

# Základy astronomie a astrofyziky

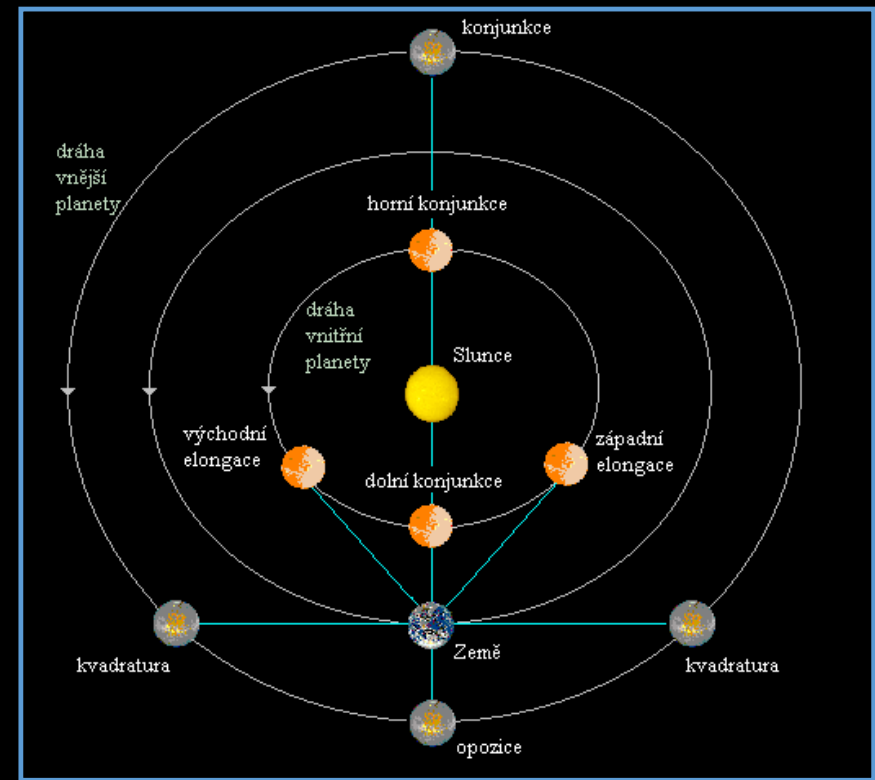
fyzika sluneční soustavy, faktografie  
Sluneční soustavy

# pohyb planet

- Země obíhá kolem Slunce v rovině ekliptiky, jež svírá s rovinou světového rovníku úhel  $\varepsilon = 23^{\circ}27'$
- pohyb Slunce během roku po hvězdné obloze se děje právě po ekliptice, pohyb planet po hvězdné obloze v průběhu roku je mnohem složitější
- rozlišujeme některé význačné polohy:
  - 1) *konjunkce*
  - 2) *opozice*
  - 3) *největší elongace*

# pohyb planet

- ad 1) nastává při shodné rektascenzi dvou objektů, u tzv. vnitřních planet (Venuše, Merkur) rozlišujeme k. dolní (planeta je mezi Zemí a Sluncem) a horní k. v opačném případě



- ad 2) je opakem 1) a nastává v okamžiku, kdy se liší rektascenze dvou těles o  $180^\circ$ , je to nejvýhodnější poloha k pozorování; těleso kulminuje o půlnoci, je-li v opozici se Sluncem, nemůže nastat pro vnitřní planety a Slunce
- ad 3) je to největší úhlová vzdálenost od Slunce, které dosáhne některá z vnitřních planet
- někdy se lze setkat i s pojmem kvadratura, pro vnější planetu nastává, je-li její elongace  $90^\circ$

# pohyb planet

- ***siderická perioda*** - 1 oběh planety kolem Slunce vzhledem ke hvězdám
- ***synodická perioda*** - čas mezi dvěma po sobě následujícími konjunkcemi planety se Sluncem. Pro vnitřní planety platí  $T_{\text{syn}} = T_{\text{sid}} / (1 - T_{\text{sid}})$ , pro vnější  $T_{\text{syn}} = T_{\text{sid}} / (T_{\text{sid}} - 1)$
- při pohledu ze Země vytvářejí dráhy planet na hvězdné obloze v průběhu roku „smyčky“, blíže ve cvičení v planetáriu

### 3.4 Ptolemaiova soustava

Při pozorování ze Země není jasné, zda se těleso a s ním i pozorovatel hýbe, a to si uvědomovali i naši předkové. Řeční učenci připouštěli obě možnosti, jak myšlenku geocentrickou, tak heliocentrickou.

Geocentrická domněnka měla mnohem více zastánců, kteří se oháněli dobrými argumenty:

- a) Země se nijak nechvěje, necuká, nehází sebou → je nehybná
- b) fyzikální důvody — vše padá do středu Země — Aristotelova fyzika
- c) hvězdy nejeví paralaxu (objevena až 200 let po vynálezu dalekohledu)
- d) čistě pragmatické hledisko — zajímá nás poloha planet, Měsíce a Slunce na naší, tedy geocentrické obloze. Proč si tedy komplikovat situaci a hledat jiný střed pohledu. Transformace souřadnic byly mimo tehdejší matematické možnosti.

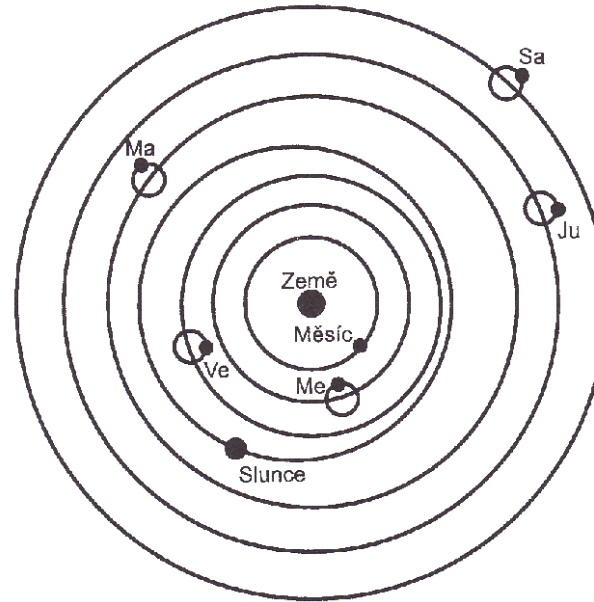
Uvážíme-li výše zmíněné argumenty, je zřejmé, že v té době byl dobře matematicky propracován jen geocentrický model. První dokonalý systém navrhl ve 2. stol. př.n.l. Hipparchos, který patřil k nejlepším starověkým astronomům (jeho měření byla základem i pro jeho následovníky). Hipparchos umístil Zemi do středu sféry hvězd, planety, Měsíc a Slunce se pohybovaly pak po komplikovaném systému kružnic.

Tento model, který známe právě pod názvem Ptolemaiova soustava, však sepsal až v 1. stol. n.l. ve svém díle *Megalé syntaxis* (Velká skladba, vydán kolem roku 140) právě Ptolemaios. Nám se dochovalo díky arabskému přepisu z 8. století jako *Al-Magesto* (Největší dílo), na který pak navázali středověcí učenci.

Model vychází ze dvou jednoduchých předpokladů; povolený je pouze pohyb po kružnicích s konstantní úhlovou rychlostí a že je Země uprostřed.

Podíváme-li se na pohyb Slunce mezi hvězdami, již od dob egyptských astronomů se ví, že se Slunce pohybuje po ekliptice s různou úhlovou rychlostí, v zimě rychleji než v létě. U jeho pohybu není pozorován retrográdní pohyb. Řešením

bylo, že se střed kruhové dráhy Slunce kolem Země položil excentricky vůči Zemi a při zachování rovnoměrného pohybu Slunce po takto vystředěné kružnici vůči Zemi (deferent s periodou 1 roku) se podařilo tento pohyb předpovídat (viz obr. 7 vlevo).

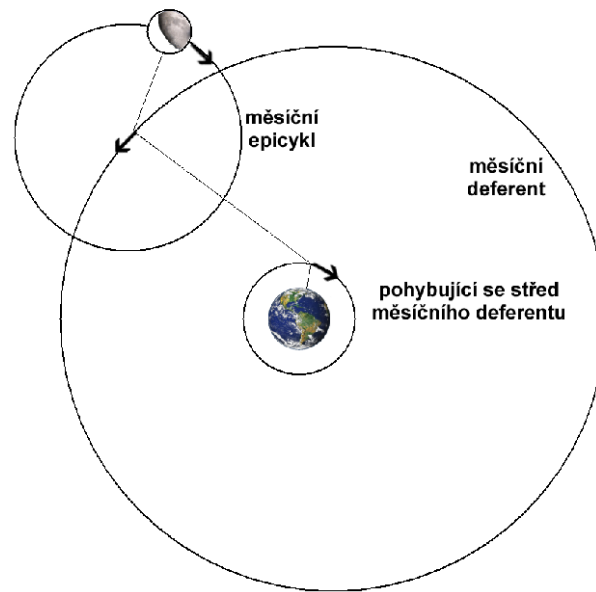


**Obrázek 34:** Ptolemaiov celkový pohled na vesmír. Již v tomto přehledném schématu (střed epicyklů Merkuru, Venuše a Slunce mají být v tomto modelu na jedné přímce, zde jde jen o celkové schéma) musel volit kružnici pro sféru Slunce excentricky vůči Zemi (Jáchim (2003)).

Pro popis pohybu Měsíce už Hipparchos použil deferent s centrem v Zemi, který se po epicyklu hýbe v opačném směru úhlovou rychlostí jen o málo menší (cca.  $3^\circ$  za oběh). Tím docílil, že se místo, kde se Měsíc přibližuje nejvíce Zemi, posouvá s periodou 9 let, což je potřeba k výpočtu zatmění. Ptolemaios zkomplikoval model tím, že střed deferentu se otáčí rovnou po kružnici za 1 synodický měsíc v opačném směru, viz obr. 35. Už Hipparchos sklonil rovinu dráhy Měsíce o  $5^\circ$  k deferentu Slunce a nechal ji stáčet s periodou 18 a  $\frac{2}{3}$  roků směrem na západ (pohyb uzlů), což bylo nezbytné pro předpovědi zatmění.

U vnitřních planet bylo podobně komplikované schéma, jako tomu bylo u Měsíce, pro Venuši však nebylo nutné uvažovat střed deferentu obíhající po kružnici kolem Země (Země byla jen excentricky vůči středu deferentu).

Pro vnější planety si Ptolemaios vystačil pouze s epicyklem a deferentem, v jehož středu byla umístěna Země (viz obr. 7 vpravo). Vnější planety se pohybují většinu času v přímém směru (proti pohybu hvězdného pozadí), což odpovídá



**Obrázek 35:** Schématický diagram finální verze Ptolemaiova modelu pohybu Měsíce. Nejenom epicykl ale i pohyb centra měsíčního deferentu kolem středu Země jsou zapotřebí k vysvětlení pohybu Měsíce po nebeské sféře v Ptolemaiově systému.

přibližně siderické periodě (pohyb po deferentu). Tento pohyb se pak skládá s pohybem po epicyklu se synodickou periodou, který modeluje pohyb retrográdní.

Ptolemaiův systém se skvěle osvědčil, bylo možné podle něj předpovídat na desítky let dopředu, bohužel neodpovídal na základní otázku, jak je vše uspořádáno v prostoru. Vše vycházelo pouze z úhlových vzdáleností od centra, lineární rozměry drah nebyly podstatné. Model selhal při přesnějším měřeních, bylo nutné přidávat další a další korekční členy, čímž se model stával složitějším. To vedlo následně k jeho revizi a oprášení heliocentrické domněnky.

### 3.5 Koperníkův systém

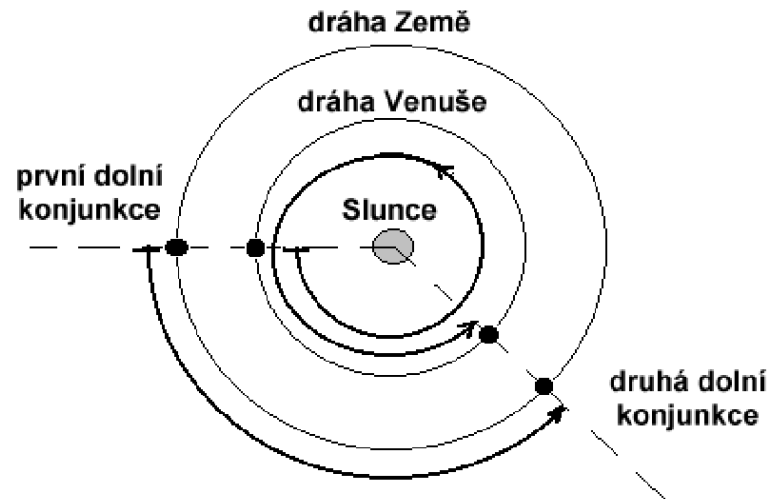
Mikuláš Koperník (1473–1543) přináší opětovně na uspořádání sluneční soustavy heliocentrický pohled. Země je jen jednou z mnoha planet, které obíhají okolo Slunce, nicméně planety stále obíhají po kružnicích, pro zemskou trajektorii není Slunce v centru oběhu.

