězdy při kulminaci posunuty od meridiánu na východ, takže hvězda zdánlivě kulminuje později než ve skutečnosti. Denní aberaci určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_R}{c} \cos \varphi, \quad (1.29)$$



Obrázek 1.12: a) Aberace: S pohybem Země je unášen i každý přístroj na povrchu Země (např. dalekohled). Abychom měli hvězdu v zorném poli, musíme odklonit dalekohled ve směru apexu o úhel α . b) Roční aberace: Vzniká pohybem Země kolem Slunce. Díky ní opisují hvězdy na obloze elipsu kolem středního místa.

kde $v_R = 465 \text{ m s}^{-1}$ je rychlost rotace Země na rovníku a φ je zeměpisná šířka pozorovacího místa. Denní aberace je maximální na rovníku, kde dosahuje hodnoty $\alpha_R = 0,32''$.

1.7.2 Roční aberace

Roční aberace vzniká pohybem Země kolem Slunce. Rychlost Země na dráze kolem Slunce je $v \doteq 30 \text{ km s}^{-1}$.

Roční aberaci určíme z obr. 1.12a.

$$\text{tg } \alpha = \frac{d}{x} = \frac{v_t t}{c t}. \quad (1.30)$$

Využitím $v_t = v \sin \Theta$ obdržíme:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v}{c} \sin \Theta, \quad (1.31)$$

kde $v = 30 \text{ km s}^{-1}$ a úhel Θ je vzdálenost hvězdy od apexu. Maximální roční aberaci $\alpha = 20,47''$ budou jevit hvězdy vzdálené od apexu 90° . Tato hodnota se nazývá *aberační konstanta*.

Hvězdy na obloze vlivem roční aberace opisují obecně malé elipsy, viz obr. 1.12b, s velkou poloosou rovnou vždy v/c a malou rovnou $(v/c) \sin \Theta$. Pro hvězdy na pólu ekliptiky ($\Theta = 90^\circ$) se elipsy změní na kružnice, naopak pro hvězdy ležící na ekliptice se elipsa změní v úsečku dlouhou $2v/c$.

1.7.3 Planetární aberace

Planetární aberace je úhel, o který se posune planeta, než od ní dorazí světlo k nám.

1.7.4 Sekulární aberace

Sekulární aberace je způsobena pohybem Sluneční soustavy v Galaxii. Tato aberace se v běžných příkladech nezapočítává.

1.7.5 Úlohy

1. Jak velká je denní aberace pro pozorovatele na zemském rovníku? Kolikrát je roční aberace větší než denní?

[Rychlost Země na dráze kolem Slunce je 30 km s^{-1} . Ze vztahu $\text{tg } \alpha = \frac{v}{c}$ určíme největší roční aberaci $\alpha_r \doteq 21''$. K určení denní aberace potřebujeme znát rychlost rotace Země na rovníku, ta je $v_R = 465 \text{ m s}^{-1}$. Denní aberace poté vychází $\alpha_d = 0,32''$. Roční aberace je přibližně 65 krát větší než denní.]

2. Vypočtete rychlost světla, víte-li, že maximální roční aberace je $\alpha = 20,47''$ a rychlost Země na dráze kolem Slunce $v = 29,77 \text{ km s}^{-1}$.

$[c = \frac{v}{\text{tg } \alpha} = 299\,975,73 \text{ km s}^{-1}.]$

3. Jak velká by byla roční aberace pro pozorovatele na Venuši? Vzdálenost Venuše od Slunce $r = 0,723 \text{ au}$, oběžná doba $P = 0,615$ roku.

[Uvažujme dráhu Venuše jako kruhovou, pak rychlost oběhu Venuše je $v = 35,134 \text{ km s}^{-1}$. Roční aberace pak vychází $\alpha = 24''$.]

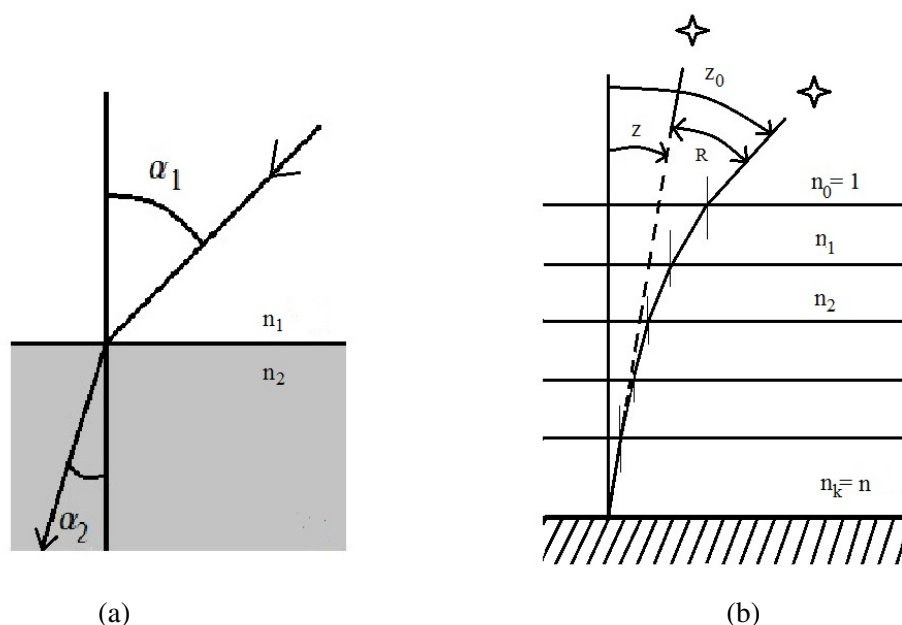
4. Jak velká by byla denní a roční aberace pro pozorovatele na rovníku Jupitera? Poloměr Jupitera $R = 71\,400 \text{ km}$, doba rotace kolem osy $T = 9^{\text{h}} 50^{\text{min}}$, vzdálenost Jupitera od Slunce $r = 778 \cdot 10^6 \text{ km}$, oběžná doba $P = 4\,333$ dní.

[a) denní aberace:

Rychlost rotace Jupitera je $v = \frac{2\pi R}{T} = 12,672 \text{ km s}^{-1}$ a denní aberace je $\alpha = 8,7''$.

b) roční aberace:

Rychlost planety při oběhu kolem Slunce za předpokladu kruhové dráhy je $v = \frac{2\pi r}{P} = 13,057 \text{ km s}^{-1}$. Roční aberace je $\alpha = 9''$.]



Obrázek 1.13: a) Lom světla. b) Vznik refrakce: Paprsek dopadající na rozhraní dvou různých prostředí pod určitým úhlem se na rozhraní těchto dvou prostředí láme. V případě atmosférické refrakce si můžeme atmosféru rozdělit na pomyslné vrstvy se stále větší hustotou směrem k zemskému povrchu. Paprsek pak přichází z opticky řidšího do opticky hustšího prostředí a láme se ke kolmici. Pozorovateli se pak zdá, že se hvězda nachází na obloze výše, než ve skutečnosti je.

1.8 Refrakce

Atmosférická refrakce je odchylka světelného paprsku způsobená lomem světla procházejícího zemskou atmosférou. Paprsek přicházející z hvězdy prochází mnoha vrstvami atmosféry než dopadne na zemský povrch. Na každém rozhraní prochází paprsek z prostředí opticky řidšího do prostředí opticky hustšího a dochází tak k lomu ke kolmici. Výsledně pak paprsek na povrch dopadá pod jiným úhlem než do atmosféry vstupuje a pozorovateli se hvězda jeví výše nad obzorem než by odpovídalo její skutečné poloze, viz obr. 1.13b.

Rozdíl mezi skutečnou zenitovou vzdáleností z_0 a pozorovanou zenitovou vzdáleností z je úhel refrakce R , pro nějž platí:

$$z_0 - z = R. \quad (1.32)$$

Pro lom světla na rozhraní dvou prostředí platí (obr. 1.13 a):

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (1.33)$$

Rozdělíme-li zjednodušeně atmosféru na k planoparalelních vrstev (obr. 1.13b), pak pro jednotlivá rozhraní můžeme psát:

$$\begin{aligned}
n_0 \sin \alpha_0 &= n_1 \sin \alpha_1 \\
n_1 \sin \alpha_1 &= n_2 \sin \alpha_2 \\
n_2 \sin \alpha_2 &= n_3 \sin \alpha_3 \\
&\vdots \\
n_{k-1} \sin \alpha_{k-1} &= n_k \sin \alpha_k \equiv n \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Po dosazení za $n_0 = 1$ a dále z rovnice (1.32) obdržíme:

$$\sin(R + z) = n \sin z \tag{1.35}$$

Po rozepsání:

$$\sin R \cos z + \sin z \cos R = n \sin z. \tag{1.36}$$

Protože úhel R je obecně velmi malý a tudíž $\cos R \approx 1$, $\sin R \approx R$, pro velikost refrakce R hvězdy s pozorovanou zenitovou vzdáleností z přibližně píšeme:

$$R \approx (n - 1) \operatorname{tg} z. \tag{1.37}$$

Tento vztah platí uspokojivě pro zenitové vzdálenosti $z < 70^\circ$.

Pro $z > 70^\circ$ platí přesnější relace, zohledňující závislost indexu lomu na teplotě a tlaku:

$$R = \frac{p}{273 + t} \cdot 0,00452^\circ \operatorname{tg} z, \tag{1.38}$$

kde p je tlak v hPa, t je teplota ve $^\circ\text{C}$ a R vychází v obloukových vteřinách. U obzoru je refrakce kolem $35'$.

Refrakce proto ovlivňuje i východy a západy těles. Pokud bychom refrakci neuvažovali, měla by nebeská tělesa při svém východu nebo západu úhlovou výšku $h = 0^\circ$. Ve skutečnosti je však tato výška $h = -0^\circ 35'$. Refrakce totiž zdánlivě zvyšuje výšku tělesa nad obzorem, proto v okamžiku jeho východu nebo západu je toto těleso ještě nebo už zhruba $35'$ pod obzorem. Dosazením do rovnic (1.6) a (1.9) obdržíme relace pro azimut A a hodinový úhel t v okamžiku skutečného východu a západu tělesa:

$$\cos A = \operatorname{tg}(-0^\circ 35') \operatorname{tg} \varphi - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}, \tag{1.39}$$

$$\cos t = \frac{\sin(-0^\circ 35')}{\cos \varphi \cos \delta} - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \tag{1.40}$$

Pro Slunce a Měsíc se jako okamžik východu a západu bere okamžik, kdy se jejich horní okraj dotkne obzoru. Protože úhlový poloměr obou těles je přibližně $16'$, je skutečná výška středu těchto těles $-35' - 16' = -51'$. Azimut A a hodinový úhel t východu nebo západu Slunce či Měsíce určíme ze vztahu:

$$\cos A = \operatorname{tg}(-0^\circ 51') \operatorname{tg} \varphi - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}, \tag{1.41}$$

$$\cos t = \frac{\sin(-0^\circ 51')}{\cos \varphi \cos \delta} - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \tag{1.42}$$

1.8.1 Úlohy

1. Výška hvězdy nad obzorem byla změřena při tlaku $p = 986,6$ hPa a teplotě $t = -10^\circ\text{C}$. Naměřená výška nad obzorem je $h = 25^\circ 15' 00''$. Jaká je skutečná výška hvězdy?

[Zenitová vzdálenost hvězdy je $z = 64^\circ 45'$. Skutečná zenitová vzdálenost $z_0 = R + z = 64^\circ 47' 10''$. Úhlová výška hvězdy je $h = 25^\circ 12' 50''$.]

2. Změřená zenitová vzdálenost hvězdy β UMi byla při horní kulminaci $z_1 = 24^\circ 2' 8''$, při dolní kulminaci $z_2 = 53^\circ 51' 51''$. Obě měřeny k severu! Barometrický tlak v okamžiku pozorování byl 1 000 hPa, teplota vzduchu $t = +20^\circ\text{C}$. Určete zeměpisnou šířku místa a deklinaci hvězdy s ohledem na refrakci.

[Pro horní kulminaci nejdříve určíme $R_1 = 24,7''$. Skutečná zenitová vzdálenost hvězdy při horní kulminaci je pak $z_{01} = R_1 + z_1 = 24^\circ 2' 32,7''$.

Analogicky vypočítáme refrakci pro hvězdu při dolní kulminaci: $R_2 = 1' 16''$. Skutečná zenitová vzdálenost hvězdy při dolní kulminaci je pak $z_{02} = R_2 + z_2 = 53^\circ 53' 7''$.

Pro horní a dolní kulminaci platí pro zenitové vzdálenosti hvězd vztahy:

$$\begin{aligned} z_{01} &= \delta - \varphi \\ z_{02} &= 180^\circ - \delta - \varphi \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic získáme výsledný vztah pro φ

$$\varphi = 90^\circ - \frac{z_{01} + z_{02}}{2} = 51^\circ 2' 10''.$$

Deklinace bude $\delta = z_{01} + \varphi = 74^\circ 59' 1''$.]

3. Zenitová vzdálenost horního okraje Slunce $z = 64^\circ 55' 33''$ byla změřena při tlaku 1 013,3 hPa a teplotě $t = 0^\circ\text{C}$. Zdánlivý poloměr Slunce je $15' 15''$. Určete skutečnou zenitovou vzdálenost středu Slunce.

[Skutečná zenitová vzdálenost horního okraje slunečního disku:

$z_{\text{okr}} = R + z = 2' 9'' + 64^\circ 55' 33'' = 64^\circ 57' 42''$. Zenitová vzdálenost středu slunečního disku:

$z_{\text{str}} = z_{\text{okr}} + 15' 15'' = 65^\circ 12' 57''$.]

4. Rovníkové souřadnice hvězdy π Scorpii jsou $\alpha = 15^{\text{h}} 57^{\text{min}}$, deklinace $\delta = -26^\circ 00'$. Vypočtěte hvězdný čas v okamžiku východu a západu této hvězdy na zeměpisné šířce $\varphi = 48^\circ$ a) bez opravy na refrakci, b) s opravou na refrakci. O kolik se vlivem refrakce prodlouží doba, po kterou je hvězda nad obzorem?

[a) Pokud refrakci zanedbáváme, nachází se hvězda při svém východu nebo západu přímo na horizontu a její úhlová výška je tedy $h = 0^\circ$.

Ze vztahu (1.9) vypočítáme hodinový úhel západu hvězdy $t_z = 57^\circ 12' 8'' = 3^{\text{h}} 48^{\text{min}} 48,5^{\text{s}}$ a východu hvězdy $t_v = 20^{\text{h}} 11^{\text{min}} 11,5^{\text{s}}$.

Hvězdný čas v okamžiku západu hvězdy bude $\Theta_z = t_z + \alpha \doteq 19^{\text{h}} 46^{\text{min}}$, v okamžiku východu hvězdy $\Theta_v = t_v + \alpha \doteq 12^{\text{h}} 8^{\text{min}}$.

b) Pokud uvažujeme refrakci, nachází se hvězda při svém východu nebo západu ještě pod horizontem. Její skutečná úhlová výška je $h = -0^\circ 35'$. Dosazením do rovnice (1.40) obdržíme hodinový úhel západu hvězdy $t_z = 58^\circ 21' 12'' = 3^h 53^{\text{min}} 25^{\text{s}}$, východu $t_v = 20^h 6^{\text{min}} 35^{\text{s}}$.

Hvězdný čas v okamžiku západu hvězdy $\Theta_z = t_z + \alpha \doteq 19^h 50^{\text{min}}$, v okamžiku východu hvězdy $\Theta_v = t_v + \alpha \doteq 12^h 4^{\text{min}}$.

S přihlédnutím na refrakci hvězda vychází přibližně o 4 minuty dřív a zapadá přibližně o 4 minuty později. Doba, po kterou je hvězda nad obzorem, se tak vlivem refrakce prodlouží zhruba o 8 minut.]

5. Vypočtete délku dne pro datum 1. ledna na zeměpisné šířce $\varphi = 50^\circ$ a) bez opravy na refrakci, b) s opravou na refrakci. Deklinace Slunce v tento den je $\delta_\odot = -23^\circ 6'$. O kolik se prodlouží délka dne započítáním refrakce?

a) Bez opravy na refrakci:

Po dosazení do (1.9) obdržíme $t_z = 60^\circ 1' 7'' = 4^h 0^{\text{min}} 4,5^{\text{s}}$ a $t_v = 19^h 59^{\text{min}} 55,5^{\text{s}}$. Doba strávená nad obzorem: $2t = 8^h 0^{\text{min}} 9^{\text{s}}$.

b) S opravou na refrakci:

Hodinový úhel určíme z rovnice (1.42). Po číselném dosazení: $t = 61^\circ 9' 15'' = 4^h 4^{\text{min}} 37^{\text{s}}$. Doba strávená nad obzorem: $2t = 8^h 9^{\text{min}} 14^{\text{s}}$. Den se prodlouží o $9^{\text{min}} 5^{\text{s}}$.]

6. Vypočtete délku dne a azimut východu a západu Slunce s opravou na refrakci pro dny 1. ledna ($\delta_\odot = -23^\circ 6'$) a 21. června ($\delta_\odot = +23^\circ 30'$) pro místo se zeměpisnou šířkou $\varphi = 50^\circ$.

[Pro den 1. ledna:

a) Délka dne opravená o refrakci vyšla v minulém příkladě $2t = 8^h 9^{\text{min}} 14^{\text{s}}$.

b) Azimut východu a západu opravený o refrakci určíme z rovnice (1.41). Po číselném dosazení vyjde azimut západu $A_z = 53^\circ 35' 43''$ a azimut východu $A_v = 306^\circ 22' 17''$.

Pro den 21. června:

a) Délka dne opravená o refrakci: $2t = 16^h 23^{\text{min}}$.

b) Azimut východu a západu opravený o refrakci: $A_z = 129^\circ 38' 30''$ a $A_v = 230^\circ 21' 30''$.]

2

Sluneční soustava

2.1 Mechanika Sluneční soustavy

Sluneční soustava je jednou z částí naší Galaxie. Slunce obíhá kolem centra Galaxie ve vzdálenosti 25 000 – 28 000 ly a jeden oběh vykoná za 226 miliónů let. Samotné Slunce tvoří více než 99,866% hmotnosti celé sluneční soustavy. Svou hmotností tedy značně převyšuje ostatní objekty sluneční soustavy a jeho gravitace ovlivňuje celou sluneční soustavu. Zbýlých 0,133% připadá na planety a jiná tělesa. Naše sluneční soustava je tvořena 8 planetami, několika trpasličími planetkami, desítkami měsíců a satelitů, milióny asteroidů a Trans-Neptunických těles a miliardami komet a meteoroidů. Hranice mezi jednotlivými typy těles nejsou zcela zřetelné. Neustálé objevování stále nových objektů sluneční soustavy vedlo k tomu, že v roce 2006 Mezinárodní Astronomická Unie (IAU) definovala tři kategorie těles: planety, trpasličí planetky a malá tělesa sluneční soustavy.

2.1.1 Planety

K zařazení tělesa do kategorie *planet* musí splňovat tři podmínky: a) musí obíhat okolo Slunce, b) musí mít dostatečnou hmotnost na to, aby dosáhlo přibližně kulového tvaru (tvar odpovídající hydrostatické rovnováze), c) musí vyčistit okolí své dráhy. Od roku 2006 má naše sluneční soustava jen 8 planet. První čtyři: Merkur, Venuše, Země, Mars se nazývají *terestrické planety*, mají pevný povrch a velmi podobné rozměry, od 5 000 km do 12 000 km a hustotu (4 000 – 5 000) kg m⁻³. Další planety: Jupiter, Saturn, Uran a Neptun se nazývají *plynnými obry*. Jejich hustota je (1 000 - 2 000) kg m⁻³ a rozměry jsou o řád větší než u terestrických planet.

2.1.2 Trpasličí planetky

Pluto se od roku 2006 řadí mezi nový druh vesmírných těles, tzv. *trpasličí planetky*. Pro zařazení tělesa do skupiny trpasličích planetek musí těleso splňovat 4 podmínky: 1) musí obíhat kolem Slunce, 2) musí mít dostatečnou hmotnost na to aby dosáhlo přibližně kulového tvaru (tvar odpovídající hydrostatické rovnováze), 3) nevyčistilo okolí své dráhy a 4) není měsícem (satelitem). Tuto novou skupinu společně s Plutem tvoří i Ceres, Eris, Haumea a Makemake.

2.1.3 Malá tělesa sluneční soustavy

Další skupinou objektů tvoří *malá tělesa sluneční soustavy*, které zahrnují malá zrnka mezihvězdného prachu (s typickými rozměry $\sim 0,1 \mu\text{m}$), meteorická tělesa pocházející z komet a planetek a mající nepravidelný tvar a rozměry od μm až po km, planetky, malé satelity (měsíce) a kometární jádra s typickými rozměry kolem 10 km. K 22.červnu 2014 je počet katalogizovaných planetek 399 306 (Zdroj: <http://astronomia.zcu.cz/planety/planetky/1815-seznam-planetek>). Největší počet se jich nachází v pásu mezi Marsem a Jupiterem, v tzv. *hlavním pásu planetek*. Ten sahá do vzdálenosti od 2 au do 4 au. Patří k nim například: Palas, Juno, Vesta, Ida, Mathylde. Jen několik procent z nich se nachází za drahou Neptunu, ve vzdálenostech 30 – 50 au, tvořící tzv. Kuiperův pás. Označují se jako transneptunická tělesa (TNO). Odhaduje se, že takovýchto těles o průměru větším než 100 km se zde nachází více než 70 000.

Satelit je těleso obíhající primární těleso tak, že centrum hmotnosti (barycentrum) leží pod povrchem primárního tělesa. Pokud barycentrum leží vně primárního tělesa, mluvíme o *binárním systému*. Např. v systému Země-Měsíc leží barycentrum pod povrchem Země, proto Měsíc tvoří satelit Země. V systému Pluto-Charon leží barycentrum nad povrchem Pluta, proto o této dvojici mluvíme jako o binárním systému.

2.2 Keplerovy zákony

Na základě přesných pozorování planety Mars, která provedl Tycho Brahe v 16. století, se podařilo německému astronomovi Johannu Keplerovi vyslovit 3 zákony, kterými se řídí pohyb planet okolo Slunce.

2.2.1 I. Keplerův zákon - zákon drah

Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách (málo odlišných od kružnic), v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.

První zákon popisuje tvar drah planet, viz obr. 2.1. Jedná se o elipsy s malou výstředností (excentricitou) e , která je definována jako poměr vzdálenosti ε ohniska od středu elipsy a hlavní poloosy a . Tato excentricita se nazývá *numerická*:

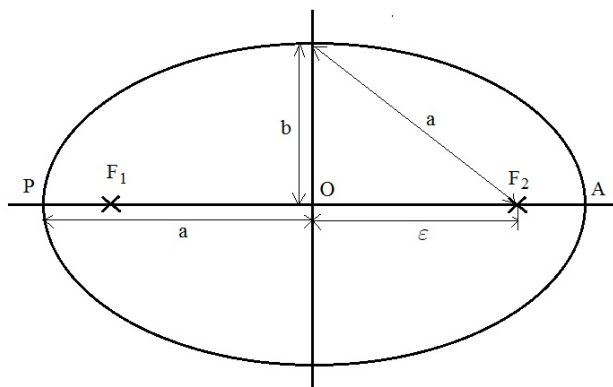
$$e = \frac{\varepsilon}{a} \quad (2.1)$$

Vzdálenost ε se označuje jako *lineární excentricita* a dá se vyjádřit vztahem

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (2.2)$$

kde a , b jsou velká a malá poloosa elipsy. Velikost e určuje tvar dráhy takto:

$$\begin{array}{ll} e = 0 & \text{pro kružnici} \\ 0 < e < 1 & \text{pro elipsu} \\ e = 1 & \text{pro parabolu} \\ e > 1 & \text{pro hyperbolu} \end{array}$$



Obrázek 2.1: Elipsa je charakterizována velkou poloosou a a malou poloosou b . Vzdálenost libovolného ohniska F_1 , F_2 od středu elipsy O se nazývá lineární excentricita ε . Pokud se v ohnisku F_1 nachází Slunce, pak bod P se nazývá perihéliem (přísluním) a bod A aféliem (odsluním) dráhy.

2.2.2 II. Keplerův zákon - zákon ploch

Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejné.

Průvodič r je úsečka spojující planetu se Sluncem. Protože plocha opsaná průvodičem za 1 s je plošná rychlost, může mít II. Keplerův zákon i toto znění: *Plošná rychlost planety je konstantní.* II. Keplerův zákon je znázorněn na obr. 2.2 vybarvenými plochami, které jsou vždy stejné pro tentýž časový úsek. Postupná rychlost planety je největší v perihéliu P a nejmenší v aféliu A . Spojnice periheliu a afelu se nazývá *přímka apsid*. Vzdálenost planety v přísluní je

$$r_p = a - \varepsilon = a(1 - e) \quad (2.3)$$

a v odsluní

$$r_a = a + \varepsilon = a(1 + e). \quad (2.4)$$

2.2.3 III. Keplerův zákon

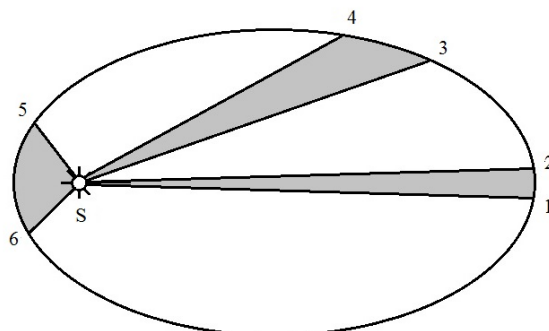
Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je úměrný poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.

Označme si oběžnou dobu Země T_1 a velkou poloosu její dráhy a_1 , pro libovolnou planetu označíme odpovídající veličiny T_2 , a_2 . Pak podle III. Keplerova zákona platí:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.5)$$

Přesné znění III. Keplerova zákona bylo nalezeno až po objevení Newtonova gravitačního zákona a je ve tvaru:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{M_\odot + m_1}{M_\odot + m_2}, \quad (2.6)$$



Obrázek 2.2: II. Keplerův zákon: Plocha opsaná průvodičem planety mezi body 1 a 2 je stejná jako mezi body 3 a 4 nebo 5 a 6 za stejný čas.

kde M_{\odot} je hmotnost Slunce a m_1, m_2 jsou hmotnosti planet. Protože i největší planeta naší sluneční soustavy, Jupiter, má pouhou tisícinu hmotnosti Slunce, můžeme v tomto vztahu hmotnosti planet zanedbat.

Zcela obecně platí rovnice:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2 M_1 + m_1}{T_2^2 M_2 + m_2}, \quad (2.7)$$

kde a_1, T_1, M_1, m_1 se vztahují na jednu dvojici těles a a_2, T_2, M_2, m_2 na druhou.

2.2.4 Úlohy

1. Určete v jakém poměru je největší rychlost planety Merkur (v perihéliu) k nejmenší rychlosti (v aféliu). Excentricita dráhy Merkura $e = 0,2$.

[Vzdálenost Merkura v aféliu je $r_a = a + \varepsilon = a(1 + e)$, v perihéliu $r_p = a - \varepsilon = a(1 - e)$. Protože v perihéliu i aféliu je rychlost planety kolmá na průvodič, můžeme použít zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru:

$$r_a m v_a = r_p m v_p \quad (2.8)$$

odtud

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + e}{1 - e} = 1,5] \quad (2.9)$$

2. Najděte poměr postupných rychlostí planet Země a Venuše za předpokladu, že obě planety obíhají kolem Slunce po kruhových drahách s poloměry $r_1 = 150 \cdot 10^6$ km a $r_2 = 108 \cdot 10^6$ km.

[Z III. Keplerova zákona po dosazení za $T = \frac{2\pi r}{v}$ obdržíme

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 0,85] \quad (2.10)$$

3. Brooksova kometa se pohybuje po eliptické dráze s excentricitou $e = 0,5$. Srovnajte její lineární a úhlovou rychlost v perihéliu a aféliu.

[V perihéliu je $r_p = a(1 - e) = 0,5 a$, v aféliu je $r_a = a(1 + e) = 1,5 a$. Ze zákona zachování momentu hybnosti obdržíme $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = 3$. Pro poměr úhlových rychlostí: $\frac{\omega_p}{\omega_a} = \left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2 = 9$.]

