Kvantová teorie pole I

1 Úvodní poznámky

1.1 Zvyšovací a snižovací operátory

Uvažujme nehermitovský operátor $\hat{a}$, který má tu vlastnost, že jeho komutátor s operátorem $\hat{a}^\dagger$ k němu hermitovsky sdruženým je roven

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{1}$$

Utvořme dále operátor $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Je to operátor hermitovský $\hat{N}^\dagger = \hat{N}$, tudíž jeho vlastní hodnoty jsou reálná čísla. Označme je n a příslušné vlastní stavy jako $|n>$. Platí tudíž

$$\hat{N}|n >= n|n > \tag{2}$$

Působením operátoru $\hat{a}$ vytvoříme stav

$$|n >_- = \hat{a}|n > \tag{3}$$

a ptáme se, jestli bude taky vlastním stavem operátoru $\hat{N}$. Když využijeme komutační vztah (1), tak postupně dostáváme

$$\hat{N}|n >_- = \hat{a}^\dagger\hat{a}\ \hat{a}|n >= (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}|n >= \hat{a}(\hat{N} - 1)|n >= \hat{a}(n-1)|n >= (n-1)\hat{a}|n >= (n-1)|n >_-$$

Když se podíváme na začátek a konec řetězce, vidíme, že se jedná o vlastní stav operátoru $\hat{N}$ s vlastní hodnotou o jednotku nižší, tj $n-1$. Určíme teď normu tohoto stavu. Nejdřív napíšeme odpovídající bra vektor ke ket vektoru (3), $_-< n| =< n|\hat{a}^\dagger$, a počítáme

$$_-< n|n >_- =< n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n >=< n|\hat{N}|n >= n$$

Protože norma stavu nemůže být záporná, dostáváme důležitou informaci o spektru vlastních hodnot operátoru $\hat{N}$: $n \geq 0$.

Vlastní stav s vlastní hodnotou $n-1$ normovaný na jednotku se dostane z normovaného vlastního stavu s vlastní hodnotou n

$$|n - 1 >= \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}|n >$$

Tento vztah je užitečné napsat i v jiné podobě

$$\hat{a}|n >= \sqrt{n}\ |n - 1 >, \tag{4}$$

ze kterého je vidět např. že $\hat{a}|1 >= |0 >$. Po dalším uplatnění operátoru nedostaneme stav $|-1>$ ale nulu, $\hat{a}|0 >= 0$. Ze vztahu (4) taky plyne, že neceločíselné vlastní hodnoty jsou vyloučeny. Z vlastního stavu odpovídajícího takové hodnotě bychom se opakovanou aplikací snižovacího operátoru dostali až k vlastní hodnotě $n = p$, kde $0 < p < 1$. Další aplikací operátoru $\hat{a}$

$$\hat{a}|p >= \sqrt{p}\ |p - 1 >$$

bychom dostali vlastní stav odpovídající záporné vlastní hodnotě $p - 1$, které jsou, jak jsme výše dokázali, nepřípustné.

Působením operátoru $\hat{a}^\dagger$ vytvoříme teď jiný stav

$$|n >_+ = \hat{a}^\dagger|n > \tag{5}$$

a ptáme se, jestli bude taky vlastním stavem operátoru $\hat{N}$. Počítáme a využijeme přitom komutační vztah (1)

$$\hat{N}|n>_+ = \hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger|n> = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|n> = \hat{a}^\dagger(\hat{N}+1)|n> = \hat{a}^\dagger(n+1)|n> = (n+1)\hat{a}^\dagger|n> = (n+1)|n>_+$$

Když se podíváme na začátek a konec řetězce, vidíme, že se jedná o vlastní stav operátoru $\hat{N}$ s vlastní hodnotou o jednotku vyšší, tj $n+1$. Určíme teď normu tohoto stavu. Nejdřív napíšeme odpovídající bra vektor ke ket vektoru (5), $_+<n| = <n|\hat{a}$, a pak počítáme

$$_+<n|n>_+ = <n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n> = <n|\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n> = <n|\hat{N}+1|n> = n+1\,.$$

Vlastní stav s vlastní hodnotou $n+1$ normovaný na jednotku se dostane z normovaného vlastního stavu s vlastní hodnotou n

$$|n+1> = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}^\dagger|n> \; .$$

Budoucí použití: V kvantové teorii pole se budeme s těmito operátory setkávat jako s operátory počtu částic ($\hat{N}$), kreačními operátory zvyšujícími počet částic ($\hat{a}^\dagger$) a anihilačními operátory snižujícími počet částic ($\hat{a}$). Budou opatřeny indexy uvádějícími o které částice se jedná, např. $\hat{N}_{\vec{k}}$ bude operátor počtu částic s hybností $\vec{k}$.

Jiné použití: Některé problémy se dají přeformulovat pomocí právě zavedených operátorů. Např. hledání energetického spektra lineárního harmonického oscilátoru, jehož Hamiltonův operátor je roven

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\,. \tag{6}$$

Operátory vystupující na pravé straně splňují komutační vztah

$$[\hat{x},\hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar\,. \tag{7}$$

Zavedeme operátor

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{m}\hat{p}_x\right)\;.$$

Pomocí (7) se přesvědčíme, že splňuje komutační vztah

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$$

a že Hamiltonův operátor (6) se dá pomocí něho přepsat na tvar

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right),$$

kde $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Vlastní hodnoty operátoru $\hat{N}$ známe, takže pro vlastní hodnoty operátoru $\hat{H}$ můžeme okamžitě psát

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

kde n je nezáporné celé číslo.

1.2 Normalizace vlnové funkce na konečný objem, spektrum hybností.

Kvantová mechanika

Vlnová funkce $\psi(\vec{x},t)$

Hustota pravděpodobnosti v x prostoru $\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$

Normalizace vlnové funkce

$$\int |\psi(\vec{x},t)|^2\mathrm{d}^3\mathrm{x} = 1 \tag{8}$$

Operátor hybnosti: $\hat{\vec{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$
Jeho vlastní funkce:

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}.\vec{x}/\hbar}$$

$$\hat{\vec{p}}\,\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \vec{p}\,\phi_{\vec{p}}(\vec{x})$$

$$< \vec{p}\,'|\vec{p} >= \int \phi^*_{\vec{p}\,'}(\vec{x})\phi_{\vec{p}}(\vec{x})\mathrm{d^3x} = \delta(\tilde{\mathrm{p}}\,' - \tilde{\mathrm{p}})$$

Částice ve stavu s ostrou hodnotou hybnosti $\vec{p}$ by měla být popsána vlnovou funkcí jejíž prostorová část je úměrná vlastní funkci operátoru $\hat{\vec{p}}$

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = cT(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}.\vec{x}/\hbar}, \tag{9}$$

kde c je konstanta. Po dosazení (9) do Schrödingerovy rovnice pro volnou částici

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \tag{10}$$

dostaneme $T(t) = \exp\{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}t/\hbar\}$, kde $E_{\vec{p}} = \vec{p}\,^2/(2m)$, a

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\vec{p}}t - \vec{p}.\vec{x})/\hbar}\,.$$

Vidíme, že prostorová hustota pravděpodobnosti

$$\rho_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = |\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t)|^2 = |c|^2$$

je konstantní. Souvisí to s Pauliho principem neurčitosti: když je přesně známá hybnost, nemáme žádnou informaci o poloze částice. Při pokusu správně normovat vlnovou funkci vztahem (8) narážíme na problém, integrál

$$\int |\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t)|^2\mathrm{d^3x} = |\mathrm{c}|^2 \int \mathrm{d^3x} = \infty$$

diverguje pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty c. Tento problém se dá řešit dvěma způsoby:
1) Použitím spojité superpozice stavů s různymi $\vec{p}$

$$\psi(\vec{x}, t) = \int c(\vec{p}, t)\phi_{\vec{p}}(\vec{x})\ \mathrm{d}^3p\ , \tag{11}$$

přičemž $|c(\vec{p}, t)|^2$ je rovno hustotě pravděpodobnosti v hybnostním prostoru; platí

$$\int |c(\vec{p}, t)|^2\ \mathrm{d}^3p\ = \int |\psi(\vec{x}, t)|^2\mathrm{d^3x} = 1,$$