Počátek revoluce v pohledu na uspořádání světa pak popsal ve svém díle *De revolutionibus orbium coelestium*, které vyšlo v roce 1543. Uspořádání planet odpovídá dnešnímu modelu, stejně tak i proporce jejich drah. Rychlost planet je tím

vyšší, čím je planeta blíže Slunci. Koperníkův model názorně vysvětluje rozdělení planet na vnitřní a vnější i jejich vzájemné konfigurace vůči Slunci (elongace, horní a dolní konjunkce pro vnitřní planety a opozice, konjunkce a kvadratura pro planety vnější).

Doba, po které se kompletně vystřídají všechny aspekty planet, je periodou synodickou, která je dána pozicí planety vůči Zemi a Slunci. Naproti tomu perioda siderická je vztahena vůči hvězdám a odráží pohyb samotné planety vůči nim. V heliocentrickém modelu je tím větší siderická perioda, čím je větší poloměr trajektorie planety.

Lze nalézt také vztah, který svazuje *periodu siderickou s periodou synodickou*, viz obr. 36, na kterém je znázorněno odvození vztahu ze vzájemných pozic Venuše a Země vůči Slunci. Nyní zavedeme synodickou periodu Venuše jako  $S$  (doba mezi



**Obrázek 36:** Od první dolní konjunkce Venuše k druhé uplyne právě synodická perioda, tj. 583,92 dne.

první a druhou dolní konjunkcí, viz obrázek 36), její siderická perioda bude  $P$  a siderická perioda Země  $E$ . Celkový úhel, který opiše planeta Venuše mezi dolními konjunkcemi lze vyjádřit jako

$$\Omega = S \frac{2\pi}{P}. \quad (81)$$

Tento úhel musí být ten samý jako úhel, který opiše za tuto dobu planeta Země s přičtením  $360^\circ$ .

$$S \frac{2\pi}{P} = S \frac{2\pi}{E} + 2\pi. \quad (82)$$



Odtud lze jednoduchou úpravou získat vztah

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{E} + \frac{1}{S} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}, \quad (83)$$

který platí pro vnitřní planety a

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{E} - \frac{1}{S} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{E} + \frac{1}{P} \quad (84)$$

pro planety vnější. Jak je patrné z tabulky 3, největší synodickou periodu má planeta Mars, doba mezi dvěma opozicemi je něco přes dva roky (780 dní), s čímž souvisí období, kdy jej lze pozorovat.

planeta	siderická perioda (roky)	synodická perioda (roky)
Merkur	0,241	0,317
Venuše	0,615	1,599
Mars	1,881	2,135
Jupiter	11,86	1,092
Saturn	29,46	1,035
Uran	84,32	1,012
Neptun	164,8	1,006

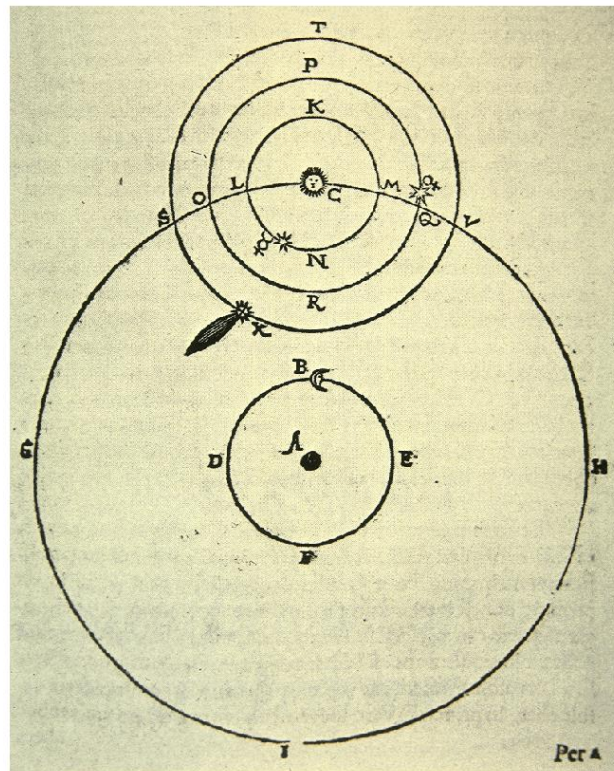
**Tabulka 4:** Synodické a siderické periody planet v rocích.

planeta	Koperník (AU)	současná hodnota (AU)
Merkur	0,38	0,387
Venuše	0,72	0,723
Země	1,00	1,000
Mars	1,52	1,52
Jupiter	5,22	5,20
Saturn	9,17	9,54

**Tabulka 5:** Vzdálenost planet od Slunce dle Koperníka a současné hodnoty (v astronomických jednotkách).

Zatímco Ptolemaios nedokázal v rámci svého modelu zdůvodnit rozsah a rychlost retrográdního pohybu, Koperník to vykládal jako logický důsledek toho, že se Země přibližila k planetě, přičemž její úhlová rychlost je větší. Přírozeným důsledkem je rovněž vysvětlení, proč má Mars větší retrográdní klíčku než např. planeta Saturn. Bohužel se Koperník stále držel kruhových trajektorií, takže byl nucen pro shodu jeho modelu s pozorováními ponechat epicykly. Došlo tak k převrácení role deferentu a epicyklu.

Hlavním triumfem Koperníkova systému byla možnost vyčíslit relativní rozměry dráhy vzhledem k rozměrům trajektorie Země kolem Slunce (v astronomických jednotkách) a rovněž vysvětlení, proč se čas od času vyskytují různé maximální elongace vnitřních planet. V relativních velikostech drah se Koperníkův systém téměř shoduje se současnými hodnotami.

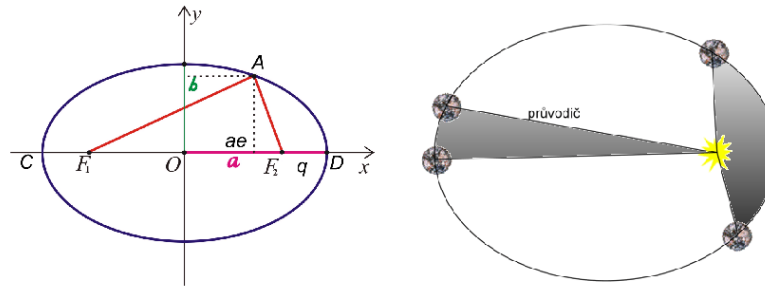


Obrázek 37: Kompromisní model Tycho Brahe sluneční soustavy.

### 3.6 Keplerovy zákony

Tycho Brahe (1546–1601) cestoval po neshodách s dánským králem Kristiánem IV. od roku 1597 po celé Evropě, až byl Rudolfem II. v roce 1599 na radu Tadeáše Hájka z Hájku pozván do Prahy, kde působil u dvora jako císařský astrolog. Postavil novou observatoř v Benátkách nad Jizerou, kde mu posledních několik měsíců života dělal asistenta Johannes Kepler (1571–1630).

Brahe se řadí mezi nejlepší pozorovatele, úhlová přesnost jeho měření dosahovala 1'. Brahe heliocentrismus nepřijal kvůli nenaměřené paralaxe, i když byl Koperníkův systém jednodušší. Podařilo se mu však změřit denní paralaxu Měsíce, který se od svého východu až do západu zřetelně posune mezi hvězdami. Navrhl proto jiný model, kompromisní, uspořádání sluneční soustavy. V centru zůstala Země, kolem které obíhalo Slunce. Ostatní planety pak obíhaly ale kolem Slunce (viz obr. 37). Aby si ověřil platnost svého systému, pozval do Prahy v roce 1600 Johannese Keplera, kterého považoval za schopného teoretika.



**Obrázek 38:** Parametry elipsy (vlevo) a Druhý Keplerův zákon - zákon ploch (vpravo).

Kepler byl zastáncem Koperníkova systému a na základě pozorování Braheho i svých zjistil, že prostorovou dráhou Marsu nemůže být kružnice, ale elipsa. Tímto revolučním krokem postuloval svůj první zákon, tj. planety se pohybují po elipsách (v dnešní podobě se hovoří obecně o kuželosečkách).

Pro elipsu (viz obr. 38 vlevo) platí, že  $F_2A + AF_1 = const$ , vzdálenost  $CD$  je rovna dvojnásobku velikosti velké poloosy  $a$ . Výstřednost  $e$  pak charakterizuje zploštění elipsy, je-li výstřednost rovna nule, pak jde právě o kružnici. Vzdálenost planety v perihéliu je  $q = a(1 - e)$ , pro afélium pak  $Q = a(1 + e)$ .

Druhý Keplerův zákon říká, že plocha opsaná průvodičem planety je za stejný časový okamžik vždy stejná. Tento zákon je jen jiným vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti. Plyne z něj, že při rostoucí vzdálenosti planety od Slunce její rychlost klesá, tj. pohyb po elipse je pohybem nerovnoměrným. Pro poměr rychlostí v perihéliu a aféliu platí

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{2a - q}{q} = \frac{2a - a + ae}{a - ae} = \frac{1 + e}{1 - e}, \quad (85)$$

pro poměr úhlových rychlostí ( $\omega = v/r$ ) v perihéliu a aféliu pak

$$\frac{\omega_P}{\omega_A} = \frac{v_P r_A}{v_A r_P} = \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^2. \quad (86)$$

Budeme-li chtít porovnat excentrické řešení pohybu Slunce kolem Země v Ptolemaiově systému s Keplerovým druhým zákonem, vyjdeme z předpokladu, že máme kružnici o poloměru  $R$  a její vystředění je dáno  $p = R\varepsilon$ . Poměr úhlových rychlostí je opět dán

$$\frac{\Omega_P}{\Omega_A} = \frac{R + p}{R - p} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (87)$$

a uvážíme-li, že se tento poměr musí shodovat s poměrem pro elipsu, porovnáním dostaneme

$$\frac{\Omega_P}{\Omega_A} = \frac{\omega_P}{\omega_A} \implies \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^2 = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (88)$$

Je-li excentricita elipsy malá  $e \ll 1$ , můžeme provést rozvoj

$$\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^2 = ((1 + e)^2)^2 = 1 + 4e \quad (89)$$

a současně

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = 1 + 2\varepsilon \implies \varepsilon = 2e, \quad (90)$$

ze kterého vyplývá, že pro kružnici bylo potřeba umístit střed 2 krát dále od středu Slunce, což je v dobré shodě s Ptolemaiovým systémem. První dva zákony vydal Kepler ve svém díle *Astronomia nova* v roce 1609.

Teprve až deset let po prvních dvou Keplerových zákonech se objevil jeho třetí harmonický zákon popsáný v díle *Harmonices Mundi*, které vyšlo v roce 1619. Pohyb planet se snažil vysvětlit z hlediska hudební harmonie a našel jednoduchý vztah mezi periodou a velkou poloosou trajektorie

$$P^2 = a^3, \quad (91)$$

kde  $P$  je perioda v letech a  $a$  je velká poloosa v astronomických jednotkách. Kepler věřil, že síla pohánějící planety pramení ve Slunci, a i když to není pravda, patřil mezi první, kteří se snažili nalézt model založený na fyzikálním základu. Předchozí pokusy vždy byly na filosofických či teologických principech. Od této chvíle se snaží astronomové také pochopit, co je příčinou pozorovaného pohybu a ne jenom popisovat a předpovídat polohy.

Přestože ani Kepler nezměřil hvězdnou paralaxu, elegance jeho modelu a přesnost, se kterou dával výsledky, jasně zvítězila, i když stále pozitivní důkaz tohoto modelu chyběl.