4. Halleyova kometa se pohybuje po eliptické dráze, jejíž excentricita je $e = 0,967$. Srovnajte její lineární a úhlovou rychlost v perihéliu a aféliu.

[Poměr lineární rychlosti v perihéliu a aféliu: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} = 59,6$, poměr úhlových rychlostí: $\frac{\omega_p}{\omega_a} = \left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2 = 3553$]

5. Postupná rychlost komety Honda-Mrkos-Pajdušáková je v aféliu 10 krát menší než v perihéliu. Jaká je excentricita její dráhy?

[$e = 0,82$]

6. Planetka Hermes se pohybuje kolem Slunce po dráze s velkou poloosou $a = 1,29$ au a excentricitou $e = 0,475$. Určete: a) její oběžnou dobu, b) nejmenší vzdálenost od Slunce, c) největší vzdálenost od Slunce, d) délku malé poloosy.

[a) $T = 1,46$ roku, b) $r_p = 0,68$ au, c) $r_a = 1,90$ au, d) malou poloosu určíme ze vztahu $a^2 = b^2 + \varepsilon^2$, kde $\varepsilon = e a$ je tzv. lineární excentricita. Po číselném dosazení obdržíme $b = 1,14$ au.]

7. Trpasličí planeta Eris se pohybuje kolem Slunce po dráze s velkou poloosou $a = 67,6$ au a excentricitou $e = 0,44$. Určete: a) její oběžnou dobu, b) nejmenší vzdálenost od Slunce, c) největší vzdálenost od Slunce.

[a) $T = 555,8$ roku, b) $r_p = 37,8$ au, c) $r_a = 97,3$ au]

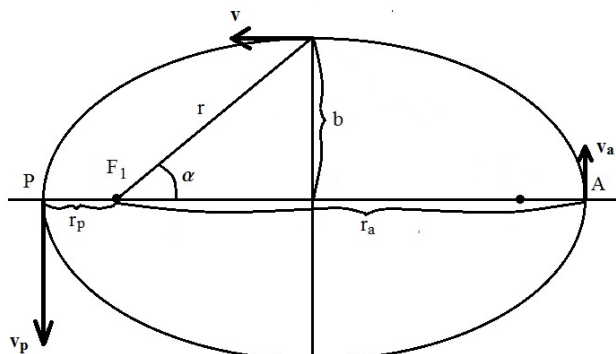
8. Dokažte, že rychlost tělesa pohybujícího se po elipse, je v bodě, jenž je průsečíkem vedlejší poloosy elipsy a trajektorie tělesa, rovna geometrickému průměru nejmenší a největší rychlosti na dráze.

[Označme v_a a r_a rychlost tělesa v aféliu a jeho vzdálenost od ohniska, v_p a r_p rychlost tělesa v perihéliu a vzdálenost perihélia od ohniska, v rychlost tělesa v průsečíku vedlejší poloosy s elipsou, jak je vidět na obr. 2.3.

Ze zákona zachování momentu hybnosti dostaneme

$$\vec{r}_p \times m\vec{v}_p = (\vec{r} \times m\vec{v}) \quad (2.11)$$

$$\vec{r}_a \times m\vec{v}_a = (\vec{r} \times m\vec{v}). \quad (2.12)$$



Obrázek 2.3: Znárodnění vektoru postupné rychlosti v závislosti na poloze tělesa na dráze.

Pro absolutní hodnoty:

$$|\vec{r}_p \times m\vec{v}_p| = m|\vec{r}_p||\vec{v}_p| \sin 90^\circ = m r_p v_p \quad (2.13)$$

$$|\vec{r}_a \times m\vec{v}_a| = m|\vec{r}_a||\vec{v}_a| \sin 90^\circ = m r_a v_a \quad (2.14)$$

$$|\vec{r} \times m\vec{v}| = m|\vec{r}||\vec{v}| \sin \alpha = m v b, \quad (2.15)$$

kde $r \sin \alpha = b$.

Připomeňme, že vektor rychlosti v průsečíku vedlejší poloosy s elipsou není kolmý na průvodič tělesa! Rovnice navzájem vynásobíme a podělíme druhou mocninou hmotnosti:

$$r_p v_p r_a v_a = v^2 b^2. \quad (2.16)$$

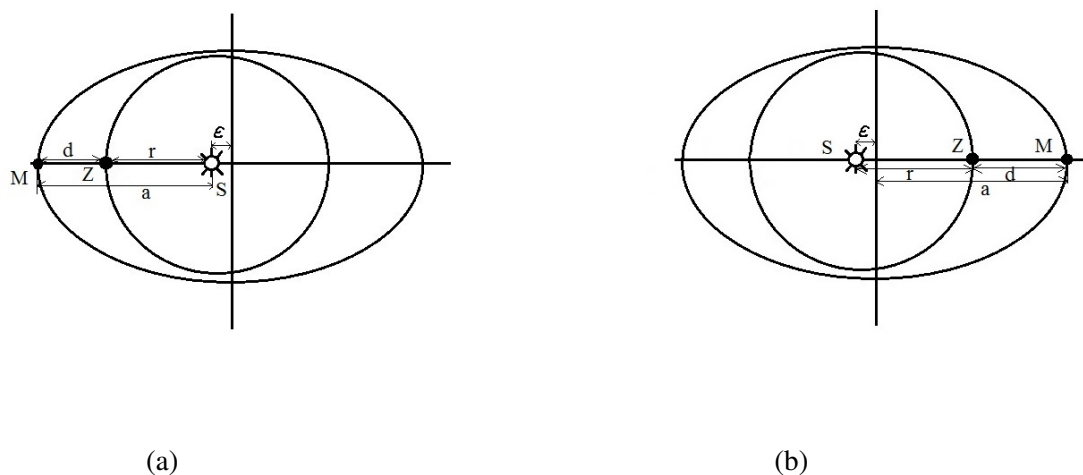
Po dosazení za r_p , r_a a využitím rovnosti $b^2 = a^2(1 - e^2)$ obdržíme

$$v = \sqrt{v_p v_a}. \quad (2.17)$$

9. Velká poloosa Marsovy dráhy je $a = 227,8 \cdot 10^6$ km, excentricita $e = 0,0934$. Vypočítejte vzdálenost Marsu od Země při opozici, je-li Mars: a) v perihéliu, b) v eféliu. Dráhu Země považujte za kruhovou, s poloměrem $r = 149,6 \cdot 10^6$ km. Sklon Marsovy dráhy zanedbejte.

[Z obr. 2.4 lze snadno vyčíst že pro Mars v opozici platí v případě za a) $d = a - \varepsilon - r = 57,0 \cdot 10^6$ km a za b) $d = a + \varepsilon - r = 99,6 \cdot 10^6$ km.]

10. Jak dlouho by padal Měsíc na Zemi, kdyby se jeho pohyb náhle zastavil? Oběžná doba Měsíce je 27,3 dne.



Obrázek 2.4: Schematické znázornění pro případ, kdy je Mars M v opozici (pro pozorovatele na Zemi se nachází na opačné straně než Slunce) a nachází se zároveň: a) v perihéliu své dráhy, b) v aféliu své dráhy. Dráha Země Z je považována za kruhovou.

[Uvažujme, že by se dráha Měsíce po jeho zastavení proměnila ve velmi protáhlou elipsu, s velkou poloosou rovnou polovině vzdálenosti Země-Měsíc, $a = \frac{r}{2}$. Apogeum dráhy Měsíce by se nacházelo v bodě, v němž se pohyb Měsíce zastavil, perigeum by bylo totožné se Zemí. Oběžnou dobu T jeho nové dráhy pak vypočítáme z III. Keplerova zákona,

$$\frac{T_0^2}{r^3} = \frac{T^2}{a^3} \quad (2.18)$$

kde T_0 je původní oběžná doba Měsíce, r je vzdálenost Země-Měsíc. Odtud

$$T = \sqrt{\frac{T_0^2}{8}} = T_0 \sqrt{\frac{1}{8}}. \quad (2.19)$$

Měsíc při svém pádu na Zemi vykoná jen polovinu oběhu, proto doba, ze kterou dopadne na Zemi je rovna polovině oběžné doby, tedy $t = \frac{T}{2}$. Po číselném dosazení: $t = 4,8$ dne.]

11. Jak dlouho by padala Země na Slunce, kdyby se náhle zastavila na své dráze?

[64,5 dne]

12. Pomocí přesného znění III. Keplerova zákona vypočtete hmotnost planety Jupiter v jednotkách hmotnosti Slunce. Hmotnost Země zanedbejte. Oběžná doba Jupitera je $T_1 = 4\,332,6$ dne, oběžná doba Země $T_2 = 365,26$ dne, velká poloosa Jupiterovy dráhy $a_1 = 5,2028$ au.

[Z přesného znění III. Keplerova zákona rce.(2.6) vyjádříme m_1 (přičemž hmotnost Země m_2 zanedbáváme)

$$m_1 = \frac{a_1^3 T_2^2 - a_2^3 T_1^2}{a_2^3 T_1^2} M_\odot. \quad (2.20)$$

Po číselném dosazení vyjde $m_1 = 0,00096 M_\odot = \frac{1}{1042} M_\odot$.]

13. Měsíc Charon obíhá kolem Pluta ve vzdálenosti $a_{\text{Ch}} = 19\,640$ km s oběžnou dobou $T_{\text{Ch}} = 6,39$ dne. Poloměr Pluta je $R_{\text{P}} = 1\,150$ km, poloměr Charonu $R_{\text{Ch}} = 600$ km. Za zjednodušujícího předpokladu, že obě tělesa mají stejnou hustotu, určete jejich hmotnosti.

[Z III. Keplerova zákona

$$\frac{T_{\text{Ch}}^2}{a_{\text{Ch}}^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa(M_{\text{P}} + M_{\text{Ch}})}, \quad (2.21)$$

určíme celkovou hmotnost soustavy Pluto - Charon

$$M_{\text{P}} + M_{\text{Ch}} = 1,47 \cdot 10^{22} \text{ kg}. \quad (2.22)$$

Za předpokladu, že jejich hustoty jsou stejné, dostaneme pro poměr jejich hmotností vztah $\frac{M_{\text{P}}}{M_{\text{Ch}}} = \left(\frac{R_{\text{P}}}{R_{\text{Ch}}}\right)^3 = 7,04$. Když známe jejich celkovou hmotnost, snadno dopočítáme $M_{\text{P}} = 1,287 \cdot 10^{22}$ kg a $M_{\text{Ch}} = 1,828 \cdot 10^{21}$ kg.]

14. O kolik by se prodloužila oběžná doba Jupitera, kdyby byla jeho hmotnost zanedbatelně malá? Hmotnost Jupitera je $\frac{1}{1047} M_\odot$, oběžná doba je 4 332,6 dní.

[Vydeme z přesného znění III. Keplerova zákona. Označíme-li skutečnou oběžnou dobu Jupitera T_1 , novou oběžnou dobu při zanedbatelné hmotnosti Jupitera jako T_2 , pak za předpokladu, že se velká poloosa jeho dráhy nezmění, dostaneme:

$$1 = \frac{T_1^2 M_\odot + m}{T_2^2 M_\odot}. \quad (2.23)$$

Po dosazení za $m = \frac{1}{1047} M_\odot$ dostaneme pro oběžnou dobu T_2

$$T_2 = T_1 \sqrt{1 + \frac{1}{1047}} = 1,000477 T_1. \quad (2.24)$$

Prodloužení oběžné doby $T_2 - T_1 = 0,000477 T_1 = 2,07$ dne.]

15. Vypočtete hmotnost Marsu v jednotkách hmotnosti Země z pohybu Marsova měsíce Deimose, který obíhá kolem Marsu ve vzdálenosti $r_1 = 23,5 \cdot 10^3$ km a má oběžnou dobu $T_1 = 1,262$ dne. Odpovídající hodnoty pro Měsíc jsou $r_2 = 384,4 \cdot 10^3$ km, $T_2 = 27,32$ dne. Hmotnost obou měsíců zanedbejte.

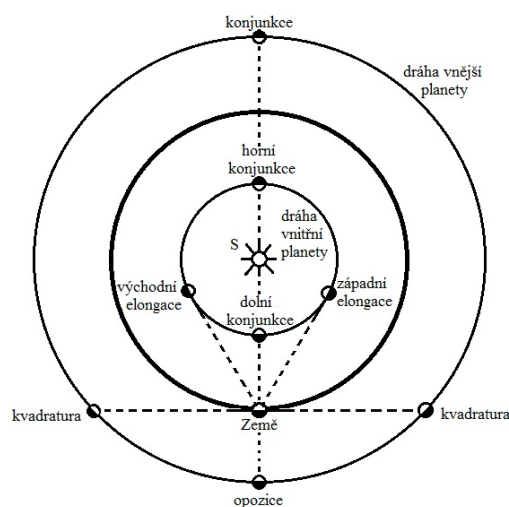
[Z obecného tvaru III. Keplerova zákona (2.7):

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2 M_1 + m_1}{T_2^2 M_2 + m_2} \quad (2.25)$$

kde index "1" se vztahuje na dvojici Mars - Deimos, index "2" na dvojici Země - Měsíc. Po číselném dosazení: $M_1 = 0,107 M_2$.]

16. Šestý Jupiterův měsíc má oběžnou dobu 251 dní, jeho vzdálenost od středu Jupitera je $11,5 \cdot 10^6$ km. Vypočtete hmotnost Jupitera v jednotkách hmotnosti Země, je-li vzdálenost Země - Měsíc 384 400 km a oběžná doba Měsíce 27,3 dne. Hmotnosti obou měsíců zanedbejte.

[$M_{\text{J}} = 317 M_{\text{Z}}$.]



Obrázek 2.5: Aspekty planet.

2.3 Aspekty planet

Existují některé významné polohy planet vůči Slunci a Zemi, tzv. *aspekty planet*. Patří mezi ně konjunkce, opozice, elongace a kvadratura.

2.3.1 Konjunkce

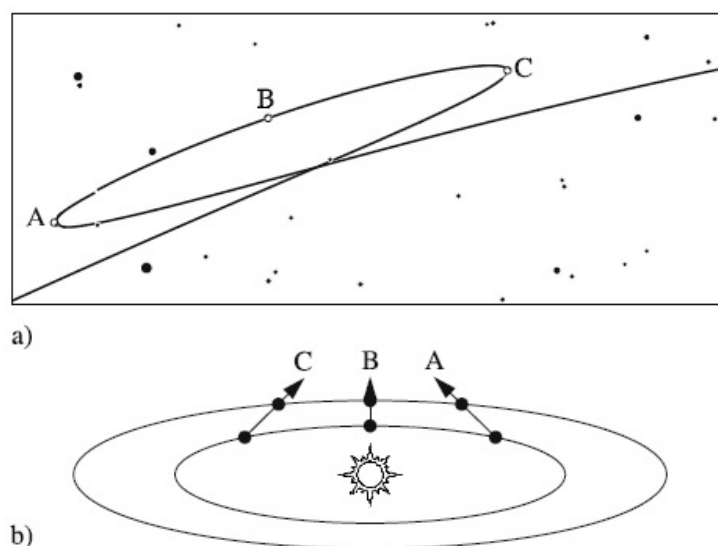
Konjunkce nastává, mají-li dvě tělesa stejnou rektascenzi nebo délku. U vnitřních planet rozlišujeme *dolní konjunkci* a *horní konjunkci*. Dolní konjunkce nastává, nachází-li se planeta mezi Sluncem a Zemí, což je možné jen u planet vnitřních! Horní konjunkce nastává, je-li Slunce mezi Zemí a planetou. U vnějších planet nastává pouze konjunkce horní. Je-li planeta v konjunkci se Sluncem, vychází a zapadá zároveň se Sluncem a je tudíž na obloze nepozorovatelná! Existuje však jeden případ, kdy může být planeta při dolní konjunkci pozorovatelná a tím je přechod vnitřní planety přes sluneční kotouč, pak je planeta pozorovatelná jako černý bod na slunečním disku.

2.3.2 Opozice

Opozice je opakem konjunkce a nastává, mají-li dvě tělesa rektascenzi nebo délku odlišnou o 180° . Opozice nastává jen u vnějších planet, planeta se nachází na opačné straně než Slunce, vychází když Slunce zapadá a je tedy pozorovatelná celou noc. V době blízko opozice bývají nebeská tělesa nejlépe pozorovatelná.

2.3.3 Elongace

Elongace je úhlová vzdálenost vnitřních planet od Slunce. Při východní elongaci se planeta nachází na východ od Slunce, zapadá po západu Slunce a svítí večer nad západním obzorem jako Večernice. Při západní elongaci se planeta nachází na západ od Slunce, je vidět již před východem Slunce nad



Obrázek 2.6: a) Zdánlivý pohyb Marsu na pozadí hvězdné oblohy během jeho opozice v roce 1995. b) Vzájemné polohy Země a Marsu při opozici. Mars se při pohledu z pohybující Zěmě promítá do různých částí oblohy. Zdroj: H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner: *Fundamental Astronomy*.

východním obzorem jako Jitřenka. Velikost elongace závisí jak na vzdálenosti Země od Slunce, tak i na vzdálenostech Slunce - planeta a Země - planeta. U planety Merkur dosahuje maximální elongace až 28° . Největší elongace nastává u Venuše a dosahuje až 47° .

2.3.4 Kvadratura

Kvadratura nastává jen u vnějších planet, pokud je úhel planeta - Země - Slunce roven 90° .

2.3.5 Zdánlivé pohyby planet

Zdánlivé pohyby planet jsou docela komplikované, díky tomu že v sobě odráží i pohyb Země okolo Slunce. Planety se "normálně" pohybují okolo Slunce v přímém směru (na pozadí vzdálených hvězd směrem na východ), proti chodu hodinových ručiček při pohledu ze severní polokoule. V blízkosti opozice planety se její pohyb pomalu zmírňuje, v určité době před opozicí se pohyb "zastaví" a změní se ve zpětný (retrográdní) pohyb, na obr. 2.6 jemu odpovídá úsek mezi body A a C. Po opozici se zpětný pohyb opět zmírňuje a po opětovné zastávce se změní na pohyb přímý. Planeta na obloze, na pozadí vzdálených hvězd, opíše smyčku, jak je vidět na obr. 2.6a.

2.3.6 Úlohy

1. Vzdálenost Merkura od Slunce je 0,387 au. Vypočítejte jaká je jeho maximální elongace. Dráhu Merkura pokládejte za kruhovou.

$$[\sin \alpha = \frac{0,387}{1}; \alpha = 22^\circ 46'.]$$

2. Největší elongace Venuše je $46,5^\circ$. Určete poloměr dráhy Venuše.

$$[r = 0,725 \text{ au.}]$$

3. Určete jaká je největší úhlová vzdálenost Měsíce od Země pro pozorovatele na Marsu v okamžiku, kdy je Mars ve střední opozici. Vzdálenost Marsu od Slunce je $1,52 \text{ au}$, vzdálenost Měsíce od Země je $384\,000 \text{ km}$. $[\alpha = 17']$

4. Vypočítejte vzdálenost d Jupitera od Marsu v okamžiku, kdy je Jupiter v opozici a Mars v kvadratuře. Vzdálenost Marsu od Slunce je $1,5 \text{ au}$, vzdálenost Jupitera od Slunce je $5,2 \text{ au}$.

$$[d = 4,35 \text{ au}]$$

2.4 Siderická a synodická oběžná doba

Siderická oběžná doba T je doba, kterou planeta potřebuje k tomu, aby se po jednom oběhu dostala do výchozího bodu na své dráze (vůči vzdáleným hvězdám), tj. doba za kterou planeta opíše 360° . Naproti tomu *synodická oběžná doba* S je doba nutná k tomu, aby se planeta dostala opět do konjunkce se Sluncem, je to tedy oběžná doba, jak se nám jeví ze Země. Protože Země obíhá kolem Slunce, je zřejmé že doba synodického oběhu nebude totožná s dobou siderického oběhu.

Označíme-li siderickou oběžnou dobu Země $T_Z = 365$ dní, pak za 1 den opíše Země úhel $\frac{360^\circ}{T_Z}$. Vnitřní planeta se siderickou oběžnou dobou T_p opíše za 1 den úhel $\frac{360^\circ}{T_p}$. Za 1 den vzroste rozdíl průvodičů obou planet o

$$\frac{360^\circ}{T_p} - \frac{360^\circ}{T_Z}. \quad (2.26)$$

Doba za kterou tento rozdíl vzroste na 360° se nazývá *synodická oběžná doba*. Platí pro ni:

$$360^\circ \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_Z} \right) S = 360^\circ. \quad (2.27)$$

Pro vnitřní planety platí:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_Z}. \quad (2.28)$$

Pro vnější planety platí:

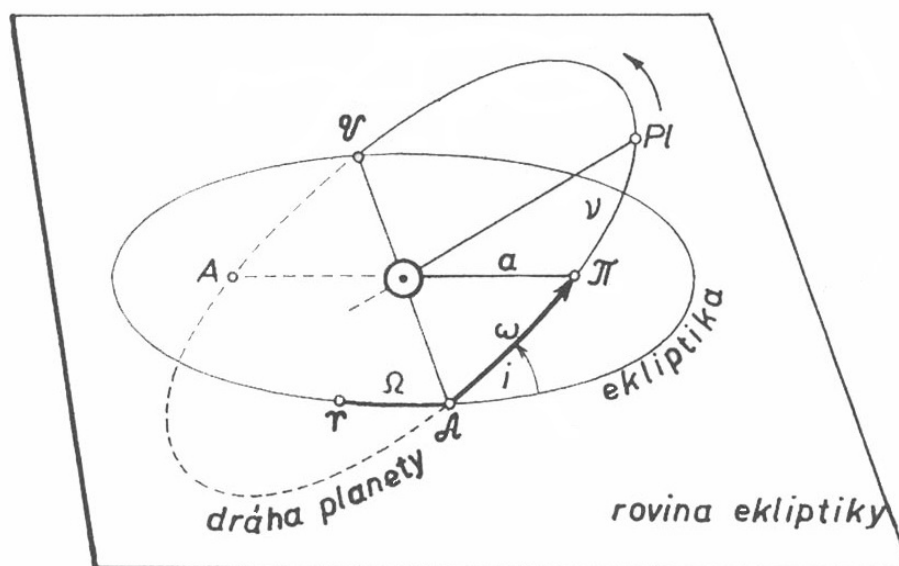
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_Z} - \frac{1}{T_p}. \quad (2.29)$$

2.4.1 Úlohy

1. O kolik stupňů za den Země předbíhá Mars na dráze kolem Slunce? Oběžná doba Země je $T_Z = 365$ dní, Marsu $T_M = 687$ dní.

[Země se za jeden den posune o $\frac{360^\circ}{365} = 0,986^\circ$, Mars o $\frac{360^\circ}{687} = 0,524^\circ$. Země tedy předbíhá Mars o $0,986^\circ - 0,524^\circ = 0,462^\circ$.]

2. O kolik stupňů za den Mars předbíhá planetu Jupiter na dráze kolem Slunce? Oběžná doba Marsu je $T_M = 687$ dní, Jupiteru $T_J = 4\,332,6$ dne.
[Mars předbíhá Jupiter o $0^\circ 26' 28''$.]
3. Vypočtete synodickou oběžnou dobu Marsu, je-li jeho siderická oběžná doba $T = 687$ dní.
[$S = 779$ dní]
4. Vypočtete synodickou oběžnou dobu planety Jupiter, je-li její siderická oběžná doba $T = 11,86$ dní.
[$S = 398$ dní]
5. Vypočtete střední denní pohyb Merkura po jeho dráze kolem Slunce, je-li jeho synodická oběžná doba $S = 116$ dní.
[Siderická oběžná doba Merkura je $T = 88$ dní. Za jeden den opíše Merkur úhel $n = \frac{360^\circ}{T} = 4,1^\circ$.]
6. Jaká musí být oběžná doba planetky, aby se její siderická oběžná doba právě rovnala oběžné době synodické?
[$S = T = 2$ roky]
7. Určete siderickou oběžnou dobu vnější hypotetické planety a hlavní poloosu její trajektorie v au, víte-li, že její siderická oběžná doba je 30-ti násobkem její synodické oběžné doby. Poblíž které dráhy skutečné planety by obíhala okolo Slunce?
[Synodická oběžná doba bude $S = \frac{31}{30}T_Z = 377$ dní, siderická $T = 11\,315$ dní. Hlavní poloosa její trajektorie vyjde z III. Keplerova zákona $a = 9,8$ au. Hypotetická planeta by se dělila o oběžnou dráhu s planetou Saturn ($a_S = 9,58$ au).]
8. Jaká by byla synodická oběžná doba Saturna pro pozorovatele na Jupiteru? Siderická oběžná doba Jupitera $T_J = 11,86$ roku, siderická oběžná doba Saturna $T_S = 29,46$ roku.
[$S=19,85$ roku.]
9. Víte-li, že délka siderického roku, za který Země opíše úhel 360° kolem Slunce, je 365,25636 středních slunečních dní, a že se perihélium zemské dráhy posune každý rok o $0,0033^\circ$ ve směru pohybu Země, vypočtete délku anomalistického roku (tj. délku mezi dvěma průchody Země perihéliem). Určete za jak dlouho opíše přímka apsid úhel 360° .
[Přímka apsid opíše úhel 360° za 109 091 roků. Anomalistický rok trvá 365,25971 dne.]
10. Jaká by byla synodická oběžná doba planetky, jež má siderickou oběžnou dobu $T = 370$ dní. Jaká by byla vzdálenost planetky od Země při opozici? Dráhy pokládejte za kruhové, oběžná doba Země je 365 dní.
[$S = 74$ roků. Poloměr dráhy planetky činí $a = 1,01$ au. Vzdálenost planetky od Země při opozici je $1,363 \cdot 10^6$ km.]



Obrázek 2.7: Elementy dráhy planety. Zdroj: Široký, Široká: *Základy astronomie v příkladech*.

11. Pozorovatel zjistil, že určitá planetka je v opozici každých 665 dní. Jaká je její vzdálenost od Slunce?

[Synodická oběžná doba planetky je tedy $S = 665$ dní, siderická oběžná doba nám vyjde $T = 809,08$ dne. Z III. Keplerova zákona vyjde vzdálenost od Slunce $a = 1,7$ au.]

2.5 Elementy dráhy planety a anomálie

Nebeská mechanika má dva velmi praktické úkoly: z pozorování určit dráhové elementy a ze známých elementů předpovídat polohy nebeských těles. Pro výpočet dráhových elementů potřebujeme přinejmenším tři pozorování. V praxi se však používá více. Určení dráhových elementů je tím přesnější, čím více pozorování máme k dispozici a čím větší úsek orbity tato měření pokrývají.

2.5.1 Elementy dráhy planety

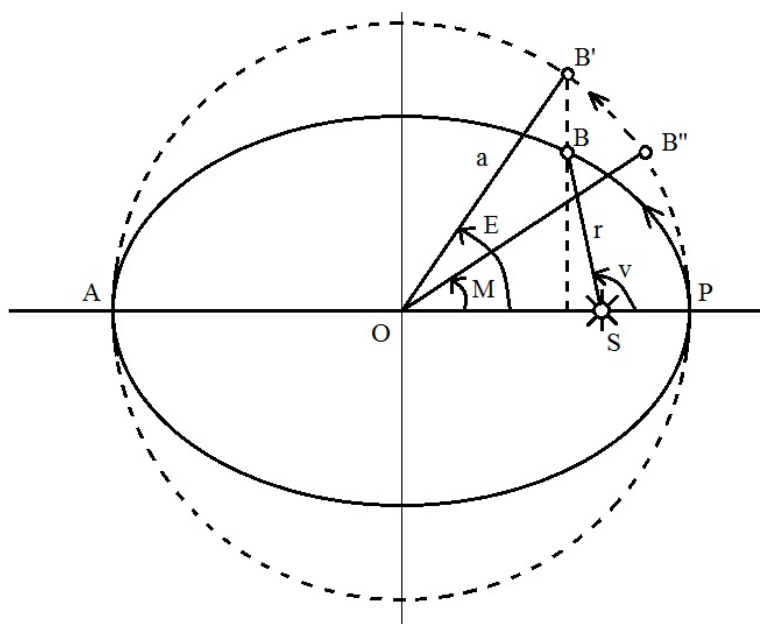
Dráha planety v prostoru je popsána množinou šesti veličin, které se nazývají *elementy dráhy planety*.