$c(\vec{p}, t)$ je vlnová funkce v p-reprezentaci. Pro připomenutí teorie reprezentací a Diracovy symboliky si vztah (11) ještě přepišme na tvar

$$< \vec{x}\,|\psi; t >= \int < \vec{x}\,|\vec{p} >< \vec{p}\,|\psi; t >\ \mathrm{d}^3p\ \ .$$

2) Vyšetřováním částice v konečné části prostoru, v kvádru o rozměrech a, b a c. Prostým uzavřením částice (nulová vlnová funkce mimo kvádr a tím i na jeho stěnách) bychom dostali superpozici stojatých vlnění. Používají se proto Bornovy – von Kármánovy cyklické podmínky

$$\begin{aligned}
\psi(x, z, y, t) &= \psi(x + a, y, z, t),\\
\psi(x, z, y, t) &= \psi(x, y + b, z, t),\\
\psi(x, z, y, t) &= \psi(x, y, z + c, t).
\end{aligned}$$

Protože exponenta v (9) se dá rozepsat jako součin tří exponent, můžeme výše uvedené podmínky aplikovat jednotlivě. Například

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp_x/\hbar} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+a)p_x/\hbar}.$$

Z této podmínky plyne $\exp\{\mathrm{i}ap_x/\hbar\} = 1$, což je splněno jenom když $ap_x/\hbar$ je celočíselným násobkem 2π. Celkově dostáváme pro přípustné hodnoty složek vektoru hybnosti vztahy

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{2\pi\hbar}{a} n_x \,, \\ p_y &= \frac{2\pi\hbar}{b} n_y \,, \\ p_z &= \frac{2\pi\hbar}{c} n_z \,, \end{aligned}$$

kde n jsou celá čísla. Počet možných hodnot p_x v intervalu $[p_x, p_x + \Delta p_x]$ je roven $a\Delta p_x/(2\pi\hbar)$. Počet stavů v intervalu $[\vec{p}, \vec{p} + \Delta\vec{p}]$ je

$$\Delta N = \frac{abc\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{(2\pi\hbar)^3} \,. \tag{12}$$

Čitatel je roven objemu fázového prostoru (součin objemu konfiguračního a objemu hybnostního prostoru). Jmenovatel $(2\pi\hbar)^3$ tudíž představuje objem který ve fázovém prostoru zabírá jeden stav. To je často používaný (např. ve statistické fyzice), ale málokdy dokazovaný výsledek.
Správně normovaná vlnová funkce částice s hybností $\vec{p}$ je

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}.\vec{x} - Et)/\hbar} \,. \tag{13}$$

Při výpočtech v průběhu tohoto semestru se bude často vyskytovat integrál ze součinu dvou exponent ve kterých vystupují hybnosti z námi odvozeného diskrétního spektra. Ukážeme, že platí

$$\int_{(V)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\,'.\vec{x}/\hbar} \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}.\vec{x}/\hbar} \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \mathrm{V}\delta_{\vec{\mathrm{p}}\,', \vec{\mathrm{p}}} \,, \tag{14}$$

kde symbol $\delta_{\vec{p}\,', \vec{p}}$ je vektorovým zobecněním obvyklého Kroneckerova symbolu, je roven 1 když $\vec{p}\,' = \vec{p}$ a nule, když se tyto vektory liší (alespoň v jedné komponentě). Důkaz (14) pro $\vec{p}\,' = \vec{p}$ je triviální. Pro důkaz v opačném případě rozepíšeme trojný integrál jako součin tří jednoduchých. Pro získání nuly na pravé straně (14) stačí nulovost jednoho z nich. Předpokládejme, že $p'_x \neq p_x$ a počítejme

$$\int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_x - p'_x)x/\hbar} \mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_x - n'_x)2\pi x/a} \mathrm{d}x = \frac{a}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{a}{2\pi n \mathrm{i}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right]_0^{2\pi n} = 0 \,.$$

Označili jsme $n_x - n'_x = n \neq 0$ a použili substituci $\varphi = 2\pi n x/a$.
Pomocí (14) lehce ověříme, že pro vlnovou funkci (13) platí

$$\int_{(V)} \psi^*_{\vec{p}\,'}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \delta_{\vec{\mathrm{p}}\,', \vec{\mathrm{p}}} \,.$$

Výklad v prvním semestru KTP bude veden s využitím normování na konečný objem.

1.3 Lorentzovy transformace v kvantové teorii pole

Kvantová teorie pole musí být budována jako relativistická teorie, protože popisuje procesy, ve kterých vznikají a zanikají částice, což je možné jenom díky Einsteinovu vztahu ekvivalence energie a hmotnosti. KTP je aplikována i v jaderné a částicové fyzice, kde se objekty navíc pohybují relativistickými rychlostmi.

Nejdřív připomeneme obecné poznatky o transformacích souřadnic, pak se budeme věnovat transformacím Lorentzovým.

Uvažujeme čtyři prostoročasové souřadnice $x^0 = ct$, x^1, x^2 a x^3, což zapisujeme taky jako $x^\mu \equiv (ct, \vec{x})$, a transformaci při které tyto souřadnice nabývají nové hodnoty

$$x'^{\mu'} = x'^{\mu'}(x) \,, \qquad \mathrm{k}de \qquad \mu' = 0, 1, 2, 3 \,. \tag{15}$$

Pro diferenciály nových souřadnic platí (rozumí se součet přes opakující se indexy)

$$dx'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu .$$

Kontravariantním vektorem nazveme každou čtveřici veličin která se transformuje stejně jako diferenciály souřadnic, tj.

$$a'^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu} a^\mu , \tag{16}$$

kde

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \mu} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} .$$

Derivace funkce podle nových souřadnic můžeme vyjádřit pomocí derivací podle starých souřadnic vztahy

$$\frac{\partial f(x')}{\partial x'^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} .$$

Kovariantním vektorem nazveme každou čtveřici veličin která se transformuje stejně jako derivace podle souřadnic, tj.

$$b'_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\ \mu} b_\mu ,$$

kde

$$\Lambda_{\mu'}^{\ \mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} .$$

Součin kontravariantního a kovariantního vektoru definujeme vztahem $ab = a^\mu b_\mu$. Pro součet součinů elementů transformačních matic platí

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \nu} \Lambda_{\mu'}^{\ \mu} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu . \tag{17}$$

Podobný vztah se dá dokázat i pro součet přes "zadní" indexy.

Pro součin kontravariantního a kovariantního vektoru po transformaci píšeme (při dosazování ze vztahu (16) změníme v něm označení sčítacího indexu na ν)

$$a'b' = a'^{\mu'} b'_{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} \Lambda_{\mu'}^{\ \mu} a^\nu b_\mu .$$

S využitím vztahu (17) nakonec dostáváme

$$a'b' = a^\mu b_\mu = ab,$$

součin kontravariantního a kovariantního vektoru je invariantem vůči transformaci (15). Pomocí vztahu (17) se dá odvodit i vztah pro transformaci inverzní k (16)

$$a^\mu = \Lambda_{\mu'}^{\ \mu} a'^{\mu'} .$$

Na základě transformačních vlastností definujeme i komplexnější objekty. Např. soubor 16 veličin nazýváme dvakrát kovariantním tenzorem jestli se při transformaci (15) transformují podle vztahu

$$T'_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\ \mu} \Lambda_{\nu'}^{\ \nu} T_{\mu\nu} . \tag{18}$$

Metrickým tenzorem (dvakrát kovariantním) nazývame tenzor, který kontravariantnímu vektoru přiřadí kovariantní

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu .$$

Podobně zavádíme

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu .$$

Obdobné "zvedání" a "spouštění" indexů platí i pro tenzory. Kvadrát čtyřvektoru je definován vztahem

$$a^2 = a^\mu a_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu .$$

Lorentzova transformace je každá transformace pro kterou je výraz

$$s = \left(x^0\right)^2 - \vec{x}^2$$

invariantem. To splníme výběrem metrického tenzoru se složkami $g_{00} = 1,\ g_{kk} = -1,\ g_{0k} = 0$ pro k=1, 2, 3. To je obvyklý výběr v částicové fyzice a převážné části literatury o kvantové teorii pole. Ve speciální teorii relativity se používá opačný výběr znamének.