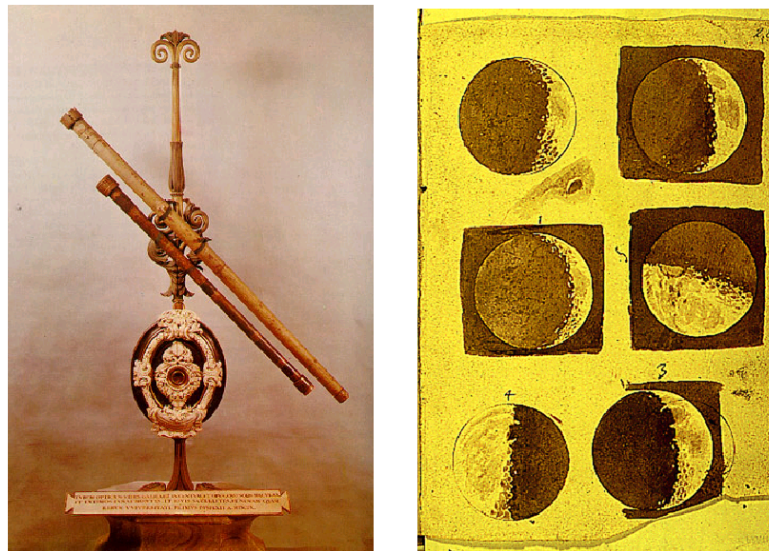
### 3.7 Galileův přínos

Galileo Galilei (1564–1642) byl prvním astronomem, který po vynálezu dalekohledu začal s jeho pomocí objevovat taje vesmíru. Jeho pozorování přinesla podporu Koperníkova heliocentrického systému, který byl v té době přijímán jen jako možný teoretický model. Již na počátku roku 1610 objevil v blízkosti planety Jupiter, do té doby nepozorované, čtyři měsíce, které kolem něho obíhaly. Z toho mohl usoudit, že není pouze jeden střed oběhu (kolem Země), ale takových středů může být daleko více. Kepler po tomto objevu i zde potvrdil platnost harmonického třetího zákona.

Galilei svým primitivním dalekohledem (obr. 39 vlevo) pozoroval povrch Měsíce (obr. 39 vpravo), na kterém našel jeho rozmanitý povrch (krátery, moře, pohoří, brázdy), což však bylo proti tehdejší víře, že nebeská tělesa jsou perfektní koule. Další ránu přinesla jeho pozorování Slunce a jeho povrchu, na kterém našel sluneční skvrny, které se navíc po povrchu pohybovaly. Tento pohyb vysvětlil tím, že Slunce kolem své osy rotuje, stejně tak i Země (což usnadnilo přijetí této myšlenky). Při pozorování planety Venuše objevil její fáze, což by v Ptolemaiově systému nebylo možné zcela vysvětlit (v kompromisním systému Tycho Brahe ale ano).

Kromě těles sluneční soustavy Galileo pozoroval i Mléčnou dráhu a přestože používal velice jednoduchý dalekohled, rozložil její světlo na tisíce hvězd.

Všechny jeho objevy však vyvolaly spor s církví, která požadovala, aby své tvrzení o pravdivosti heliocentrismu odvolal. Spor se tedy ze začátku odehrával



**Obrázek 39:** První Galileiho dalekohled (vlevo) a jeho pozorování měsíčních fází (vpravo).

mezi starou (aristotelovskou) koncepcí a novou, která tvrdila, že pohyby nebeských těles jsou řízeny stejnými fyzikálními zákony, jaké platí i na Zemi, později se změnil hlavně na otázku zemské rotace. Nakonec byl Galilei nucen v roce 1633 odvolat, zatratit a zošklivit si svou práci a slíbit, že odsoudí i jiné, kteří budou zastávat jeho předchozí pohled. Za to byl „pouze“ odsouzen k doživotnímu domácímu vězení.

Kromě astronomie se Galileo zabýval i fyzikou, studoval mechaniku (pohyb a pád těles), na základě svého studia pak formuloval *princip setrvačnosti*: „*Těleso setrvává v pohybu rovnoměrně přímočarém, pokud není vnějšími silami přinuceno tento stav změnit.*“ Touto silou bylo většinou tření, což popíralo uznávanou Aristotelovu hypotézu, že objekty přirozeně zpomalují a zastaví se, pokud na ně nepůsobí síla. Vše bylo základem pro dynamiku, kterou rozvinul Isaac Newton (1643–1727), který pohyb popisoval jako výsledek setrvačnosti a působících sil.

### 3.8 Newtonovy pohybové zákony

Pro rozvoj dynamiky bylo zapotřebí zavést pojmy *síla* a *hmotnost*, kromě nich zavedl Newton ještě pojmy *setrvačnost* a *interakce*. První Newtonův zákon je zákonem setrvačnosti, který převzal z Galileiho principu setrvačnosti, normálním stavem těles není jejich klidový stav. Musí být současně splněno  $\vec{v} = \vec{0}$  ale současně také  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ , což v pozemských podmínkách nenastává (stále je přítomna gravitační síla, tření), ale obecně ani nikde jinde ve vesmíru, protože jsou vždy nějaké síly přítomny.

Druhý Newtonův zákon (předpokládáme-li pro hybnost  $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ , zákon síly, dává do souvislosti výslednici působících sil na těleso a jeho zrychlení, které je touto výslednicí sil způsobeno.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} \quad (92)$$

Hmotností  $m$  se také říká *hmotnost setrvačná*, která je mírou odporu proti změně stavu tělesa, na které působí výslednice sil. Je-li působící výslednice sil kolmá na vektor rychlosti  $\vec{v}$ , pak na základě vektorového počtu platí, že se absolutní velikost vektoru rychlosti nemění, mění se pouze její směr. Tím lze velice jednoduše vysvětlit křivočarý pohyb po kružnici.

Třetí Newtonův zákon, zákon akce a reakce, říká, že působí-li jedno těleso na druhé silou  $\vec{F}$ , pak působí druhé těleso na to první stejnou silou opačného směru  $-\vec{F}$ . Aplikujeme-li princip akce a reakce na 2. Newtonův zákon, pak jedno těleso zrychluje těleso druhé. Velice často jsou však poměry hmotností natolik rozdílné, že hmotnost jednoho tělesa vůči druhému je zanedbatelná, proto i zrychlení hmotnějšího tělesa je zanedbatelné oproti zrychlení méně hmotného tělesa.

Z Newtonových zákonů můžeme vysvětlit např. 2. Keplerův zákon. Za předpokladu, že působící síla (gravitační síla), je silou centrální, směřující vždy do středu Slunce, můžeme definovat dostředivou sílu

$$\vec{F} = f \frac{\vec{r}}{r}, \quad (93)$$

kde  $r = |\vec{r}|$  a podíl  $\frac{\vec{r}}{r}$  je jednotkový vektor. Moment síly je definován jako  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  a pro případ centrální síly  $f = f(r)$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}. \quad (94)$$

Moment hybnosti je definován jako

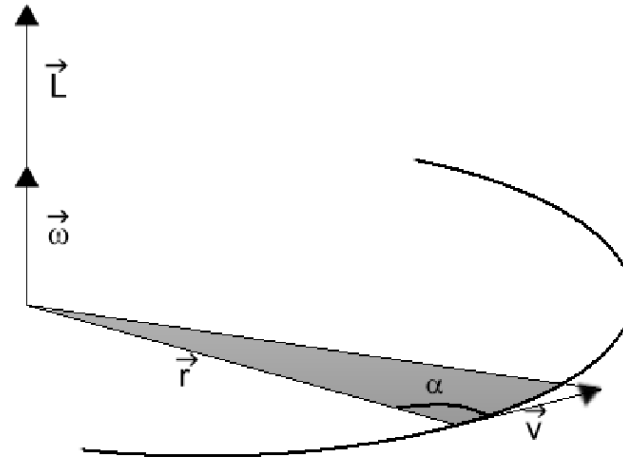
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}). \quad (95)$$

Budeme-li uvažovat časovou derivaci momentu hybnosti pro případ s centrální silou, dostáváme

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}} = \vec{0}. \quad (96)$$

Časová derivace momentu hybnosti je v poli centrální síly nulová, z toho plyne, že moment hybnosti je konstantní vektor, který je kolmý k rovině pohybu (viz obr. 40). Plocha trojúhelníka je dvojnásobkem velikosti vektorového součinu  $|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}||\vec{v}| \sin \alpha$ . Protože platí, že vektorový součin polohového vektoru a vektoru hybnosti je konstantní  $\vec{r} \times \vec{p} = \text{const}$ , pohyb se děje v rovině a vektory úhlové rychlosti a momentu hybnosti jsou rovnoběžné  $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ . Můžeme učinit tedy obecný závěr: jde-li o pohyb tělesa v poli centrální síly, pohyb se děje vždy v rovině.

Působí-li na pohybující se těleso rušivé síly, např. gravitační síla Měsíce na pohyb Země, časová derivace momentu hybnosti již nebude rovna nule  $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq \vec{0}$ .



**Obrázek 40:** Velikost plochy opsaná průvodičem za jednotku času je plochou trojúhelníka.

Tyto rušivé síly vytvářejí moment síly  $\vec{M}$ , který nutí osu Země vykonávat precesní pohyb. Analogicky totéž platí i pro nutaci.

Stáčení roviny dráhy Měsíce a ostatních planet (uzlových přímek) je jen důsledek toho, že podmínka  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ , není přesně splněna, protože rušivé síly nejsou silami centrálními.

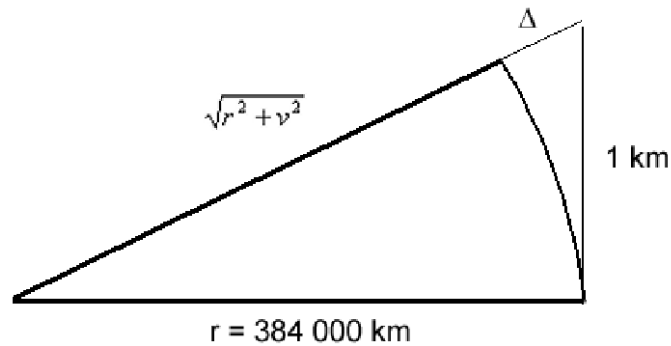
### 3.9 Newtonův gravitační zákon

Základní myšlenkou, na které je založen gravitační zákon, je ta, že tatáž síla, která nutí na Zemi k pádu tělesa, je příčinou pohybu těles ve vesmíru (sluneční soustavě). Úvaha začala u Měsíce. Ze znalosti jeho vzdálenosti a oběžné periody vychází jeho oběžná rychlost, uvažujeme-li kruhovou trajektorii, rovna přibližně 1 km/s. Aby Měsíc neodletěl od Země, musí být za 1 sekundu urychlen tak, aby se přiblížil (spadl) na Zemi o 1,3 mm, v tomto případě zůstane jeho vzdálenost od Země konstantní (viz obr. 41).

Vyjdeme z obr. 41. Pro  $\Delta$  platí

$$\Delta = \sqrt{r^2 + v^2} - r = r \left( \sqrt{1 + \frac{v^2}{r^2}} - 1 \right) \doteq r \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} \right) = \frac{v^2}{2r} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ km}, \quad (97)$$

což odpovídá zrychlení 2,6 mm/s<sup>2</sup>. Protože Newton znal zrychlení Měsíce, mohl rovněž vypočítat jeho trajektorii, čímž mohl popsat i sílu, která tento pohyb způ-



**Obrázek 41:** Aby Měsíc měl stále stejnou vzdálenost od Země, musí se k Zemi za 1 sekundu přiblížit (spadnout) o 1,3 mm.

sobuje - zákon univerzální gravitace

$$\vec{F} = -\underbrace{\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}}_{\text{skalár}} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (98)$$

kde  $m_1$  a  $m_2$  reprezentují setrvačné hmotnosti, které jsou rovny hmotnostem tíhovým a  $\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$  je gravitační konstanta. Je možno odvodit gravitační zákon z 3. Keplerova zákona aplikovaného na pohyb po kružnici. K udržení na kruhové dráze, jak je znázorněna na obr. 41, je zapotřebí dostředivé síly  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Dostředivá síla musí být v rovnováze se silou odstředivou, jinak by Měsíc nemohl obíhat po kružnici tj.

$$ma = \underbrace{m \frac{v^2}{r}}_{\text{síla odstředivá}} \quad \text{a} \quad v = \frac{2\pi r}{P}, \quad (99)$$

kde  $r$  je poloměr dráhy a  $P$  perioda. Po dosazení vychází

$$ma = m \frac{4\pi^2 r}{P^2}. \quad (100)$$

Použijeme-li nyní 3. Keplerův zákon a dosadíme za periody

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \implies \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (101)$$

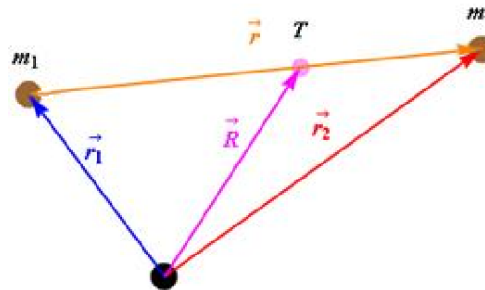
zjistíme, že zrychlení je nepřímo úměrné kvadrátu vzdálenosti. Třetí Keplerův zákon pak můžeme zapsat také jako  $P^2 = \kappa r^3$ . Odtud pak

$$F = \frac{4\pi^2 m}{\kappa r^2} \implies \vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^3} \vec{r}. \quad (102)$$



### 3.10 Problém dvou těles, upřesněná podoba Keplerových zákonů

Ke gravitační interakci je podle gravitačního zákona zapotřebí alespoň dvou těles o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , jejichž polohy jsou popsány polohovými vektory  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$ . Problém dvou těles je analyticky řešitelný, nejvýhodnější je přejít do těžišového systému.