Hlavní poloosa dráhy a je vzdálenost perihélia (popř. afélia) od středu elipsy. Udává se v astronomických jednotkách [au].

Numerická excentricita e je poměr lineární excentricity ε k hlavní poloose.

Velká poloosa a a excentricita určují velikost a tvar dráhy planety.

Sklon dráhy i je úhel, který svírá oběžná rovina planety s rovinou ekliptiky. Měří se ve směru od roviny ekliptiky k rovině dráhy planety. Udává se ve stupních [$^{\circ}$] a může nabývat hodnot od 0° do 180° .



Obrázek 2.8: Grafické znázornění pojmů pravá anomálie v , excentrická anomálie E a střední anomálie M .

Je-li $i > 90^\circ$, pak se těleso pohybuje zpětným (retrográdním) směrem, tj. ve směru zdánlivého denního pohybu oblohy. Tento případ je možný je u komet.

Délka výstupného uzlu Ω je úhlová vzdálenost jarního bodu Υ od výstupného uzlu, v němž vystupuje dráha tělesa nad rovinu ekliptiky. Udává se také ve stupních $[\circ]$ a měří se přímým směrem. Spojnice výstupného a sestupného uzlu se nazývá *uzlová přímka*.

Sklon dráhy a délka výstupného uzlu určují polohu roviny dráhy v prostoru.

Argument šířky periélie ω je úhel, který svírá uzlová přímka (spojnice výstupného a sestupného uzlu) s přímkou apsid (spojnicí perihélia a afélia).

Argument šířky perihélia určuje orientaci dráhy v její rovině a udává se ve stupních $[\circ]$.

Okamžik průchodu periéliem τ je čas uplynulý od okamžiku průchodu planety perihéliem. Určuje polohu tělesa na dráze.

2.5.2 Anomálie

Pravá anomálie

K nalezení polohy planety na její dráze v daném čase potřebujeme znát závislost polohového vektoru \vec{r} na čase. Jako proměnná v rovnici popisující orbitu se používá úhel, tzv. *pravá anomálie* v , který svírá průvodič planety r s přímkou apsid (velkou poloosou), $v = \angle PSB$.

Pomocí pravé anomálie můžeme vyjádřit vzdálenost planety od Slunce takto:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (2.30)$$

Z II. Keplerova zákona vyplývá, že pravá anomálie nemůže růst konstantní rychlostí.

Excentrická anomálie

Pro zjednodušení rovnic, popisujících pohyb po elipse, se často namísto pravé anomálie používá tzv. *excentrická anomálie* E . Uvažujme kružnici, jejíž střed O je totožný se středem elipsy a její poloměr je rovný velké poloose, jak je vidět na obr. 2.8. Kolmice spuštěná z bodu B na velkou poloosu protne kružnici v bodě B' . Úhel, který svírá spojnice bodu B' a středu O elipsy s přímkou apsid se nazývá excentrická anomálie E .

Mezi pravou a excentrickou anomálií platí vztah:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.31)$$

Vzdálenost planety od Slunce se dá pak vyjádřit takto:

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.32)$$

Střední anomálie

Dalším problémem je jak pro daný okamžik určit E ? Uvažujme hypotetickou planetu, která by se kolem Slunce pohybovala po kružnici o poloměru rovném velké poloose a perihéliem P by procházela současně se skutečnou planetou. Označíme-li okamžik průchodu hypotetické planety perihéliem jako τ , pak v čase $(t - \tau)$, což je počet dní uplynulých od průchodu perihéliem, se bude nacházet v bodě B'' . Spojnice středu O a bodu B'' svírá s přímkou apsid úhel $M = \sphericalangle POB''$, který se nazývá *střední anomálie* M a lze ji vyjádřit vztahem:

$$M = \frac{360^\circ}{T}(t - \tau). \quad (2.33)$$

Pokud vyjádříme oběžnou dobu T planety ve dnech, pak $\frac{360^\circ}{T} = n$ je střední denní pohyb planety.

Střední anomálie roste konstantí rychlostí s časem. Říká nám, kde by se planeta nacházela, kdyby se pohybovala po kružnici o poloměru rovném a .

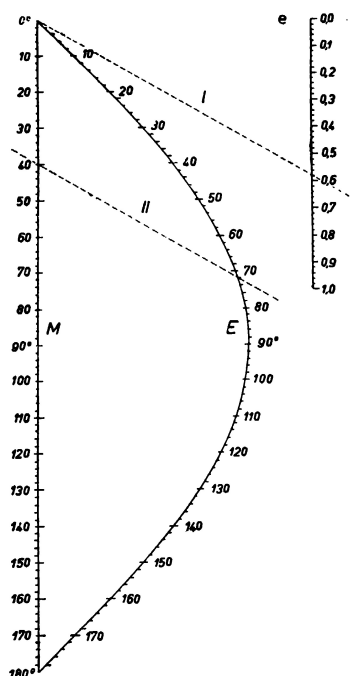
2.5.3 Keplerova rovnice

Pomocí II. Keplerova zákona lze najít mezi střední anomálií M , excentrickou anomálií E a numerickou excentricitou e vztah, který se nazývá *Keplerova rovnice*

$$M = E - e \sin E. \quad (2.34)$$

Je-li excentricita dráhy malá, můžeme excentrickou anomálii E vypočítat metodou postupných aproximací. Jako první hodnotu vezmeme $E_0 = M$ a další ze vztahu

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin E_0, \\ E_2 &= M + e \sin E_1, \\ E_3 &= M + e \sin E_2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.35)$$



Obrázek 2.9: Nomogram pro řešení Keplerovy rovnice. Zdroj: Široký, Široká: *Základy astronomie v příkladech*.

kde výraz $e \sin E$ musíme převést z radiánů na stupně. Tento postup opakujeme tak dlouho, až se hodnoty E_n a E_{n-1} od sebe neliší více než je požadovaná přesnost.

Pro větší excentricitu hledáme předběžnou hodnotu pomocí nomogramu, viz. obr.2.9. Na stupnici pro e vyhledáme excentricitu dráhy planety a spojíme s přímkou s 0° na stupnici pro střední anomálii M . Na stupnici pro M si vyznačíme příslušnou střední anomálii a tou vedeme rovnoběžku s první přímkou. Průsečík rovnoběžky s křivkou pro E nám určí výslednou hodnotu excentrické anomálie E .

2.5.4 Úlohy

1. Vypočtete metodou postupných aproximací excentrickou anomálii planety po uplynutí 22,5 dne od průchodu perihéliem. Excentricita dráhy planety $e = 0,02947$, střední denní pohyb $n = 14,678'$.

[Vypočteme nejdřív střední anomálii:

$$M = n \cdot t = 14,678' \cdot 22,5 = 330,255' = 5,5042^\circ. \quad (2.36)$$

První hodnotu dostaneme jako

$$E_0 = M = 5,5042^\circ. \quad (2.37)$$

Další hodnotu E_1 excentrické anomálie dostaneme dosazením E_0 do rovnice

$$E_1 = M + e \sin E_0, \quad (2.38)$$

kde výraz $e \sin E_0$ musíme převést z radiánů na stupně, tj. vynásobíme jej hodnotou $\frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296$.

Po číselném dosazení:

$$E_1 = M + e \sin E_0 = 5,6662^\circ = 5^\circ 40'. \quad (2.39)$$

Následující hodnoty E_2, E_3, \dots

$$E_2 = M + e \sin E_1 = 5,5042^\circ + 0,166711^\circ = 5,670911^\circ = 5^\circ 40' 15,28''.$$

$$E_3 = M + e \sin E_2 = 5,5042^\circ + 0,166849^\circ = 5,671049^\circ = 5^\circ 40' 15,78''.$$

$$E_4 = M + e \sin E_3 = 5,5042^\circ + 0,166853^\circ = 5,671053^\circ = 5^\circ 40' 15,79''.$$

$$E_5 = M + e \sin E_4 = 5,5042^\circ + 0,166853^\circ = 5,671053^\circ = 5^\circ 40' 15,79''.$$

Poslední dvě hodnoty se již od sebe neliší, excentrická anomálie je tedy $E = 5^\circ 40' 15,79''$.]

2. Jaká je střední a excentrická anomálie Merkura za 22 dní po průchodu perihéliem? Excentricita Merkurovy dráhy je $e = 0,21$, oběžná doba $T = 88$ dní.

$$[M = 360^\circ \frac{t}{T} = 90^\circ, E = 101,7^\circ.]$$

3. Určete střední a excentrickou anomálii Pluta za 100 let po průchodu perihéliem. Oběžná doba Pluta je $T = 90\,700$ dní, excentricita jeho dráhy $e = 0,25$.

$$[M = 145^\circ, E = 151,8^\circ.]$$

4. Kometa se pohybuje po eliptické dráze s excentricitou $e = 0,66$. Oběžná doba komety je $T = 3$ roky. Určete excentrickou a pravou anomálii za rok po průchodu perihéliem.

$$[\text{Střední anomálie: } M = 360^\circ \frac{t}{T} = 120^\circ.]$$

Protože excentricita komety je celkem velká, použijeme k určení excentrické anomálie E nomogram. Z něj odečteme $E = 143^\circ$. Pro pravou anomálii platí:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.40)$$

Po číselném dosazení obdržíme $\frac{v}{2} = 81,4^\circ$ a tedy $v \doteq 163^\circ$.]

5. Kometa se pohybuje po eliptické dráze, jejíž velká poloosa $a = 4$ au, excentricita $e = 0,66$. Určete excentrickou a pravou anomálii rok po průchodu perihéliem a její vzdálenost od Slunce.

[Z III. Keplerova zákona určíme oběžnou dobu komety na $T = 8$ roků.

Střední anomálie $M = 45^\circ$. Excentrickou anomálii opět určíme z nomogramu $E = 83^\circ$ a s pomocí jí a excentricity e vypočítáme pravou anomálii:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad \Rightarrow \quad v = 126^\circ. \quad (2.41)$$

Vzdálenost komety od Slunce:

$$r = a(1 - e \cos E) = 3,7 \text{ au].} \quad (2.42)$$

3

Gravitace

3.1 Newtonovy zákony

Keplerovy zákony byly prvním krokem k fyzikálnímu popisu pohybu planet. Ale až gravitačním zákonem Newton dospěl k obecnému popisu vzájemného působení hmotných těles. Celá klasická mechanika, včetně nebeské mechaniky, je založena na principech Newtonovy mechaniky. Zde jen pro úplnost stručně shrneme nejdůležitější poznatky.

3.1.1 I. Newtonův zákon

I. Newtonův zákon - zákon setrvačnosti: Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento svůj stav změnit.

Označme hybnost tělesa $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, pak platí

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (3.1)$$

3.1.2 II. Newtonův zákon

II. Newtonův zákon - zákon síly: Změna hybnosti tělesa je úměrná síle působící na těleso.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.2)$$

3.1.3 III. Newtonův zákon

III. Newtonův zákon - zákon akce a reakce: V uzavřeném systému těles každá akce vyvolá stejně velkou reakci opačného směru.

3.2 Centrální síla

Oběh planety kolem Slunce a všechny podobné křivočaré pohyby vyžadují, aby podle zákona setrvačnosti na těleso působila nějaká síla. Pokud můžeme v přiblížení popsat takový pohyb jako vzájemné působení

dvou těles, pak si můžeme představit, že na hmotný bod působí síla, která trvale působí ve směru k jistému bodu. Při pohybu po kružnici je tímto bodem střed kružnice a takto definovaná síla se nazývá *centrální* (dostředivá). Dostředivá síla působící na těleso o hmotnosti m pohybující se okamžitou rychlostí v na dráze o poloměru r vyvolá dostředivé zrychlení \mathbf{a}_d , které je rovno:

$$\mathbf{a}_d = -\frac{v^2}{r}\mathbf{r}_0, \quad (3.3)$$

kde \mathbf{r}_0 je jednotkový vektor mířící od centra k tělesu. Dostředivá síla \mathbf{F}_d je pak dána:

$$\mathbf{F}_d = m\mathbf{a}_d = -m\frac{v^2}{r}\mathbf{r}_0. \quad (3.4)$$

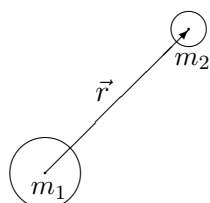
3.3 Newtonův gravitační zákon

Hmotné body o hmotnostech m_1, m_2 působí na sebe silou, která je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r :

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}, \quad (3.5)$$

kde gravitační konstanta $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$. Tento vztah platí i pro sféricky symetrická tělesa, jejichž rozměry nejsou zanedbatelně malé vzhledem ke vzdálenostem. Taková tělesa se chovají tak, jakoby veškerá hmota byla soustředěna v jejich středech.

Gravitační síla je vždy přitažlivá. Necht' vektor \mathbf{r} udává polohu tělesa 2 vůči tělesu 1. Gravitační síla, kterou působí těleso 1 na těleso 2 je pak charakterizována vektorem



$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_0, \quad (3.6)$$

kde $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor ve směru \mathbf{r} . Vektor \mathbf{F} leží na spojnici středů obou těles a je orientován od tělesa 2 k tělesu 1. Podle zákona akce a reakce ovšem i těleso 2 působí na těleso 1 stejně velkou silou opačného směru.

V dalším je výhodné zavést pojem *gravitační pole*, které ve svém okolí těleso vytváří a jehož prostřednictvím na ostatní tělesa gravitačně působí.

3.4 Intenzita gravitačního pole

Intenzita gravitačního pole je určena podílem gravitační síly, která působí na těleso o hmotnosti m v místě pozorování a hmotnosti tohoto tělesa:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (3.7)$$

Intenzita gravitačního pole odpovídá síle, která v daném místě působí na těleso jednotkové hmotnosti.

Je-li gravitační pole tvořeno tělesem¹ o hmotnosti M , pak

$$\mathbf{E} = -G\frac{M}{r^2}\mathbf{r}_0. \quad (3.8)$$

¹V dalším budeme mít na mysli výhradně sféricky symetrická tělesa.

Intenzita gravitačního pole je totožná s gravitačním zrychlením, které pole v daném místě uděluje všem tělesům bez ohledu na jejich hmotnost.

3.5 Potenciální energie

Potenciální energie tělesa o hmotnosti m , umístěného v gravitačním poli vygenerovaném tělesem o hmotnosti M , je

$$W_p = -G \frac{mM}{r}. \quad (3.9)$$

Potenciální energie odpovídá záporně vzaté práci, kterou je potřeba vykonat, abychom dostali těleso hmotnosti m mimo gravitační působení tělesa M . Jelikož gravitační síla klesá s 2. mocninou vzdálenosti obou těles, nulové působení dostáváme až pro $r \rightarrow \infty$. Zde proto leží hladina nulové potenciální energie, zatímco uvnitř pole je potenciální energie záporná.

3.6 Gravitační potenciál

Gravitační potenciál V je roven podílu potenciální energie tělesa o hmotnosti m a hmotnosti tohoto tělesa:

$$V = \frac{W_p}{m} = -G \frac{M}{r}. \quad (3.10)$$

3.7 Tíhové zrychlení

Tíhové zrychlení je zrychlení volně padajícího tělesa ve vakuu, určené k zvolenému místu na povrchu planety. Průměrná hodnota tíhového zrychlení na Zemi je

$$g_z = 9,80665 \text{ ms}^{-2}. \quad (3.11)$$

3.7.1 Úlohy

1. Vypočtete gravitační konstantu G v soustavě jednotek SI, je-li hustota Země $\rho_z = 5500 \text{ kg m}^{-3}$, poloměr Země $R_z = 6378 \text{ km}$ a gravitační zrychlení na povrchu Země $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.
[Ze vztahu pro gravitační zrychlení $g = \frac{GM_z}{R_z^2}$ obdržíme po dosazení: $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.]
2. Vypočtete gravitační zrychlení na povrchu Marsu, je-li jeho poloměr $R = 3400 \text{ km}$ a hmotnost $M = 6,46 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.
[$g = 3,73 \text{ m s}^{-2}$]
3. Vypočtete rychlost, s jakou se musí pohybovat umělá družice Země, aby obíhala po kruhové dráze těsně nad povrchem Země, tzv. 1. kosmická rychlost, někdy též "kruhová". Určete oběžnou dobu této družice, je-li $R_z = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ a $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

[Při pohybu umělé družice kolem Země po kruhové dráze o poloměru R je její dostředivé zrychlení $a_d = \frac{v^2}{R}$. Toto zrychlení musí být rovno gravitačnímu zrychlení na povrchu Země a proto platí:

$$a_d = \frac{v^2}{R} = g = \frac{GM_Z}{R^2}. \quad (3.12)$$

Pro první kosmickou rychlost pak platí:

$$v_I = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM_Z}{R}}. \quad (3.13)$$

Číselně je $v = 7,91 \text{ km s}^{-1}$.

Oběžnou dobu určíme ze vztahu: $2\pi R = vT$.

Tedy

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 1 \text{ h } 24,5 \text{ min.}] \quad (3.14)$$

4. Kolikrát je I. kosmická rychlost na Zemi větší než na Měsíci? Hmotnost Země je 81 krát větší než hmotnost Měsíce, poloměr Země je 3,75 krát větší než poloměr Měsíce.

$$[\frac{v_{IZ}}{v_{IM}} = 4,65]$$

5. Vypočítejte jakou počáteční rychlost musíme udělit raketě, aby se vzdálila z povrchu Země do nekonečna? (2. kosmická rychlost.)

[Nachází-li se raketa o hmotnosti m na povrchu Země, pak je její potenciální energie

$$W_p = -\frac{GM_Z m}{R}. \quad (3.15)$$

Její kinetická energie je

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.16)$$

V nekonečnu bude její potenciální i kinetická energie rovna nule. Proto ze zákona zachování energie musí být i na počátku jejího pohybu součet obou energií roven nule. Odtud

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R}} = \sqrt{2gR}. \quad (3.17)$$

Druhá kosmická rychlost je tedy $\sqrt{2}$ krát větší než první kosmická rychlost. Po číselném dosazení $v_{II} = 11,2 \text{ km s}^{-1}$. Protože raketa odlétá (teoreticky) po parabolické trajektorii, nazývá se tato rychlost někdy "parabolická".]

6. V jaké výšce musí obíhat umělá družice Země aby byla stále nad stejným místem rovníku?

[Vydeme z III. Keplerova zákona:

$$\frac{T^2}{(R_Z + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_Z}. \quad (3.18)$$

Odtud obdržíme:

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_Z}{4\pi^2} T^2} - R_Z. \quad (3.19)$$

Po číselném dosazení $h = 36\,000$ km.]

7. V jaké vzdálenosti od povrchu Marsu musí být jeho družice, aby obíhala kolem něho se stejnou oběžnou dobou, s jakou se Mars otáčí kolem své osy? Hmotnost Marsu je $M = 6,46 \cdot 10^{23}$ kg, doba jedné otočky $T = 24$ hod 37 min a poloměr Marsu $R = 3\,400$ km.

[$h = 17,06 \cdot 10^6$ m]

8. Odvoďte vztah pro III. kosmickou rychlost a vyjádřete její hodnotu číselně.

[III. kosmická rychlost, v_{III} , je rychlost, kterou musíme udělit družici na povrchu Země, aby opustila trvale sluneční soustavu (vliv planet neuvažujeme). Pro její zavedení je třeba nejprve vypočítat kruhovou a parabolickou rychlost při pohybu kolem Slunce ve vzdálenosti Země od Slunce.

Kruhová rychlost je průměrná rychlost Země (její hmotnost vůči hmotnosti Slunce zanedbáme) při oběhu kolem Slunce, tj. ve vzdálenosti $d = 149,6 \cdot 10^6$ km. (Hmotnost Slunce je $M_{\odot} = 1,9891 \cdot 10^{30}$ kg).

$$v_k = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}} = 29\,784 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.20)$$

Parabolická rychlost

$$v_p = \sqrt{2} v_k = 42\,121 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.21)$$

Při vypouštění rakety je výhodné využít samotnou rychlost Země, proto budeme raketu vypouštět ve směru rychlosti Země. Tím pádem jí není nutno udělit rychlost $42\,121 \text{ m s}^{-1}$, ale pouze $(42\,121 - 29\,784) \text{ m s}^{-1} = 12\,337 \text{ m s}^{-1}$.

To ale není ještě správná hodnota, neboť jsme neuvažovali vliv gravitačního pole Země. Družici musíme dodat navíc ještě energii na překonání přitažlivosti Země. Poněvadž kinetická energie tělesa je přímo úměrná druhé mocnině jeho rychlosti, musíme sčítat druhé (nikoliv první!) mocniny hodnot rychlostí a výsledkem je druhá mocnina třetí kosmické rychlosti. Dostáváme:

$$v_{III} = \sqrt{11,2^2 + 12,3^2} \text{ km s}^{-1} = \sqrt{276,73} \text{ km s}^{-1} = 16,6 \text{ km s}^{-1}. \quad (3.22)$$

9. Určete hmotnost Slunce víte-li že úhlová rychlost Země na dráze kolem Slunce je 1° za den, gravitační konstanta $G = 6,68 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, vzdálenost Země od Slunce je $r = 149,6 \cdot 10^6$ km.

[Z III. Keplerova zákona po dasazení za $T = \frac{2\pi}{\omega}$ obdržíme:

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} = \frac{\omega^2 r^3}{G}. \quad (3.23)$$

Úhlovou rychlost převedeme na radiány, $\omega = 2,02 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, a po číselném dosazení obdržíme:

$$M_{\odot} = 2,04 \cdot 10^{30} \text{ kg}. \quad (3.24)$$

10. Jak velká je délka l matematického kyvadla, které by mělo na Měsíci dobu kyvu $t = 1$ s? Jak velkou dobu kyvu t' by mělo na Měsíci sekundové kyvadlo pozemské? Poloměr Měsíce $R_M = 0,27 R_Z$, hmotnost $M_M = \frac{1}{81} M_Z$.

[Je-li doba kyvu $t = 1$ s, pak perioda vlastních kmitů matematického kyvadla je dvojnásobek, tedy $T = 2$ s. Ze vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2\pi \sqrt{\frac{l R_M^2}{G M_M}} = 2\pi \sqrt{\frac{l (0,27)^2 R_Z^2}{G \frac{1}{81} M_Z}} = 0,27 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{81 \cdot l}{g}} \quad (3.25)$$

obdržíme délku kyvadla $l = 0,168$ m.

Na Zemi by matematické kyvadlo s dobou kyvu 1 s mělo délku $l = 0,99$ m. Na Měsíci by takto dlouhé kyvadlo mělo periodu kmitů $T = 4,85$ s a dobu kyvu tedy $t' = 2,43$ s.]

11. Určete postupnou rychlost Země na její dráze kolem Slunce, je-li hmotnost Slunce $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg a vzdálenost od Slunce $r = 1,5 \cdot 10^8$ km.

$$[v = \sqrt{\frac{G M_\odot}{r}} = 29,8 \text{ km s}^{-1}]$$

12. Jupiter se otočí kolem své osy za dobu $T = 9$ hod 50 min, jeho poloměr $R = 70\,000$ km, hmotnost $M = 1,9 \cdot 10^{27}$ kg. Vypočítejte tíhové zrychlení g_p na pólu a g_r na rovníku Jupitera. Zploštění planety zanedbejte.

$$[\text{Na pólu je tíhové zrychlení rovno gravitačnímu; } g_p = \frac{GM}{R^2} = 25,9 \text{ m s}^{-2}.$$

Na rovníku působí kromě gravitačního zrychlení ještě odstředivé zrychlení, které má směr kolmý k ose otáčení. Výsledné tíhové zrychlení bude tedy: $g_r = g_p - \frac{v^2}{R} = 23,7 \text{ m s}^{-2}$.]

13. Vypočítejte únikovou rychlost na povrchu Měsíce a na povrchu Slunce, víte-li: poloměr Měsíce je $R = 0,27 R_Z$, hmotnost Měsíce $M = \frac{1}{81} M_Z$, poloměr Slunce $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ m, hmotnost Slunce $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

$$[\text{Pro Měsíc: } v = 2,4 \text{ km s}^{-1}, \text{ pro Slunce: } v = 618 \text{ km s}^{-1}.]$$

14. Určete gravitační zrychlení na povrchu planety se střední hustotou rovnou střední hustotě Země a s poloměrem $R = 0,01 R_Z$. Jaká je úniková rychlost na této planetce?

$$[g = 0,01 g_z = 0,098 \text{ m s}^{-2}, v = 0,01 v_z = 112 \text{ m s}^{-1}]$$

15. Do jaké výšky by vystoupilo těleso vystřelené z povrchu Země svisle vzhůru rychlostí $v = 5 \text{ km s}^{-1}$? Hmotnost Země je $M_z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, poloměr Země $R_z = 6,38 \cdot 10^6$ m.

[Těleso vystřelené z povrchu Země rychlostí v má na počátku kinetickou energii

$$W_{k1} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.26)$$

a potenciální energii

$$W_{p1} = -\frac{G M_z m}{R_z}. \quad (3.27)$$

Těleso vystoupá do výšky h , ve které je jeho kinetická energie rovna nule, $W_{k2} = 0$, a potenciální energie

$$W_{p2} = -\frac{GM_z m}{R_z + h}. \quad (3.28)$$

Ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_z m}{R_z} = -\frac{GM_z m}{R_z + h}. \quad (3.29)$$

Po vyjádření h obdržíme:

$$h = \frac{v^2 R_z^2}{2GM_z - v^2 R_z}. \quad (3.30)$$

Dosadíme-li za $GM_z = gR_z^2$, můžeme výšku výstupu vyjádřit vztahem

$$h = \frac{v^2 R_z}{2gR_z - v^2}. \quad (3.31)$$

Po číselném dosazení nám vyjde $h = 1\,592$ km.]

16. Na Zemi padá z nekonečně velké vzdálenosti s nulovou počáteční rychlostí meteor o hmotnosti $m = 0,1$ kg. Vypočítejte jeho kinetickou energii, kterou by měl ve vzdálenosti $h = 2\,000$ km nad povrchem Země.

[V nekonečnu bude mít meteor kinetickou i potenciální energii nulovou, tedy: $W_{k1} = 0$ a $W_{p1} = 0$. Ve výšce $h = 2\,000$ km nad povrchem Země bude jeho kinetická energie W_{k2} a potenciální $W_{p2} = -\frac{GM_z m}{R_z + h}$.

Ze zákona zachování mechanické energie:

$$0 + 0 = W_{k2} - \frac{GM_z m}{R_z + h}. \quad (3.32)$$

Odtud:

$$W_{k2} = \frac{gmR_z}{1 + \frac{h}{R_z}}. \quad (3.33)$$

Po číselném dosazení: $W_{k2} = 4,765 \cdot 10^6$ J.]

17. Jak by se musela změnit hmotnost Země, aby Měsíc navždy opustil Zemi?

[Uvažujme, že se Měsíc nyní pohybuje po kruhové dráze o poloměru r rychlostí v_1 . Označíme-li hmotnost Země M_z , pak pro kruhovou rychlost Měsíce v_1 platí:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z + r}}. \quad (3.34)$$

Označíme-li změněnou hmotnost Země M a únikovou rychlost v_2 , pak platí:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R_z + r}}. \quad (3.35)$$

Hledáme takovou hmotnost, pro kterou je kruhová rychlost v_1 rovna únikové rychlosti v_2 :

$$\sqrt{\frac{GM_z}{R_z + r}} = \sqrt{\frac{2GM}{R_z + r}}. \quad (3.36)$$

Odtud:

$$M = \frac{M_z}{2}. \quad (3.37)$$

Hmotnost Země by se musela náhle zmenšit na polovinu.]