Metrický tenzor Lorentzovy transformace je tenzorem invariantním, platí $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Když tento vztah spojíme s obecným vztahem pro transformaci dvakrát kovariantního tenzoru (18) dostáváme podmínku toho, aby transformace byla lorentzovská, ve tvaru

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\ \mu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\nu'}^{\ \nu}\,, \tag{19}$$

kterou můžeme zapsat i v maticovém tvaru když se domluvíme, že první index u g a dolní index u Λ jsou řádkové a ostatní sloupcové. Dostaneme výše uvedenou podmínku v maticovém tvaru

$$g = \Lambda g \Lambda^T\,. \tag{20}$$

Matice g je symetrická, má 10 nezávislých komponent. Tolik podmínek představuje výše uvedená rovnice pro určení matice Λ, která má 16 komponent. Zůstává tedy 6 volných parametrů potřebných ke specifikaci LT. Můžou to být třeba tři komponenty rychlosti boostu doplněné třemi Eulerovými úhly následující rotace.

Když porovnáme determinanty levé a pravé strany a využijeme, že determinant transponované matice je stejný jako matice původní, nacházíme že

$$(\det\Lambda)^2 = 1\,.$$

Rozeznáváme Lorentzovy transformace vlastní ($\det\Lambda = 1$) a nevlastní ($\det\Lambda = -1$).

Když ve vztahu (19) položíme $\mu' = \nu' = 0$, dostáváme

$$1 = \left(\Lambda_0^0\right)^2 - \sum_{k=1}^{3} \left(\Lambda_k^k\right)^2\,.$$

Odtud plyne nerovnost

$$\left(\Lambda_0^0\right)^2 \geq 1\,.$$

Transformace pro které platí $\Lambda_0^0 \geq 1$ jsou transformacemi ortochronními, ty s $\Lambda_0^0 \leq -1$ neortochronními.

Definice Lorentzovy transformace v KTP zahrnuje kromě boostů a rotací např. i transformace $x'^0 = -x^0,\ \vec{x}\,' = \vec{x}$ nebo $x'^0 = x^0,\ \vec{x}\,' = -\vec{x}$, které se v klasické relativistické fyzice neuvažují.

Lorentzovy transformace tvoří grupu, nazývanou Lorenzovou grupou.

1.4 Používané jednotky

V některých učebnicích se píše, že v kvantové teorii pole se používa přirozená soustava jednotek $\hbar = c = 1$. Řečeno méně vznešeně, $\hbar$ a c jednoduše nepíšeme, a až po tom, co dospějeme ke konečnému vztahu, který se má porovnat s měřitelnou veličinou, tam tyto dvě konstanty na základě rozměrové analýzy doplníme. Ozřejmíme si to na příkladě:
Parapozitronium je nestabilní vázaný stav elektronu a pozitronu. Jeho střední doba života je dána v přirozených jednotkách vztahem $\tau = 2/(m\alpha^5)$, kde m je hmotnost elektronu a α je bezrozměrná konstanta. Do vztahu zavedeme mocniny $\hbar$ a c:

$$\tau = \frac{2c^k\hbar^l}{m\alpha^5}$$

Rozměrová analýza s využitím $[\tau]$=s, $[c]$=ms^{-1} a $[\hbar]$=kgm^{2}s^{-1} poskytne vztah s=m^{k+2l}s^{-k-l}kg^{l-1}. Porovnání jednotek na levé a pravé straně okamžitě řekne, že $l = 1$ a pak i $k = -2$. Rozměrově správný vztah je tedy

$$\tau = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5}$$

V kvantové teorii pole se používá Heavisideova soustava elektromagnetických jednotek. Síla mezi dvěma elektrony vypadá v různých soustavách jednotek takto:

$$\text{SI soustava}: \ F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, r^2} \qquad \text{Gaussova soustava}: \ F = \frac{e^2}{r^2} \qquad \text{Heavisideova soustava}: \ F = \frac{e^2}{4\pi\, r^2}$$

Aby jsme se vyhli problémům s různými jednotkami náboje, doporučuje se nahradit ve výsledku kvadrát elementárního náboje bezrozměrnou konstantou jemné struktury, která má ve všech třech soustavách stejnou hodnotu $\alpha = 1/137,03599914$. S kvadrátem elementárního náboje souvisí v různých soustavách různě:

$$\text{SI}: \ \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \qquad \text{Gauss}: \ \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \qquad \text{Heaviside}: \ \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$$

Některé vztahy v Heavisideově soustavě:
Lorentzova síla na náboj q: $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v}/c \times \vec{B})$
Maxwellovy rovnice ve vakuu (jenom volné náboje):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

2 Relativistické vlnové rovnice

2.1 Kleinova – Gordonova rovnice (1926)

Vycházíme z toho, že Schrödingerovu rovnici pro volnou částici (10) můžeme "odvodit" tak, že v nerelativistickém vztahu pro energii $E = \vec{p}^2/(2m)$ nahradíme energii a hybnost operátory

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &\longrightarrow -\mathrm{i}\hbar\nabla \end{aligned}$$

a pak takto vzniklý vztah aplikujeme na vlnovou funkci. Když tento postup aplikujeme na relativistický vztah mezi energií (která teď kromě kinetické energie zahrnuje i energii klidovou) a hybností

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\vec{p}^2,$$

přičemž teď vlnovou funkci závisící od čtyřvektoru x označíme $\varphi(x)$, dostáváme

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0.$$

Výraz v závorce je převrácená hodnota Comptonovy vlnové délky částice. Zavedeme d'Alembertův operátor

$$\Box = \partial_\mu\partial^\mu,$$

což při naší volbě metrického tenzoru znamená

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Kleinovu-Gordonovu (KG) rovnici tak zapíšeme ve tvaru

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \tag{21}$$

kde jsme již položili $\hbar = c = 1$.

Po Lorenzově transformaci $x' = \Lambda x$ máme $(\Box' + m^2)\varphi'(x') = 0$. Protože d'Alembertův operátor je invariantní, $\Box' = \Box$, KG rovnice bude kovariantní když $\varphi'(x') = \varphi(x)$, vlnová funkce $\varphi(x)$ je skalárem při LT.

To, že stav částice je popsán jednou funkcí naznačuje, že částice nemá žádné vnitřní stupně volnosti, že má nulový spin. KG rovnice platí např. pro π mezony nebo Higgsův bozon.

2.1.1 Rovnice kontinuity

Připomeňme situaci v nerelativistické kvantové mechanice. Ze Schrödingerovy rovnice plyne, že kromě hustoty pravděpodobnosti $\rho = \psi^*\psi$ existuje i hustota toku pravděpodobnosti $\vec{j}$ taková, že je splněna rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

která představuje zákon zachování pravděpodobnosti v diferenciálním tvaru. Při pohybu částice v potenciálovém poli platí

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}} \left[\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi)^* \psi \right].$$

V případě relativisticky kovariantní KG rovnice by se rovnice kontinuity měla dát zapsat ve tvaru

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

kde $j^\mu \equiv (\rho, \vec{j}\,)$ je čtyřvektorem. Postupujeme podobně jako při odvozování v případě Schrödingerovy rovnice. KG rovnici (21) vynásobíme φ^*, rovnici komplexně sdruženou k (21) vynásobíme φ a rovnice takto vzniklé odečteme. Dostaneme

$$\varphi^* \Box \varphi - \varphi \Box \varphi^* = 0$$

Platí $\partial_\mu(\varphi^* \partial^\mu \varphi) = (\partial_\mu \varphi^*)\partial^\mu \varphi + \varphi^* \Box \varphi$ odkud dostaneme $\varphi^* \Box \varphi = \partial_\mu(\varphi^* \partial^\mu \varphi) - (\partial_\mu \varphi^*)\partial^\mu \varphi$. Podobně platí $\varphi \Box \varphi^* = \partial_\mu(\varphi \partial^\mu \varphi^*) - (\partial_\mu \varphi)\partial^\mu \varphi^*$. Po dosazení do výše uvedeného vztahu máme

$$\partial_\mu(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi\, \partial^\mu \varphi^*) = 0$$

S přihlédnutím k tomu, že tento vztah se nezmění když ho vynásobíme libovolnou konstantou, můžeme pro zachovávající se proud psát

$$j^\mu = \mathrm{i}k(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi\, \partial^\mu \varphi^*). \tag{22}$$

Imaginární jednotka vykompenzuje změnu znaménka závorky při komplexním sdružení, čím dostáme reálne j^μ při reálném k.