**Obrázek 42:** Znázornění těžiště v systému dvou těles o vzdálenosti  $|\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ , hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  a jejich polohových vektorech  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$ . Polohový vektor těžiště značíme  $\vec{R}$ .

Těžiště soustavy, hmotný střed, je definováno polohovým vektorem  $\vec{R}$ , který je roven  $\sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i$ . Podle 3. Newtonova zákona je zrychlení těžiště rovno nule, proto je vhodné do něj umístit počátek vztažné soustavy. Pro naše dvě tělesa pak platí

$$\vec{0} = \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \implies \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2. \quad (103)$$

Těžiště leží na spojnici těles a je blíže tělesu hmotnějšímu. Zapišeme-li pohybové rovnice pro obě tělesa, získáme dvě rovnice

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (104)$$

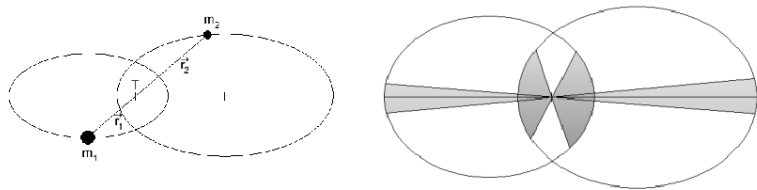
a

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (105)$$

1. Keplerův zákon: „*Tělesa se pohybují v rovině po kuželosečkách, v jejichž společném ohnisku je těžiště sluneční soustavy.*“. Pro poměry velikých poloos a hmotností platí  $a_1/a_2 = m_2/m_1$  a pro excentricity elips pak  $e_1 = e_2 = e$ . Obě tělesa tak společně procházejí pericentrem a apocentrem. Křivkou nemusí být jen elipsa, ale i další kuželosečky, parabola a hyperbola. Stejně tak platí pro pohyb dvou těles i 2. Keplerův zákon.

Pro obecné kuželosečky 3. Keplerův zákon neplatí, jeho platnost se omezuje pouze pro elipsy, kde

$$a^3 = P^2(m_1 + m_2). \quad (106)$$



**Obrázek 43:** Pohyb dvou těles kolem společného těžiště, jejich vzájemný polohový vektor vždy prochází těžištěm (vlevo) a zákon ploch (vpravo).

Použijeme-li restrikcí, tj. vztáhneme vzájemný pohyb k jednomu ze dvou těles (prvnímu), definujeme vzájemný polohový vektor  $\vec{r}$  a v těžištvé soustavě pak

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \implies \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (107)$$

Po derivaci a dosazením do pohybové rovnice druhého tělesa dostáváme

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} &= -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned} \quad (108)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{m_1 + m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Bude-li hmotnost prvního tělesa, vůči kterému jsme vztáhli pohyb, daleko větší než hmotnost druhého, tj.  $m_1 \gg m_2$ , pak platí  $\ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{m_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ .

Nyní se můžeme podívat na aplikaci zákona zachování energie pro případ této soustavy. Celková energie systému se nemění, tj. energie kinetická a potenciální je rovna

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \kappa \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (109)$$

kde první dva členy jsou příspěvky kinetických energií obou těles a třetí člen pak reprezentuje potenciální energii. Tato energie odpovídá energii, která drží systém pohromadě, jinými slovy řečeno, je potřeba dodat do systému právě tolik energie, aby se tento systém rozpadl. Provedeme-li převod na vzájemné souřadnice, tj. přejdeme-li opět na vztážení pohybu jen vůči prvnímu tělesu, dostáváme

$$m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2 \implies \vec{v}_1 = \frac{m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2} \text{ a } \vec{v}_2 = -\frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}. \quad (110)$$

Po dosazení do rovnice 109, dostaneme pro energii

$$E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 - \kappa \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (111)$$

Zapišeme-li poměr součinu hmotností a jejich součtu jako  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (*redukovaná hmotnost*), přejde rovnice 111 do tvaru

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \kappa \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (112)$$

Budeme-li mít případ, že  $m_1 \gg m_2$  pak redukovaná hmotnost bude přibližně rovna hmotnosti druhého tělesa, tj.  $\mu \doteq m_2$ , čehož může být příkladem třeba Země, jejíž hmotnost  $m_2 = m$  je 333 000 krát menší než hmotnost  $m_1 = M$  Slunce. Odtud pak

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{r}, \quad (113)$$

kde druhý člen odpovídá gravitačnímu potenciálu  $\Phi = -\kappa \frac{M}{r}$ . Z toho vyplývá, že pokud se Země přibližuje ke Slunci, klesá její vzdálenost  $r$ , ale tím pádem musí růst i její rychlost  $v$ , aby platil zákon zachování energie.

Z energetického hlediska pak můžeme soustavu rozdělit podle celkové energie na

- 1)  $E < 0$ , soustava je vázaná, existuje maximální vzdálenost  $r$ , trajektorií je elipsa (případně kružnice)
- 2)  $E = 0$ , soustava má malou stabilitu, v nekonečnu má těleso nulovou rychlost, trajektorií je parabola
- 3)  $E > 0$  soustava je nevázaná, trajektorií tělesa je hyperbola, v nekonečnu má těleso nenulovou rychlost.

Z teoretické mechaniky pro gravitační interakci dále platí (i obecně pro libovolný počet bodů) *Viriálový teorem*, který svazuje střední hodnoty kinetické a potenciální energie vztahem

$$2 \langle E_K \rangle + \langle E_P \rangle = 0. \quad (114)$$

Porovnáme nyní kruhovou a parabolickou dráhu. Pro parabolu platí, že celková energie je  $E = 0$ . Odtud plyne, že hodnota kinetické energie je rovna záporné hodnotě energie potenciální  $E_K = -E_P$ . Dosazením za energie získáme parabolickou rychlost, která je rovna

$$v_p = \left( 2 \frac{\kappa M}{r} \right)^{1/2}. \quad (115)$$

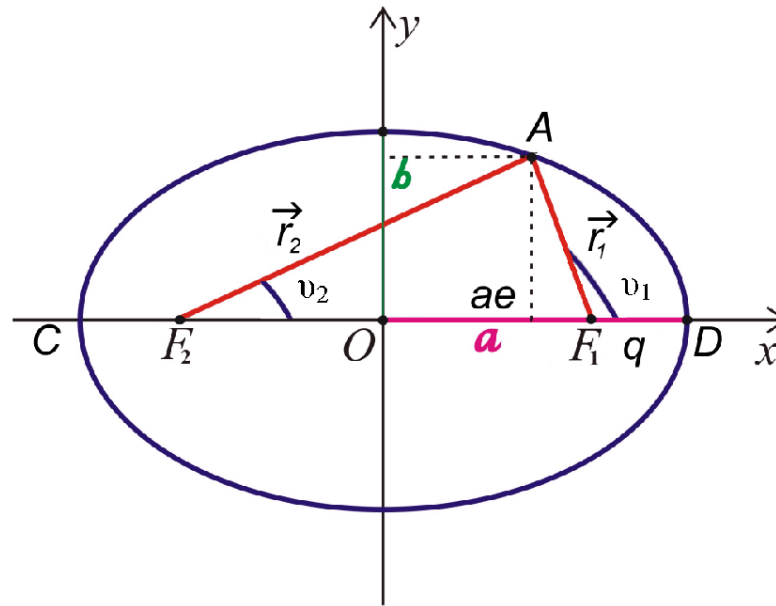
Pro kruhovou dráhu platí, že kinetická energie je konstantní  $E_K = \text{konst}$ , stejně tak i energie potenciální  $E_P = \text{konst}$ . Střední hodnoty kinetické i potenciální energie jsou pak rovny přímo jejím hodnotám, tj.  $\langle E_K \rangle = E_K$  a  $\langle E_P \rangle = E_P$ . Pro kruhovou rychlost tak získáme

$$v_k = \left( \frac{\kappa M}{r} \right)^{1/2} \implies v_p = \sqrt{2} v_k. \quad (116)$$

Jednou z možných aplikací je využití při brždění družic v okolí Země.

### 3.11 Geometrie trajektorie, rychlost a poloha na trajektorii

Při gravitačním působení (pole centrální síly) se pohyb dvou těles, která na sebe působí jen gravitačně, uskutečňuje v rovině procházející jejich těžištěm. Je-li hmotnost jednoho tělesa vůči druhému zanedbatelná, pak je hmotnější těleso v těžišti



Obrázek 44: Eliptická trajektorie tělesa s vyznačením pravé anomálie  $v_1$ .

soustavy a kolem něj obíhá těleso druhé, pro které je hmotnější těleso v ohnisku jeho eliptické dráhy.

Elipsa patří mezi kuželosečky. V rovině x-y je jejím vyjádřením rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (117)$$

kde (obr. 44)  $a = CO = OD$  je velká poloosa a  $b = OB$  je poloosa malá. Excentricita je definována jako  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ . Ohniska elipsy mají souřadnice  $F_1 = (ae, 0)$  a  $F_2 = (-ae, 0)$ . Vzdálenost pericentra je  $q = F_1D = a(1 - e)$ , vzdálenost apocentra  $Q = CF_1 = a(1 + e)$ . Úhlu  $\vartheta_1$  se říká pravá anomálie. Z trojúhelníka  $F_1F_2A$  máme

$$r_1 \sin v_1 = r_2 \sin v_2 \quad \text{a} \quad r_2 \cos v_2 - r_1 \cos v_1 = 2ae. \quad (118)$$

Dále platí pro bod  $A(x, y)$  na elipse

$$r_1 = \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = a - ex, \quad r_2 = \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = a + ex \quad (119)$$

a tedy

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (120)$$

Ze vztahů (117) můžeme vyjádřit např.  $r_2$  a  $\vartheta_2$  pomocí  $r_1$  a  $\vartheta_1$ . Dosazením za  $r_2$  do (119) a malou úpravou dostáváme parametrické vyjádření rovnice elipsy (index

1 vynechán)

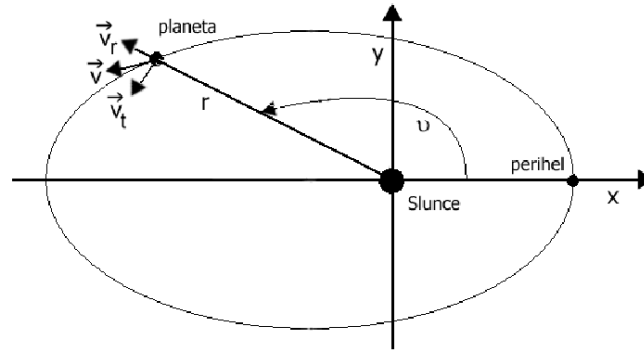
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (121)$$

Ve standardních polárních souřadnicích  $(\varrho, \varphi)$  je tvar rovnice elipsy do dosazení  $x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi$

$$\varrho = \frac{b}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi^2)^{1/2}}. \quad (122)$$

Plocha elipsy je dána vztahem  $S = \pi ab$ .

Pro výpočet rychlosti tělesa na dráze, vyjdeme z obrázku 45, na kterém je znázorněn rozklad vektoru rychlosti  $\vec{v}$  tělesa do tečného  $\vec{v}_t$  a radiálního směru  $\vec{v}_r$ .