18. Jak by se změnila dráha Země, kdyby se hmotnost Slunce náhle zdvojnásobila?

[Uvažujme, že se Země na počátku pohybuje po kruhové dráze s poloměrem r , rychlostí v_1 . Při kruhovém pohybu se musí účinky gravitační o odstředivé síly působící na obíhající těleso vyrovnat, proto:

$$\frac{GM_\odot m}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r}. \quad (3.38)$$

Pro rychlost planety v_1 obdržíme:

$$v_1^2 = \frac{GM_\odot}{r}. \quad (3.39)$$

V okamžiku, kdy se zdvojnásobí hmotnost Slunce, se bude Země nacházet v bodě A . Od této chvíle se Země začne pohybovat po elipse, přičemž bod A bude aféliem nové dráhy Země. Poloměr křivosti elipsy v eféliu je

$$R = \frac{b^2}{a}, \quad (3.40)$$

vzdálenost Země od Slunce je stále r , hmotnost Slunce je nyní $2M_\odot$. V aféliu platí rovnice:

$$\frac{G2M_\odot}{r^2} = \frac{v_1^2 a}{b^2}. \quad (3.41)$$

Po dosazení rovnice (3.39) dostaneme:

$$\frac{2}{r} = \frac{a}{b^2}. \quad (3.42)$$

Po dosazení vzdálenosti Země v eféliu je $r = a + \epsilon = a(1 + e)$ a využitím rovnosti $b^2 + \epsilon^2 = a^2$ obdržíme:

$$\frac{2}{a(1 + e)} = \frac{a}{a^2(1 - e^2)}. \quad (3.43)$$

Odtud xcentricita dráhy vyjde $e = 0,5$ a velká poloosa $a = \frac{r}{1+e} = 10^8$ km.

Vzdálenost Země v aféliu zůstane nezměněna, $r_1 = 1,5 \cdot 10^8$ km, vzdálenost v perihéliu $r_2 = a(1 - e) = 0,5 \cdot 10^8$ km.

Pro rychlosti v perihéliu a aféliu platí vztah

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1 - e}{1 + e}, \quad (3.44)$$

přičemž rychlost Země v aféliu je rovna původní rychlosti po kruhové dráze, $v_1 = 30 \text{ km s}^{-1}$, rychlost v perihéliu pak vychází $v_2 = 90 \text{ km s}^{-1}$.]

19. Určete excentricitu, velkou poloosu dráhy, vzdálenost v perihéliu a oběžnou dobu komety, jejíž rychlost ve vzdálenosti 1 astronomické jednotky je kolmá na průvodič komety a 10 krát menší než rychlost Země.

[Rychlost tělesa obíhajícího po eliptické dráze je kolmá na průvodič v perihéliu a aféliu dráhy. Ze zadání víme, že rychlost komety ve vzdálenosti 1 au je menší než kruhová rychlost Země ve stejné vzdálenosti od Slunce, proto se kometa musí nacházet v aféliu své dráhy. Poloměr křivosti dráhy v aféliu je $R = \frac{b^2}{a}$.

V aféliu označíme rychlost komety v_1 a vzdálenost od Slunce r_1 , pak platí:

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{GM_\odot}{r_1^2}. \quad (3.45)$$

Země se pohybuje po kruhové dráze s poloměrem r_1 rychlostí v_0 , proto pro ni platí:

$$\frac{v_0^2}{r_1} = \frac{GM_\odot}{r_1^2}. \quad (3.46)$$

Dosazením za poloměr křivosti dráhy a porovnáním obou rovnic obdržíme:

$$\frac{v_1^2 a}{b^2} = \frac{v_0^2}{r_1}. \quad (3.47)$$

S využitím rovností platných pro elipsu: $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $r_1 = a(1 + e)$ dostaneme po dosazení:

$$\frac{v_1^2}{(1 - e)} = v_0^2, \quad (3.48)$$

odtud:

$$e = 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}. \quad (3.49)$$

Dosazením za $v_0 = 10 v_1$ vyjde pro excentricitu dráhy komety hodnota $e = 0,99$.

Velká poloosa dráhy: $a = \frac{r_1}{1+e} = 0,502$ au.

Vzdálenost perihélia: $r_2 = a(1 - e) = 0,00502$ au.

Oběžná doba komety: $T = \sqrt{\frac{a^3}{r_1^3}} T_z = 0,356$ roku.]

20. Určete mechanickou energii planety, jejíž hmotnost je m a velká poloosa a .

[Mechanická energie W je dána součtem kinetické a potenciální energie a tento součet je pro danou planetu konstantní. Protože nezáleží na tom, pro který bod na dráze ji určíme, určíme mechanickou energii pro planetu v perihéliu. Označíme-li rychlost planety v perihéliu v a vzdálenost perihélia od Slunce r , bude kinetická energie planety $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energie $W_p = -\frac{GmM_\odot}{r}$.

Mechanická energie

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_\odot}{r}. \quad (3.50)$$

V perihéliu je poloměr křivosti dráhy $R = \frac{b^2}{a}$, proto zde platí:

$$\frac{mv^2 a}{b^2} = \frac{GM_{\odot} m}{r^2}. \quad (3.51)$$

Z této rovnice lze vyjádřit kinetickou energii planety jako

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_{\odot} mb^2}{2r^2 a} \quad (3.52)$$

a celková mechanická energie planety je pak

$$W = \frac{GM_{\odot} mb^2}{2r^2 a} - \frac{GM_{\odot} m}{r}. \quad (3.53)$$

Po dosazení za $b^2 = a^2(1 - e^2)$, $r = a(1 - e)$ vyjde výsledný vztah

$$W = -\frac{GM_{\odot} m}{2a}. \quad (3.54)$$

21. Na základě výsledku z předešlého příkladu dokažte, že pro okamžitou rychlost planety platí vztah:

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (3.55)$$

kde a je velká poloosa a r je vzdálenost od Slunce.

[Vztah z minulého příkladu se musí rovnat součtu kinetické a potenciální energie, tedy:

$$W = -\frac{GM_{\odot} m}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\odot} m}{r}. \quad (3.56)$$

Po jednoduché úpravě obdržíme:

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3.57)$$

22. Astrologové tvrdí, že kosmická tělesa svými astrologickými silami v okamžiku narození lidí ovlivňují jejich charaktery. Vypočtete poměr gravitačních sil Jupitera a Země na nově narozené dítě v okamžiku, kdy se Jupiter nachází v opozici ve vzdálenosti $d = 4,2$ au od Země. Hmotnost Jupitera je $318 M_Z$.

[Poměr gravitačních sil je

$$\frac{F_J}{F_Z} = \frac{G \frac{M_J m_d}{d^2}}{G \frac{M_Z m_d}{R_Z^2}} = 1,37 \cdot 10^{-7}. \quad (3.58)$$

Gravitační vliv Jupitera je teda zcela zanedbatelný.]

4

Zatmění

4.1 Zatmění

Zatmění může být částečné nebo úplné. Zastínění slunečního disku Měsícem se nazývá *zatmění Slunce*. Zastínění Měsíce v úplňku zemským stínem se nazývá *zatmění Měsíce*. Zastínění hvězdy Měsícem, planetou nebo jejím Měsícem se nazývá *zákryt*.

4.1.1 Zatmění Slunce

Zatmění Slunce nastává, dostane-li se Měsíc mezi Slunce a Zemi. Při tomto zatmění musí být Měsíc v novu. Shodou okolností je disk Měsíce na obloze přibližně stejně velký jako disk Slunce. Skutečný průměr Měsíce je 400 krát menší než průměr Slunce a zároveň je Měsíc 400 blíže k Zemi než Slunce. Kdyby Měsíc obíhal kolem Země v rovině ekliptiky, nastávalo by zatmění Slunce při každém novu. Dráha Měsíce je však skloněna k rovině ekliptiky o úhel 5° . Měsíc v novu se někdy nachází pod a někdy nad ekliptikou a k zatmění nedojde. Jen ocitne-li se ve fázi novu blízko tzv. uzlu (což je průsečík měsíční dráhy a ekliptiky), dojde k zatmění Slunce.

Délka stínu Měsíce závisí na poloměru Slunce, Země, Měsíce (tyto hodnoty jsou neměnné) a na vzájemných vzdálenostech všech tří těles (které se mění). Tečné paprsky vedené ze Slunce ohraničují kužel plného stínu i polostínu. Vrcholy obou kuželů leží na ose stínu. Úplné zatmění Slunce nastane, má-li plný stín přinejmenším takovou délku, aby alespoň jeho vrchol dosáhl na Zemi.

Je-li poloměr Slunce R_\odot , poloměr Měsíce (Země) R_M , R_Z a jejich vzájemná vzdálenost r , pak se dá z obr. 4.1 vyjádřit

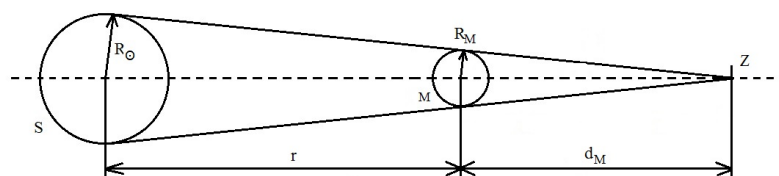
$$d_M = \frac{R_M r}{R_\odot - R_M} \quad (4.1)$$

$$d_Z = \frac{R_Z r}{R_\odot - R_Z}. \quad (4.2)$$

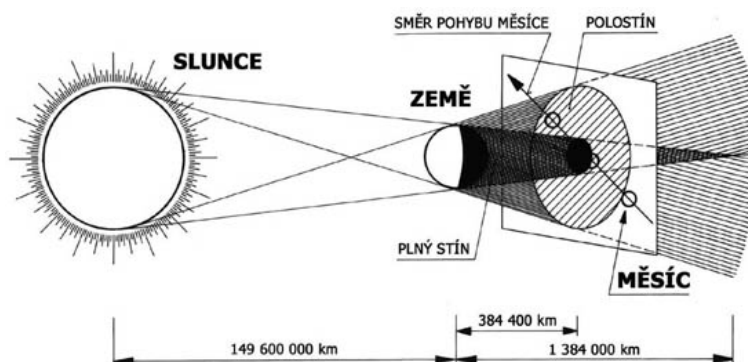
Dosadíme-li za poloměr Slunce $R_\odot = 696 \cdot 10^3$ km, poloměr Měsíce $R_M = 1\,738$ km, poloměr Země $R_Z = 6\,378$ km a za vzdálenost $r = 149,6 \cdot 10^6$ km, dostaneme pro délku plného stínu Země a Měsíce:

$$d_M = 374\,500 \text{ km} \quad (4.3)$$

$$d_Z = 1\,383\,600 \text{ km}. \quad (4.4)$$



Obrázek 4.1: Schématické znázornění zatmění Slunce pro výpočet délky Měsíčního stínu d_M .



Obrázek 4.2: Schéma zatmění Měsíce. Na myšlenou rovinu kolmou na osu stínu a proloženou okamžitou dráhou Měsíce je promítnuta oblast plného stínu a polostínu, kterou prochází Měsíc. Zdroj: <http://www.astrovm.cz/cz/na-obloze/ukazy/castecne-zatmeni-mesice-25-4-2013.html>

Jelikož vzdálenost Měsíce od Země je přibližně 380 000 km, dosáhne na povrch Měsíce konec plného stínu Měsíce. Protože Měsíc se pohybuje kolem Země po eliptické dráze, mění se jeho vzdálenost od Země a proto mohou nastat tři různé případy zatmění:

- 1) úplné - na pozorovací místo dopadá alespoň vrchol úplného stínu
- 2) částečné - na pozorovací místo dopadá jen polostín
- 3) kruhové (prstencové) - na pozorovací místo nedopadne měsíční stín, protože je kratší než okamžitá vzdálenost Země - Měsíc.

Úplné zatmění Slunce můžeme pozorovat jen z místa na povrchu Země, kam dopadá plný stín Měsíce, tzv. *pásu totality*. Tento pás nebývá širší více než 270 km. Stín se pohybuje rychlostí přinejmenším 34 km/min, proto maximální délka trvání zatmění je 7,5 minuty.

4.1.2 Zatmění Měsíce

Zatmění Měsíce nastává, je-li Země mezi Měsícem a Sluncem. Měsíc se musí nacházet poblíž uzlu své dráhy a musí být v úplňku. Za Zemí se táhne kuželový stín až do vzdálenosti 1 383 600 km. Kolem plného stínu se nachází polostín. Vstoupí-li celý Měsíc do plného stínu, nastane úplné zatmění Měsíce. Při něm Měsíc nezmizí z oblohy, zůstává viditelný, jen je tmavohnědý. Vstoupí-li jen částečně do plného stínu, nastane částečné (stínové) zatmění. Prochází-li Měsíc jen polostímem, nastává polostínové zatmění, při něm je Měsíc viditelný, jeho svit je jen zeslabený.

Zatmění Měsíce je pozorovatelné z celé polokoule, kde je v dané chvíli Měsíc nad obzorem. Počet slunečních zatmění je větší než měsíčních. Souvisí to se skutečností, že stínový kužel se za Zemí zužuje, před Zemí směrem ke Slunci rozšiřuje.

4.1.3 Perioda Saros

Zatmění se periodicky opakují v období 18 let a 11 dní. Tato perioda se nazývá *Saros* a souvisí s periodou stáčení uzlů měsíční dráhy. Po uplynutí této doby se zatmění opakují ve stejném pořadí. Během periody Saros nastává 70 zatmění, z toho 41 slunečních a 29 měsíčních.

4.2 Úlohy

1. Určete poměr slapových sil působících na Zemi, vyvolaných Sluncem a Měsícem. Jak by se situace změnila, kdyby se vzdálenost Měsíce zvětšila 2 krát? Hmotnost Země je $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnost Měsíce $M_M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg a hmotnost Slunce $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

[Využijeme vztah pro slapovou sílu:

$$F = \frac{2GM_Z M R_Z}{r^3}, \quad (4.5)$$

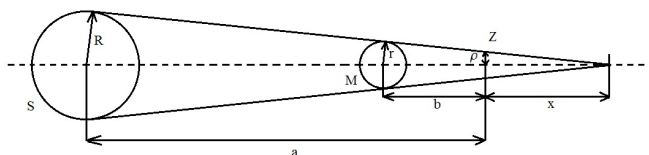
kde Země je těleso, na které svou gravitační silou působí jiné kosmické těleso o hmotnosti M , např. Slunce nebo Měsíc, a r je vzdálenost středů obou těles. Za povšimnutí stojí skutečnost, že velikost působící síly klesá s třetí mocninou vzdálenosti. Po dosazení získáme pro velikost působících slapových sil Měsíce na Zemi $M_{MZ} = 6,6 \cdot 10^{18}$ N a Slunce na Zemi $M_{\odot Z} = 3,0 \cdot 10^{18}$ N. Slapové síly vyvolané Měsícem jsou tedy 2,2 krát větší než slapové síly vyvolané Sluncem.]

2. Jsou dány tyto údaje: vzdálenost středu Slunce od povrchu Země $a = 150 \cdot 10^6$ km, vzdálenost středu Měsíce od povrchu Země $b = 360\,000$ km, poloměr Slunce $R = 7 \cdot 10^5$ km, poloměr Měsíce $r = 17,5 \cdot 10^2$ km. Na základě těchto údajů vypočítejte, jakou plochu má stín Měsíce na povrchu Země při úplném zatmění Slunce. Povrch Země považujte za rovinný. Při jaké vzdálenosti Měsíce od Země se měsíční stín dotkne Země v jediném bodě?

[Z podobnosti trojúhelníků na obrázku 4.3 vyplývá:

$$\frac{R}{a+x} = \frac{r}{b+x} \quad (4.6)$$

a



Obrázek 4.3: Schematické znázornění uspořádání těles k výpočtu plochy měsíčního stínu na povrchu Země při úplném zatmění Slunce.

$$\frac{r}{b+x} = \frac{\rho}{x} \quad (4.7)$$

Z druhé rovnice vyjádříme $\rho = \frac{rx}{b+x}$ a dosadíme z rce (4.6) za $x = \frac{ra-Rb}{R-r}$. Pak

$$\rho = \frac{ra - Rb}{a - b} = 70,2 \text{ km} \quad (4.8)$$

Plocha Měsíčního stínu je $S = \pi \rho^2 = 15\,500 \text{ km}^2$.

Má-li se Měsíční stín dotknout Země v jediném bodě, pak musí platit $x = 0$, tedy $ra = Rb$. Pro vzdálenost Měsíce od povrchu Země po číselném dosazení vyjde hodnota $b = 375\,000 \text{ km}$. Pokud by vzdálenost Měsíce od Země byla ještě větší, nenastane již úplné zatmění ale prstencové.]

3. Označme r poloměr Země, pak poloměr Slunce činí $R_{\odot} = 109 r$, vzdálenost středů Slunce a Země $a = 23\,680 r$, vzdálenost středu Měsíce od středu Země $b = 60 r$. Vypočtete poloměr ρ kolmého řezu plného stínu Země ve vzdálenosti Měsíce od Země za předpokladu, že Země není obklopena atmosférou.

$$[\rho = 0,726 r]$$

5

Dalekohledy

5.1 Dalekohledy

Dalekohledy mají tři základní úkoly:

- 1) Nasbírat co nejvíce světla (což nám umožňuje pozorovat i velice slabé objekty)
- 2) Zvětšit zdánlivý úhlový rozměr pozorovaného objektu (díky tomu dosahujeme daleko lepších rozlišení)
- 3) Používají se k měření poloh objektů.

Dalekohledy dělíme na čočkové *refraktory* a zrcadlové *reflektory* a kombinované (zrcadlo-čočkové), tzv. *katadioptrické*.

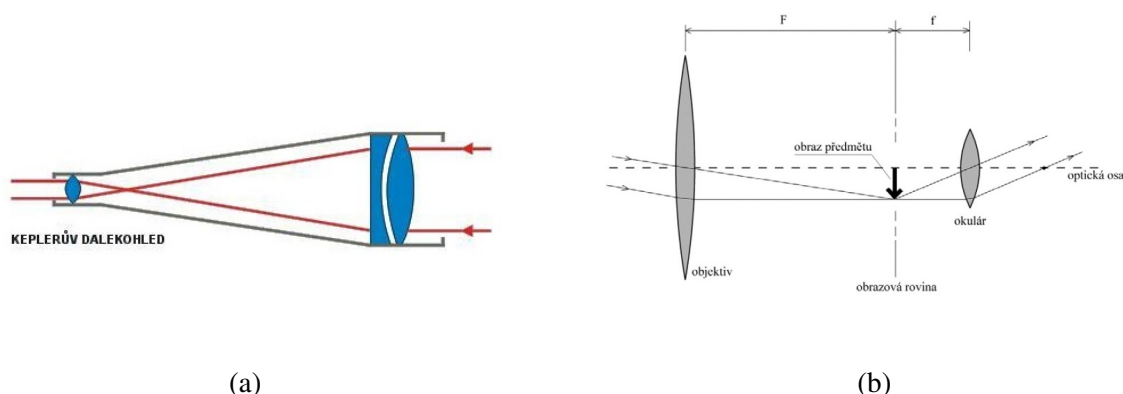
5.1.1 Refraktory

U čočkových dalekohledů se jako objektiv používá spojná čočka. Podle typu okulárové čočky rozlišujeme:

1. *Galileův refraktor*: Jako okulár je použita rozptylka. Takto vzniklý obraz je vzpřímený a neskutečný. Ke krajům zorného pole klesá jasnost, proto tyto dalekohledy musely být vybaveny mnohem větším objektivem. Obrazová rovina leží mimo dalekohled, proto do ní nelze vložit ani clonu ani záměrný kříž. V astronomii se proto tyto dalekohledy nevyužívají.
2. *Keplerův refraktor*. Objektiv i okulár jsou tvořeny spojnou čočkou. Tento dalekohled má širší zorné pole, poskytuje jasnější obraz, který je skutečný a převrácený. Délka dalekohledu je dána součtem ohniskových vzdáleností objektivu a okuláru.¹

Výhodou refraktorů je velké zorné pole, snazší výroba (kvalitní a přesná čočka se vyrobí snáz než kvalitní zrcadlo), optické plochy nepodléhají korozi, tubus dalekohledu je uzavřený - brání prachu a vlhkosti dostat se dovnitř. Čočkové dalekohledy jsou snadno přenosné. Nevýhodou je barevná vada čoček (viz dále), ztráty světla způsobené průchodem světelných paprsků čočkou a objektivem, který je náchylný k orosení.

¹Jeden z největších Keplerových dalekohledů byl postaven Johannem Heveliem v 70. letech 17. st a měl délku 42 m.



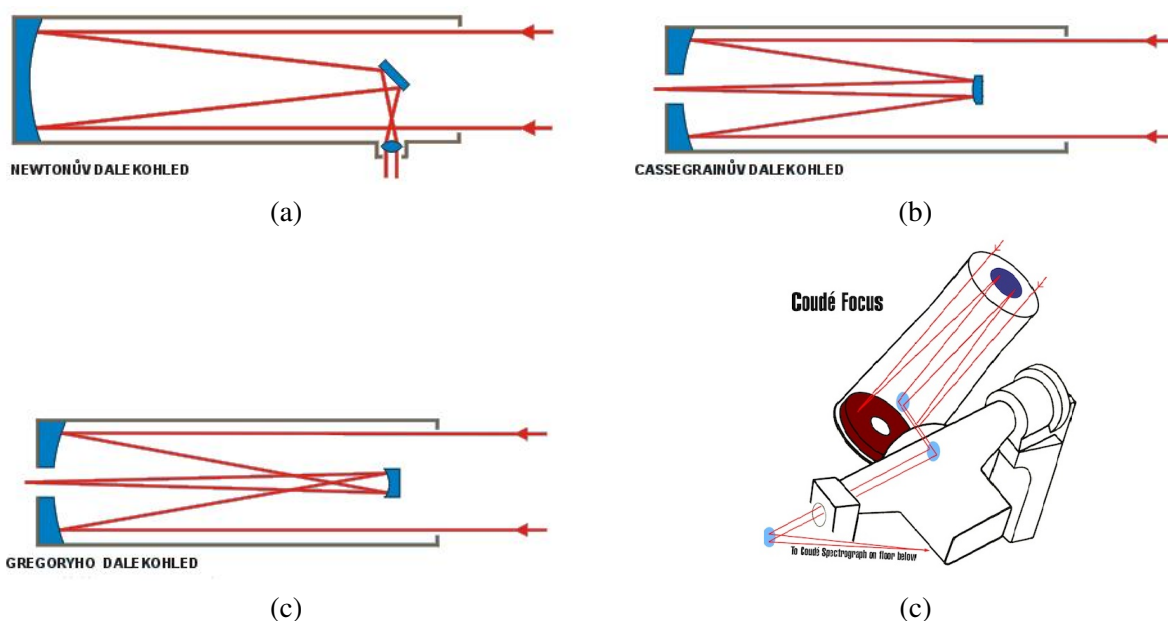
Obrázek 5.1: a) Schematický náčrt Keplerova dalekohledu. Převzato z: <http://dalekohledy.wz.cz/odalekohledech.html>. b) U Keplerova dalekohledu je objektivem spojka o velké ohniskové vzdálenosti F , která vytvoří obraz vzdáleného objektu v ohniskové rovině obrazového prostoru čočky. Obraz je převrácený, zmenšený a skutečný. Okulár tvoří další spojná čočka, s menší ohniskovou vzdáleností f . Okulár se umísťuje tak, aby obraz vytvořený objektivem se nacházel v ohniskové rovině předmětového prostoru okuláru. Okulárem tedy pozorujeme obraz předmětu jako lupou.

5.1.2 Reflektory

Zrcadlové dalekohledy používají jako objektiv parabolické zrcadlo. Podle toho, jakým způsobem jsou odchýleny paprsky odražené od primárního zrcadla, rozlišujeme několik typů reflektorů.

1. *Newtonův reflektor*: Paprsky odražené od primárního zrcadla dopadají na sekundární rovinné zrcátko, které je skloněno pod úhlem 45° k optické ose hlavního zrcadla. Takto odražené paprsky jsou vyvedeny bokem tubusu ven z dalekohledu. Obraz je stranově i výškově převrácený.
2. *Cassegrainův reflektor*: Sekundární zrcátko již není rovinné ale konvexní a odráží světelné paprsky zpět přes otvor ve středu primárního zrcadla do sekundárního ohniska vně dalekohledu. Obraz je také převrácený.
3. *Gregoryův reflektor*: Sekundární zrcátko je narozdíl od Cassegrainova reflektoru duté.
4. *Coudé reflektor*: Uspořádání Coudé reflektoru je mnohem složitější. Tubus dalekohledu je zalomen, okulárová část slouží jako polární osa, část s objektivem jako deklinační osa. Pomocí dvou rovinných zrcátek je světlo vedeno deklinační osou do pevného Coudé ohniska. Výhodou tohoto složitějšího uspořádání je fakt, že se okulár nachází stále na témže místě, nezávisle na tom, na které místo na obloze je dalekohled namířen.

Výhodou reflektorů je úplná absence barevné vady. Zrcadla velkých průměrů se vyrábí snadněji než stejně velké čočky a navíc jsou zrcadla ukryta v tubusu, proto jsou méně náchylná k orosení. Nevýhodou je velká citlivost na neklid ovzduší a nutnost čas od času znovu pokovit zrcadlo, popřípadě seřídít obě zrcadla. Navíc sekundární zrcátko, které zakrývá část primárního zrcadla způsobuje ohybové jevy a snižuje kontrast obrazu.



Obrázek 5.2: Schématické nákresy základních typů zrcadlových dalekohledů. a) Newtonův reflektor, b) Cassegrainův, c) Gregoryho reflektor. Převzato z: <http://dalekohledy.wz.cz/odalekohledech.html>, d) Coudé dalekohled, převzato z: <http://telescopes.stardate.org>.

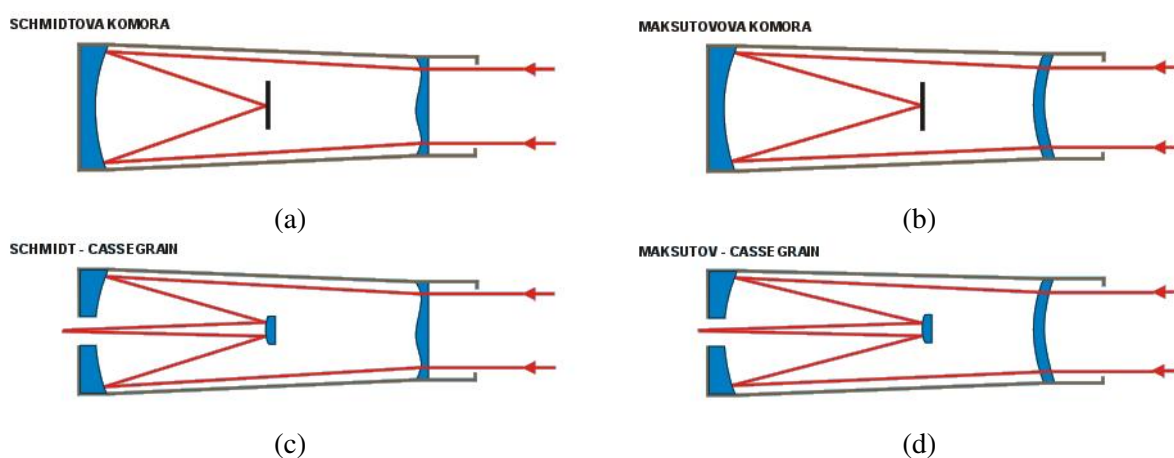
5.1.3 Katadioptrické dalekohledy

Nevýhodou reflektorů bylo jejich malé zorné pole, které při fotografování velkých oblastí oblohy nepostačovalo. Řešení našel v roce 1930 Bernhard Schmidt, který zkombinoval čočkový a zrcadlový dalekohled dohromady. O 11 let později přišel s dalším novým řešením Dmitrij Dmitrijevič Maksutov.

1. *Schmidtův dalekohled (komora)* používá jako objektiv sférické zrcadlo a chyby jeho zobrazení koriguje tenká skleněná korekční deska.
2. *Maksutův dalekohled (Maksutova komora)* používá k odstranění sférické aberace meniskus. Výhodou tohoto dalekohledu je velká světelnost a velké zorné pole při malé délce tubusu.
3. *Schmidt-Cassegrain*: vznikl kombinací Schmidtovy komory s klasickým Cassegrainovým dalekohledem. Je to snad nejúspěšnější systém, velmi oblíbený mezi astronomy amatéry.
4. *Maksutov-Cassegrain*: vznikl kombinací Maksutovy komory s Cassegrainovým dalekohledem.