Všimněme si nulté komponenty nalezeného čtyřvektoru, která by měla být hustotou

$$\rho = \mathrm{i}k(\varphi^* \partial_0 \varphi - \varphi\, \partial_0 \varphi^*). \tag{23}$$

Je zjevné, že tato veličina může nabývat i záporné hodnoty, tudíž ji nemůžeme považovat za hustotu pravděpodobnosti. K tomuto problému se podrobně vrátíme později. Na tomto místě ale kvůli úplnosti uveďme, že smysluplná interpretace čtyřvektoru (22) je čtyřvektor elektrické proudové hustoty a že konstantu k ztotožníme s kladným elementárním nábojem e.

2.1.2 Řešení Kleinovy – Gordonovy rovnice se zadanou hybností

V KTP je zvykem označovat hybnost bozonů písmenem $\vec{k}$. Hledejme nejdřív řešení KG rovnice ve tvaru

$$\varphi^{(+)}_{\vec{k}}(x) = T(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}}. \tag{24}$$

Po dosazení do KG rovnice (21), využití $\Delta \exp\{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}\} = -\vec{k}^{\,2} \exp\{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}\}$ a vydělení vzniklé rovnice exponentou, dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro funkci T

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + \omega_{\vec{k}}^2 T = 0\,,$$

kde jsme zavedli označení energie částice $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. Tato rovnice má dvě řešení

$$T_{\pm}(t) = A\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}\,.$$

Řešení T_+ zahazujeme, protože po dosazení do (24) vede na závislost $\varphi_{\vec{k}}^{(+)}$ na neinvariatní veličině $\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}.\vec{x}$. Správné řešení má tvar

$$\varphi_{\vec{k}}^{(+)}(x) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,, \tag{25}$$

kde jsme zavedli čtyřvektor hybnosti $k^\mu \equiv (\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$. V dalším pro jednoduchost předpokládáme, že normovací konstanta A je reálné číslo.

Při hledání dalšího, lineárně nezávislého, řešení využijeme, že i komplexně sdružená funkce k řešení KG rovnice je jejím řešením. Výsledek okamžitě napíšeme

$$\varphi_{\vec{k}}^{(-)}(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,. \tag{26}$$

Dosaďme teď řešení (25) do vztahu pro hustotu (zatím nevíme čeho) (23). Vychází

$$\rho_{\vec{k}}^{(+)} = 2k\omega_{\vec{k}}A^2$$

Podobně pro řešení (26) dostáváme

$$\rho_{\vec{k}}^{(-)} = -2k\omega_{\vec{k}}A^2$$

Když uvažujeme o tom, která zachovávající se veličina může mít kladné i záporné hodnoty, na prvním místě nás určitě napadne náboj. KG rovnice se zdá popisovat částice dvou druhů se stejnou hmotností ale opačným nábojem, které jsou navzájem antičásticemi. Rozhodneme se, že tu, která je popsána vlnovou funkcí (25) budeme nazývat částicí. Důvodem je to, že časová závislost $\exp\{-\mathrm{i}\omega_{\vec{p}}t\}$ je nám dobře známá z nerelativistické kvantové mechaniky. Této částici přiřadíme kladný elementární náboj e. Musí proto platit

$$\int_{(V)} \rho_{\vec{k}}^{(+)} \mathrm{d}^3\mathrm{x} = e$$

odkud dostávame vztah

$$k\,2V\omega_{\vec{k}}A^2 = e$$

V něm vystupují dvě zatím neurčené konstanty, k ze vztahu (22) a A ze vztahu (25). Vztah (22) odráží obecné vlastnosti KG rovnice, není ovlivněn energií částice ani naším výběrem normalizačního objemu. Proto klademe $k = e$ a $A = 1/\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}$. Dvě řešení KG rovnice dané volbou vektoru hybnosti $\vec{k}$ jsou

$$\varphi_{\vec{k}}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})}$$

a

$$\varphi_{\vec{k}}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})}$$

Obě řešení jsou vlastními funkcemi operátoru hybnosti, první s vlastní hodnotou $\vec{k}$, druhé s vlastní hodnotou $-\vec{k}$.

2.1.3 Obecné řešení Kleinovy–Gordonovy rovnice

Partikulární řešení KG rovnice nalezené v předešlé kapitole jsou platná pro libovolnou hybnost povolenou normalizací na konečný objem. Protože KG rovnice je rovnicí lineární a homogenní, i libovolná lineární kombinace partikulárních řešení bude jejím řešením. Píšeme

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})} + b_{\vec{k}}^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})}\right], \tag{27}$$

kde $a_{\vec{k}}$ a $b_{\vec{k}}$ jsou libovolné komplexní konstanty. Konstantu $b_{\vec{k}}$ jsme navíc opatřili hvězdičkou značící komplexní sdružení co nám umožňuje přejít k případu reálné funkce popisující neutrální částice volbou $b_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}$.

2.1.4 Kleinova–Gordonova rovnice pro nabitou částici v obecném elektromagnetickém poli

Princip minimální elektromagnetické interakce

Připomeňme si, jak se pohyb částice s nábojem q popisuje v klasické relativistické mechanice. Používame Heavisideovu soustavu jednotek a neklademe $c = 1$. Pohybová rovnice zapsaná pro souřadnici $x \equiv x^1$ má tvar

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = qE_x + \frac{q}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_x, \tag{28}$$

kde $\vec{E}(\vec{x}, t)$ je intenzita elektrického pole, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ je indukce magnetického pole a p_x je x-ová složka (mechanické) hybnosti

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pohybovou rovnici (28) můžeme dostat aplikací Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

na Lagrangeovu funkci

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{v}.\vec{A} - q\,\phi \tag{29}$$

kde $\phi(\vec{x}, t)$ je skalární a $\vec{A}(\vec{x}, t)$ vektorový potenciál elektromagnetického pole, pomocí kterých vyjádřujeme

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad\qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{30}$$

Při přechodu od Lagrangeova k Hamiltonovu formalismu definujeme nejdřív zobecněnou hybnost

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = p_x + \frac{q}{c}A_x \tag{31}$$

a podobně pro P_y a P_z. První člen na pravé straně představuje "obyčejnou" (mechanickou) hybnost. Hamiltonovu funkci $H(\vec{P}, \vec{x}, t)$ dostaneme z Lagrangeovy funkce pomocí Legendre-ovy duální transformace

$$H = \vec{v}.\vec{P} - L$$

V prvním kroku dostáváme

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\,\phi$$

Teď ještě musíme vyjádřit H jako funkci $\vec{P}$ a $\vec{x}$. Využijeme přitom relativistický vztah pro klidovou+kinetickou energii

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

a vyjádření mechanické hybnosti pomocí zobecněné (31). Dostáváme

$$H(\vec{x}, \vec{P}, t) = c\sqrt{m^2c^2 + (\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2} + q\,\phi$$

Porovnejme teď vztahy pre Hamiltonovu funkci při vypnutém a zapnutém elektromagnetickém poli:

$$\begin{aligned} H &= c\sqrt{m^2c^2 + \vec{P}^2} \\ H - q\phi &= c\sqrt{m^2c^2 + (\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2} \end{aligned}$$

To nás přivádí k **principu minimální elektromagnetické invariance**: Rovnice pro částici v obecném elektromagnetickém poli dostaneme tak, že v rovnicích pro volnou částici nahradíme H rozdílem $H - q\phi$ a zobecněnou hybnost $\vec{P}$ nahradíme rozdílem $\vec{P} - q/c\,\vec{A}$.

Aplikace principu minimální elektromagnetické interakce v kvantové mechanice

V kvantové mechanice nahrazujeme

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{P} &\longrightarrow -\mathrm{i}\hbar\nabla \end{aligned}$$

Elektromagnetickou interakci tudíž zavedeme předpisem

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} &\longrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi \\ \mathrm{i}\hbar\nabla &\longrightarrow \mathrm{i}\hbar\nabla + \frac{q}{c}\vec{A} \end{aligned}$$

Využijeme čtyřvektory $x^\mu \equiv (ct, \vec{x})$ a $A^\mu \equiv (\phi, \vec{A})$ a výše uvedené vztahy spojíme do jednoho

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}A_\mu \tag{32}$$

Výraz na pravé straně se nazývá kalibračně kovariantní derivací a zvykne se označovat D_μ.