**Obrázek 45:** Rozklad vektoru rychlosti na radiální a tečnou složku pro planetu na eliptické dráze kolem Slunce.

Ze zákona ploch dostaneme

$$\frac{rv_t}{2} = \frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{S}{P}, \quad (123)$$

kde  $dS$  je část plochy elipsy opsaná průvodičem za jednotku času,  $S = \pi ab$  je plocha elipsy a  $P$  je perioda. Velikost vektoru tečné rychlosti je dána vztahem

$$v_t = r \frac{dv}{dt} \implies r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{2S}{P} = \frac{2\pi ab}{P} \quad (124)$$

a po dosazení za  $b$  získáme pro časovou derivaci pravé anomálie

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi a^2}{Pr^2} (1 - e^2)^2. \quad (125)$$

Pro velikost radiální rychlosti platí

$$v_r = \frac{dr}{dt}. \quad (126)$$

Parametrická rovnice elipsy je

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (127)$$

takže po derivaci získáme

$$v_r = \frac{2\pi a}{P} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v. \quad (128)$$

Pro velikost tečné rychlosti pak

$$v_t = \frac{2\pi a (1 + e \cos v)}{P \sqrt{1 - e^2}}. \quad (129)$$

Ze vztahu pro tečnou rychlost můžeme okamžitě vypočítat celkovou rychlost v perihéliu a aféliu, protože známe i velikosti pravé anomálie ( $v = 0^\circ$  pro perihélium a  $v = 180^\circ$  pro afélium).

$$v_{\text{per}} = v_t(0^\circ) = \frac{2\pi a}{P} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad (130)$$

$$v_{\text{afe}} = v_t(180^\circ) = \frac{2\pi a}{P} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \quad (131)$$

Obecně pro kvadrát velikost rychlosti platí

$$v^2 = v_t^2 + v_r^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2} \frac{1 + 2e \cos v + e^2}{1 - e^2}. \quad (132)$$

Dosazením z parametrické rovnice elipsy

$$e \cos v = \frac{a(1 - e^2) - r}{r} \quad (133)$$

a využitím vztahu pro kvadrát periody

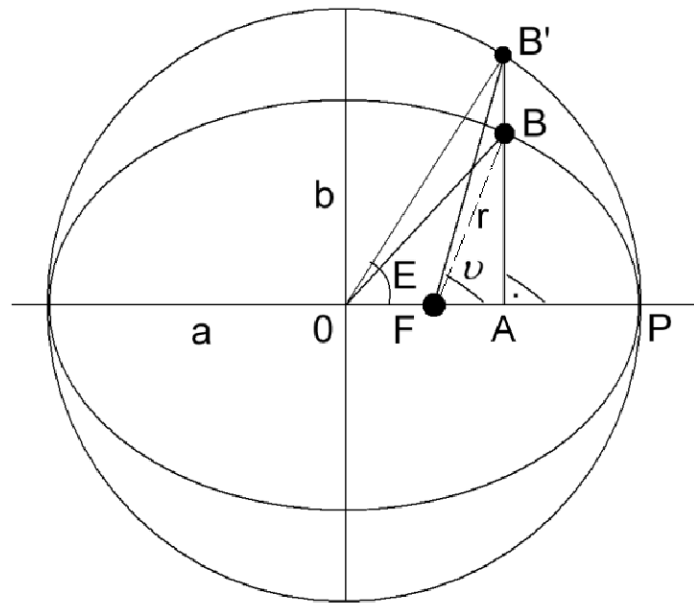
$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa(M + m)} a^3 \quad (134)$$

získáme rovnici pro kvadrát rychlosti tělesa, která bude vyjádřena jako funkce vzdálenosti  $r$  a ne pravé anomálie

$$v^2 = \kappa(M + m) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (135)$$

Rovněž si můžeme přepsat rovnici zákona zachování energie do polárních souřadnic (počátek v ohnisku elipsy)

$$E = \frac{1}{2} \mu (v_t^2 + v_r^2) - \frac{\kappa M m}{r}, \quad (136)$$



**Obrázek 46:** Znázornění excentrické  $E$  a pravé anomálie  $v$ , které jsou reprezentovány úhly  $POB'$  a  $PFB$ .

kde  $\mu$  je redukovaná hmotnost  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ . Dosadíme-li za tečnou a radiální složku vektoru rychlosti  $v_r = \dot{r}$  a  $v_t = r \frac{dv}{dt}$ , přejde rovnice na tvar

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{v}^2) + \phi(r). \quad (137)$$

Chceme-li zjistit přesnou pozici tělesa na dráze, musíme si nejdříve najít jistou veličinu, která plyne rovnoměrně. Touto veličinou je tzv. *střední anomálie*  $M$ , která je definovaná jako

$$M = \frac{2\pi}{P} (t' - T), \quad (138)$$

kde  $T$  je časový okamžik průchodu perihéliem a  $t = t' - T$ . Střední anomálie je vlastně střední denní úhlový pohyb. Podle 2. Keplerova zákona platí

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{t}{P} \implies \Delta S = \frac{\pi ab}{P} t, \quad (139)$$

kde  $\Delta S$  je plocha opsaná průvodičem za čas  $t$ . Je potřeba najít vztah mezi  $\Delta S$  a pravou anomálií  $v$ . K tomu využijeme obr. 46, na kterém je znázorněna trajektorie tělesa, které se pohybuje po elipse, a právě se nachází v bodě  $B$ . Přes tento bod je vedena kolmice na přímku apsid (spojnice perihélia a afélia), která se protíná

v místě  $B'$  s kružnicí, která má stejný střed jako elipsa a její poloměr je roven velikosti velké poloosy elipsy  $r = a$ . Úhel, který svírají úsečky  $PO$  a  $OB'$ , se nazývá *excentrická anomálie*  $E$  a pro opsané plochy platí, že

$$\Delta S = \frac{b}{a} \Delta S_E, \quad (140)$$

kde  $\Delta S_E$  je kruhová výseč bez trojúhelníku  $FB'O$ . Plocha kruhové výseče je úměrná  $\frac{1}{2} E a^2$ , je-li excentrická anomálie  $E$  v radiánech, pak je plocha  $FB'O \sim \frac{1}{2}(a \sin E)ae$  z čehož dále plyne, že

$$\Delta S_E = \frac{1}{2} a^2 (E - e \sin E) \quad (141)$$

a také

$$\Delta S = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E) = \frac{\pi ab}{P} t. \quad (142)$$

Odtud pak plyne

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P} t = M \implies E - e \sin E = M, \quad (143)$$

což je tzv. *Keplerova rovnice*, která nám dává do souvislosti neznámou excentrickou anomálií s anomálií střední, kterou pro konkrétní čas umíme vypočítat. Tato rovnice lze nejrychleji řešit metodou postupných iterací. První iterací bude, že  $E_0 = M$  a řešením získáme novou excentrickou anomálií  $E_1$ , kterou opětovně dosadíme do Keplerovy rovnice a řešíme. Po několika iteracích se hodnota  $E$  již nebude měnit, řešení rychle konverguje.

$$E_0 = M$$

$$E_1 = M + e \sin E_0 \dots \quad (144)$$

$$E_n = M + e \sin E_{n-1}$$

Známe-li  $E(t)$ , můžeme pak již lehce vypočítat vzdálenost  $r$  a pravou anomálii  $v$ . Z obrázku 46 můžeme určit vzdálenost bodů  $FA$  jako

$$FA = OA - OF = a(\cos E - e) \quad (145)$$

a bodů  $AB$  jako

$$AB = \frac{b}{a} AB' = \frac{b}{a} a \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (146)$$

Uvážíme-li, že platí ještě

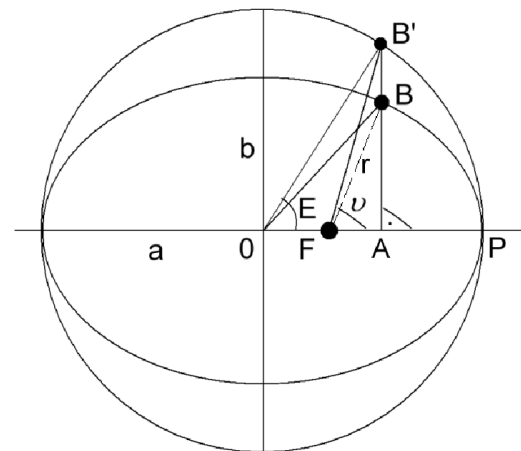
$$b = a\sqrt{1-e^2} \text{ a } r = \sqrt{(FA)^2 + (AB)^2} = a\sqrt{(\cos E - e)^2 + (1-e^2) \sin^2 E} \quad (147)$$

pak nám vychází, že

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (148)$$

Pro pravou anomálii pak platí, že její tangenta je rovna

$$\tan v = \frac{AB}{FA} = \frac{a\sqrt{1-e^2} \sin E}{a(\cos E - e)} \implies \tan \frac{v}{2} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \frac{E}{2}. \quad (149)$$



**Obrázek 46:** Znázornění excentrické  $E$  a pravé anomálie  $v$ , které jsou reprezentovány úhly  $POB'$  a  $PFB$ .



Při zjišťování polohy tělesa v dráze postupujeme následovně. Nejdříve musíme zjistit, jaká doba uplynula od průchodu tělesa perihéliem dráhy a musíme znát periodu oběhu tělesa  $P$ . Odtud pak vypočítáme střední anomálii  $M$  (rovnice 138), kterou použijeme jako první aproximaci do Keplerovy rovnice (rovnice 143) a ze známé excentricity trajektorie pak můžeme touto rovnicí vypočítat excentrickou anomálii  $E$  pro požadovaný čas. Ze známe excentrické anomálie, excentricity a velké poloosy trajektorie, již můžeme dále vypočítat polohový vektor  $r$  dle rovnice 148 a pravou anomálii pak ze vztahu 149. Tím známe všechny parametry, které jsou potřebné pro stanovení polohy tělesa v dráze, tj. pravou anomálii  $v$  a vzdálenost od ohniska  $r$ , čímž je poloha v dráze (v rovině) plně určena.

Jako příklad si můžeme uvést dráhu Země, která má parametry  $a = 1$  AU ( $1,49598 \cdot 10^{11}$  m) a  $e = 0,0167$ . Pro vzdálenost Země-Slunce v perihéliu platí

$$r = a(1 - e) = 0,9833 \text{ AU} \quad (150)$$

a v aféliu pak

$$r = a(1 + e) = 1,0167 \text{ AU}. \quad (151)$$

Nyní se můžeme zeptat, kolik stupňů urazí Země na své dráze po čtvrt roce od průchodu perihéliem. Střední anomálie  $M$  je dle (138) rovna  $\pi/2$ . Pro první iteraci do Keplerovy rovnice proto volíme  $E_0 \doteq M = \pi/2$ .

$$E \doteq M + e \sin E_0 = \frac{\pi}{2} + 0,0167 = 1,5708 + 0,0167 = 1,5875, \quad (152)$$

odtud pak vypočítáme vzdálenost od Slunce

$$r = a(1 - e \cos E) = 1(1 - 0,0167 \cos 1,5875) = 1,0003 \text{ AU} \quad (153)$$

a pravou anomálii

$$\tan \frac{v}{2} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \left( \frac{E}{2} \right) = 1,0168 \tan \left( \frac{1,5875}{2} \right) = 1,604 = 91,9^\circ. \quad (154)$$

Střední úhlový pohyb Slunce po ekliptice je přibližně 1 stupeň za den, takže rozdíl 1,9 stupňům odpovídá necelým dvěma dnům. Stejně tak se můžeme zeptat, za kolik dní od průchodu perihéliem se změní pravá anomálie o 90 stupňů, tj.  $v = 90^\circ$ ,  $\tan \frac{v}{2} = 1$ .

$$\tan \frac{E}{e} = \left( \frac{1-e^2}{1+e^2} \right)^2 \tan \frac{v}{2} \implies E = 1,5541 \quad (155)$$

Po dosazení do Keplerovy rovnice dostaneme, že  $M = 1,5282$  rad a čas  $t = 0,2432P = 88,83$  d. Další čtvrtina pak uběhne za 93,79 dní. Tohoto rozdílu 5 dní si všiml už i Hipparchos.