5.2 Vady optických soustav

1. *Barevná vada - chromatická aberace*: Způsobuje ji odlišný lom paprsků různých vlnových délek. Červené paprsky se v čočce lámí méně než modré. Vada se odstraňuje pomocí soustavy 2 čoček - tzv. ACHROMAT, nebo trojčočkovým objektivem - tzv. APOCHROMAT.



Obrázek 5.3: Kombinované (katadioptrické) dalekohledy: a) Schmidtova komora, b) Maksutova komora, c) dalekohled Schmidt-Cassegrain a d) dalekohled Maksutov-Cassegrain. Převzato z: <http://dalekohledy.wz.cz/odalekohledech.html>

2. *Kulová vada - sférická aberace*: Vzniká tím, že se paprsky na okraji čočky lomí více než paprsky jdoucí středem čočky. U čoček se odstraňuje soustavou čoček - APLANÁT, u zrcadel použitím zrcadla ve tvaru paraboloidu.
3. *Astigmatismus - nebodovost*: Vzniká při zobrazování okolí v širším úhlu. Objekty na okrajích zorného pole se zobrazí jako úsečky nebo plošky. Odstraňuje se spolu s kulovou a barevnou vadou ve vícečočkových objektivěch - tzv. ANASTIGMATECH.

5.3 Základní optické vlastnosti dalekohledů

5.3.1 Zvětšení dalekohledu

Úhlové zvětšení dalekohledu Z je dáno poměrem ohniskových vzdáleností objektivu a okuláru,

$$Z = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}}. \quad (5.1)$$

Zvětšení dalekohledu můžeme vyjádřit taky pomocí průměru vstupní a výstupní pupily, D a D' ,

$$Z = \frac{D}{D'}. \quad (5.2)$$

Výstupní pupila dalekohledu by měla být vždy menší než vstupní pupila oka (8 mm), jinak by část světla prošlého dalekohledem zůstala nevyužita. Odtud nejmenší rozumné zvětšení dalekohledu, tzv. *normální zvětšení* Z_N je

$$Z_N = \frac{D[\text{mm}]}{8}. \quad (5.3)$$

O málo větší zvětšení se používá v triedrech.

Zvětšení, které se pohybuje v rozmezí $(\frac{D}{2}; 2D)$ se nazývá *užitečné zvětšení*. Při něm využijeme plně rozlišovací schopnost ψ dalekohledu (viz níže), $\psi = \frac{110''}{D[\text{mm}]}$. Tzn., že ψ musíme zvětšit alespoň na rozlišovací schopnost oka ($120''$):

$$Z_U = \frac{120''}{\psi} = \frac{120''}{110''} D[\text{mm}] \approx D [\text{mm}]. \quad (5.4)$$

Při zvětšení větším než $2D$ je už výstupní pupila příliš malá, obraz ztrácí kontrast i jas a je temný. Takové zvětšení se nazývá *mrtvé zvětšení*.

5.3.2 Rozlišovací schopnost dalekohledu

Žádný dalekohled neumí zobrazit vzdálené body opět jako body, ale zobrazí je jako kotoučky. Průměr nejmenšího kotoučku je právě rozlišovací schopnost dalekohledu. Je to tedy nejmenší úhlová vzdálenost mezi dvěma body, kterou dalekohled dokáže ještě rozlišit. Pro žlutozelenou barvu, na kterou je naše oko nejcitlivější, je rozlišovací schopnost dána vztahem:

$$\psi = \frac{110''}{D[\text{mm}]} \quad (5.5)$$

Rozlišovací schopnost závisí na kvalitě objektivu. Zkoušíme ji pomocí různých testů nebo pozorováním těsných dvojhvězd. Jsou-li středy kotoučků obou hvězd ve dvojhvězdě od sebe vzdáleny přesně ψ , uvidíme dvojhvězdu jako čárku. Jsou-li vzdáleny více než ψ , obě složky dvojhvězdy od sebe odlišíme.

5.3.3 Světelnost dalekohledu

Světelnost dalekohledu je poměr průměru vstupní pupily objektivu $D[\text{mm}]$ a ohniskové vzdálenosti f_{obj} ,

$$A = \frac{D[\text{mm}]}{f_{\text{obj}}} \quad (5.6)$$

Někdy se uvádí v podobě $1 : \frac{f_{\text{obj}}}{D[\text{mm}]}$.

5.4 Úlohy

1. Jaký by musel být průměr objektivu astronomického dalekohledu, aby v něm bylo možné vidět skutečný průměr obří hvězdy Betelgeuze, jejíž úhlový průměr činí $0,04''$?

[Rozlišovací schopnost dalekohledu musí být alespoň $\psi = 0,04''$. Pak $D = 2750 \text{ mm}$.]

2. Jaká je nejmenší úhlová vzdálenost středů dvou hvězd, které lze rozlišit v dalekohledu o průměru objektivu 60 cm .

[$0,18''$]

3. Dokažte, že teoretická rozlišovací schopnost zdravého lidského oka je přibližně $1'$.

[Vezměme vlnovou délku $\lambda = 550 \text{ nm}$, na kterou je lidské oko nejcitlivější, a průměr oční pupily $D = 2 \text{ mm}$. Po dosazení do vztahu pro rozlišovací schopnost

$$\psi = 1,22 \frac{\lambda[\text{m}]}{D[\text{m}]} \quad (5.7)$$

Po číselném vyjádření obdržíme $\psi = 3,350 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 1'9''$. Reálná hodnota je kolem $2'$.]

4. Hubbleův kosmický dalekohled obíhající nad Zemí ve výšce 600 km nad Zemí používá primární zrcadlo o průměru $D = 2,4 \text{ m}$. Určete jeho rozlišovací schopnost na vlnové délce čáry vodíku L_α s $\lambda = 121,6 \text{ nm}$. Z jaké vzdálenosti d bychom pod stejným úhlem viděli dvacetikorunu o průměru $x = 25 \text{ mm}$?

[Rozlišovací schopnost dalekohledu:

$$\psi = 1,22 \frac{\lambda[\text{m}]}{D[\text{m}]} = 6,18 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,0127'' \quad (5.8)$$

Pro vzdálenost d platí: $d = \frac{x}{\psi} = \frac{0,025 \text{ m}}{6,157 \cdot 10^{-8} \text{ rad}} = 406 \text{ km}$.]

5. Úhel mezi dvěma hvězdami je $\varphi = 10^{-6} \text{ rad}$. Lze tyto hvězdy rozlišit pomocí dalekohledu s průměrem primárního zrcadla $2,54 \text{ m}$? Předpokládejme že pozorování proběhlo na vlnové délce $\lambda = 510 \text{ nm}$.

[Rozlišovací schopnost dalekohledu je:

$$\psi = 1,22 \frac{510 \cdot 10^{-9} [\text{m}]}{2,54 [\text{m}]} = 2,45 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,05'' \quad (5.9)$$

Poměr $\frac{\varphi}{\psi} = 4,2$. Dvojhvězdy tímto dalekohledem rozlišíme bez problémů, neboť jejich úhlová vzdálenost je 4 krát větší než rozlišovací schopnost dalekohledu.]

6. Předpokládejme, že hvězdy z minulého příkladu vyzařují rádiové vlny na frekvenci $\nu = 400 \text{ MHz}$. Můžeme obě hvězdy rozlišit při detekci rádiového záření pomocí rádiového teleskopu v Arecibu, jehož průměr je 305 m ?

[Vlnová délka rádiových vln je $\lambda = \frac{c}{\nu} = 0,75 \text{ m}$. Rozlišovací schopnost teleskopu v Arecibu

$$\psi = 1,22 \frac{0,75 [\text{m}]}{305 [\text{m}]} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (5.10)$$

K rozlišení obou hvězd na této vlnové délce bychom potřebovali $3\,000$ krát větší rozlišení.]

7. Jaké musí být zvětšení dalekohledu, aby při pozorování Jupitera (úhlový průměr $40''$) byl průměr Jupitera stejný jako průměr Měsíce v úplňku při pozorování pouhým okem ($31'$)?

$$[Z = \frac{1\,860''}{40''} = 46,5]$$

8. Astronomický dalekohled má ohniskovou vzdálenost objektivu $f = 150$ cm, okuláru $f' = 5$ cm. Pod jakým úhlem α v něm uvidíme Měsíc, je-li úhlový průměr Měsíce $31'$.

[Zvětšení dalekohledu $Z = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}} = 30$. Měsíc v něm uvidíme pod úhlem $\alpha = 31' \cdot Z = 15^\circ 30'$.]

9. Jaký průměr x bude mít obraz Slunce v ohnisku objektivu, jehož ohnisková vzdálenost $f = 40$ cm? Zdánlivý úhlový průměr Slunce $d = 32'$.

[Ze vztahu: $\text{tg } \frac{d}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{f}$ vyjádříme x : $x = 2f \text{tg } \frac{d}{2} = 0,37$ cm.]

10. Hvězda prošla zorným polem nehybného dalekohledu (podél průměru) za t sekund. Vypočtete v úhlové míře průměr d zorného pole dalekohledu, je-li δ deklinace hvězdy.

[Hvězda nacházející se na rovníku opíše za 24 hodin kružnici o poloměru, který označíme r , tedy $2\pi r = 360^\circ = 24 \text{ hod} = 86\,400$ s. Hvězda nacházející se mimo rovník opíše za 24 hodin kružnici o menším poloměru, který označíme x . Pro tento poloměr platí: $x = r \cos \delta$, kde δ je deklinace hvězdy. Za 1 s urazí hvězda dráhu

$$\frac{360^\circ \cos \delta}{86\,400} = 15'' \cos \delta \quad (5.11)$$

Zorným polem hvězda projde za t sekund, tedy: $d = t \cdot 15'' \cos \delta$.]

11. Určete úhlovou vzdálenost dvou svislých vláken v ohnisku okuláru meridiánového kruhu, jestliže doba průchodu hvězdy δ UMi mezi těmito vlákny byla $t = 184$ s. Deklinace hvězdy $\delta = 86^\circ 36,6'$.

[Po dasazení do výsledného vztahu z minulého příkladu obdržíme:

$$d = t \cdot 15'' \cos \delta = 163'' = 2'43''.]$$

12. Jakou nejmenší délku x musí mít úsečka na Měsíci, aby její obraz v zrcadlovém dalekohledu s průměrem zrcadla 6 m bylo možno odlišit od bodu? Vzdálenost Měsíce od Země je $d = 384\,400$ km.

[Rozlišovací schopnost dalekohledu je: $\psi = \frac{110''}{D[\text{m}]} = 0,018''$. Ze vztahu $\text{tg } \frac{\psi}{2} = \frac{x}{d}$ vyjde po číselném dosazení: $x = 33,5$ m.]

13. Jak velký by musel být průměr zrcadla dalekohledu, abychom v něm dokázali rozlišit od bodu tzv. "Tvář na Marsu", nacházející se v oblasti Cydonia na povrchu Marsu. Uvažujme větší z rozměrů "tváře" 2,5 km a vzdálenost Marsu od Země při opozici $55 \cdot 10^6$ km.

[Analogicky předešlému příkladu: $\text{tg } \frac{\psi}{2} = \frac{x}{2d} = 2,272 \cdot 10^{-8}$, odtud $\psi = 2,604 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,01''$. Dalekohled s touto rozlišovací schopností by musel mít průměr zrcadla: $D = \frac{110''}{\psi} = 11$ m.]

14. Určete rozlišovací schopnost dalekohledu o průměru $D = 1,3$ m na vlnové délce $\lambda = 550$ nm. Jaký by musel mít poloměr rádiový teleskop pracující na vlnové délce $\lambda = 4$ m se stejnou rozlišovací schopností?

[Rozlišovací schopnost dalekohledu je:

$$\psi = 1,22 \frac{550 \cdot 10^{-9} [\text{m}]}{1,3 [\text{m}]} = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,1'' \quad (5.12)$$

Průměr rádiového teleskopu se stejnou rozlišovací schopností by musel být $9,5 \cdot 10^6$ m, což je technicky nemožné. Proto jsou používány interferometrické soustavy rádiových teleskopů.]

6

Hvězdy

6.1 Hvězdná velikost, Pogsonova rovnice

Už starořeční astronomové rozdělili hvězdy do 6 skupin, magnitud¹, podle jejich jasnosti. Nejjasnější hvězdy byly hvězdy 1. magnitudy, nejslabší, okem viditelné, hvězdy byly hvězdy 6. magnitudy.

Později se zjistilo, že díky vlastnostem lidského oka tvoří tyto magnitudy přibližně geometrickou řadu. Tento poznatek dnes popisuje Weber - Fechnerův psychofyzikální zákon, který říká: Mění-li se fyzikální podněty působící na naše smysly řadou geometrickou, vnímáme jejich změnu v řadě aritmetické.

Fotometrická veličina udávající jasnost hvězdy nebo jiného kosmického tělesa se dnes označuje pojmem *hvězdná velikost* a její jednotkou je *magnituda* (zkratka *mag*). Je měřítkem ozáření jednotkové plochy, postavené kolmo ke směru dopadajících paprsků. Hvězdná velikost nesouvisí s rozměrem či hmotností objektu.

Jsou-li I_1, I_2 intenzity osvětlení způsobené zářením dvou hvězd, pak rozdíl jejich hvězdných velikostí popisuje *Pogsonova rovnice*:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right). \quad (6.1)$$

Je-li rozdíl hvězdných velikostí roven 1 *mag*, je jasnější hvězda 2,512 krát jasnější než slabší hvězda. Při rozdílu hvězdných velikostí $m_1 - m_2 = 5 \text{ mag}$ je poměr intenzit jasnější hvězdy ke slabší $(I_2/I_1) = 100$.

V současné době se hvězdná velikost většinou určuje detektory záření a filtry s přesně definovanou propustností v různých oborech elektromagnetického spektra.

Podle spektrálního oboru, v němž je tok záření měřen, rozlišujeme:

- *vizuální hvězdné velikosti* m_v , které odpovídají celkové intenzitě v rozmezí vlnových délek, na něž je lidské oko citlivé (maximum u $\lambda = 530 \text{ nm}$).
- *fotografické hvězdné velikosti* m_{ph} , určené ze zčernání obrazu na obyčejné fotografické emulzi citlivé na modré světlo (maximum na $\lambda = 430 \text{ nm}$).

¹Název magnituda pochází z latinského *magnitudo* - velikost.

- *fotovizuální hvězdné velikosti* m_{pv} , což jsou fotografické hvězdné velikosti určené pomocí filtru citlivého na žlutozelené světlo, (maximum na $\lambda = 543$ nm, která je blízká největší citlivosti lidského oka.)
- *fotoelektrické hvězdné velikosti* m_{pe} , jsou určeny měřením intenzity světla pomocí fotoelektrického fotometru, jehož čidlo (fotonásobič nebo CCD) převádí energii dopadajících fotonů na el. proud, který lze přesně změřit. Fotoelektrická hvězdná velikost je určena s přesností na setiny, což je mnohem víc, než u fotografické či vizuální hvězdné velikosti. Vhodnou kombinací fotonásobiče a filtru lze zvolit interval vlnových délek (v různých oborech elektromagnetického záření, nejen viditelného).
- *radiometrické hvězdné velikosti* m_{rad} , jsou určeny pomocí radiometru.
- *bolometrické hvězdné velikosti* m_{bol} , jsou vypočtené hvězdné velikosti, které by odpovídaly celkovému záření hvězdy na všech vlnových délkách vně zemské atmosféry. Vizuální hvězdná velikost odpovídá pouze světlu!

Rozdíl mezi bolometrickou a vizuální hvězdnou velikostí se nazývá *bolometrická korekce BC*.

6.1.1 Absolutní hvězdná velikost

Celková energie vyzářená z celého povrchu hvězdy za jednotku času je dána rovnicí:²

$$L = 4\pi r^2 I, \quad (6.2)$$

kde L je celkový zářivý výkon (luminozita) hvězdy, I je intenzita záření. Aby bylo možno vzájemně srovnávat zářivý výkon jednotlivých hvězd, převádí se hvězdná velikost na hodnotu, jakou by měla pokud bychom danou hvězdu pozorovali ze vzdálenosti 10 pc, což odpovídá paralaxe $\pi = 0,1''$. Pak mluvíme o *absolutní hvězdné velikosti* M . Intenzita záření ubývá se čtvercem vzdálenosti. Označíme-li I_r intenzitu hvězdy ve vzdálenosti r parseků, m její zdánlivou hvězdnou velikost, I_{10} intenzitu hvězdy ve vzdálenosti 10 pc a její absolutní hvězdnou velikost M , pak pro jejich poměr platí:

$$\frac{I_r}{I_{10}} = \frac{10^2}{r^2}. \quad (6.3)$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice:

$$M - m = 2,5(\log I_r - \log I_{10}) = 5 \log 10 - 5 \log r. \quad (6.4)$$

Odtud pro absolutní hvězdnou velikost obdržíme výsledný vztah:

$$M = m + 5 - 5 \log r, \quad (6.5)$$

kde r dosazujeme v parsecích, nebo pomocí paralaxy π , kterou dosazujeme v obloukových vteřinách,

$$M = m + 5 + 5 \log \pi. \quad (6.6)$$

V tabulce (6.1) jsou uvedeny pozorované a absolutní hvězdné velikosti nejjasnějších objektů na obloze:

²Tato rovnice platí přesně jen v případě, kdy záření není na své dráze mezi zdrojem a pozorovatelem oslabeno absorpcí.

Tabulka 6.1: Pozorované a absolutní hvězdné velikosti nejjasnějších objektů na obloze.

Objekt	pozorovaná hv. velikost m [mag]	absolutní hv. velikost M [mag]	vzdálenost [ly]
Slunce	-26,6	4,8	$1,5 \cdot 10^8$ km
Měsíc v úplňku	-12,6	-	$3,844 \cdot 10^5$ km
záblesky satelitů IRIDIUM	-8,0	-	stovky km
Venuše	-4,4	-	-
ISS	-3,5	-	400 km
Jupiter	-2,8	-	-
Sirius A (α CMa A)	-1,46	1,45	9
Canopus (α Car)	-0,72	-2,5	310
Arcturus (α Boo)	-0,04	-0,1	36
α Centauri A (Toliman)	-0,01	4,37	4
Vega (α Lyr)	0,03	0,5	26
Capella (α Aur)	0,08	-0,4	41
Polárka (α UMi)	1,97	-3,6	323
61 Cygni (HIP 104 217)	6,05	8,3	11
Barnardova šipka (HIP 87 937)	9,54	13,2	6

6.1.2 Modul vzdálenosti

Modul vzdálenosti ($m - M$) je rozdíl pozorované a absolutní hvězdné velikosti, neuvažujeme-li absorpci. Můžeme je j vyjádřit pomocí vzdálenosti r hvězdy

$$m - M = 5 \log r - 5, \quad (6.7)$$

nebo pomocí paralaxy π

$$m - M = -5 \log \pi - 5. \quad (6.8)$$

Na následujícím obr. 6.1 jsou uvedeny moduly vzdáleností hvězd pro různé vzdálenosti od pozorovatele.

6.1.3 Absorpce světla

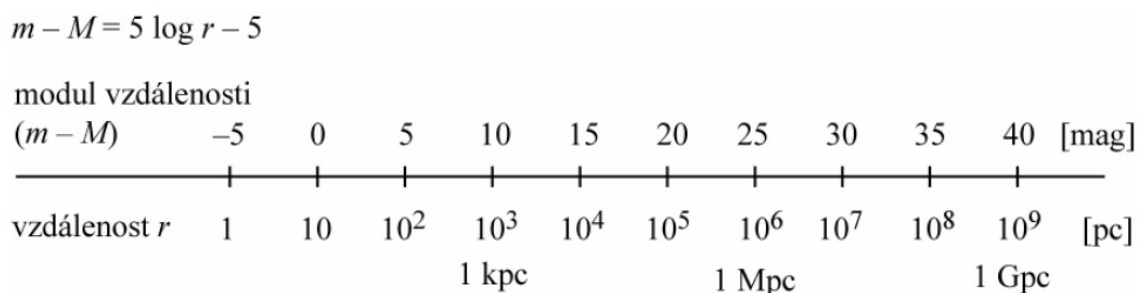
Protože záření na cestě k pozorovateli prochází absorpčním prostředím (např. oblaky mezihvězdného prachu), dochází ke snížení intenzity záření hvězd (a tím ke zvýšení hodnoty jejich pozorované hvězdné velikosti). Pozorovaná hvězdná velikost vzroste o veličinu $A(r)$. Přesný vztah pro absolutní hvězdnou velikost má pak tvar:

$$M = m + 5 - 5 \log r - A(r), \quad (6.9)$$

kde $A(r)$ je funkce charakterizující absorpci světla.

V prvním přiblížení roste absorpce světla úměrně se vzdáleností hvězdy

$$A(r) = ar, \quad (6.10)$$



Obrázek 6.1: Modul vzdálenosti. Zdroj: Z. Pokorný: *Vademecum [online]*, Hvězdárna a planetárium M. Koperníka v Brně.

kde a je koeficient absorpce, tj. absorpce na délkovou jednotku (např. na kpc), kterou projde záření. Střední hodnota je $\bar{a} = 0,3 \text{ mag}$ na kiloparsek. Absolutní hvězdnou velikost pak můžeme vyjádřit vztahem:

$$M = m + 5 - 5 \log r - ar. \quad (6.11)$$

6.1.4 Úlohy

1. Jaký je poměr intenzit světla dvou hvězd, jejichž zdánlivé hvězdné velikosti se liší o 7 mag ?

[Po dosazení do Pogsonovy rovnice

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \quad (6.12)$$

obdržíme $\frac{I_2}{I_1} = 631$.]

2. Jestliže se intenzita hvězdy zvýší 25 000 krát, o kolik se změní její hvězdná velikost?

[Z Pogsonovy rovnice: $m_2 = m_1 - 11^m$; nová hvězdná velikost se zmenší o 11^m a hvězda bude tedy o 11^m jasnější.]

3. Kdyby se vzdálenost hvězdy 4^m zmenšila na polovinu, jaká by byla její zdánlivá hvězdná velikost?

[Označme původní vzdálenost hvězdy r_1 , novou jako $r_2 = \frac{r_1}{2}$. Připomeňme, že luminosita L hvězdy je celková energie vyzařovaná z celého povrchu hvězdy do okolního prostoru, $L = 4\pi r^2 I$.

Pro poměr intenzit světla dvou hvězd tedy platí:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{L_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{L_2}{4\pi r_2^2}}. \quad (6.13)$$

Za předpokladu, že se jedná o jednu a tutéž hvězdu pozorovanou ve dvou různých vzdálenostech, $L_1 = L_2$, obdržíme:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \quad (6.14)$$

Po dasazení do Pogsonovy rovnice:

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log \frac{I_1}{I_2} = 5 \log \frac{r_2}{r_1} \quad (6.15)$$

Po číselném vyjádření: $m_2 = 2,5^m$.]

4. Jak by se jevílo jasné Slunce pro pozorovatele poblíž Vegy. Zdánlivá hvězdná velikost Slunce pro pozorovatele na Zemi je $m = -26,6^m$. Vzdálenost Vegy je 7,8 pc.

[$m = 4,43^m$]

5. Hvězda Deneb je od nás 75 krát dále než Síríus. Zdánlivá hvězdná velikost Denebu je $m_D = 1,26^m$, Síría $m_S = -1,43^m$. Kolikrát by byla intenzita hvězdy Deneb větší, než intenzita Síría, kdyby byly obě dvě ve stejné vzdálenosti?

[Označme vzdálenost Denebu $r_D = 75 r_S$. Posuneme-li Síríus do stejné vzdálenosti v jaké se nachází Deneb, bude nová zdánlivá hvězdná velikost Síría $m_{S\text{nova}}$:

$$\begin{aligned} m_{S\text{nova}} - m_S &= 2,5 \log \frac{I_S}{I_{S\text{nova}}} \\ &= 5 \log \frac{r_D}{r_S}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Zde jsme využili vztah (6.13). Po číselném dosazení: $m_{S\text{nova}} = 7,945^m$.

Pro poměr intenzit posunutého Síría a Denebu dosadíme do Pogsonovy rovnice:

$$m_{S\text{nova}} - m_D = 2,5 \log \frac{I_D}{I_{S\text{nova}}} \quad (6.17)$$

Odtud $I_D = 472 I_{S\text{nova}}$.]

6. Dvojhvězda Castor má složky o hvězdných velikostech $m_1 = 1,99^m$, $m_2 = 2,85^m$. Jaká je hvězdná velikost Castora při pozorování pouhým okem, kdy se nám jeví jako jednoduchá hvězda.

[Vypočteme poměr intenzit obou složek z Pogsonovy rovnice:

$$I_1 = 2,208 I_2. \quad (6.18)$$

Při pozorování pouhým okem sledujeme jedinou hvězdu s intenzitou $I = I_1 + I_2 = 3,208 I_2$. Její zdánlivou hvězdnou velikost určíme z:

$$m_2 - m = 2,5 \log \frac{I}{I_2}. \quad (6.19)$$

Odtud $m = 1,58^m$.]

7. Zdánlivá hvězdná velikost Síria je $m = -1,43^m$, paralaxa $\pi = 0,376''$. Určete jeho absolutní velikost.

$$[M = 1,45^m]$$

8. Kolikrát je jasnost Slunce větší než jasnost hvězdy Proxima Centauri? Zdánlivá hvězdná velikost Proximy je $m_P = +10,5^m$, paralaxa $\pi = 0,76''$. Absolutní hvězdná velikost Slunce je $M_\odot = 4,85^m$.

$$[\text{Absolutní hvězdná velikost Proximy: } M_P = 14,904^m.]$$

Poměr intenzit obou hvězd vyjádříme z rce:

$$M_P - M_\odot = 2,5 \log \frac{I_\odot}{I_P} \quad (6.20)$$

$$\text{Odtud: } \frac{I_\odot}{I_P} = 10\,500.]$$

9. Hvězda α Cas je ve vzdálenosti 163 ly od Slunce. Její zdánlivá hvězdná velikost je $m = 2,37^m$. Vypočtete její absolutní hvězdnou velikost.

$$[\text{Převédeme vzdálenost na parseky, } 163 \text{ ly} = 50 \text{ pc. Po dosazení do rovnice (6.5) obdržíme } M = -1,12^m.]$$

10. Seřadte 7 nejjasnějších hvězd oblohy podle jejich absolutní hvězdné velikosti, znáte-li jejich zdánlivé hvězdné velikosti a vzdálenosti.

Hvězda	m [mag]	r [ly]
Slunce	-26,6	1 au
Sírius	-1,47	8,6
Canopus	-0,72	310
Arcturus	-0,04	36,7
Alfa Centauri	-0,01	4,365
Vega	0,04	25,3
Capella	0,08	42,2

[Canopus, Capella, Arcturus, Vega, Sirius, Alfa Centauri, Slunce.]

11. Kolikrát je jasnost hvězdy Canopus větší než jasnost Slunce?

$$[I_{\text{Can}} = 17\,000 I_\odot]$$

12. Určete modul vzdálenosti $m - M$ hvězdy, která je ve vzdálenosti 100 pc od Slunce.

$$[m - M = 5^m]$$

13. Paralaxa hvězdy je $\pi = 0,0074''$, zdánlivá hvězdná velikost je $6,5^m$. Určete absolutní hvězdnou velikost této hvězdy, je-li koeficient absorpce $a = 0,0005$ hvězdné velikosti na parsek.

$$[M = 0,78^m]$$

6.2 Záření absolutně černého tělesa

Pro popis dějů spojených s vyzařováním energie se používá abstrakce - absolutně černé těleso. Jeho důležitou vlastností je, že dokonale pohlcuje veškeré záření, které na něj dopadá. Žádné záření neodráží. Černé těleso je dokonalým zářičem, neboť ze všech možných těles stejné teploty vysílá největší množství záření. Nejvíce se vlastnostem absolutně černého tělesa blíží dutina, jejíž vnitřní povrch tvoří matná černá plocha. Když otvorem pronikne do dutiny elektromagnetické záření, při opakovaných odrazech od vnitřních stěn dutiny se veškerá energie záření pohltí. Otvor dutiny se pak jeví jako černé těleso.