Kleinova–Gordonova rovnice pro částici v elektromagnetickém poli

Zapíšeme KG rovnici pro volnou částici ve tvaru

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = 0$$

a uplatníme v ní substituci (32), ve které už položíme $\hbar = c = 1$.

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu \qquad\qquad \partial^\mu \longrightarrow D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu$$

Po zapnutí elektromagnetického pole nabývá KG rovnice pro částici s nábojem q tvar

$$D_\mu D^\mu\varphi + m^2\varphi = 0 \tag{33}$$

Při hledání detailnějšího tvaru této rovnice respektujeme, že derivace působí na všechno za ní, pokud není závorkami vyznačeno jinak, a postupně dostáváme

$$(\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu)(\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu)\varphi + m^2\varphi = 0$$

$$\Box\varphi + \mathrm{i}q(\partial_\mu A^\mu)\varphi + \mathrm{i}qA^\mu\partial_\mu\varphi + \mathrm{i}qA_\mu\partial^\mu\varphi - q^2A_\mu A^\mu\varphi + m^2\varphi = 0$$

Teď už můžeme vlnovou funkci vyjmout za závorku a dostáváme hledanou rovnici ve tvaru

$$\left[\Box + \mathrm{i}q(\partial_\mu A^\mu) + 2\mathrm{i}qA^\mu\partial_\mu - q^2A^2 + m^2\right]\varphi(x) = 0 \tag{34}$$

kde jsme i označili kvadrát čtyřvektoru A^μ jako A^2.

Aplikace rovnice (34) na vodíkový atom $[\vec{A} = 0,\ \phi = e/(4\pi r)]$ přinesla zklamání, energetické spektrum popisovala mnohem hůř než Schrödingerova rovnice, i když se vzhledem k jejímu relativistickému charakteru očekával opak. To byl důvod, spolu s nemožností zavést nezápornou hustotu pravděpodobnosti, proč byla KG rovnice na čas opuštěna. V 50. létech 20. století se ale ukázalo, že KG rovnice správně popisuje energetické spektrum atomů ve kterých je elektron nahrazen π^- mezonem, což je částice s nulovým spinem.

Kalibrační kovariance KG rovnice

Lehce se lze přesvědčit, že vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$, které charakterizují makroskopické elektromagnetické pole, se nezmění, když elektromagnetické potenciály změníme předpisem $\phi \to \phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$ a $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi$, kde $\chi \equiv \chi(\vec{x}, t)$ je libovolná funkce. Tuto kalibrační transformaci můžeme zapsat i ve čtyřrozměrném označení

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \tag{35}$$

Pokud předpokládáme, že vlnová funkce se při kalibrační transformaci mění podle předpisu

$$\varphi \to \varphi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}\,\varphi$$

přesvědčíme se, platí rovnice

$$\left[\Box + \mathrm{i}q(\partial_\mu A'^\mu) + 2\mathrm{i}qA'^\mu\partial_\mu - q^2 A'^2 + m^2\right]\varphi'(x) = 0, \tag{36}$$

která má stejný tvar (až na čárky, označující veličiny po transformaci) jako rovnice (34). KG rovnice je tudíž kalibračně kovariantní.

Dokážeme to tak, že z rovnice po kalibrační transformaci dostaneme po dosazení za čárkované veličiny rovnici původní. Při použití rovnice v podrobném tvaru (36) je výpočet komplikovanější (i když zvládnutelný), vyjdeme proto z ekvivalentní rovnice

$$D'_\mu D'^\mu \varphi' + m^2\varphi' = 0, \tag{37}$$

kde

$$D'_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}qA'_\mu \qquad D'^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}qA'^\mu$$

Nejdřív si odvodíme vztahy (f je libovolná funkce)

$$D'_\mu\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}f(x)\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}D_\mu f(x) \qquad D'^\mu\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}f(x)\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}D^\mu f(x)$$

pomocí kterých postupně dostáváme

$$D'_\mu D'^\mu\varphi' = D'_\mu\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}D^\mu\varphi\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}D_\mu D^\mu\varphi$$

Po dosazení do (37) máme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}\left(D_\mu D^\mu\varphi + m^2\varphi\right) = 0$$

odkud okamžitě plyne KG rovnice před kalibrační tranformací (33).

2.2 Diracova rovnice pro volnou částici

2.2.1 Formulace problému

Poučení z Kleinovy-Gordonovy rovnice říká, že potřebujeme diferenciální rovnici ve které nevystupuje vyšší derivace podle času než první. To znamená, že nevystačíme s jednoduchou vlnovou funkcí, ale musíme jich zvažovat několik. Z matematiky víme, že obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu můžeme zavedením další funkce převést na dvě svázané (obě funkce vystupují v obou rovnicích) diferenciální rovnice prvního řádu. V případě vlnových rovnic se jedná o parciální diferenciální rovnice se čtyřmi proměnnými. Z toho vyplývá, že funkcí a rovnic bude zřejmě více. Je proto výhodné použít maticový počet.

Hledáme tedy diferenciální rovnici pro vícekomponentní vlnovou funkci závisící od čtyřvektoru $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$, kterou zapisujeme ve tvaru jednosloupcové matice

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} . \tag{38}$$

Budeme používat taky matici k ní hermitovsky sdruženou

$$\psi^\dagger(x) = \left(\psi_1^*(x), \psi_2^*(x), \cdots, \psi_N^*(x)\right) . \tag{39}$$

Od hledané diferenciální rovnice požadujeme:

1. aby byla homogenní a lineární s konstantními koeficienty (abychom vyhověli principu superpozice);

2. aby umožňovala zavést pozitivně definitní hustotu pravděpodobnosti

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) = \sum_{n=1}^{N} |\psi_n(x)|^2 \tag{40}$$

   a jí odpovídající hustotu toku pravděpodobnosti $\vec{j}(x)$ tak, aby byla splněna rovnice kontinuity

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(x) = 0 \ ; \tag{41}$$

3. aby byla relativisticky kovariantní, k čemuž musí obsahovat derivace podle času a souřadnic stejného řádu (z požadavku 2 plyne, že to musí být řád první);

4. aby vedla ke Kleinově-Gordonově rovnici (která je vyjádřením relativistického vztahu mezi energií a hybností)

$$(\Box + m^2)\psi_n(x) = 0 \tag{42}$$

   pro každou komponentu ($n = 1, 2, \cdots, N$) mnohokomponentní vlnové funkce $\psi(x)$.

Z homogennosti rovnice plyne, že koeficient u jednoho členu můžeme volit. Zvolíme koeficient u nederivované funkce roven záporně vzaté hmotnosti částice m. Nejobecnější tvar rovnice konzistentní s požadavky 261 a 3 je pak

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0 \ , \tag{43}$$

kde γ^μ jsou čtyři ($\mu = 0, 1, 2, 3$) N-rozměrné čtvercové matice, jejichž vlastnosti zjistíme ze zbývajících požadavků. V rovnici (43) jsme zavedli u derivací koeficient i, který spolu s nimi tvoří hermitovské operátory $\hat{p}_\mu = \mathrm{i}\partial_\mu$.

2.2.2 Odvození Diracovy rovnice pro volnou částici

Na základě požadavků 1. a 3. jsme "uhodli" tvar (43) hledané rovnice. Teď dokážeme, že se dají najít takové matice γ^μ aby rovnice (43) splňovala i ostatní na ni kladené požadavky. V dalším postupu kvůli stručnosti nepíšeme argumenty funkce ψ ani dalších funkcí. V prvním kroku se budeme snažit splnit požadavek 4. Na rovnici (43) uplatníme operátor

$$\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu + m\mathbf{I}, \tag{44}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice $N \times N$. Dostáváme tak

$$-\gamma^\nu\gamma^\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\nu\partial x^\mu} - m^2\psi = 0$$

Druhá derivace zde vystupující je symetrická v indexech μ a ν. Proto když vyjádříme součin $\gamma^\nu\gamma^\mu$ jako součet symetrické a antisymetrické části

$$\gamma^\nu\gamma^\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu\right) \ ,$$

v rovnici (44) se uplatní jenom symetrická část. Dostáváme proto

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\nu\partial x^\mu} + m^2\psi = 0$$

Tato rovnice přechází na rovnici Kleinovu-Gordonovu

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \tag{45}$$

jestli

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I}\ . \tag{46}$$

Poslední uvedený vztah se někdy přepisuje pomocí kroucených závorek označujících antikomutátor na tvar

$$\{\gamma^\mu\,,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I}\ .$$

Protože operátor působící v rovnici (45) na jednosloupcovou matici ψ není maticí, působí stejně na každou její komponentu ψ_n. Splnili jsme tak požadavek 4. Ze vztahu (46) dále vyplývá, že

$$\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbf{I} \tag{47}$$

a

$$\left(\gamma^k\right)^2 = -\mathbf{I} \tag{48}$$

pro $k = 1, 2, 3$. K maticím γ existují tedy inverzní matice, přičemž $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ a $(\gamma^k)^{-1} = -\gamma^k$.

