Opakování funkce

1. Vymyslete a zakreslete alespoň dvě libovolné polynomické funkce.
2. Vymyslete a zakreslete alespoň dvě libovolné lomenné funkcei.
3. Vymyslete a zakreslete alespoň dvě libovolné exponenciální funkce.
4. Vymyslete a zakreslete alespoň dvě libovolné logaritmické funkce.
5. Vymyslete a zakreslete alespoň dvě libovolné goniometrické funkce.
6. Zakreslete funkce a okomentujte definiční obor a obor hodnot: x^2, $x^2 - 1$, $(x-1)^2$
7. Zakreslete funkce a okomentujte definiční obor a obor hodnot: $\sqrt{x+1}$, $-\sqrt{x+1}$
8. Zakreslete funkce a okomentujte definiční obor a obor hodnot: $\sin x$, $\sin x + \pi/4$, $-2\sin x$, $\cos 2x$

Limita a spojitost funkce

Limita funkce

Pokud bereme funkci f jako předpis, který hodnotě x přiřazuje funkční hodnotu $f(x)$, pak f má v bodě p limitu L, jestliže pro x v okolí bodu p jsou hodnoty $f(x)$ blízko L. Matematická definice, navržená na začátku 19. století, vyžaduje, aby se pro libovolně malou odchylku od L dalo najít okolí bodu p, že pro každé x v tomto okolí se $f(x)$ liší od L o méně než povolenou odchylku.

Matematicky zapisujeme, že pro x blížící se k p se hodnota $f(x)$ blíží k L výrazem $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.

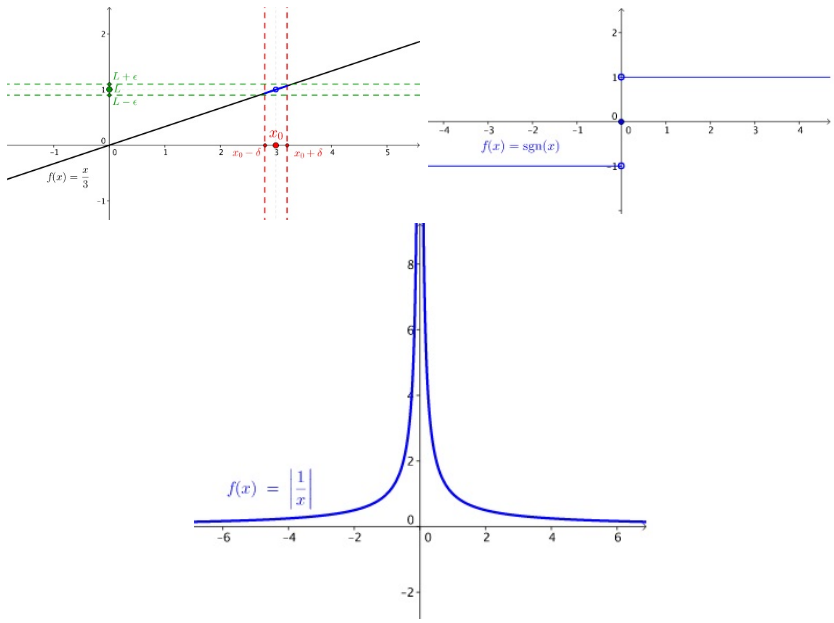
Důležité vzorce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

kde a je kladné reálné číslo a e Eulerovo číslo ($e \doteq 2.718$).

Spojitost funkce

Spojitá funkce je taková matematická funkce, jejíž hodnoty se mění plynule, což si lze intuitivně představit tak, že graf funkce lze nakreslit jedním tahem, aniž by se tužka zvedla z papíru. Funkce, která není spojitá, se označuje jako nespojitá. Funkce má v každém bodě definičního oboru vlastní limitu (reálné



Obrázek 1: Ukázka okolí bodu (vlevo nahoře), ukázka nespojitosti (vpravo nahoře) a nespojitosti ve vlastním bodě (dole).