Dokonalé černé těleso je jen teoretický pojem, ke kterému se skutečná tělesa mohou do jisté míry přiblížit. Nejvíce se mu přibližuje žhavé plazma ve středu Slunce.

Záření černého tělesa popisuje *Planckův zákon* vyjadřující zářivý výkon jednotkové plochy černého tělesa (hvězdy) o teplotě T zářením vlnové délky λ .

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}, \quad (6.21)$$

kde: h je Planckova konstanta $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s, k je Boltzmanova konstanta $k = 1,380 \cdot 10^{-23}$ J K⁻¹ a c je rychlost světla ve vakuu $c = 299\,792\,458$ m s⁻¹.

Z Planckova zákona plyne *Wienův posunovací zákon*, týkající se rozdělení energie ve spektru. Podle něj se s rostoucí teplotou černého tělesa posouvá maximum záření ke kratším vlnovým délkám. Označíme-li λ_{\max} vlnovou délku, na kterou připadá maximum energie při teplotě T , pak platí

$$\lambda_{\max} T = b, \quad (6.22)$$

kde konstanta $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ m K.

Pomocí Planckova zákona lze odvodit *Stefanův-Boltzmanův zákon*. Podle něhož je celkový zářivý tok E , který vysílá černé těleso z jednotkové plochy svého povrchu na všech vlnových délkách, přímo úměrný 4. mocnině absolutní teploty.

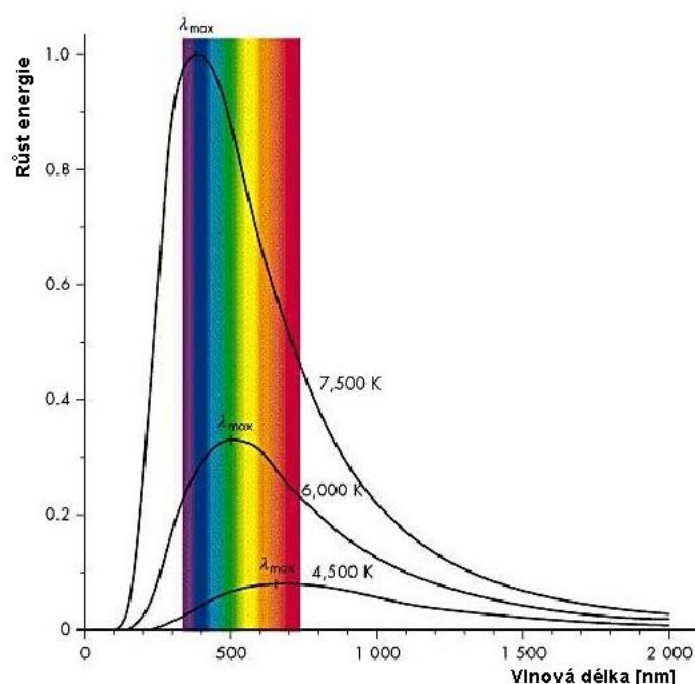
$$E = \sigma T^4, \quad (6.23)$$

kde $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8}$ W m⁻² K⁻⁴ je Stefanova-Boltzmanova konstanta.

6.2.1 Povrchové teploty hvězd

Protože žádné těleso ve vesmíru není v termodynamické rovnováze (tedy není černým tělesem), musíme vždy uvést, jakým způsobem jsme teplotu určili nebo pomocí kterého zákona záření černého tělesa byla ze spektra odvozena.

- *Barevná teplota* T_c je teplota černého tělesa, u něhož by rozložení intenzity ve spektru (dané Planckovým zákonem) bylo stejné jako u pozorované hvězdy. Barevná teplota Slunce je $T_c = 6\,500$ K.
- *Efektivní teplota* T_{ef} je dána Stefanovým-Boltzmanovým zákonem. Je to teplota takového černého tělesa, které vyzařuje z 1 m² stejné množství energie jako hvězda. Jinými slovy ji lze definovat jako teplotu černého tělesa, které má stejný povrch jako hvězda ($4\pi R^2$) a stejnou zářivost L jako hvězda. Efektivní teplota je nejlepší mírou skutečné teploty povrchu hvězdy, např. sluneční fotosféry. Pomocí solární konstanty (viz dále) lze určit efektivní teplotu Slunce $T_{\text{ef}} = 5\,800$ K. Kdyby Slunce bylo v termodynamické rovnováze, musela by efektivní a barevná teplota být stejné.



Obrázek 6.2: Planckův zákon. Těleso s vyšší teplotou září více na všech vlnových délkách než těleso s nižší teplotou. Zdroj: <http://hvezdy.astro.cz/charakteristika/4-spektralni-typy-hvezd>

- *Zářivá teplota* T_r je teplota, kterou by muselo mít černé těleso, aby vysílalo z 1 m^2 v daném oboru spektra stejné množství energie jako pozorovaná hvězda. Podle oboru spektra pak hovoříme o vizuální, fotografické nebo infračervené barevné teplotě. Celkovému záření hvězdy odpovídá *bolometrická zářivá teplota*.

6.2.2 Solární konstanta

Solární konstanta K udává množství zářivé energie všech vlnových délek, dopadající za 1 s na plochu 1 m^2 postavenou kolmo k paprskům ve střední vzdálenosti Země od Slunce (1 au) mimo zemskou atmosféru. Její hodnota je

$$K = 1,40 \cdot 10^3 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1}. \quad (6.24)$$

Protože Země obíhá kolem Slunce po elipse, mění se vzdálenost Z - S a tím i hodnota solární konstanty během roku. Navíc se její hodnota snižuje průchodem zemskou atmosférou a dopadem na šikmý povrch ve vyšších geografických šířkách. Proto se měří na družicích.

6.2.3 Zářivost Slunce L_{\odot}

Zářivost Slunce L_{\odot} je celkové množství energie, kterou Slunce vyzáří celým svým povrchem do okolního prostoru za jednotku času. Zářivost Slunce bereme za jednotku zářivosti hvězd, její hodnota je

$$L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}. \quad (6.25)$$

Základem pro výpočet zářivosti Slunce je solární konstanta.

6.2.4 Zářivost hvězd

Zářivost hvězd se často udává v jednotkách zářivosti Slunce, tj. jako poměr celkového množství energie vyzářené celým povrchem hvězdy k zářivosti Slunce, L/L_{\odot} .

Celkový zářivý tok E vyzářený jednotkou plochy povrchu hvězdy je

$$E = \sigma T_{\text{ef}}^4. \quad (6.26)$$

Celý povrch hvězdy má plochu $4\pi R^2$, kde R je poloměr hvězdy. Celkové množství energie, kterou hvězda svým povrchem vyzáří

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4. \quad (6.27)$$

Zářivost hvězdy souvisí s absolutní bolometrickou hv. velikostí M_{bol} podle vztahu:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 2,512^{(M_{\text{bol}\odot} - M_{\text{bol}*})}, \quad (6.28)$$

kde $M_{\text{bol}*}$ je absolutní bolometrická hvězdná velikost hvězdy a $M_{\text{bol}\odot} = 4,74^{\text{M}}$ je absolutní bolometrická hvězdná velikost Slunce.

6.2.5 Úlohy

1. Maximum energie ve slunečním spektru je u vlnové délky $\lambda = 480 \text{ nm}$. Vypočtete povrchovou teplotu Slunce pomocí Wienova zákona posuvu.

[Z Wienova zákona posuvu $T = 6\,040 \text{ K}$.]

2. Vypočtete pomocí Stefanova zákona a solární konstanty teplotu Slunce. Poloměr Slunce je $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$, vzdálenost Země od Slunce $r = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

[Celková energie vyzářená Sluncem je

$$W_1 = 4\pi r^2 K, \quad (6.29)$$

kde r je poloměr zemské dráhy.

Jeden m^2 slunečního povrchu vyzáří za 1 s energii

$$E = \sigma T^4, \quad (6.30)$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ je Stefanova konstanta, T je absolutní teplota povrchu Slunce. Celý povrch Slunce tedy vyzáří energii

$$W_2 = 4\pi R_{\odot}^2 E. \quad (6.31)$$

Za předpokladu, že v prostoru mezi Sluncem a Zemí nedochází k tepelným ztrátám, můžeme položit $W_1 = W_2$. Odtud

$$r^2 K = R_{\odot}^2 \sigma T^4, \quad (6.32)$$

a pro teplotu povrchu Slunce dostaneme vztah:

$$T = \sqrt[4]{\frac{r^2 K}{R_{\odot}^2 \sigma}}. \quad (6.33)$$

Po číselném dosazení $T = 5\,820\text{ K}$.]

3. Maximum energie ve slunečním spektru je u vlnové délky $\lambda = 480\text{ nm}$. Vypočtete povrchovou teplotu Slunce pomocí Wienova zákona posuvu.

[$T = 6\,040\text{ K}$]

4. O kolik stupňů by se musela zmenšit teplota Slunce, aby se solární konstanta zmenšila o 1%?

[Teplotu Slunce lze vyjádřit vztahem:

$$T = \sqrt[4]{\frac{r^2 K}{R_{\odot}^2 \sigma}} = 5\,820\text{ K}, \quad (6.34)$$

kde r je vzdálenost Země od Slunce, R_{\odot} je poloměr Slunce, σ je Stefanova-Boltzmanova konstanta. V našem případě jsou všechny veličiny konstantní, můžeme je pro lepší přehlednost nahradit konstantou

$$k = \sqrt[4]{\frac{r^2}{R_{\odot}^2 \sigma}} = \text{konst} \quad (6.35)$$

a pak

$$T = k \sqrt[4]{K} \quad (6.36)$$

Pro malé změny lze použít vztah:

$$dT = \frac{1}{4} k K^{-3/4} dK \quad (6.37)$$

Jeho úpravou dojdeme ke tvaru:

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{4} \frac{dK}{K}. \quad (6.38)$$

Má-li se solární konstanta zmenšit o 1%, pak

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{4} \cdot 1\% = 0,25\%. \quad (6.39)$$

Uvažujme pro povrchovou teplotu zaokrouhlenou hodnotu $T = 6\,000\text{ K}$. Pak změna $dT = T \cdot 0,25\% = 15\text{ K}$. Teplota Slunce by se musela zmenšit o 15 K.]

5. Vypočtete hodnotu solární konstanty pro Merkur a Jupiter, jsou-li jejich vzdálenosti $r_M = 0,38\text{ au}$, $r_J = 5,2\text{ au}$. Porovnejte jejich hodnotu se solární konstantou K pro Zemi. Hodnota solární konstanty pro Zemi je $K_Z = 1,4 \cdot 10^3\text{ J m}^{-2}\text{ s}^{-1}$.

[$K_M = 9,7 \cdot 10^3\text{ J m}^{-2}\text{ s}^{-1} = 6,9\text{ K}$, $K_J = 51,7\text{ J m}^{-2}\text{ s}^{-1} = 0,037\text{ K}$]

6. Absolutní bolometrická hvězdná velikost hvězdy je $M_{\text{bol}} = 2,54^{\text{M}}$. Vypočtete poměr zářivosti této hvězdy k zářivosti Slunce, víte-li že $M_{\text{bol}\odot} = 4,74^{\text{M}}$.

[Dosadíme do vztahu pro zářivost hvězd:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 2,512^{(M_{\text{bol}\odot} - M_{\text{bol}})}. \quad (6.40)$$

Po číselném vyjádření vyjde zářivost $\frac{L}{L_{\odot}} = 7,6$.]

7. Jaká je absolutní bolometrická hvězdná velikost hvězdy, jejíž zářivost je $2 \cdot 10^4$ krát větší než zářivost Slunce.

[Vztah pro zářivost (6.28) upravíme a vyjádříme M_{bol} :

$$M_{\text{bol}} = M_{\text{bol}\odot} - \frac{\log 20\,000}{0,4}. \quad (6.41)$$

Po číselném dosazení vyjde: $M_{\text{bol}} = -6,01^{\text{M}}$.]

8. Kolikrát vyšší zářivý výkon má hvězda o teplotě $T_1 = 20\,000$ K, než stejně rozměrná hvězda o efektivní povrchové teplotě $T_2 = 5\,000$ K? Za předpokladu, že září jako absolutně černá tělesa, kde leží maximum vyzařované energie v jejich spektrech?

[Porovnáním výkonů vyzařovaných plošnou jednotkou obou hvězd dostaneme:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = 256. \quad (6.42)$$

Maxima vyzařované energie leží na $\lambda = 145$ nm (UV) a $\lambda = 580$ nm (oranžová).]

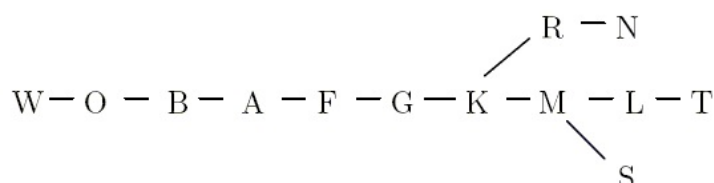
6.3 Spektrální třídy

Příslušnost hvězdy k určité spektrální třídě se určuje podle rozložení energie ve spektru do vlnových délek a podle přítomnosti spektrálních čar. Záření hvězdy je vysíláno z hvězdné atmosféry (fotosféry), jejíž teplota určuje charakter spektra.

6.3.1 Harvardská klasifikace

V 60. letech 19. st. italský astronom Angelo Secchi poprvé roztřídil hvězdy podle vizuálního pozorování jejich spekter. Jeho klasifikace měla pouze 4 třídy. Následné použití fotografie v astronomii vedlo k mnohem přesnější klasifikaci hvězd. Dnes se používá tzv. *Harvardská klasifikace* zavedená v 90. letech 19. st. a zdokonalená na poč. 20. st. ředitelem Harvardské observatoře Edwardem C. Pickeringem (1846-1919) a jeho spolupracovníky (Williaminou Flemingovou, Annie Cannonovou a mnoha dalšími). Na základě jejich práce byl sestaven mnohasvazkový katalog hvězdných spekter Henryho Drapera³ – tzv. HD katalog.

³Henry Draper (1837-1882) byl americký astrofyzik a průkopník hvězdné spektroskopie.



Obrázek 6.3: Harvardská spektrální klasifikace. Původní klasifikace spekter používala písmena spekter v abecedním pořádku. Postupem času se ukázalo, že některé ze skupin vůbec neexistují a u jiných bylo třeba změnit pořadí. Takto vznikla dnešní posloupnost spektrálních tříd. Zdroj: <http://hvezdy.astro.cz/charakteristika/4-spektralni-typy-hvezd>.

Tabulka 6.2: Charakteristické rysy základních spektrálních tříd O, B, A, F, G, K, M a jejich nejznámější zástupci.

Spektrální třída	Barva hvězdy	Povrchová teplota	Hvězdy
O	modrá	50 000 - 30 000 K	Alnitak, Mintaka
B	modrobílá	30 000 - 11 000 K	Rigel, Spica, Regulus
A	bílomodrá	11 000 - 7 500 K	Sírius, Vega, Altair
F	žlutobílá	7 500 - 6 000 K	Canopus, Procyon
G	žlutá	6 000 - 5 000 K	Slunce, Capella
K	oranžová	5 000 - 3 500 K	Arkturus, Aldebaran
M	červená	3 500 - 3 000 K	Betelgeuze, Antares

Harvardská klasifikace se skládá ze 7 základních spektrálních tříd, označených písmeny O, B, A, F, G, K, M.⁴ Ze všech hvězd jasnějších než 8. mag jich do těchto 7 tříd náleží plných 99,8%. Tato posloupnost je zároveň posloupností barev od horkých (O) po chladné (M) hvězdy, tedy posloupností teplotní.⁵

K těmto základním sedmi třídám se připojují další, ve vesmíru méně časté třídy. Před třídu O se řadí třídy Q, P, W, protože mají vyšší teplotu. Třída Q jsou novy, P označují plynné mlhoviny, W jsou Wolfovy-Rayetovy hvězdy. Za třídu M se řadí vzácné typy spekter: S - zirkonové hvězdy, R a N označují uhlíkové hvězdy. Pro hnědé trpaslíky je zavedena třída L. Podrobnější popis charakterických znaků daných tříd je v tabulce 6.2.

Charakteristické čáry objevující se ve spektrech hvězd jednotlivých spektrálních tříd jsou uvedeny v tabulce 6.3 a ukázány na následujícím obr. 6.4.

Spektrální třídy, s výjimkou spektrálních tříd Q a P, jsou dále děleny na deset podtříd označených číslicemi 0 - 9. Tyto číslice označují přechod mezi sousedními třídami a kladou se za velké písmeno označující spektrální třídu, např. třída A5 je uprostřed mezi A0 a F0, třída A9 se jen velmi málo liší od

⁴Pro snadné zapamatování této posloupnosti vznikla celá řada mnemotechnických pomůcek, např. **Oh Be A Fine Girl (Guy), Kiss Me**, nebo **Only Bad Astronomers Forget Generally Known Mnemonics**.

⁵Hvězdám typu O, B, A se někdy říká hvězdy *ranného spektrálního typu*, hvězdám chladnějším K, M hvězdy *pozdního spektrálního typu*. Toto označení se používá už jen z historických důvodů, z dob, kdy se všeobecně soudilo, že teplotní posloupnost je zároveň posloupností vývojovou (hvězda se rodí jako žhavé těleso a postupně chladne a vyhasíná).

Tabulka 6.3: Charakteristické čáry objevující se ve spektrech hvězd náležících jednotlivým spektrálním třídám.

Spektrální třída	Charakteristické čáry
O	ionizované a neutrální helium, slabý vodík
B	neutrální helium, silnější vodík
A	velmi silné čáry vodíku
F	slábnou čáry vodíku, objevují se čáry vápníku a kovů
G	silné čáry vápníku, intenzivní čáry kovů, ještě patrné slabé čáry vodíku
K	nejsilnější jsou čáry kovů, objevují se absorpční pásy molekul
M	nejvýraznější jsou pásy molekul, mnoho absorpčních čar železa

třídy F0.

6.3.2 Třídy svítivosti

Od zavedení Harvardské klasifikace bylo zřejmé, že hvězdy jedné spektrální třídy mohou mít různou svítivost (absolutní hvězdná velikost). Proto se zavedla svítivost jako druhý parametr při klasifikaci hvězd. Zatímco údaje o spektrálním typu vypovídají více o povrchové teplotě hvězd, třídy svítivosti nám poskytují informace o tlaku v atmosféře hvězdy (určují se hlavně z profilu spektrálních čar ionizovaných prvků).

Běžně se používá *Morganova-Keenanova klasifikace*, která za označení Harvardské spektrální třídy (např. A5) připojuje římskou číslici označující třídu svítivosti.

6.3.3 Hertzsprungův-Russellův diagram

Mezi povrchovou teplotou hvězdy (spektrální třídou) a její zářivostí (absolutní hv. velikostí) platí velmi důležitá závislost, kterou můžeme znázornit v *Hertzsprungově-Rusellově diagramu* (HR diagramu).⁶

Hvězdy nezaplňují plochu HR diagramu rovnoměrně, ale soustřeďují se v několika oblastech. Většina hvězd se nachází v úzkém pásu, který vede z horního levého rohu (kde jsou hvězdy žhavé s obrovskou zářivostí) do pravého dolního rohu (hvězdy chladné, červené a velmi slabé). Tento pás se nazývá *hlavní posloupnost*. Obsahuje přes 90% všech hvězd včetně našeho Slunce.

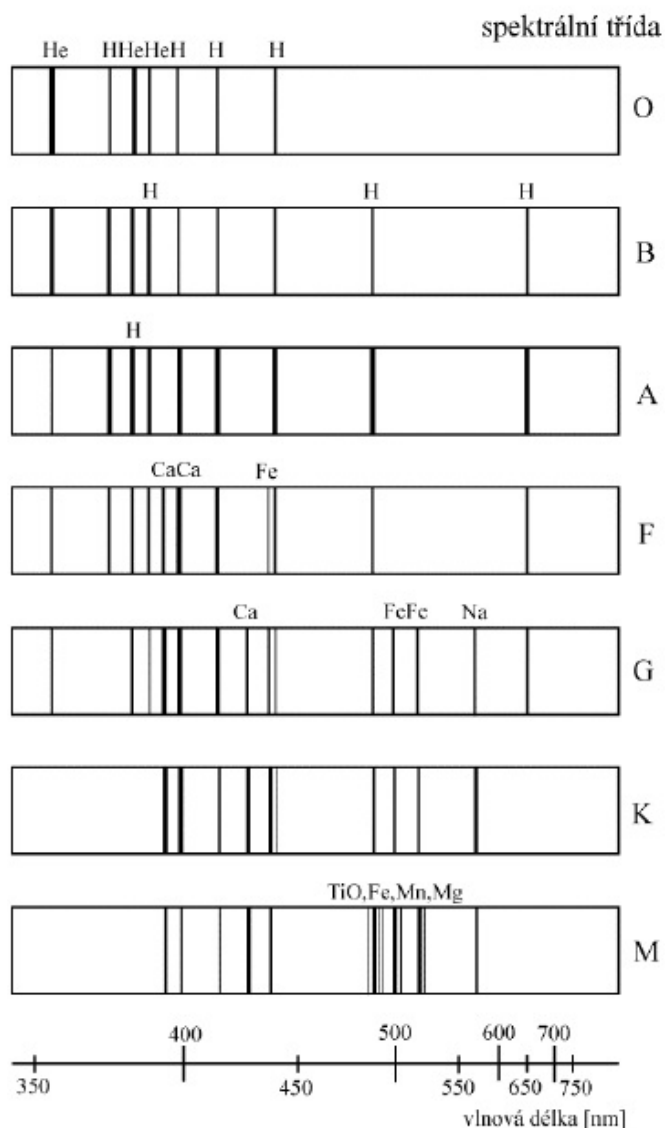
Další skupina hvězd je soustředěna v oblasti nízkých povrchových teplot ale vysokých výkonů. Jde o skupiny *červených obrů* a *veleobrů*.⁷ Pod hlavní posloupností, v oblasti malých zářivých výkonů a

⁶Tato závislost byla objevena v roce 1909 dánským astronomem Ejnarem Hertzsprungem (1873-1967) a americkým astronomem Henry Russellem (1877-1957).

⁷Podíváme-li se na HR diagram, ve kterém jsou vyznačeny i rozměry hvězd, uvidíme, že pojmenování "obrů", "veleobrů" má své dobré opodstatnění.

Tabulka 6.4: Některé charakteristiky hvězd nacházejících se na různých větvích Hertzsprungova-Russellova diagramu. Data převzata z Široký, Šíroká: *Základy astronomie v příkladech*.

Spektrální třída	Abs. viz. hv. velikost M_V	Barevný index $B - V$	Ef. povrchové teploty T_{ef}	Bar. povrchové teploty T_c
Hlavní posloupnost V				
O5	-6	-0,45	35 000	70 000
B0	-3,7	-0,31	21 000	38 000
B5	-0,9	-0,17	13 500	23 000
A0	+0,7	0,00	9 700	15 400
A5	+2,0	+0,16	8 100	11 100
F0	+2,8	+0,30	7 200	9 000
F5	+3,8	+0,45	6 500	7 600
G0	+4,6	+0,57	6 000	6 700
G5	+5,2	+0,70	5 400	6 000
K0	+6,0	+0,84	4 700	5 400
K5	+7,4	+1,11	4 000	4 500
M0	+8,9	+1,39	3 300	3 800
M5	+12,0	+1,61	2 600	3 000
Obří III				
G0	+1,8	+0,65	5 400	6 000
G5	+1,5	+0,84	4 700	5 000
K0	+0,8	+1,06	4 100	4 400
K5	0,0	+1,40	3 500	3 700
M0	-0,3	+1,65	2 900	3 400
M5	-0,5	+1,85		3 000
Veleobří I				
B0	-6,4	-0,21		
A0	-6,0	0,00		
F0	-5,6	+0,30	6 400	
G0	-4,4	+0,76	5 400	6 200
G5	-4,4	+1,06	4 700	5 300
K0	-4,4	+1,42	4 000	4 600
K5	-4,4	+1,71	3 400	
M0	-4,4	+1,94	2 800	
M5		+2,15		



Obrázek 6.4: Harvardská spektrální klasifikace. Schematický vzhled spekter základních spektrálních tříd. Zdroj: Zejda, M. *Základy astronomie*, Brno 2013, upraveno.

vysokých povrchových teplot, se nachází skupina *bílých trpaslíků*. Hvězdy spektrálních tříd K a M s malým zářivým výkonem označujeme jako *červené trpaslíky*.

Pomocí HR diagramu můžeme odhadnout vzdálenost hvězdy, známe-li její spektrální třídu a to ke které skupině (obrů, veleobrů, hlavní posloupnosti ...) patří.⁸ Z diagramu můžeme pak vyčíst její absolutní hvězdné velikost a ze známé pozorované zdánlivé hvězdné velikosti určit její vzdálenost

⁸Rozdíly ve spektrech obřích a trpasličích hvězd jsou velice nápadné, proto lze ze spektra hvězdy vyčíst, k jaké skupině hvězda patří.

Tabulka 6.5: Morganova-Keenanova spektrální klasifikace.

Třída svítivosti	Typ hvězdy	Zástupci
Ia	jasní veleobři	Deneb, Rigel
Ib	veleobři	Antares, Betelgeuze
II	nadobři (jasní obři)	Mintaka, Adhara
III	obři	Arcturus, Capella
IV	podobři	Procyon, Achernar
V	hvězdy hl. posloupnosti	Slunce, Sirius A
VI	podtrpaslíci	Kapteynova hvězda
VII	bílí trpaslíci	Sirius B

pomocí Pogsonovy rovnice.

6.3.4 Systém UBV a UBVRI

Jedním z hlavních úkolů astrofyziky je studovat průběh vyzářené energie v závislosti na frekvenci záření vesmírných objektů. Zemská atmosféra ale určité části spektra pohlcuje, takže na zemském povrchu můžeme měřit jen v oblastech propustnosti atmosféry, které se ale mění podle aktuálních podmínek. Výhodné by tedy bylo vymezit okna propustnosti jiným ("umělým") způsobem, aby nepodléhaly místním ani časovým změnám. K tomuto účelu se využívají sady *fotometrických filtrů*, které propouštějí záření jen v přesně definovaných intervalech vlnových délek.⁹

Každý filtr je definován nejen oblastí spektrální propustnosti, ale i tvarem funkce propustnosti. V praxi se používají sady vhodně zvolených filtrů, dnes je těchto sad přes 200. První systém filtrů navrhli Johnson & Morgan (1953). Původní systém filtrů UBV je vymezen barevnými filtry pro ultrafialovou barvu U (ultraviolet) s maximem propustnosti pro vlnovou délku $\lambda = 365$ nm, modrou barvu B (blue) s maximem propustnosti pro vlnovou délku $\lambda = 440$ nm a vizuální V (visual) s maximem propustnosti pro vlnovou délku $\lambda = 550$ nm. Na tento tříbarevný systém navazují další barvy v dlouhovlnném oboru spektra: červený R (red) s maximem propustnosti pro vlnovou délku $\lambda = 700$ nm a infračervený I (infrared) s maximem $\lambda = 800$ nm. Tento systém UBVRI je vidět na obr. 6.7.