Abychom teď našli podmínky na matice γ které nám umožní splnit rovnici kontinuity (41), rovnici (43) vynásobíme zleva $-\mathrm{i}\gamma^0$ a součet přes μ rozdělíme na časovou a prostorovou část:

$$\partial_0\psi + \gamma^0\gamma^k\partial_k\psi + \mathrm{i}m\gamma^0\psi = 0\ . \tag{49}$$

Hermitovsky sdružený vztah má tvar

$$\partial_0\psi^\dagger + \partial_k\psi^\dagger\gamma^{k\dagger}\gamma^{0\dagger} - \mathrm{i}m\psi^\dagger\gamma^{0\dagger} = 0\ . \tag{50}$$

Když vynásobíme vztah (49) zleva maticí $\psi^\dagger$, vztah (50) zprava maticí ψ a vzniklé vztahy sečteme, dostaneme

$$\partial_0(\psi^\dagger\psi) + \psi^\dagger\gamma^0\gamma^k(\partial_k\psi) + (\partial_k\psi^\dagger)\gamma^{k\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi + \mathrm{i}m\psi^\dagger(\gamma^0 - \gamma^{0\dagger})\psi = 0 \tag{51}$$

Podmínkou toho, aby člen bez derivaci vypadl, je hermitovost matice γ^0:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \tag{52}$$

Abychom mohli druhý a třetí člen napsat jako derivaci jednoho výrazu, musí platit

$$\gamma^{k\dagger}\gamma^{0\dagger} = \gamma^0\gamma^k\ . \tag{53}$$

Vztah (51) pak přechází na rovnici kontinuity (41) s $\rho = \psi^\dagger\psi$ a

$$j^k = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^k\psi \tag{54}$$

Vztahy (52) a (53) můžeme s využitím (47) spojit do jednoho

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\ . \tag{55}$$

Za podmínek na matice γ které jsme právě odvodili, rovnice (43) splňuje to, co od ní očekáváme. Při volbě rozměru matic $N = 4$ (v dalším uvidíme, že je to nejnižší možná hodnota) se rovnice (43) nazývá rovnicí Diracovou a mnohokomponentní vlnová funkce $\psi(x)$ bispinorem. Po vyjmutí bispinoru ze závorky máme[1]

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0\ . \tag{56}$$

Dále zavedeme Feynmanovo lomítko (*angl.* Feynman slash) vztahem

$$\not{a} = a_\mu\gamma^\mu, \tag{57}$$

kde a_μ jsou komponenty kovariantního vektoru nebo vektorového operátoru. S jeho pomocí můžeme Diracovu rovnici (43) přepsat na tvar

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0 \tag{58}$$

[1] U druhého členu v závorce by se měla psát jednotková matice, aby oba členy měly stejnou maticovou strukturu. V souladu se zaužívanou konvencí ji nepíšeme.

2.2.3 Vlastnosti matic γ

Vlastnosti γ matic zaručující splnění požadavků 2 a 4 se tak daji shrnout do dvou základních vztahů (46) a (55), které tu kvůli jejich důležitosti připomínáme

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I} \\ \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\end{array}}$$

Na základě těchto vztahů se dají odvodit další vlastnosti matic γ:

1. $(\gamma^0)^2 = \mathbf{I}$ a $(\gamma^k)^2 = -\mathbf{I}$;
2. Matice γ^0 je hermitovská: $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$;
3. Matice γ^k jsou antihermitovské: $\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k$;
4. Všechny matice γ^μ mají nulovou stopu (součet diagonalních elementů);
5. Rozměr matic (který označujeme N) musí být sudé čislo;
6. Rozměr matic musi být větší než 2.

První dvě vlastnosti již byly dokázány výše. Vlastnost 3 vychází ze vztahu (55), antikomutace (46) matic γ^0 a γ^k pro $k = 1, 2, 3$ a vztahu (47).

Pro důkaz dalších vlastností je podstatné, že matice s různými indexy antikomutují,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad \text{jestli} \quad \mu \neq \nu. \tag{59}$$

Po vynásobení tohoto vztahu maticí $(\gamma^\nu)^{-1}$ zleva a výpočtu stopy levé i pravé strany takto vzniklé rovnosti dostáváme

$$\mathrm{Tr}\left[(\gamma^\nu)^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu\right] = -\mathrm{Tr}\gamma^\mu \ .$$

Po využití vztahu $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$ dostáváme $\mathrm{Tr}\gamma^\mu = -\mathrm{Tr}\gamma^\mu$ a tedy

$$\mathrm{Tr}\gamma^\mu = 0 \ . \tag{60}$$

Při důkazu toho, že číslo N je sudé opět využije vztah (59), ale jeho pravou stranu napíšeme jako součin tří matic.[2]

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = (-\mathbf{I})\gamma^\nu\gamma^\mu \ .$$

Z rovnosti matic vyplývá rovnost determinantu. Navíc, když využijeme, že determinant součinu matic je roven součinu determinantu, determinanty matic γ^μ a γ^ν vystupují na obou stranách rovnice a proto se vykrátí. Jako výsledek máme

$$1 = \det(-\mathbf{I}) = (-1)^N \ . \tag{61}$$

Odtud vyplývá, že N musí být sudé.

Před dalším postupem nejdříve dokážeme, že čtyři navzájem antikomutující matice γ musí být lineárně nezávislé. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že matice γ^μ se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních tří matic

$$\gamma^\mu = \sum_{\nu\neq\mu} c^\mu_\nu \gamma^\nu \tag{62}$$

Když $\rho \neq \mu$, tak musí platit

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \{\gamma^\mu \,, \gamma^\rho\} = \sum_{\nu\neq\mu} c^\mu_\nu \{\gamma^\nu \,, \gamma^\rho\} \\ 0 &= 2c^\mu_\rho g^{\rho\rho} \end{aligned} \tag{63}$$

[2]Důvodem pro tuto opatrnost je předejít často se vyskytujícímu chybnému postupu založenému na neplatném vztahu $\det(-A) = -\det(A)$.

V posledním vztahu se nesčítá přes ρ, musí však platit pro všechna tři ρ které jsou různé od μ. Protože $g^{\rho\rho}$ je nenulové, musí být rovny nule všechny c^{μ}_{ν} vstupující do (62). Pravá strana vztahu (62) je proto nulová matice, což je spor.

Když matice γ^k vynásobíme imaginární jednotkou i dostaneme matice hermitovské, přičemž se nulovost jejich stopy a lineární nezávislost nenaruší. Spolu s matici γ^0 tak máme čtyři hermitovské lineárně nezávislé matice s nulovou stopou. Ale v prostoru matic 2×2 máme k dispozici jenom tři takové matice (např. tři Pauliho matice, nebo jejich tři různé lineární kombinace). Proto je případ $N = 2$ vyloučen.