V rámci zápisu eliptické dráhy v polárních souřadnicích, se můžeme ještě podívat na extrémní změny polohového vektoru a pravé anomálie. Derivace  $\dot{r}$  a  $\dot{v}$  jsou

rovny

$$\begin{aligned}r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \implies \\ \dot{r} &= \frac{2\pi a}{P} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v \\ \dot{v} &= \frac{v_t}{r} = \frac{2\pi (1 + e \cos v)^2}{P (1 - e^2)^{2/3}}.\end{aligned}\tag{156}$$

Extrémních hodnot nabývá derivace průvodiče pro hodnoty  $v = \pm 90^\circ$

$$\dot{r} = \frac{2\pi a}{P} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\tag{157}$$

a je-li excentricita malá, pak

$$\dot{r} = \pm \underbrace{\frac{2\pi a}{P}}_{29,7 \text{ km/s}} e\tag{158}$$

a změna radiální rychlosti Země vůči Slunci je v rozmezí  $\pm 0,5 \text{ km/s}$ . Extrémní změny pravé anomálie jsou pak pro hodnoty  $v = 0^\circ$  a  $v = 180^\circ$

$$\begin{aligned}\dot{v}_{\max} &= \frac{2\pi (1 + e)^{1/2}}{P (1 - e)^{3/2}} \doteq \frac{2\pi}{P} (1 + 2e) = 1,019^\circ/\text{den} \\ \dot{v}_{\min} &= \frac{2\pi (1 - e)^{1/2}}{P (1 + e)^{3/2}} \doteq \frac{2\pi}{P} (1 - 2e) = 0,9856^\circ/\text{den}\end{aligned}\tag{159}$$

$$\frac{\dot{v}_{\max}}{\dot{v}_{\min}} = \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^2 \doteq (1 + 4e) = 1,069.\tag{160}$$

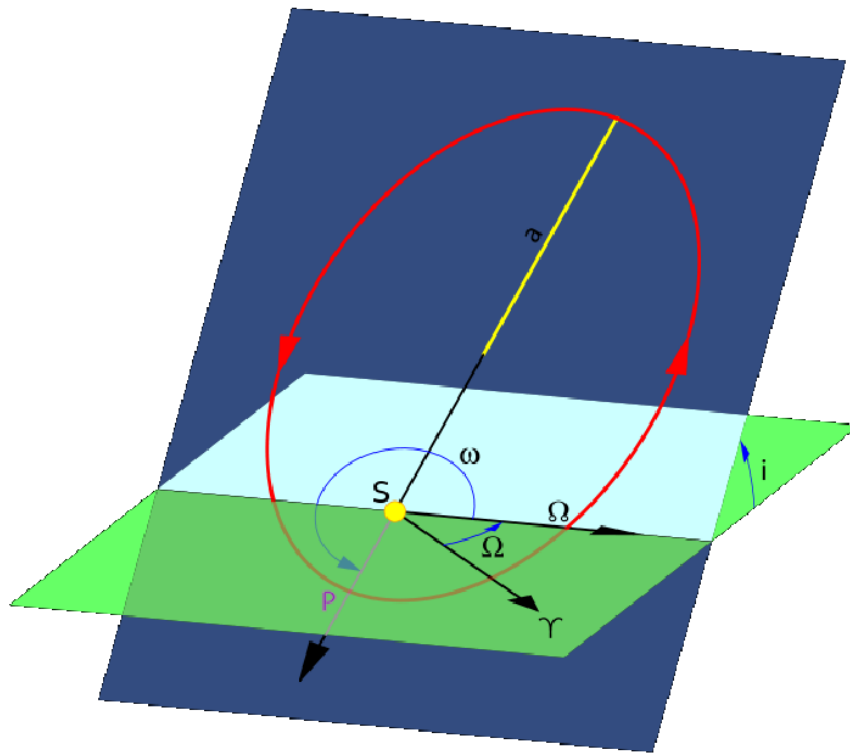
## 3.12 Dráhové elementy

Dráha tělesa je určena dráhovými elementy, mezi které patří velká poloosa  $a$  a excentricita dráhy  $e$ . Tyto nám udávají její tvar a velikost. K nim je zapotřebí znát ještě čas průchovu perihéliem  $T$ . Toto jsou 3 základní parametry, které postačují pro případ pohybu tělesa v rovině. Obecně je ale zapotřebí řešit pohyb v prostoru, např. vůči rovině ekliptiky, a proto je zapotřebí k popisu dráhy ještě dalších parametrů. Dva z nich nám dávají informace o poloze roviny dráhy (směrnice normály), tj. sklon dráhy  $i$  a délka výstupného uzlu  $\Omega$ . Posledním argumentem, který je potřeba k dráhy tělesa v prostoru je poloha (argument) perihélia, viz obr. 47.

Délka sestupného uzlu je rovna  $\Omega \pm 180^\circ$ , pokud je sklon dráhy  $i < 90^\circ$ , pohyb tělesa je souhlasný s pohybem Slunce v rovině ekliptiky, je-li  $i > 90^\circ$ , pak jde o pohyb nesouhlasný (retrográdní).

U drah hyperbolických a parabolických se místo velké poloosy  $a$  uvádí vzdálenost perihélia  $q$ , je-li drahou parabola, pak stačí pro popis pouze 5 parametrů. Tento předpoklad je výhodný jako první přiblížení při popisu dráhy neznámého tělesa.

Dráhové elementy umělých družic se vztahují analogicky k Zemi.



**Obrázek 47:** Znázornění dráhových elementů a rovin ekliptiky (zelená) a roviny oběhu tělesa (modrá).

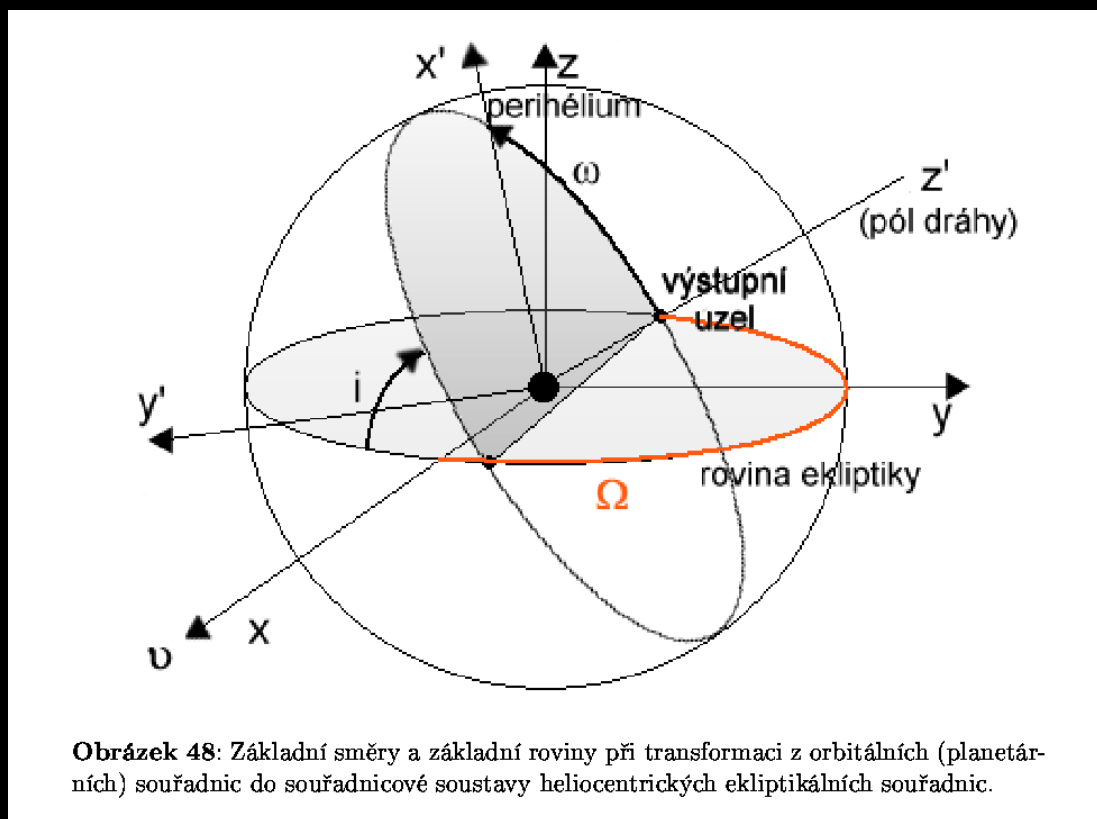
Poloha tělesa je na dráze, jak již víme, určena, vzdáleností  $r$  a pravou anomálií  $v$ . Základní rovinou je rovina dráhy tělesa, základním směrem je směr k perihéliu. Chceme-li souřadnice tělesa transformovat do souřadnicového systému s počátkem ve Slunci, se základní rovinou v rovině ekliptiky a základním směrem k jarnímu bodu  $\nu$ , musíme provést tři transformace.

Postup při transformacích od planetárních k heliocentrickým ekliptikálním souřadnicím je zřejmý dle obrázku 48 a je následující:

- 1) otočení kolem osy  $z'$  o úhel  $-\omega$ ,
- 2) otočení kolem osy  $z$  o úhel  $-\Omega$  a
- 3) otočení kolem osy  $x = x'$  o úhel  $-i$ .

### 3.13 Pohyb družic Země

Ověření možnosti existence umělé družice Země se uskutečnilo s jejím prvním vypuštěním, které bylo 4. října 1957, kdy na oběžnou dráhu kolem Země vynesla sovětská raketa družici Sputnik. Počáteční parametry její dráhy byly 215 km v perigeu a 939 km v apogeu se sklonem k rovníku  $65,1^\circ$  a oběžnou periodou 96,2 minuty. Pro dosažení oběžné dráhy kolem Země byla družici udělena 1. kosmická



rychlost, která odpovídá rychlosti na kruhové dráze, tj. vektor rychlosti družice  $\vec{v} \perp \vec{g}$ . Pro kruhovou rychlost platí

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}, \quad (161)$$

kde  $g = \kappa M/R^2$ ,  $R = 6,371 \cdot 10^6$  m a  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Pro  $h = 0$  tak získáme první kosmickou rychlost rovnu 7,912 km/s.

Je-li rychlost rovna  $v$  ve vzdálenosti  $r$ , pak pro ni platí rovnice (135)

$$v^2 = \kappa M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (162)$$

Dosazením do rovnice (162) dostáváme pro apogeum a perigeum vztahy

$$v_a^2 = \frac{\kappa M}{a} \frac{q}{Q} \quad \text{a} \quad v_p^2 = \frac{\kappa M}{a} \frac{Q}{q}. \quad (163)$$

Pro trajektorii, jejíž velká osa  $2a = R + h$  je jen málo větší než poloměr Země, dostáváme při počáteční rychlosti  $v$  na povrchu Země

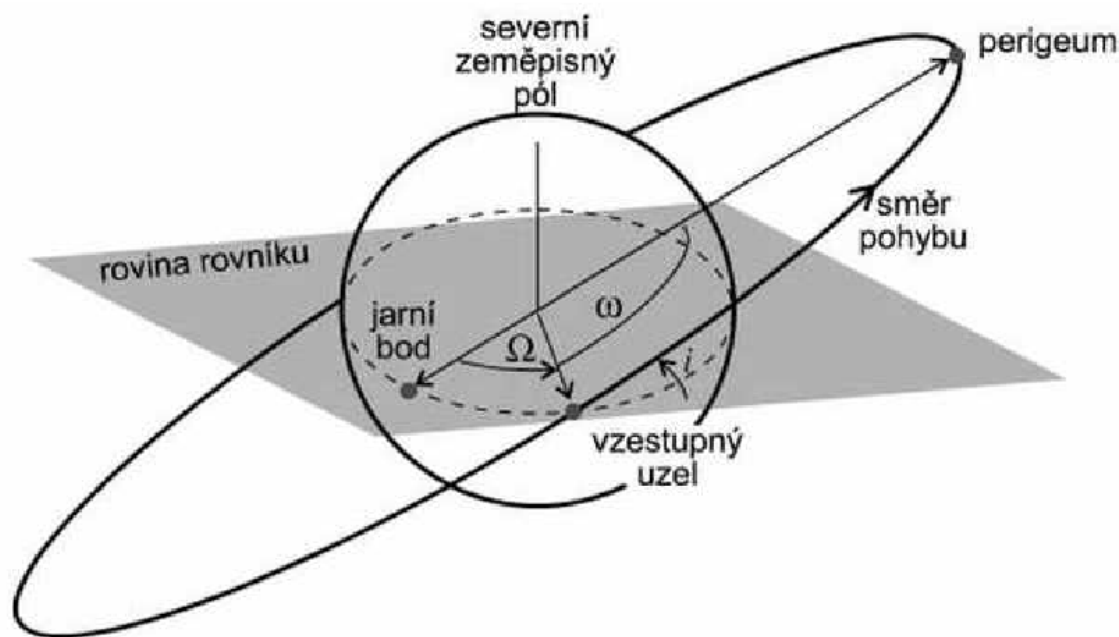
$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\kappa M}{R} = -\frac{\kappa M}{R+h} \doteq -\frac{\kappa M}{R} + \frac{2\kappa M}{R^2}h \implies h = \frac{v^2}{2g}, \quad (164)$$

tedy známý vztah pro pohyb v homogenním gravitačním poli. Pro obíhající tělesa v okolí Země můžeme najít analogický vztah ke 3. Keplerovu zákonu

$$P = 1,659 \times 10^{-4} a^{3/2}, \quad (165)$$

kde  $a$  je velká poloosa trajektorie družice v kilometrech a oběžná perioda  $P$  je pak v minutách. Jestliže apocentrum je natolik vzdáleno od Země, že platí  $Q \rightarrow \infty$ , pak těleso opouští oblast Země, má parabolickou dráhu a jeho rychlost je větší než tzv. 2. kosmická rychlost.