6.3.5 Barevný index $B - V$

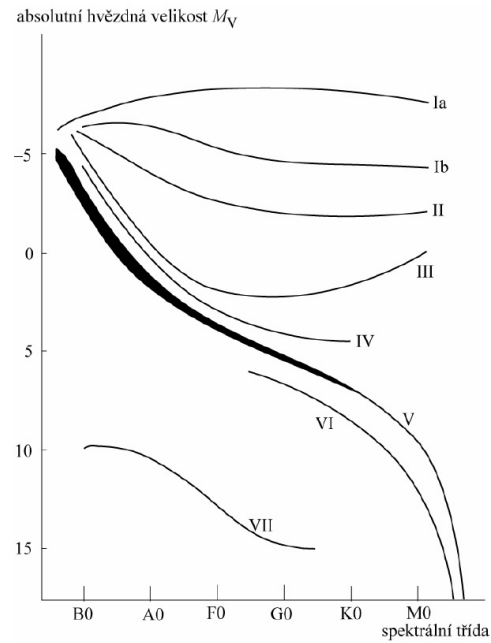
Rozdíly zdánlivých (nebo absolutních) hvězdných velikostí téhož objektu změřených ve dvou různých filtrech označujeme jako *barevný index*.

$$B - V = m_B - m_V = M_B - M_V.^{10} \quad (6.43)$$

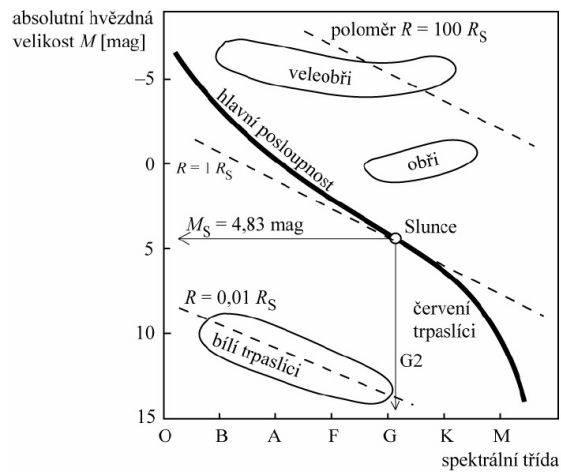
Hodnota barevného indexu $B - V$ nám poskytuje informace o tom, v jaké barvě hvězda nejvíc září a jaká je její povrchová teplota. Hvězda s menším $B - V$ indexem je modřejší než hvězda s vyšším

⁹V oblasti světla jde s trochou nadsázky o úseky odpovídající určitým barvám, proto se někdy mluví o fotometrických pozorováních v určitých barvách.

¹⁰Vždy se odečítá hvězdná velikost pro kratší vlnovou délku mínus hvězdná velikost pro delší vlnovou délku.

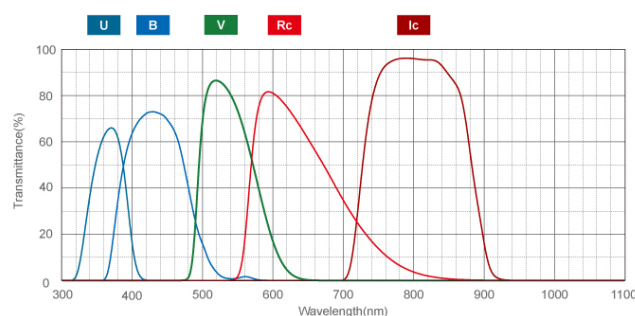


Obrázek 6.5: Luminozitivní třídy. Zdroj: Z. Pokorný: *Vademecum [online]*, Hvězdárna a planetárium M. Koperníka v Brně.



Obrázek 6.6: Schématický Hertzsprungův-Russellův diagram. Na vodorovné ose jsou spektrální třídy (související s povrchovou teplotou hvězd), na svislé ose absolutní hvězdná velikost M (související se zářivostí hvězd). Zdroj: Z. Pokorný: *Vademecum [online]*, Hvězdárna a planetárium M. Koperníka v Brně.

indexem. Horké namodralé hvězdy budou mít index $B - V$ záporný! To souvisí s tím, že hvězdná velikost klesá s rostoucí jasností hvězd!



Obrázek 6.7: Křivky propustnosti filtrů pro nejběžnější širokopásmový Johnsonův systém UBVR. Zdroj://www.asahi-spectra.com

Barevný index souvisí s barevnou povrchovou teplotou T_c vztahem

$$B - V = \frac{7300}{T_c} - 0,52. \quad (6.44)$$

6.3.6 Barevný exces E_{B-V}

Barevný index nezávisí na vzdálenosti hvězdy, může být ale ovlivněn *mezihvězdnou extinkcí*. Při ní je část záření pohlcena mezihvězdným materiálem, nacházejícím se mezi zdrojem a pozorovatelem. Díky mezihvězdné extinkci se nám pak pozorované objekty jeví více červené než ve skutečnosti jsou. Množství zčervenání je charakterizováno *barevným excesem*, což je rozdíl mezi pozorovaným barevným indexem a normálním (tj. bez vlivu extinkce). Například ve fotometrickém systému UBV je barevný exces:

$$E_{B-V} = (B - V)_{\text{poz}} - (B - V)_{\text{norm}}. \quad (6.45)$$

6.3.7 Bolometrická korekce

Pokud budeme chtít znát jasnost (nebo hvězdnou velikost) objektu nejen v určité části spektra, ale v celém spektrálním oboru, musíme danou fyzikální veličinu přepočítat na tzv. *bolometrickou*.

Rozdíl mezi vizuální a bolometrickou hvězdnou velikostí se udává *bolometrická korekce BC*.

$$BC = m_v - m_{\text{bol}} = M_v - M_{\text{bol}}^{11} \quad (6.46)$$

Bolometrická korekce je přibližně nulová pro hvězdy spektrální třídy F ($T_{\text{ef}} = 6800 \text{ K}$). Pro všechny ostatní hvězdy je pak kladná. U některých hvězd činí bolometrická korekce až několik magnitud, takže určitě není zanedbatelná! Stejná bolometrická korekce platí jak pro zdánlivé tak i absolutní hvězdné velikosti. Pokud se tedy dopracujeme až k absolutním bolometrickým hvězdným velikostem, můžeme pak přímo proměřovat jejich zářivý výkon.

¹¹Pozor! V některých zdrojích je bolometrická korekce definována opačným způsobem, tedy: $BC = m_{\text{bol}} - m_v$.

Tabulka 6.6: Bolometrické korekce BC a absolutní hvězdné velikosti pro hvězdy na některých větvích Hertzsprungova-Russelova diagramu. Data převzata z *Široký, Široká: Základy astronomie v příkladech*.

Sp. třída	Hlavní posloupnost		Obří		Veleobří	
	BC	M_{bol}	BC	M_{bol}	BC	M_{bol}
O5	4,6	-10,6				
B0	3,0	-6,7			3	-9,4
B5	1,6	-2,5				
A0	0,68	0,0			0,7	-6,7
A5	0,30	+1,7				
F0	0,10	+2,7			0,2	-5,8
F5	0,00	+3,8				
G0	0,03	+4,6	0,1	+0,7	0,3	-4,7
G5	0,10	+5,1	0,3	+1,2	0,6	-5,0
K0	0,20	+5,8	0,6	0,2	1,0	-5,4
K5	0,58	+6,8	1,0	-1,0	1,6	-6,0
M0	1,20	+7,6	1,7	-2,0	2,5	-6,9
M5	2,1	+9,8	3,0	-3,4	4,0	

6.3.8 Poloměry hvězd

Poloměry hvězd se obvykle udávají v jednotkách poloměru Slunce R_{\odot} nebo v km. Poloměr Slunce je $6,96 \cdot 10^5$ km. Poloměr hvězdy (v jednotkách R_{\odot}) lze vyjádřit pomocí absolutní teploty T a absolutní vizuální hvězdné velikosti M_v :

$$\log R = \frac{5900}{T} - 0,20 M_v, \quad (6.47)$$

nebo pomocí absolutní bolometrické hvězdné velikosti

$$\log R = 8,53 - 0,2 M_{\text{bol}} - 2 \log T. \quad (6.48)$$

6.3.9 Úhlové průměry hvězd

Úhlové průměry hvězd d souvisí se skutečnými poloměry R hvězd vztahem:

$$d = \frac{1}{107} \pi R, \quad (6.49)$$

kde π je roční paralaxa hvězdy v obloukových vteřinách a $\frac{1}{107}$ je průměr Slunce v astronomických jednotkách (au). Pokud bychom tento vztah převedli do logaritmického tvaru získáme

$$\log d = \log \pi + \log R - 2,03, \quad (6.50)$$

nebo s využitím vztahu (6.47)

$$\log d = \log \pi + \frac{5900}{T} - 0,20 M_v - 2,03. \quad (6.51)$$

Převedeme-li absolutní hvězdnou velikost na zdánlivou hvězdnou velikost, obdržíme vztah

$$\log d = \frac{5900}{T} - 0,20 m_v - 3,03. \quad (6.52)$$

6.3.10 Hmotnosti hvězd

Hmotnosti hvězd \mathfrak{M} se obvykle vyjadřují v jednotkách hmotnosti Slunce $\mathfrak{M}_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg. Obecně souvisí hmotnost hvězdy s její zářivostí, tedy s její absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí M_{bol} . Tuto závislost můžeme matematicky popsat rovnicí:

$$\log \mathfrak{M} = 0,56 - 0,12 M_{\text{bol}}. \quad (6.53)$$

6.3.11 Hustoty hvězd

Hustoty hvězd se udávají buď v jednotkách hustoty Slunce ρ_\odot nebo v jednotkách $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Střední hustota Slunce je $\rho_\odot = 1,408 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Hustotu hvězdy v jednotkách hustoty Slunce vypočítáme ze vztahu

$$\rho = \frac{\mathfrak{M}}{V}, \quad (6.54)$$

kde \mathfrak{M} je hmotnost hvězdy dosazená v jednotkách hmotnosti Slunce ($\mathfrak{M}_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg) a V je objem hvězdy udaný také v jednotkách objemu Slunce ($V_\odot = 1,412 \cdot 10^{27} \text{ m}^3$).

6.3.12 Úlohy

1. Hvězda spektrální třídy A0 má zdánlivou vizuální hvězdnou velikost $m = +6,5^{\text{m}}$. Jaká je její pravděpodobná paralaxa a vzdálenost v pc, patří-li hvězda ke hvězdám na hlavní posloupnosti?

[V tabulce vyhledáme střední absolutní hvězdnou velikost pro hvězdy spektrální třídy A0 ležící na hlavní posloupnosti, $M_v = +0,7^{\text{m}}$. Pravděpodobnou paralaxu určíme z upravené Pogsonovy rovnice

$$\log \pi = \frac{M - m - 5}{5} = -2,16. \quad (6.55)$$

Odtud paralaxa $\pi = 0,0069''$ a vzdálenost v pc: $r = \frac{1}{\pi} = 145 \text{ pc}$.]

2. Hvězda spektrální třídy G0 má zdánlivou hvězdnou velikost $m = +4,9^{\text{m}}$. Jaká je její pravděpodobná paralaxa, patří-li hvězda ke a) hlavní, b) posloupnosti obrů, c) k posloupnosti veleobrů?

[V tabulce vyhledáme hodnoty absolutní hvězdné velikosti pro hvězdy spektrální třídy G0 pro jednotlivé posloupnosti.

a) G0, hlavní posloupnost $M = 4,6^{\text{m}}$, $\pi = 0,087''$

b) G0, posloupnost obrů $M = 1,8^{\text{m}}$, $\pi = 0,024''$

c) G0, posloupnost veleobrů $M = -4,4^{\text{m}}$, $\pi = 0,0014''$.]

3. Hvězda spektrální třídy M0 má zdánlivou hvězdnou velikost $m = +0,45^m$. Jaká je její pravděpodobná paralaxa, patří-li hvězda ke a) hlavní, b) posloupnosti obrů, c) k posloupnosti veleobrů? Jaká je její pravděpodobná vzdálenost v ly pro jednotlivé případy?

[Analogicky jako v minulém příkladu:

- a) M0, hlavní posloupnost $M = +8,9^m$, $\pi = 4,89''$, $r = 0,67$ ly
 b) M0, posloupnost obrů $M = -0,3^m$, $\pi = 0,07''$, $r = 0,47$ ly
 c) M0, posloupnost veleobrů $M = -4,4^m$, $\pi = 0,01''$, $r = 326$ ly.]

4. Hvězda spektrální třídy F0 je ve vzdálenosti 400 pc od Slunce. Její zdánlivá vizuální hvězdná velikost je $m = +10,5^m$. Určete ke které posloupnosti hvězda patří? Jaká je absolutní bolometrická hvězdná velikost této hvězdy?

[$M = 2,5^m$. Z tabulky ... zjistíme, že hvězda patří k hlavní posloupnosti. V tabulce ... najdete hodnotu bolometrické korekce pro tyto hvězdy: $B.C. = 0,10$. Pak absolutní bolometrická hvězdná velikost $M_{bol} = +2,6^m$.]

5. Určete zdánlivou a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost hvězdy spektrální třídy K5, náležící do posloupnosti veleobrů, znáte-li její vizuální hvězdnou velikost $m_v = +6,45^m$. Bolometrickou korekci si vyhledejte v tabulce.

[V tabulce zjistíme: $BC = 1,6$, $m_{bol} = m_v - BC = 4,85^m$. Z tabulky zjistíme i $M_{bol} = -6,0$ a obdobně jako pro zdánlivé hvězdné velikosti platí i pro absolutní hvězdné velikosti $M_v = BC + M_{bol} = -4,4^m$.]

6. Určete zdánlivou i absolutní bolometrickou hvězdnou velikost pro hvězdu spektrální třídy B5, ležící na hlavní posloupnosti, je-li její zdánlivá hv. velikost $m_v = +14,0^m$. Určete také její zářivost v jednotkách luminosity Slunce $\frac{L}{L_\odot}$.

[$m_{bol} = 12,4^m$, $M_v = -0,9^m$, ze vztahu (6.28) vypočteme $\frac{L}{L_\odot} = 787$.]

7. Určete zdánlivou i absolutní bolometrickou hvězdnou velikost pro hvězdu spektrální třídy A0, náležící k větvi veleobrů, je-li její zdánlivá hvězdná velikost $m_v = +1,25^m$. Určete její zářivost v jednotkách luminosity Slunce $\frac{L}{L_\odot}$.

[$m_{bol} = 0,55^m$, $M_v = -6,0^m$, $\frac{L}{L_\odot} = 37\,700$]

8. Hvězda spektrální třídy G0 patřící k posloupnosti obrů má paralaxu $\pi = 0,002''$. Jaká je její zdánlivá vizuální velikost, uvažujeme-li koeficient absorpce $0,6^m$ na kiloparsek.

[V tabulce si vyhledáme absolutní hvězdnou velikost, $M_v = 1,8^m$, pak z rce. (6.11):

$$m = M - 5 - 5 \log \pi + \frac{a}{\pi} \quad (6.56)$$

vypočteme $m_v = 10,6^m$.]

9. Vypočtete index $B - V$ pro hvězdu o barevné povrchové teplotě $T_c = 3\,400$ K.

[$B - V = +1,63^m$]

10. Vypočtete index $B - V$ pro hvězdu o barevné povrchové teplotě $T_c = 35\,000\text{ K}$.
[$B - V = -0,31^m$]
11. Vypočtete barevnou povrchovou teplotu a pomocí tabulky určete spektrální typ hvězdy, náležící do posloupnosti obrů, je-li její index $B - V = +0,69^m$.
[$T_c = 6\,000\text{ K}$, spektrální třída G]
12. Vypočtete barevnou povrchovou teplotu a určete spektrální třídy hvězd hlavní posloupnosti, jejichž indexy $B - V$ jsou: a) $-0,30^m$, b) $-0,0^m$, c) $+0,70^m$.
[Barevná povrchová teplota:
a) $T_c = 33\,000\text{ K}$, spektrální třída B
b) $T_c = 14\,000\text{ K}$, spektrální třída A
c) $T_c = 6\,000\text{ K}$, spektrální třída G .]
13. U které vlnové délky je maximum energie pro hvězdu, jejíž index $B - V = +0,78^m$?
[$T_c = 5\,615\text{ K}$. Po dosazení do Wienova zákona: $\lambda = 520\text{ nm}$]
14. Vypočtete poloměr hvězdy Betelgeuze ($\alpha\text{ Ori}$) v jednotkách slunečního poloměru, víte-li že paralaxa hvězdy $\pi = 0,0067''$, úhlový průměr $d = 0,04''$.
[Úhlový průměr hvězdy d souvisí se skutečným poloměrem hvězdy R (v jednotkách R_\odot) a roční paralaxou hvězdy π (v obloukových vteřinách) vztahem:

$$d = \frac{1}{107} \pi R \quad (6.57)$$

Odtud $R = 638 R_\odot$.]

15. Vypočtete poloměr hvězdy Antares ($\alpha\text{ Sco}$) v jednotkách slunečního poloměru, je-li její zdánlivá hvězdná velikost $m_v = +0,98^m$, paralaxa $\pi = 0,0087''$ a povrchová teplota $T = 3\,100\text{ K}$.
[Z Pogsonovy rovnice určíme absolutní vizuální hvězdnou velikost: $M_v = m + 5 + 5 \log \pi = -4,32^m$. Dosazením do vztahu (6.47) obdržíme: $R = 585 R_\odot$.]
16. Určete poloměr hvězdy Aldebaran ($\alpha\text{ Tau}$) a vypočtete jeho úhlový průměr. Paralaxa Aldebarana je $\pi = 0,057''$, povrchová teplota $T = 3\,300\text{ K}$, absolutní vizuální hvězdná velikost $M_v = -0,1^m$.
[$R = 63 R_\odot$, $d = 0,034''$]
17. Kolikrát je poloměr hvězdy o absolutní hvězdné velikosti $M_1 = -4,0^m$ větší než poloměr hvězdy s $M_2 = +13,4^m$, jsou-li teploty obou hvězd stejné.
[Odečtením výrazů pro poloměry jednotlivých hvězd dostaneme:

$$\log \frac{R_1}{R_2} = -0,2(M_1 - M_2) \quad (6.58)$$

Po číselném vyjádření:

$$\frac{R_1}{R_2} = 3\,020.] \quad (6.59)$$

18. Určete pomocí závislosti hmotnost - absolutní hvězdná velikost hmotnost Polárky (α UMi) v jednotkách hmotnosti Slunce. Její absolutní vizuální hvězdná velikost je $-3,7^m$. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost klademe v tomto příkladě rovnu absolutní vizuální hvězdné velikosti.
[Dosazením do vztahu: $\log \mathfrak{M} = 0,56 - 0,12 M_{bol}$ vyjde $\mathfrak{M} = 10 \mathfrak{M}_\odot$.]
19. Pomocí závislosti hmotnost - absolutní hvězdná velikost vypočtete hmotnost hvězdy, jejíž paralaxa je $\pi = 0,19''$, zdánlivá hvězdná velikost $m = 4,3^m$. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost klademe v tomto příkladě rovnu absolutní vizuální hvězdné velikosti.
[$\mathfrak{M} = 102 \mathfrak{M}_\odot$]
20. Vypočtete hustotu hvězdy 40 Eri B jejíž hmotnost je $0,31 \mathfrak{M}_\odot$, teplota $T = 12\,500$ K, absolutní vizuální hvězdná velikost $M_V = +11,3^m$. Hustotu vyjádřete v jednotkách hustoty Slunce, v jednotkách $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaká je to hvězda?
[$R = 0,0163 R_\odot$, $\rho = 72\,000 \rho_\odot = 1 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hvězda je bílý trpaslík.]
21. Vypočtete hmotnost, poloměr a střední hustotu hvězdy, jejíž zdánlivá hvězdná velikost je $+0,21^m$, paralaxa $\pi = 0,073''$, povrchová teplota $T = 6\,000$ K. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost klademe v tomto příkladě rovnu absolutní vizuální hvězdné velikosti.
[$\mathfrak{M} = 4,1 \mathfrak{M}_\odot$, $R = 12 R_\odot$, $\rho = 0,0024 \rho_\odot = 3,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$]
22. Úhlový průměr Vegy je $d = 0,0037''$, paralaxa $\pi = 0,124''$, zdánlivá hv. velikost $m = +0,04^m$. Vypočtete poloměr Vegy, její hmotnost, střední hustotu a povrchovou teplotu.
[$R = 3,2 R_\odot$, $M = 0,5^M$, $\mathfrak{M} = 3,2 \mathfrak{M}_\odot$, $\rho = 0,1 \rho_\odot = 140 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $T = 9\,700$ K]
23. Při velké (perihéliové) opozici Marsu byla jeho zdánlivá hvězdná velikost $m_1 = -2,8^m$, vzdálenost Marsu od Slunce byla $r_1 = 207 \cdot 10^6$ km, vzdálenost od Země byla $d_1 = 56 \cdot 10^6$ km. Jaká je zdánlivá hvězdná velikost Marsu při aféliové opozici, kdy je jeho vzdálenost od Slunce $r_2 = 249 \cdot 10^6$ km, vzdálenost od Země $d_2 = 100 \cdot 10^6$ km.

[Intenzita světla u těles, které svítí pouze odraženým slunečním světlem, klesá s druhou mocninou vzdálenosti od Slunce a s druhou mocninou vzdálenosti od Země. Označíme-li intenzitu Marsu při perihéliové opozici I_1 a intenzitu při aféliové opozici I_2 , platí pro jejich poměr:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2 d_2^2}{r_1^2 d_1^2}. \quad (6.60)$$

Dosadíme-li poměr do Pogsonovy rovnice, obdržíme pro rozdíl hvězdných velikostí:

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log \frac{I_1}{I_2} = 5 \log \frac{r_2 d_2}{r_1 d_1} \quad (6.61)$$

Pro hledanou zdánlivou hvězdnou velikost m_2 dostaneme:

$$m_2 = m_1 + 5 \log r_2 d_2 - 5 \log r_1 d_1 \quad (6.62)$$

Číselně: $m_2 = -1,14^m$.]

24. Vypočtete zdánlivou hvězdnou velikost m_1 planety při její vzdálenosti od Slunce $r_1 = 4,0$ AU, od Země $d_1 = 6,0$ AU, je-li velká poloosa její dráhy $a = 3,0$ au a hvězdná velikost při střední opozici $m_2 = 12,0^m$. Při střední opozici je vzdálenost planety od Slunce $r_2 = a$, od Země $d_2 = a - 1$.

[

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log \frac{I_2}{I_1} = 5 \log \frac{r_1 d_1}{r_2 d_2} \quad (6.63)$$

Po číselném dosazení $m_1 = 15^m$.]

25. Při opozici je zdánlivá hvězdná velikost Jupitera $-2,50^m$. Vzdálenost Jupitera od Slunce je $r_1 = 5,20$ au. Jaká by byla jeho zdánlivá hvězdná velikost při opozici, kdyby byl ve dvojnásobné vzdálenosti od Slunce, než je ve skutečnosti?

[Označíme vzdálenost Jupiteru od Země $d_1 = 4,2$ au, novou vzdálenost Jupiteru od Slunce $r_2 = 10,40$ au a Jupiteru od Země $d_2 = 9,4$ au. Po dosazení obdržíme: $m_2 = +0,75^m$.]

26. Při opozici je zdánlivá hvězdná velikost Jupitera $-2,50^m$. Jaká by byla jeho zdánlivá hvězdná velikost pro pozorovatele na Marsu v době, kdy je Jupiter v nejmenší vzdálenosti od Marsu? Poloměr dráhy Marsu je $1,52$ au, poloměr dráhy Jupitera je $5,2$ au. Dráhy pokládejte za kruhové.

[$m_2 = -2,79^m$]

27. Je-li Saturn v nejmenší vzdálenosti od Země, je jeho zdánlivá hvězdná velikost $-0,10^m$. Jaká by byla jeho maximální zdánlivá hvězdná velikost pro pozorovatele na Jupiteru? Poloměr Jupiterovy dráhy je $5,20$ au. Poloměr Saturnovy dráhy $9,55$ au. Dráhy obou planet pokládejte za kruhové.

[$m_2 = -1,57^m$]

28. O kolik se změní zdánlivá hvězdná velikost komety, zmenší-li se její vzdálenost od Země i od Slunce na polovinu.

[Protože komety nesvíjí pouze odraženým slunečním světlem, klesá intenzita jejich světla v mnoha případech se čtvrtou mocninou vzdálenosti od Slunce. Pro poměr intenzit platí tedy v tomto případě

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^4 d_2^2}{r_1^4 d_1^2}, \quad (6.64)$$

kde r_1, r_2 jsou vzdálenosti komety od Slunce a d_1, d_2 vzdálenosti od Země. V našem případě

$$r_2 = \frac{r_1}{2}, \quad d_2 = \frac{d_1}{2}. \quad (6.65)$$

Poměr intenzit bude:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2^4 \cdot 2^2} = \frac{1}{64}. \quad (6.66)$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice obdržíme $m_2 = m_1 - 4,5^m$. Zdánlivá hvězdná velikost komety se zmenší o $4,5^m$.]

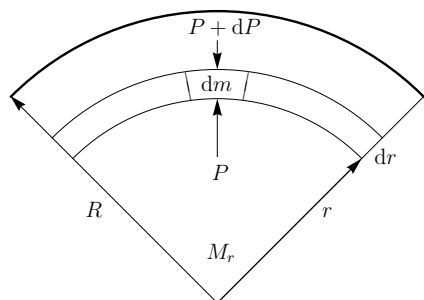
29. Kometa měla ve vzdálenosti $d_1 = 0,5$ au od Země a $r_1 = 1,5$ au od Slunce zdánlivou hvězdnou velikost $m_1 = 8,0^m$. Vypočítejte jakou má hvězdnou velikost ve vzdálenosti $r_2 = 1$ au od Slunce a $d_2 = 1$ au od Země. Intenzita klesá se čtvrtou mocninou vzdálenosti od Slunce.

$$[m_2 = 7,74^m]$$

6.4 Stavba hvězd a procesy ve hvězdném nitru

Hvězdy jsou dostatečně hmotná souvislá gravitačně vázaná tělesa, která jsou po většinu své existence v mechanické a energetické rovnováze. Stavba hvězdného nitra je popsána čtyřmi základními rovnicemi struktury doplněnými o tři materiálové vztahy, jež odrážejí složení hvězdné látky (stavová rovnice), míru interakce záření s látkou (opacita) a typ termionukleární reakce v centru hvězdy (energetická výtěžnost reakce). V dalším se omezíme pouze na sféricky symetrické konfigurace, v nichž veškeré veličiny charakterizující hvězdu závisí pouze na radiální souřadnici r .

Mechanická rovnováha ve hvězdách má podobu *hydrostatické rovnováhy*, při níž vlastní gravitaci hvězdy vzdoruje síla daná rozdílem tlaků v jednotlivých vrstvách – síla tlakového gradientu.



Na obrázku vidíme element tloušťky dr a hmotnosti $dm = \rho dV$, kde $\rho = \rho(r)$ je hustota hvězdného materiálu ve vzdálenosti r od centra hvězdy a $dV = drdS$. Na element působí jednak tlakové síly určené hodnotou tlaku P v daném místě a dále vlastní gravitace hvězdy určená hmotností M_r obsaženou v kouli o poloměru r . Má-li být element v rovnováze, musí se gravitační a tlakové síly vzájemně kompenzovat:

$$-G \frac{M_r dm}{r^2} + PdS - (P + dP)dS = 0. \quad (6.67)$$

Dosadíme-li za $dm = \rho drdS$, pak po úpravě dostáváme *rovnici hydrostatické rovnováhy* pro sféricky symetrické hvězdy:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho. \quad (6.68)$$

Pro sférické rozložení hmoty ve hvězdě dále platí *rovnice zachování hmoty* ve tvaru

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (6.69)$$

Hlavním dlouhodobým zdrojem energie hvězd jsou termionukleární reakce probíhající v jejich centru, z nichž nejvydatnější je syntéza vodíku 1H na helium 4He . V zásadě tato syntéza může probíhat dvěma způsoby: v proton-protonovém řetězci a CNO cyklu. Pokud teplota v centru hvězdy přesáhne 10^8 K, dojde k zapálení Salpeterovy reakce, neboli 3α -procesu, při němž se 3 jádra helia 4He postupně přemění v jádro uhlíku ${}^{12}C$. U dostatečně hmotných hvězd může nukleosyntéza pokračovat dál a dojít až k železu ${}^{56}Fe$, což je jádro s největší vazebnou energií na nukleon, tedy nejtěsněji vázaný prvek. Toto je však případ jen těch nejhmotnějších hvězd, většina hvězd, podobně jako naše Slunce, zkončí svůj jaderný vývoj u uhlíku a kyslíku.