2.2.4 Reprezentace γ matic

Dlužno podotknouti, že vztahy (55) a (46) neurčují matice γ jednoznačně. Skutečně, jestli určitý soubor matic γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ vyhovuje těmto vztahům, potom i soubor

$$\gamma'^{\mu} = U\gamma^{\mu}U^{\dagger} \, , \tag{64}$$

kde U je libovolná unitární matice ($U^\dagger = U^{-1}$) $N \times N$, jim bude vyhovovat. Tato nejednoznačnost se na konečných výsledcích porovnatelných s experimentem neprojevuje a není proto nutné konkrétní tvar matic γ specifikovat. Volba konkrétních matic (podle charakteru úlohy) ale může zjednodušit výpočty. Často se používá následující výběr (Diracova reprezentace γ matic)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0_2 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0_2 \end{pmatrix} \, , \tag{65}$$

kde I_2 (0_2) je jednotková (nulová) matice 2×2 a σ_k jsou obvyklé Pauliho matice

$$\sigma_1 \equiv \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 \equiv \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 \equiv \sigma_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

splňující vztah

$$\sigma_i \sigma_j = I_2 \delta_{ij} + \mathrm{i} \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k \, , \tag{66}$$

kde totálně antisymetrický symbol ϵ_{ijk} je zafixován podmínkou $\epsilon_{123} = 1$

2.2.5 Další definice a vztahy

Ze vztahu (46) a vlastnosti stopy vyplývá, že

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \; . \tag{67}$$

Když vynásobíme vynásobíme vztah (46) složkami kovariantních vektorů a_μ a b_ν a přes Lorentzovské indexy sečteme, s přihlédnutím k definici (57) dostaneme pro Feynmanova lomítka dvou čtyřvektorů a a b vztah

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2(ab)\mathbf{I} \, . \tag{68}$$

Jednotková matice na pravé straně se často nepíše.

Diracovsky sdružený bispinor je jednořádková čtyřsloupcová matice definovaná vztahem

$$\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 . \tag{69}$$

Pomocí diracovsky sdruženého bispinoru můžeme výhodně spojit vztah pro hustotu pravděpodobnosti (40) a vztah pro prostorový vektor hustoty toku pravděpodobnosti (54) do jediného vztahu pro čtyřvektor $j^\mu \equiv (\rho, \vec{j})$

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{70}$$

splňující rovnici kontinuity v relativistickém označení $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Vycházejíc ze vztahu (43) hledejme Diracovu rovnici pro spinor $\overline{\psi}$. Po hermitovskem sdružení máme

$$-\mathrm{i}\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = 0 \ .$$

Po vynásobení této rovnice zprava maticí $-\gamma^0$, využití vztahu (55) a definice (69) máme

$$\mathrm{i}\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi} = 0 \ .$$

Po zavedení operátoru “derivace doleva” vztahem

$$\overline{\psi}\overleftarrow{\partial}_\mu = \partial_\mu \overline{\psi}$$

i jeho “Feynman slash”verze přepíšeme Diracovu rovnici pro $\overline{\psi}$ na tvar

$$\overline{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\overleftarrow{\not\partial} + m\right) = 0 \ . \tag{71}$$

Je nutno zdůraznit, že index μ numerující matice γ neznamená, že se tyto matice transformují jako komponenty kontravariantního vektoru. Matice γ se při Lorentzovych transformacích nemění. Podrobněji se otázce kovariantnosti Diracovy rovnice budeme věnovat později. Zavádí se ještě matice γ s dolním indexem

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu \ , \tag{72}$$

ale jedná se o záležitost čistě formální, zase se nejedná o veličiny které by se transformovaly jako komponenty kovariantního vektoru. Z definice (72), hodnot metrického tenzoru ($g_{00} = 1, \ g_{kk} = -1$) a vztahu (47) a (48) vyplývá, že matice s indexem dole je inverzní k odpovídající matici s indexem nahoře, t.j. že platí (přes μ se nesčítá!)

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \mathbf{I} \tag{73}$$

Vztah (67) se dá přepsat na tvar

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu \gamma^\nu\right) = 4\delta_\mu^\nu \tag{74}$$

Matice γ_5 je definována vztahem[3]

$$\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \ . \tag{75}$$

Protože různé gama matice antikomutují, můžeme tuto definici přepsat pomocí kompletně antisymetrického tenzoru $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zafixovaného podmínkou

$$\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = 1 \tag{76}$$

takto

$$\gamma_5 = \frac{\mathrm{i}}{4\,!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \ . \tag{77}$$

Počet permutací (4!) udává počet nenulových a přitom stejných členů v sumě přes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na pravé straně. My chceme jenom jeden z nich, proto jejich počtem vydělíme.

Vyznačuje se následujícími vlastnostmi, důkaz většiny z nich je triviální nebo přímočarý:

$$(\gamma_5)^2 = \mathbf{I} \ ,$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \ ,$$

Pro všechna μ:

$$\gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = \mathbf{0}, \tag{78}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5 = 0 \ ,$$

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma_5\right) = 0 \ ,$$

[3]V některých učebnicích se píše index 5 nahoře, definice je však stejná. Se spouštěním nebo zvedáním indexu u této matice není spojena žádná změna znaménka.

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = 0 \ , \tag{79}$$

Důkaz vztahu (79) je triviální pro $\mu = \nu$. Pro $\mu \neq \nu$ využijeme, že matice γ_5 je součinem všech čtyř matic γ. V tom součinu je určitě obsažena i matice index které je roven ν. S každou jinou maticí z předmětného součinu matice γ^ν antikomutuje a můžeme ji proto převyměňovat k matici se stejným indexem (při každé výměně se změní znaménko). Součin těchto dvou matic pak dá $+\mathbf{I}$ (jestli $\nu = 0$) nebo $-\mathbf{I}$. Dostáváme tak

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = \pm\ \mathrm{i}\ \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma\right) \ ,$$

kde α, β, γ jsou tři různé indexy, ze kterých ani jeden není roven ν, ale jeden z nich se určitě rovná μ. Jestliže teď proantikomutujeme matici γ^μ k odpovidající matici, jejich součin zase dá jednotkovou matici (až na případné znaménko). Zůstane nám stopa ze součinu dvou matic s různými indexy (ρ se rovná jednomu z indexů α, β, γ nerovnajícímu se μ, zatímco σ se rovná druhému indexu nerovnajícímu se μ)

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = \pm\ \mathrm{i}\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^\rho \gamma^\sigma) \ ,$$

která je podle vztahu (67) rovna nule protože $\rho \neq \sigma$.

Opakovanou aplikací vztahu (78) dostaneme

$$\underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\beta \ldots \gamma^\omega}_{n}\ \gamma_5 = (-1)^n \gamma_5\ \underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\beta \ldots \gamma^\omega}_{n} \ . \tag{80}$$

Matice vytvořena jako součin n gama matic komutuje s maticí γ_5 pro n sudé a antikomutuje pro n liché.

V Diracově reprezentaci gama matic vypadá matice γ_5 takto:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

Matice $\sigma^{\mu\nu}$ je definována vztahem

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu\right) \tag{81}$$

Bez důkazů uvádíme její vlastnosti:

$$\begin{aligned}
\sigma^{\nu\mu} &= -\sigma^{\mu\nu} \\
\sigma^{\mu\nu\dagger} &= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 \\
\mathrm{Tr}\,\sigma^{\mu\nu} &= 0 \\
\mathrm{Tr}\,(\sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho) &= 0 \\
\mathrm{Tr}\,(\sigma^{\mu\nu}\gamma_5) &= 0 \\
\mathrm{Tr}\,(\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\gamma^\rho) &= 0 \\
\mathrm{Tr}\,(\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}) &= 4\left(\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu\right)
\end{aligned} \tag{82}$$

Báze v prostoru komplexních matic 4×4

V prostoru čtvercových matic 4×4 můžeme mnoha způsoby zvolit 16 lineárně nezávislých matic, které pak tvoří bázi v tomto prostoru; libovolnou každou další matici můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci (obecně s komplexními koeficienty) těchto 16 matic. Pro nás je výhodné vybrat bázi tvořenou následujícími maticemi:

- jednotková matice I
- čtyři matice γ^μ
- matice γ_5

- čtyři matice $i\gamma^\mu\gamma_5$
- šest matic $\sigma^{\mu\nu}$, $\mu < \nu$

Tyto matice budeme označovat jedním symbolem Γ^A, $A = 1, \ldots, 16$. Kromě toho zavedeme označení Γ_A, které je v případech matic I a γ_5 totožné s Γ^A, v ostatních případech se liší spuštěním Lorentzovských indexů. Přímým výpočtem v jednotlivých případech se dá ukázat, že platí

$$\mathrm{Tr}\Gamma^A = 0 \quad \text{pro } A = 2, \ldots, 16 \text{ (vsechny matice krome } I) \tag{83}$$

$$\Gamma_A\Gamma^A = I \quad \text{(pres } A \text{ se nesčíta)} \tag{84}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma_A\Gamma^B\right) = 4\delta_A^B \qquad A, B = 1, \ldots, 16 \tag{85}$$

$$\left(\Gamma^A\right)^\dagger = \Gamma_A \tag{86}$$

To, že stopa součinu různých bázových matic je nulová, je podstatné pro důkaz toho, že námi vybrané matice mohou skutečně sloužit jako báze, t.j. že jsou lineárně nezávislé. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že matice Γ^A se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních

$$\Gamma^A = \sum_{B \neq A} c_B^A \Gamma^B$$

Po vynásobení této rovnice maticí Γ_A a výpočtu stopy dostáváme

$$4 = \sum_{B \neq A} c_B^A \, 4\delta_A^B$$

Protože suma na pravé straně probíhá jenom přes takové B pro které je Kroneckerovo delta nulové, je pravá strana rovna nule, čimž přicházíme ke sporu 4=0.