číslo, ne nekonečno).
Funkce, kde není definiční obor celé R:

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{x+2}$$
$$y = \sqrt{x}, \qquad y = \sqrt{x^2 - 4}$$
$$y = \log x, \qquad y = \log{(x-5)}$$

Příklady

Určete body nespojitosti a zadané limity těchto funkcí:

1. $\lim\limits_{x \to 3} 3x$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} 3x$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 3}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 3x - 3}$

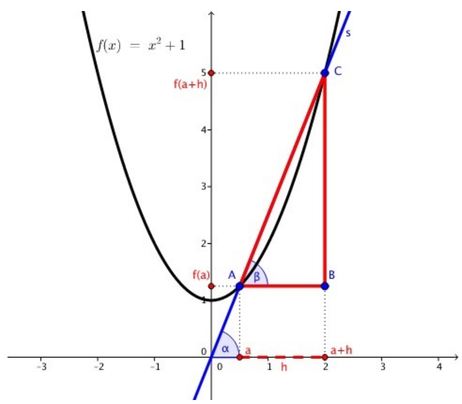
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x^2 + 3x - 3}$

Derivace funkce a její geometrický význam

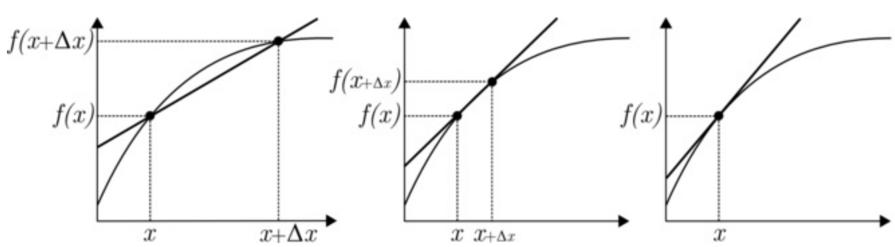
Matematická definice derivace:

$$\tan \alpha = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{1}$$

kde α je úhel svírající tečna osou x a $'$ udává derivaci podle proměnné (x). Nejjednodušší představa o derivaci je, že „derivace je mírou změny funkce v daném bodě". Příkladem je rychlost (vozidla) v. Ta je derivací funkce polohy s (při pohybu vozidla), $v = s'(t) = \frac{ds}{dt}$.
Derivací funkce získáme směrnici tečny viz Obr. 2 a 3.



Obrázek 2: Geometrická interpretace derivace, zamyslete se co se děje při zmenšování h viz další obrázek.



Obrázek 3: Geometrická interpretace derivace, kde křivka je původní funkce a přímka ukazuje postup hledání tečny.

Věta: Funkce má v bodě derivaci, pokud je funkce definována i v epsilon okolí tohoto bodu.
Pokud by toto okolí neexistovalo, nedopočítáme se limit, přes které je derivace definována.
Věta: Jednoznačnost existence (nebo neexistence) limit nám implikují, že pokud v bodě existuje derivace, je jediná.
Žádná funkce nemá v jednom bodě více derivací. Buď jednu, nebo žádnou.
Věta: Druhá (vyšší) derivace - funkci zderivujeme jednou a poté výsledek zderivujeme ještě podruhé (vícekrát). Značíme dvěma (více) čárkami: $f''(x) = (f'(x))'$.
Věta: Má-li funkce v bodě derivaci, pak je funkce v tomto bodě spojitá. Pozor, neplatí to obráceně!

Příklady

1. Pomocí definice derivace najděte derivaci funkce $f(x) = x^2 - 1$.
2. Pomocí definice derivace zjistěte směrnici tečny (úhel mezi tečnou a osou x) v bodě $x_0 = 2$ funkce $y = x^2 - 3x + 5$. Funkce prvně odhadem zakreslete.

Domácí úkol

Zakreslete funkce a určete jejich definiční obor a obor hodnot.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{3x+6}{x^3+8}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+4}{x-2}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.