Stav na družici je stavem beztlíže, jde o neustálý volný pád v gravitačním poli Země. Vázané dráhy jsou elipsami nebo jejich úseky, což platí jak pro volný pád stejně tak i pro vodorovný vrh (parabola je jen přiblížením pro homogenní gravitační pole).



Obrázek 49: Znázornění dráhových elementů družic Země. [E13]



Velice zvláštní je dynamika těles na oběžné dráze. Změny dráhy jsou vždy jako odezva na určitou akci. Máme-li na počátku velikost velké poloosy  $a$

$$v_0^2 = \kappa M \left( \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right) \implies \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\kappa M} \quad (166)$$

a provedeme-li její malou změnu o  $\Delta a$ , což bude mít za následek i změnu rychlosti o  $\Delta v_0$

$$a' = a + \Delta a \text{ a } v'_0 = v_0 + \Delta v_0 \implies v'^2_0 = v^2_0 + 2v_0\Delta v_0, \quad (167)$$

kde  $\Delta v_0^2$  zanedbáváme.

$$\frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\Delta a}{a} \right) = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\kappa M} \left( 1 + \frac{2\Delta v_0}{v_0} \right) \implies \frac{\Delta a}{a} = 2 \frac{v_0^2}{\kappa M} \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (168)$$

Z této rovnice vyplývá, že jestliže přidáme rychlost ve směru pohybu, pak  $\Delta a > 0$ , což znamená, že se prodlouží i perioda  $\Delta P > 0$ , těleso začne zaostávat a dostane se

dozadu (analogicky pro snížení rychlosti - těleso se dostane dopředu). Kolmý pohyb prakticky nemění kvadrát výslednice, perioda je tatáž  $\Delta P = 0$ , dochází pouze ke změnám vůči základnímu postavení. Důsledky dynamiky na oběžné dráze jsou pozorovatelné na pohybu kosmonautů, rozpadu tělesa komety a důvodu vzniku meteorického vlákna.

Dráhové elementy družic (viz obr. 49) jsou obdobné jako je tomu u planet jen s tím rozdílem, že hlavní rovinou je rovina zemského rovníku. Dráhovými elementy jsou  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  a  $T$  (průchod perigeem).

U družic dochází k velice výrazným sekulárním změnám, které vyplývají z faktu že

- a) Země není hmotný bod nebo ideální koule (Země je zploštělá)  $\rightarrow$  stáčení uzlové přímky,
- b) kromě Země je v blízkosti i Měsíc, Slunce a jiná tělesa sluneční soustavy  $\rightarrow$  rušivé účinky a
- c) většina družic prolétá přes zbytky atmosféry, což má za následek jejich brždění (hlavně v okolí perigea), což znamená, že se postupně zmenšuje velká poloosa a trajektorie se stává více kruhovou (časem družice sestoupí do hustších vrstev atmosféry, kde většinou zanikne).

I jiné planety mají družice ať už přirozené či umělé (které tam poslal člověk). Velké planety mají početnou rodinu družic jejichž pozorováním lze odhalit délku velké poloosy družice  $a$  a její periodu  $P$ . Za pomoci zpřesněného 3. Keplerova zákona pak můžeme určit hmotnost centrálního tělesa. Pro systém Slunce - Země platí

$$\frac{a_{\oplus}^2}{P_{\oplus}^2} = M_{\oplus} + M_{\odot} \doteq 1 \text{ v jednotkách Slunce} \quad (169)$$

a pro planety a jejich měsíce pak  $m_d \ll m_{pl}$  platí

$$\frac{a_d^3}{P_d^2} = (m_{pl} + m_d) \doteq m_{pl} \text{ (opět v jednotkách Slunce)}. \quad (170)$$

Hmotnost Jupitera je  $1/1050M_{\odot}$ , hmotnost Země je  $1/333000M_{\odot}$ . Pro parametry měsíční dráhy  $a = 384400 \text{ km} = 2,57 \times 10^{-3} \text{ AU}$  a periodu  $P = 27,3 \text{ dne} = 0,0747 \text{ roku}$  vychází celková hmotnost soustavy Země-Měsíc  $1/329000M_{\odot}$ . Soustava Země-Měsíc má tedy poměr hmotností  $1/81$ , což se projevuje tím, že se kolem středu soustavy (těžiště) tzv. *barycentra* pohybuje střed Země s poloměrem dráhy cca. 4650 km. Tato vzdálenost je v principu měřitelná, při blízkém přiblížení planetky Eros v letech 1930–31 se tak podařilo změřit hmotnost Měsíce (Harold Spencer Jones).

### 3.14 Problém tří a více těles

Situace, kdy jsou v prostoru pouze dvě tělesa, je více méně akademická. Ve skutečnosti je těchto těles velmi mnoho. Představíme-li si pouze sluneční soustavu, tak kromě Slunce, planet a jejich měsíců tady máme trpasličí planety, asteroidy a také komety. Vše na sebe působí gravitační silou, tj. dochází ke vzájemnému

ovlivňování, které se dá přesnými měřeními odhalit. Řešení problému u vzájemně se ovlivňujících  $N$  těles najdeme řešením  $3 \times N$  pohybových rovnic

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa m_i m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(r_i - r_j)^3}. \quad (171)$$

Obecně tedy máme  $3 \times N$  diferenciálních rovnic a  $6 \times N$  integrálů pohybu (zachovávající se veličiny), pro případ 3 těles tak máme 9 diferenciálních rovnic a 18 integrálů pohybu. Bohužel však známe „jen“ 10! Šest z nich je dáno polohou a rychlostí těžiště soustavy, které se pohybuje rovnoměrně přímočaře (bez zrychlení), dále zákon zachování celkového momentu hybnosti

$$\sum m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \text{konst} \left\{ \begin{array}{l} \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \\ \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \\ \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) \end{array} \right\} \quad (172)$$

dává další tři integrály a ještě zákon zachování celkové energie

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) + \Phi = \text{konst}, \quad (173)$$

kde  $\Phi$  je potenciální energie daná vztahem

$$\Phi = -\kappa \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (174)$$

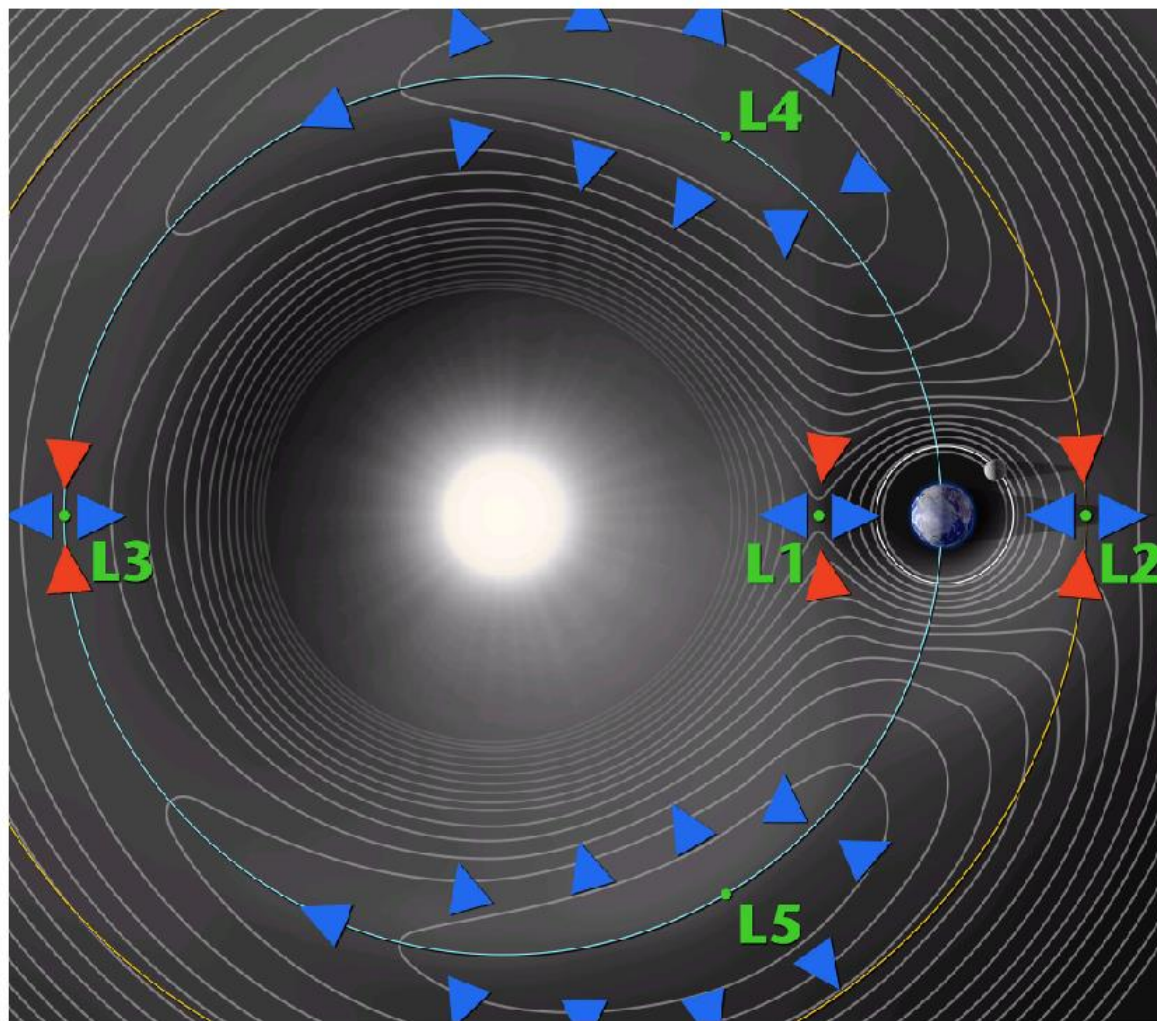
Zákony zachování dostáváme sečtením rovnice (171) pro všechna  $i = 1 \dots N$  (rovnoměrný pohyb těžiště), vynásobením vektorově  $\vec{r}_i$  a sečtením (zachování momentu hybnosti) a nakonec skalárně  $\dot{\vec{r}}_i$  a sečtením (zachování energie).

Žádné matematické postupy nevedou k nalezení dalších integrálů pohybu, z toho vyplývá, že nelze najít žádné analytické řešení tohoto problému. Lze nalézt pouze analytické řešení pro speciální případ tzv. restringovaného problému tří těles, kdy hmotnost jednoho je o hodně menší než zbývajících dvou  $m_3 \ll m_1; m_2$ .

### 3.14.1 Lagrangeovy librační body

Lagrange našel v roce 1772 v takovéto soustavě jisté výjimečné body, které se nacházejí v rovině oběhu. Těchto 5 bodů se nazývá *Lagrangeovy librační body*, pro které existují relativně stabilní řešení (viz obr. 50). Okolo těchto bodů může „třetí“ těleso vykonávat periodické pohyby.