Při všech těchto reakcích dochází k uvolňování energie zejména v podobě elektromagnetického záření a neutrin. Množství energie, které se za jednotku času uvolní jaderným hořením 1 kg hvězdného materiálu, udává tzv. energetická výtěžnost reakce ϵ . Pro jednotlivé reakce ji můžeme psát fenomenologicky jako funkci hustoty a teploty ve tvaru¹²

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho^\nu T^\lambda, \quad (6.70)$$

kde pro jednotlivé reakce se většinou uvádí:

$$\begin{aligned} p - p : & \quad \nu = 1, \lambda = 4, \\ CNO : & \quad \nu = 1, \lambda = 15 - 18, \\ 3\alpha : & \quad \nu = 2, \lambda \simeq 40. \end{aligned}$$

Je-li L_r zářivý výkon procházející povrchem koule o poloměru r , pak jeho změna na vzdálenosti dr jaderně aktivní oblasti je ve stacionárním případě popsána rovnicí

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon, \quad (6.71)$$

vyjadřující energetickou rovnováhu ve hvězdě.

Je-li hvězda v rovnováze, pak se v jejím nitru uvolní právě tolik energie, kolik jí hvězda odevzdá do okolí. Aby teplo pokud možno samočinně postupovalo směrem k povrchu, je ve hvězdě nutný teplotní spád (gradient). Jeho výše souvisí se způsobem přenosu energie. V principu existují tři: (i) částicová difuze, (ii) zářivá difuze, (iii) konvekce. První dva způsoby jsou mikroskopické a jejich míra uplatnění souvisí se střední volnou dráhou částic resp. fotonů. V případě běžných hvězd je částicová difuze (přenos energie vedením tepla) krajně neúčinná a uplatňuje se výhradně difuze fotonů ionizovaným materiálem hvězdy. Jiná situace je ovšem v elektronově degenerované látce, kterou můžeme najít v nitrech bílých trpaslíků a neutronových hvězd. Třetí způsob je makroskopický a nastává v případech, kdy zářivá rovnováha již není možná – teplotní gradient je natolik velký, že daná vrstva přestane být vůči konvekci stabilní a dojde k makroskopickému přenosu hmoty. Toto nastává zejména v oblastech s velkým zářivým tokem a taky tam, kde záření velmi účinně interaguje s látkou, tj. v místech s velkou opacitou.

V případě přenosu energie zářivou difuzí je teplotní gradient ve sférických hvězdách dán výrazem

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa}{16\sigma} \frac{\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}, \quad (6.72)$$

kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a κ udává opacitu hvězdného materiálu, jejíž vyjádření závisí na způsobu interakce záření s látkou. Ve většině případů vázaně-volných a volně-volných přechodů elektronů je dobrým přiblížením opacita Kramersova typu,

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3,5}. \quad (6.73)$$

V případě řídkých horkých atmosfér velmi hmotných hvězd je ovšem dominantní interakcí Thomsonův rozptyl na volných elektronech a opacita je dána výrazem

$$\kappa_{es} \doteq 0,02 (1 + X) m^2 \text{ kg}^{-1}, \quad (6.74)$$

¹²V literatuře můžeme najít i složitější vyjádření závislosti zohledňující mj. i chemické složení hvězdného materiálu, viz třeba *Harmanec, P. a Brož, M.: Stavba a vývoj hvězd. MATFYZPRESS Praha, 2011.*

kde X vyjadřuje hmotnostní zastoupení vodíku v daném místě, tj. jeho hmotnost v 1 kg materiálu hvězdy.

Rozvine-li se ve hvězdě konvekce, pak dobrým přiblížením je adiabatický teplotní gradient. Pro látku ve stavu ideálního plynu je určen výrazem

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{P} \rho \frac{GM_r}{r^2}, \quad (6.75)$$

kde $\gamma = c_P/c_V$ je adiabatický index (pro jednoatomový ideální plyn je $\gamma = 5/3$).

Poslední rovnicí určující vnitřní stavbu hvězdy je stavová rovnice hvězdné látky. Ačkoliv je látka v nitru hvězdy ve formě vysokoteplotního plazmatu (směs ionizované látky, volných elektronů a záření), je energie coulombovských interakcí nabitých částic oproti jejich kinetické energii zanedbatelná a látku můžeme s výhodou popsat pomocí stavové rovnice ideálního plynu, v níž tlak P je lineární funkcí hustoty ρ a teploty T :

$$P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT, \quad (6.76)$$

kde $m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je atomová hmotnostní jednotka a μ je tzv. střední molekulová hmotnost. Pro neutrální plyn je

$$\frac{1}{\mu_n} = \sum_j \frac{X_j}{A_j}, \quad (6.77)$$

kde X_j je hmotnostní zastoupení částic j -tého druhu a $A_j = m_j/m_u$ je jejich atomová hmotnost. Naproti tomu u zcela ionizovaného plynu přispívají k tlaku látky i volné elektrony a jeho střední molekulová hmotnost je proto dána výrazem

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_j (1 + Z_j) \frac{X_j}{A_j}, \quad (6.78)$$

kde Z_j je protonové číslo j -tého atomu. V případě hvězd s chemickým složením podobným Slunci je $\mu_n \doteq 1,3$ a $\mu_i \doteq 0,62$.

K celkovému tlaku v nitru hvězd přispívá i tlak záření. Významný je zejména v řídkých oblastech horkých velmi hmotných hvězd, kde je dokonce dominantním zdrojem tlaku. Aplikací zákonitostí statistické fyziky na záření absolutně černého tělesa dostáváme pro tlak fotonového plynu předpis

$$P_r = \frac{1}{3} u_r = \frac{1}{3} a T^4, \quad (6.79)$$

kde u_r je hustota energie záření a $a = 4\sigma/c \doteq 7,56 \cdot 10^{-16}$ J m⁻³ K⁻⁴ je zářivá konstanta.

V případě bílých trpaslíků a neutronových hvězd, ale taky v centrálních částech hvězd v pokročilejším stupni vývoje, se setkáváme s degenerovaným fermionovým plynem tvořeným degenerovanými elektrony příp. neutrony (neutronové hvězdy). Rozhodující vliv na chování degenerované látky má kvantová mechanika, konkrétně Pauliho vylučovací princip, podle něhož se žádné dva fermiony nemohou nacházet v tomtéž kvantovém stavu. Degenerovaná látka je velmi špatně stlačitelná, tlak degenerovaného plynu závisí velmi silně na koncentraci volných fermionů (potažmo tedy na hustotě) a jen okrajově na teplotě. Často tedy vystačíme se stavovou rovnicí chladné degenerované látky, která má v limitě malých rychlostí (kinetická energie částic E_k je mnohem menší než jejich klidová energie E_0) a v ultrarelativistické limitě ($E_k \gg E_0$) jednoduchý polytropický tvar

$$P = K \rho^\Gamma, \quad (6.80)$$

kde $\Gamma = 5/3$ (nerelativistická limita) resp. $\Gamma = 4/3$ (ultrarelativistická limita). Konstanta úměrnosti K je v obou případech různá a závisí taktéž na typu degenerované látky.

6.4.1 Úlohy

1. Předpokládejte, že pro hvězdu platí následující rozložení hustoty

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

kde ρ_c je centrální hustota a R je poloměr hvězdy. Určete:

- (a) závislost $m(r)$
 - (b) závislost $M(R)$, kde M je hmotnost hvězdy, srovnajte hodnoty pro Slunce s realitou
 - (c) ukažte, že průměrná hustota hvězdy je $0.4\rho_c$
 - (d) závislost $I(M)$, kde I je moment setrvačnosti hvězdy
 - (e) odhadněte maximální rotační frekvenci hvězdy z předpokladu, že tato frekvence odpovídá situaci, kdy je v rovníkové oblasti na povrchu hvězdy odstředivá síla rovna síle gravitační, určete tuto hodnotu pro Slunce
 - (f) srovnajte kinetickou, klidovou a gravitační vazebnou energii hvězdy rotující maximální frekvencí
 - (g) určete jaké hodnotě specifického momentu hybnosti $j = J/M^2$ odpovídá hvězda rotující maximální frekvencí
 - (h) určete hodnotu specifického momentu hybnosti j pro Slunce
2. Spočítejte předchozí úlohu za předpokladu konstantního profilu hustoty. Výsledky porovnejte.
 3. Ověřte platnost relace $P_c > GM^2/8\pi R^4$ pro případy rozložení hustoty z úloh 1 a 2.
 4. *Gama-funkce*: Ukažte, že pro Γ -funkci definovanou vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

platí následující vztahy:

- (a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- (b) $\Gamma(1) = 1$,
- (c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5. Odvoďte stavovou rovnici ideálního plynu $P = nkT$ z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení

$$f(v) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{kT}}.$$

6. Pro jaké teploty dosahuje střední kvadratická rychlost elektronů, protonů a jader helia hodnot 0,1, 0,5 a 0,9 c ?
7. Uvažujme hvězdnou hmotu odpovídající přibližně Slunečnímu nitru ($\rho_c = 160 \text{ g.cm}^{-3}$, $T = 1,5 \cdot 10^6 \text{ K}$). Určete kinetickou energii volných elektronů a plně ionizovaných jader vodíku a helia. Určete jejich střední kvadratické rychlosti. Srovnajte energii coulombických interakcí s kinetickou energií částic.
8. Ukažte, že pro tlak degenerovaného plynu fermionů platí

$$P(x) = \frac{mc^2}{\lambda^3} \phi(x),$$

kde $\lambda = \hbar/mc$ je Comptonova vlnová délka částice, $x = p_F/mc$ a

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x(x+x^2)^{1/2} (2x^2/3 - 1) + \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\} u$$

A dále, že pro hustotu energie může psát

$$\mathcal{E}(x) = \frac{mc^2}{\lambda^3} \xi(x),$$

kde

$$\xi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x(x+x^2)^{1/2} (x+2x^2) - \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\}$$

9. Najděte ultrarelativistickou a nerelativistickou limitu vztahů pro tlak a hustotu energie z předchozí úlohy.
10. Určete množství energie uvolněné při vzniku jednoho jádra atomu helia ze čtyř jader atomů vodíku. Určete energii, která vznikne při přeměně jednoho kilogramu vodíku.
11. Určete množství energie uvolněné při přeměně jednoho kilogramu helia ^4He na uhlík ^{12}C (tzv. Salpeterova reakce). Srovnajte s energií z předchozí úlohy.
12. Určete minimální hmotnost hvězdy, pro kterou centrální teplota umožňuje zažehnutí vodíkových termonukleárních reakcí. Předpokládejte a) konstantní profil hustoty, b) profil hustoty daný relací $\rho = \rho_c [1 - (r/R)^2]$. Chemické složení necht' je i) shodné se Sluncem ($\mu = 0,61$), ii) odpovídá hvězdě tvořené pouze vodíkem.
13. Ze znalosti Sluneční konstanty (1367 W.m^{-2}) určete hmotnostní úbytek Slunce za jednu vteřinu a za jeden rok. Za předpokladu, že veškerá energie pochází z přeměny vodíku na helium, odhadněte odpovídající počet reakcí v nitru Slunce.
14. Odvoďte vztah pro Eddingtonovu limitu zářivého výkonu hvězdy složené čistě z vodíku. Při výpočtu předpokládejte, že veškerý tlak v nitru hvězdy odpovídá tlaku záření.
15. Určete horní mez hmotnosti hvězdy hlavní posloupnosti užitím předpokladu, že hvězdá září maximálně, tj. eddingtonovsky. Předpokládejte zjednodušující vztah $L/L_\odot = (M/M_\odot)^3$.

16. Stanovte Eddingtonovu limitu zářivého výkonu hvězdy s hmotností $0,085M_{\odot}$ za předpokladu, že pro opacitu v blízkosti povrchu hvězdy je dominantní elektronový rozptyl ($\kappa \simeq (1 + X) 0,02 \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$, $X = 0,7$).
17. Srovnejte Eddingtonovu limitu zářivého výkonu pro Slunce s jeho reálným zářivým výkonem.
18. Dokažte, že v centrální oblasti Slunce není energie přenášena konvekci. Množství energie na jednotku hmotnosti je odhadováno na $1,35 \cdot 10^{-3} \text{ W kg}^{-1}$, $\gamma = c_P/c_V = 5/3$, $P = 3,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$, $T = 1,56 \cdot 10^7 \text{ K}$, $\kappa = 0,138 \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$.
19. Dokažte, že rovnici hydrostatické rovnováhy lze pro modely hvězdných atmosfér psát ve tvaru $dP/d\tau = g/\kappa$, kde τ je optická hloubka a g je gravitační zrychlení na povrchu hvězdy.

7

Kinematické znaky hvězd

7.1 Kinematické znaky hvězd

Až do poč. 18. století byly hvězdy považovány za stálice, jejichž vzájemné polohy se vůbec nemění. V roce 1717 Edmond Halley¹ porovnal svá pozorování získaná během pobytu na ostrově Sv. Heleny s údaji uvedenými v katalozích Flamsteeda, Tycha Brahe a Ptolemaia a zjistil, že některé hvězdy jeví zřetelný pohyb na pozadí ostatních hvězd. Usoudil, že tento pohyb je odrazem relativního pohybu hvězdy vůči pozorovateli.

7.1.1 Vlastní pohyb hvězd

Ze Země jsme schopni pozorovat pouze tu složku prostorové rychlosti, která je kolmá na směr zorného paprsku. Tato složka rychlosti se nazývá *tangenciální* a na obr. 7.1 ji odpovídá úsečka HA . Druhou složkou je rychlost ve směru zorného paprsku, tzv. *radiální*. Úhel μ , pod kterým se ze Země jeví úsek HA , se nazývá *vlastní pohyb hvězdy*.

Vlastní pohyby hvězd jsou obecně velmi malé, jen pár hvězd vykazuje větší hodnoty. Prvenství drží hvězda Barnardova šipka (HIP 87937) v souhvězdí Hadonoše, jejíž vlastní pohyb činí $10,3''$ za rok. Za průměrný lidský život se posune přibližně o čtvrtinu úhlového průměru Měsíce!

V katalozích bývají uvedeny vlastní pohyby v rektascenzi μ_α a vlastní pohyby v deklinaci μ_δ .²

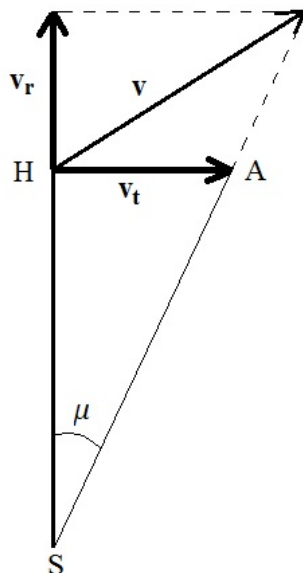
Označíme-li ψ úhel, který svírá vlastní pohyb μ se směrem k severnímu pólu (poziční úhel směru vlastního pohybu), pak pro něj platí:

¹Edmond Halley (1656-1742)

²Ve starší literatuře se vlastní pohyb v rektascenzi uváděl v jednotkách [časové sekundy/rok] a bylo nutno jej ve vztahu pro celkový vlastní pohyb převést úhlové vteřiny. Výsledný vztah měl pak podobu:

$$\mu = \sqrt{[15 \mu_\alpha \cos \delta]^2 + (\mu_\delta)^2}. \quad (7.1)$$

V současných katalozích (Hipparcos, Simbad) se pod pojmem μ_α rozumí vlastní pohyb v rektascenzi převedený na obloukové vteřiny za rok a vynásobený výrazem $\cos \delta$. Tedy: $\mu = \sqrt{[\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2]}$.



Obrázek 7.1: Rozložení prostorové rychlosti hvězdy na složku radiální v_r a na složku tangenciální (tečnou) v_t . Úhel μ , pod kterým je vidět usek HA je vlastní pohyb hvězdy.

$$\begin{aligned}\mu_\delta &= \mu \cos \psi \\ 15 \mu_\alpha \cos \delta &= \mu \sin \psi.\end{aligned}\tag{7.2}$$

7.1.2 Tangenciální rychlost

Tangenciální rychlost v_t je složka lineární rychlosti hvězdy v rovině kolmé k zornému paprsku. Vypočteme ji pomocí vlastního pohybu μ hvězdy a vzdálenosti r (nebo roční paralaxy π):

$$v_t = k \mu r = k \frac{\mu}{\pi},\tag{7.3}$$

kde k je koeficient úměrnosti, který závisí na zvolených jednotkách. Jestliže μ a π jsou vyjádřeny v úhlových vteřinách, pak $k = 1$ a poměr $\frac{\mu}{\pi}$ je tangenciální rychlost v astronomických jednotkách. Uvádíme-li tangenciální rychlost v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, pak

$$k = \frac{149,6 \cdot 10^6}{31\,557\,000} = 4,74.^3\tag{7.4}$$

³V čitateli je astronomická jednotka v km a ve jmenovateli je počet sekund v tropickém roce.

Výsledně:

$$v_t = 4,74 \frac{\mu}{\pi} = 4,74 \mu r \quad \text{km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (7.5)$$

kde r je vzdálenost vyjádřená v parsecích a μ, π jsou vyjádřeny v obloukových vteřinách.

7.1.3 Radiální rychlost

Radiální rychlost v_r je složka lineární rychlosti hvězdy ve směru od pozorovatele ke hvězdě. Určuje se na základě Dopplerova principu z posuvu $\Delta\lambda$ spektrální čáry o vlnové délce λ . Radiální rychlost můžeme určit ze vztahu:

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad (7.6)$$

kde c je rychlost světla, $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$. Při posuvu čar k červenému konci spektra má v_r kladné znaménko (hvězda se vzdaluje), při posuvu k modrému konci spektra záporné znaménko (hvězda se přibližuje).

7.1.4 Prostorová rychlost

Prostorová rychlost v je dána vektorovým součtem tangenciální a radiální složky rychlosti. Tedy

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = \sqrt{\left(4,74 \frac{\mu}{\pi}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2}. \quad (7.7)$$

Prostorová rychlost v svírá se směrem zorného paprsku úhel Θ . Pak platí:

$$\begin{aligned} v_t &= v \sin \Theta \\ v_r &= v \cos \Theta. \end{aligned}$$

Pokud se hvězda vzdaluje, je $v_r > 0$ a úhel Θ nabývá hodnot od 0° do 90° . Pokud se přibližuje, je $v_r < 0$ a úhel Θ nabývá hodnot od 90° do 180° .

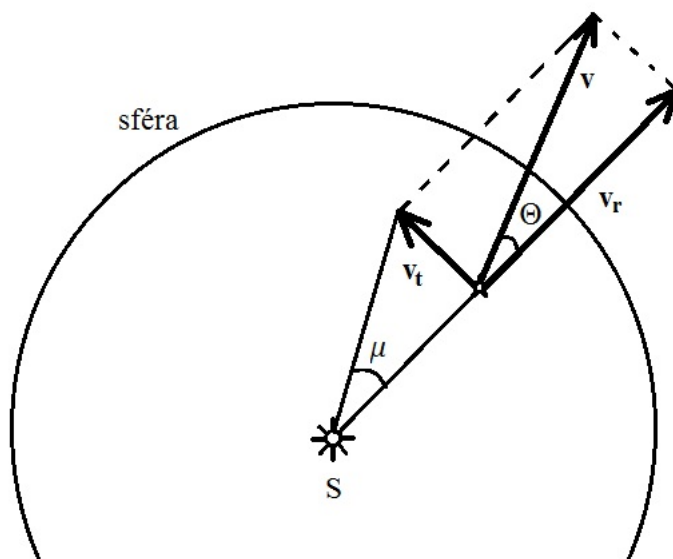
7.1.5 Úlohy

1. Nejžhavější a nejhmotnější hvězdy mají v průměru hmotnosti $2 \cdot 10^{31} \text{kg}$ a rychlosti kolem $15 \cdot 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hvězdy třídy našeho Slunce mají hmotnosti kolem $2 \cdot 10^{30} \text{kg}$ a rychlosti $64 \cdot 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ještě menší a chladnější hvězdy mají v průměru hmotnosti kolem $1,2 \cdot 10^{30} \text{kg}$ a rychlosti $78 \cdot 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Porovnejte kinetické energie těchto hvězd.

[Odpovídající kinetické energie pro dané typy hvězd jsou: $2,2 \cdot 10^{39} \text{J}$, $4,1 \cdot 10^{39} \text{J}$, $3,65 \cdot 10^{39} \text{J}$. Navzájem se tedy od sebe příliš neliší.]

2. Za jakou dobu t se zvýší intenzita hvězdy n -krát, je-li ve vzdálenosti r od Slunce a přibližuje se k nám rychlostí v . Udávejme vzdálenost r v km a rychlost v v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

⁴Tento vztah lze použít jen pro objekty, jejichž rychlost v_r je malá ve srovnání s rychlostí světla. Při rychlostech blízkých rychlosti světla (např. u velmi vzdálených galaxií) musíme použít vztah plynoucí ze speciální teorie relativity.



Obrázek 7.2: Prostorová rychlost hvězdy.

[Hvězda se přibližuje ke Slunci rychlostí v , je-li její vzdálenost v současné době r a intenzita světla I_1 , pak za čas t se její vzdálenost zmenší na $r - vt$ a její intenzita vzroste na hodnotu I_2 . Protože intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti, bude poměr intenzit

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r^2}{(r - vt)^2}. \quad (7.8)$$

Protože se intenzita zvýší n -krát, bude platit $I_2 = n I_1$ a ze vztahu pro poměr intenzit dostaneme:

$$\frac{r^2}{(r - vt)^2} = n. \quad (7.9)$$

Pro hledanou hodnotu t obdržíme:

$$t = \frac{r}{v} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (7.10)$$

V této rovnici nám hledaný čas vychází v sekundách. Mnohem názornější je převést tuto dobu na roky, pak:

$$t = \frac{1}{3,156 \cdot 10^7} \frac{r}{v} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (7.11)$$

3. Za jakou dobu se zdvojnásobí intenzita hvězdy ζ Herculis, která má paralaxu $\pi = 0,108''$ a přibližuje se ke Slunci rychlostí $70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$?

[Ze známé paralaxy určíme vzdálenost pomocí vztahu $\pi = 1/r$, odtud $r = 9,259 \text{ pc} = 2,857 \cdot 10^{14} \text{ km}$. Po dosazení do (7.11) obdržíme $t = 37\,880$ roků.]

4. Altair (α) Aql se přibližuje ke Slunci rychlostí 26 km s^{-1} . Za jak dlouho se jeho zdánlivá hvězdná velikost změní o $0,1^m$? Vzdálenost Altaira od Slunce je $15,7 \text{ ly}$.

[Z Pogsonovy rovnice zjistíme poměr intenzit

$$\frac{I_2}{I_1} = 1,096 = n. \quad (7.12)$$

Pak $t = 8\,146$ roků.]

5. Aldebaran (α) Tau se vzdaluje od Slunce rychlostí 54 km s^{-1} , jeho paralaxa $\pi = 0,050''$, vizuální hvězdná velikost Aldabaranu je $+0,85^m$. Za jak dlouho bude jeho zdánlivá hvězdná velikost $+0,87^m$?

[$t = 3\,350$ roků]

6. Ve spektru hvězdy je čára vápníku o vlnové délce $\lambda = 422,7 \text{ nm}$ posunuta o $\Delta\lambda = 0,07 \text{ nm}$ k fialovému konci spektra. Určete radiální rychlost hvězdy.

[$v_r = -49 \text{ km s}^{-1}$. Hvězda se k nám přibližuje.]

7. Jak se posune čára sodíku s vlnovou délkou $\lambda = 589,6 \text{ nm}$ ve spektru hvězdy, která má radiální rychlost $v_r = +161 \text{ km s}^{-1}$.

[$\Delta\lambda = 0,316 \text{ nm}$. Čára se posune k červenému konci spektra.]

8. Ve spektru novy v souhvězdí Herkula byla v roce 1934 tmavá čára vodíku H_λ ($\lambda = 434,1 \text{ nm}$) posunuta o $1,01 \text{ nm}$ k fialovému konci spektra. Jaká byla rychlost plynu vyvrženého hvězdou?

[$v = 700 \text{ km s}^{-1}$]

9. Barnardova hvězda (někdy též nazývána šipka) má ze všech hvězd největší vlastní pohyb po obloze. Jednotlivé složky jejího vlastního pohybu jsou: $\mu_\alpha \cos \delta = -0,797''/\text{rok}$, $\mu_\delta = 10,326''/\text{rok}$. Spočtete, za jak dlouho se posune na obloze o úhlový průměr Měsíce? Určete úhel ψ , který svírá její vlastní pohyb se směrem k severnímu pólu.

[Vypočítáme výsledný vlastní pohyb Barnardovy šipky:

$$\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos \delta)^2 + (\mu_\delta)^2} = 10,356''/\text{rok}. \quad (7.13)$$

Úhlový průměr Měsíce je přibližně $0,5^\circ$. Barnardova šipka urazí tuto vzdálenost za

$$t = \frac{1800''}{10,356''} = 174 \text{ let}. \quad (7.14)$$

Úhel ψ určíme ze vztahů:

$$\mu_{\delta} = \mu \cos \psi \quad (7.15)$$

$$\mu_{\alpha} \cos \delta = \mu \sin \psi \quad (7.16)$$

Protože úhel ψ může ležet v rozmezí ($0^\circ - 360^\circ$), musíme znát $\sin \psi$ i $\cos \psi$. Určíme velikost úhlu $\psi = 4,36^\circ$, protože $\sin \psi$ je záporný a $\cos \psi$ kladný, bude výsledný úhel ležet ve 4. kvadrantu, tedy $\psi = 355^\circ 34'$.]

10. Určete radiální rychlost Barnardovy šipky, znáte-li $z = \Delta\lambda/\lambda = -0,000369$.

$$[v_r = c \cdot z = -110,6 \text{ km s}^{-1}]$$

11. Určete skutečnou prostorovou rychlost Barnardovy hvězdy vůči Slunci, znáte-li její vzdálenost 5,98 ly

[Nejdříve převedeme vzdálenost na parseky: $r = 1,834 \text{ pc}$, pak určíme tangenciální rychlost:

$$v_t = k\mu r = 4,74 \cdot 10,356 \cdot 1,834 \text{ km s}^{-1} = 90 \text{ km s}^{-1}. \quad (7.17)$$

Prostorová rychlost

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_t)^2} = 142,2 \text{ km s}^{-1}. \quad (7.18)$$

]

8

Dvojhvězdy

8.1 Úlohy

1. Určete vzdálenost dvojhvězdy, známe-li její oběžnou dobu $T = 27$ roků, hmotnosti jednotlivých složek $3 M_{\odot}$, $5 M_{\odot}$ a úhlovou velikost hlavní poloosy $a = 0,45''$.
2. Můžeme pomocí Hubbleova dalekohledu rozlišit dvě hvězdy spektrální třídy O mezi kterými je úhel 10^{-7} rad, na vlnové délce čáry $L_{\alpha} = 121,6$ nm?

[Rozlišovací schopnost dalekohledu: $\Theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 6,2 \cdot 10^{-8}$ rad = $0,01''$.]

Seznam použité literatury

- [1] Carroll, B.W., Ostlie, D.A.: *An Introduction to Modern Astrophysics*. Addison-Wesley, 1996.
- [2] Harmanec, P., Brož, M.: *Stavba a vývoj hvězd*. MATFYZPRESS, Praha, 2011.
- [3] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., Donner, K.J. (eds.): *Fundamental Astronomy*, Springer, 2007 (5ed.).
- [4] Kleczek, J.: *Velká encyklopedie vesmíru*. Academia, Praha, 2002.
- [5] Kulhánek, P., Červenka, M.: *Astrofyzika v příkladech*. ČVUT, Praha, 2012.
- [6] Mikulášek, Z., Krtička, J.: *Základy fyziky hvězd*. MU, Brno, 2005.
- [7] Pokorný, Z.: *Vademecum*. Hvězdárna a planetárium M. Koperníka v Brně, 2006.
- [8] Široký, J., Široká, M.: *Základy astronomie v příkladech*. SPN, Praha, 1977.
- [9] Štefl, V., Korčáková, D., Krtička, J.: *Úlohy z astrofyziky*. MU, Brno, 2010.
(www.physics.muni.cz/astroulohy)
- [10] Vanýsek, V.: *Základy astronomie a astrofyziky*. Academia, Praha, 1980.
- [11] Zejda, M.: *Základy astronomie*. MU, Brno, 2013.

Internetové zdroje

- [12] Reichl, J., Všetická, M.: *Multimediální encyklopedie fyziky*. <http://fyzika.jreichl.com>, 2006-2015.
- [13] *Astronomia*. <http://astronomia.zcu.cz>.