Pokud do Lagrangeových bodů těleso umístíme, může zde setrvat neomezeně dlouho, nejstabilnější jsou librační body  $L_4$  a  $L_5$ , které leží mimo spojnicí středů dvou hmotnějších těles a jsou umístěny pro libovolný poměr hmot v oběžné rovině na vrcholech rovnostranného trojúhelníka s oběma tělesy ve zbývajících vrcholech. Příkladem těchto libračních bodů  $L_4$  a  $L_5$  jsou Trojané, kteří jsou takto zachyceni v systému Slunce-Jupiter  $60^\circ$  před a  $60^\circ$  za Jupiterem, jak je znázorněno v obrázku 51 (vlevo), ale i pro systém Země-Slunce (vpravo). Méně stabilními jsou pak body  $L_1$ ,  $L_2$  a  $L_3$ , které leží na spojnicí mezi oběma hmotnějšími tělesy a to tak, že



**Obrázek 50:** Lagrangeovy body v systému Slunce-Země a znázornění ekvipotenciálních ploch [E14].

$L_1$  je umístěn mezi tělesy,  $L_2$  ležící vně méně hmotného bodu  $M_2$  a  $L_3$  ležící vně hmotnějšího bodu  $M_1$ . Pro vzdálenost Lagrangeova bodu  $L_1$  od středu hmotnější složky platí aproximativní vztah [E16]

$$l_1 \cong a \left( \frac{1}{2} + 0,227 \log \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \right). \quad (175)$$

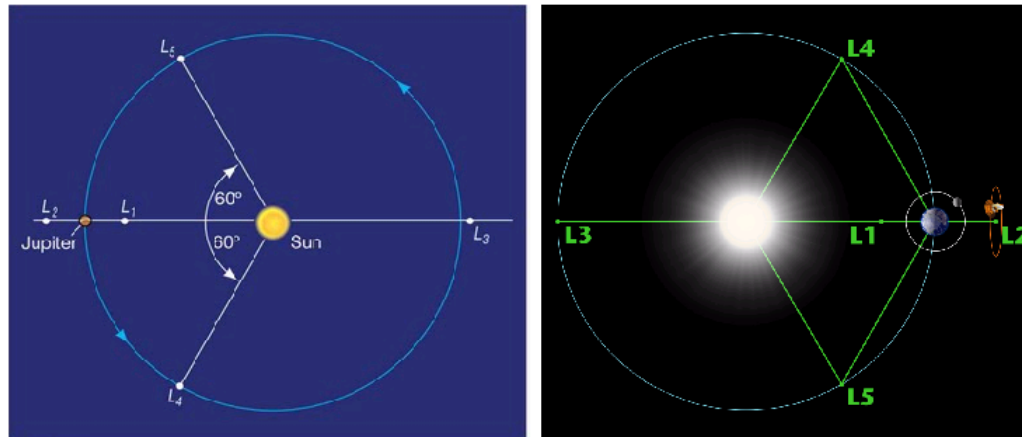
### 3.14.2 Ekvipotenciální plochy

Velice důležité jsou tzv. ekvipotenciální plochy, tj. spojnice míst se stejným potenciálem. Při pohybu po těchto plochách se nekoná práce, protože platí

$$\vec{s} \cdot \vec{F} = 0. \quad (176)$$

Tekutá (plastická) tělesa držena vlastní gravitací nabývají v ustáleném stavu právě jejich tvaru. Jde-li o gravitační pole pouze jednoho tělesa (reprezentovaného hmotným bodem), pak je povrch reprezentován ekvipotenciální plochou koule, pro kterou platí

$$\Phi = -\kappa \frac{M}{r}. \quad (177)$$



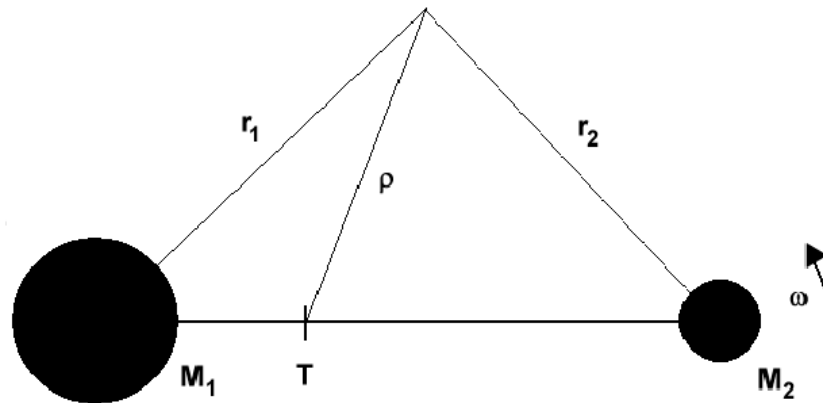
**Obrázek 51:** Vlevo jsou Trojané v systému Slunce-Jupiter [E15]) a vpravo pak librační body v systému Země-Slunce [E18].

V obecném případě tělesa rotujícího kolem pevné osy je

$$\Phi = -\kappa \frac{M}{r} - \frac{\rho^2 \omega^2}{2}, \quad (178)$$

kde  $\rho$  je vzdálenost od rotační osy a  $\omega$  je úhlová rychlost. Těleso pak nabývá tvaru rotačního elipsoidu.





Obrázek 52: Korotující systém dvou těles kolem těžiště.

Dalším příkladem jsou ekvipotenciální plochy systému s vázanou rotací dvou těles o hmotnostech  $M_1$  a  $M_2$ , které obíhají po kruhových drahách v korotující neinerciální soustavě s počátkem v těžišti (obr. 52). Úhlová rychlost daná 3. Keplerovým zákonem je

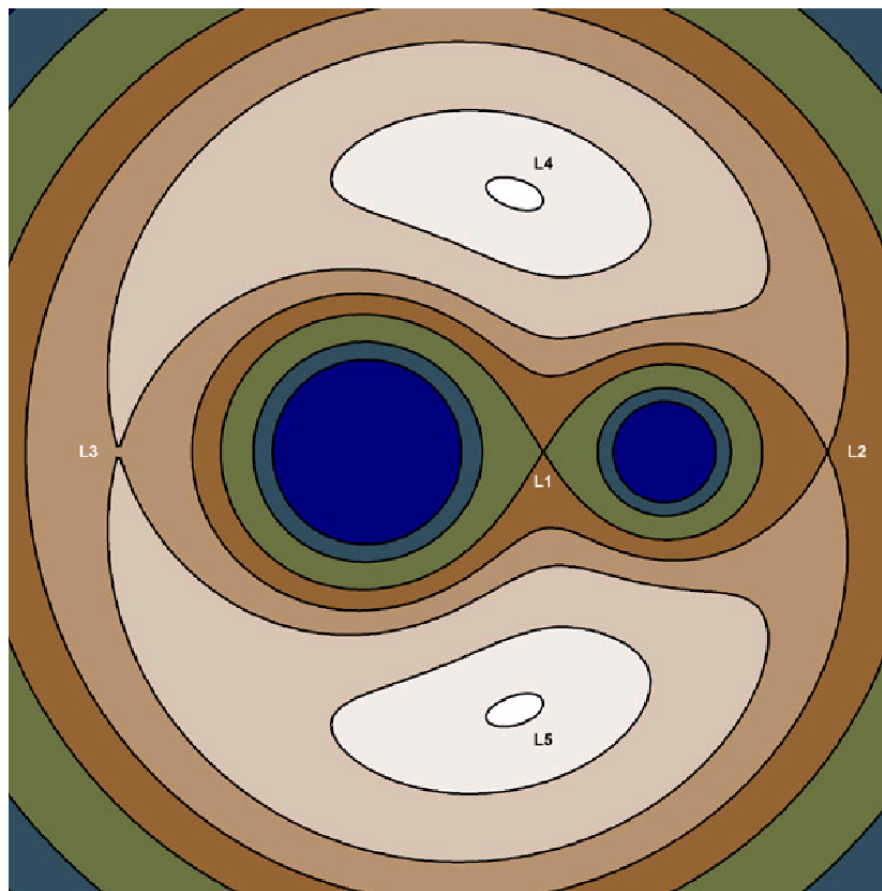
$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \left( \kappa \frac{M_1 + M_2}{r^3} \right)^{1/2}, \quad (179)$$

kde  $r$  je vzdálenost těles, která je neměnná, neboť tělesa obíhají po kruhových drahách. Potenciální energie v místě o souřadnicích  $(x, y, z)$  se skládá ze součtu gra-

vitačních potenciálů vzhledem k oběma hvězdám o hmotnostech  $M_1$  a  $M_2$  a členu odpovídajícímu fiktivnímu potenciálu odstředivé síly

$$\Phi(x, y, z) = \underbrace{-\frac{\kappa M_1}{r_1} - \frac{\kappa M_2}{r_2}}_{\text{gravitační zrychlení}} - \underbrace{\frac{\rho^2 \omega^2}{2}}_{\text{rotace systému}}, \quad (180)$$

kde  $\rho$  je vzdálenost vybraného bodu od normály k orbitální rovině procházející těžištěm, a  $r_1$  a  $r_2$  jsou vzdálenosti zvoleného bodu od prvního a druhého tělesa. Místa, kde je potenciální energie rovna 0, odpovídají singulárním bodům (*Lagrangovy librační body*), ve kterých se ekvipotenciální plochy protínají (viz obr. 53).

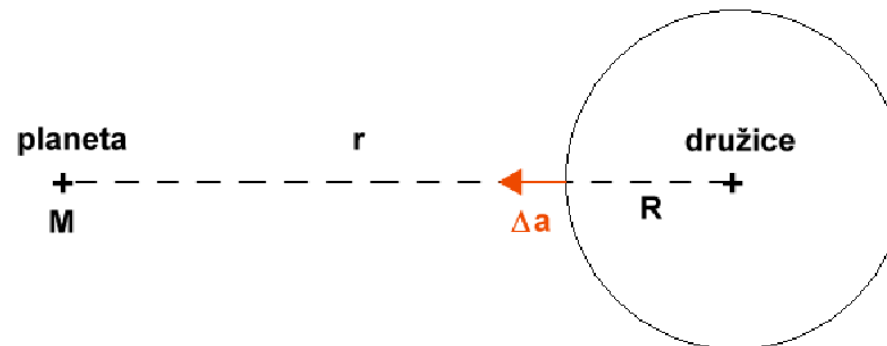


**Obrázek 53:** Rocheův model s barevným vyznačením Rocheových laloků. [E17]

Význam ploch je důležitý hlavně u dvojhvězd, ekvipotenciální plochy, které procházejí vnitřním Lagrangeovým bodem  $L_1$ , dávají za vznik dvěma plochám, pod kterými je oblast, která náleží určitému tělesu. Překročí-li tuto plochu nějaká částice, ztrácí tak stabilitu, částice bude patřit i tělesu druhému.

### 3.14.3 Rocheův model

Rocheův model představuje nahrazení skutečného potenciálu dvojhvězdy, které obíhají kolem společného těžiště, potenciálem dvou hmotných bodů umístěných v centrech složek dvojhvězdy a potenciálem odstředivé síly oběžného pohybu. Tato aproximace je vzhledem k vysoké koncentraci hmoty hvězd směrem k centru zcela přípustná. Ukazuje se, že tvar ekvipotenciálních ploch Rocheova modelu závisí pouze na poměru hmotností obou hmotných bodů. Příslušné ekvipotenciální plochy jsou nejprve uzavřené kolem obou hvězd, ale pro určitou kritickou hodnotu potenciálu se slévají v jakési brýle s úhlem velmi přibližně 57 stupňů vůči spojnici obou center. Další ekvipotenciální plochy již obklopují obě hvězdy, poté se postupně otvírají nejprve za méně hmotnou a poté za hmotnější složkou, a ve velké vzdálenosti se limitně blíží sférickým plochám kolem celé dvojhvězdy. Ona kritická „brýlovitá“ ekvipotenciála se nazývá Rocheova mez.



Obrázek 54: Diferenciální zrychlení.

V soustavě planeta a její družice působí planeta diferenciální zrychlení v místě na povrchu družice (obr. 54)

$$\Delta a = -\frac{\kappa M}{(r-R)^2} - \frac{\kappa M}{r^2} \implies \Delta a \cong -2\frac{\kappa M}{r^3} R, \quad (181)$$

které míří k planetě. K tomuto diferenciálnímu zrychlení je ovšem ještě zapotřebí přičíst rozdíl odstředivého zrychlení

$$\Delta a = \omega^2(r-R) - \omega^2 r = -\omega^2 R, \quad (182)$$

které je způsobené rotací kolem těžiště (v tomto případě je hmotnost planety o hodně větší než družice, proto je těžiště přibližně v centru planety). Uvážíme-li, že pro korotující systém platí podle (179)

$$\omega^2 = \kappa \frac{M}{r^3} \implies \Delta a = -3\frac{\kappa M}{r^3} R. \quad (183)$$

Rušivé působení na těleso je nepřímo úměrné třetí mocnině vzdálenosti, proto vzdálenější tělesa vytvářejí homogennější gravitační pole, u kterých se diferenciální zrychlení neprojeví. Rozdíl diferenciálního zrychlení musí být vyrovnán soudržností a gravitačního zrychlení družice. Zanedbáme-li první vliv (soudržnost), pro gravitační zrychlení družice platí

$$g_s = -\frac{\kappa M_s}{R_s^2}, \quad (184)$$

porovnáním s diferenčním zrychlením pak pro případ stabilní existence družice musí platit

$$g_s > \Delta a \implies -\frac{\kappa M_s}{R_s^2} > -3\frac{\kappa M}{r^3} R_s. \quad (185)$$

Vyjádríme-li vzdálenost  $r$  v jednotkách poloměru planety  $R_p$  jako  $r = kR_p$ , po úpravě a dosazení dostaneme

$$\frac{M_s}{R_s^3} > 3\frac{M_p}{k^3 R_p^3}, \quad (186)$$

odkud pro konstantu  $k$  platí

$$k > \sqrt[3]{3 \left( \frac{\rho_p}{\rho_s} \right)}. \quad (187)$$

Je-li  $k$  rovno, pak jde o kritickou vzdálenost, která je  $k_{\text{krit}} = 1,44 \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}}$ . V případě, že materiál satelitu je pružný, dojde k jeho protažení směrem k planetě a jeho roztržení má pak lepší předpoklady. Pro takový případ platí vztah  $k_{\text{krit}} = 2,44 \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}}$ .

finále ...