2.2.6 Diracova rovnice ve schrödingerovském tvaru

Diracovu rovnici (56) přepišme na tvar

$$i\gamma^0\partial_0\psi = -i\gamma^k\partial_k\psi + m\psi$$

Po vynásobení tohoto vztahu maticí γ^0 zleva dostáváme

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_D\psi$$

kde jsme zavedli operátor

$$\hat{H}_D = \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta$$

vyjádřený pomocí matic

$$\beta \equiv \gamma^0$$
$$\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$$

V Diracově reprezentaci γ matic je

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \tag{87}$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0_2 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0_2 \end{pmatrix}, \tag{88}$$

Spin diracovské částice

Teď, když máme přepsánu Diracovu rovnici do formálně stejného tvaru jako má Schrödingerova rovnice, můžeme využít některé poznatky z nerelativistické kvantové mechaniky. Víme, že nutnou podmínkou pro to, aby určitá veličina měla ve stacionárním stavu ostrou hodnotu, je že její operátor musí komutovat s Hamiltonovým operátorem, kterým je v našem případě

$$\hat{H}_D = \alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_z \hat{p}_z + m\beta$$

Pojďme tedy zjistit, jestli je orbitální moment hybnosti takovou veličinou. Zaměříme se na jeho z-ovou komponentu, které odpovídá operátor

$$\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$$

a počítáme

$$\left[\hat{H}_D, \hat{L}_z\right] = \alpha_x \left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right] + \alpha_y \left[\hat{p}_y, \hat{L}_z\right] = -\mathrm{i}\left(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x\right) = -\mathrm{i}\left(\vec{\alpha} \times \hat{\vec{p}}\right)_z$$

Operátor L_z tudíž nekomutuje s H_D, průmět orbitálního momentu hybnosti není zachovávající se veličinou. Zaveďme teď vektor matic

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

a počítejme komutátor H_D s jeho třetí složkou

$$\left[\hat{H}_D, \Sigma_z\right] = \hat{p}_x \left[\alpha_x, \Sigma_z\right] + \hat{p}_y \left[\alpha_y, \Sigma_z\right] .$$

Pro první komutátor na pravé straně postupně dostáváme

$$[\alpha_x, \Sigma_z] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \\ \sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Po využití (66) vychází

$$[\alpha_x, \Sigma_z] = -2\mathrm{i}\alpha_y$$

Podobně by se ukázalo, že

$$[\alpha_y, \Sigma_z] = 2\mathrm{i}\alpha_x$$

Celkově dostáváme

$$\left[\hat{H}_D, \Sigma_z\right] = -2\mathrm{i}\left(\hat{p}_x \alpha_y - \hat{p}_y \alpha_x\right) = 2\mathrm{i}\left(\vec{\alpha} \times \hat{\vec{p}}\right)_z$$

Když teď zavedeme matici

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

a operátor

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \vec{S}$$

na základě výše odvozených výsledků zjistíme, že

$$\left[\hat{H}_D, \hat{J}_z\right] = 0.$$

Podobně by jsme se přesvědčili, že i ostatní dvě komponenty operátoru $\hat{\vec{J}}$ komutují s $\hat{H}_D$. Střední hodnoty odpovídajících fyzikálních veličin, komponent vektoru $\vec{J}$, jsou konstantní. Můžeme je proto interpretovat jako komponenty zachovávajícího se celkového momentu hybnosti, který je součtem orbitálního a spinového momentu hybnosti. Možné průměty spinového momentu hybnosti na vybranou osu (v našem případě se jedná o osu z) jsou rovny vlastním hodnotám matice S_z, která je v námi používané reprezentaci diagonální

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & -\frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{89}$$

a proto jsou její vlastní hodnoty vidět přímo na diagonále. Diracova rovnice tudíž popisuje částici se spinem $\frac{1}{2}$.

2.2.7 Řešení Diracovy rovnice pro volnou částici

Stacionární řešení s ostrou hodnotou hybnosti I

Hledejme stacionární řešení Diracovy rovnice ve tvaru rovinné vlny

$$\psi_{\vec{p}}^{(+)}(x) = c\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\, u(\vec{p}), \tag{90}$$

kde $p^\mu \equiv (E_{\vec{p}}, \vec{p})$, $\vec{p}$ je hybnost částice a $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ je její energie. Toto řešení se nazývá kladně frekvenčním, protože závislost exponenty na čase je stejná jak jsme zvyklí z nerelativistické kvantové mechaniky. Jednosloupcová čtyřřádková matice $u(\vec{p})$, nazývaná spinorem, má komponenty které už od souřadnic a času nezávisí a c je normalizační konstanta. V naší normalizaci na konečný objem ji zvolíme, podobně jako u skalárního pole, rovnu

$$c = \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} \tag{91}$$

Protože požadujeme aby výraz $\rho = \psi_{\vec{p}}^{(+)\dagger}\psi_{\vec{p}}^{(+)} = c^2 u^\dagger u$ představoval hustotu pravděpodobnosti, pro kterou platí

$$\int_{(V)} \rho\, \mathrm{d}^3\mathrm{x} = 1,$$

pro normování spinoru $u(\vec{p})$ vychází podmínka

$$u^\dagger(\vec{p})u(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}. \tag{92}$$

Tato normalizace je v souladu s tím, že ρ, jako nultá komponenta čtyřvektoru, se musí transformovat při LT stejně jako energie.

Po dosazení (90) do (56), zderivování exponenty s výsledkem $\partial_\mu \exp\{-\mathrm{i}px\} = -\mathrm{i}p_\mu \exp\{-\mathrm{i}px\}$ a jejím vykrácení dostáváme algebraickou rovnici pro bispinor $u(\vec{p})$

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0\ . \tag{93}$$

Napišme ještě rovnici pro diracovsky sdružený bispinor $\overline{u} = u^\dagger\gamma^0$. Vztah (93) nejdřív hermitovsky sdružíme

$$u^\dagger(\not{p}^\dagger - m) = 0.$$

Pro každou matici γ, a tedy i pro jejich lineární kombinaci $\not{p} = p_\mu\gamma^\mu$, platí vztah (55). Můžeme proto psát

$$u^\dagger(\gamma^0\not{p}\gamma^0 - m) = 0.$$

Nakonec tuto rovnost vynásobíme zprava maticí γ^0, využijeme $(\gamma^0)^2 = I$ a vytkneme γ^0 před závorku, kde sa spojí s $u^\dagger$. Dostáváme tak

$$\overline{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0. \tag{94}$$

Rozepišme teď ve vztahu (93) člen $\not{p}$ podrobněji

$$(E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{\gamma}.\vec{p} - m)u(\vec{p}) = 0 \tag{95}$$

a napišme si i vztah k němu hermitovsky sdružený, přičenž využijeme, že matice γ^0 je hermitovská a matice γ^k jsou antihermitovské. Dostáváme

$$u^\dagger(\vec{p})(E_{\vec{p}}\gamma^0 + \vec{\gamma}.\vec{p} - m) = 0. \tag{96}$$

Vynásobíme teď vztah (95) zleva bispinorem $u^\dagger$, vztah (96) zprava bispinorem u a takto vzniklé vztahy sečteme. Členy s hybností se vyruší a po úpravě dostáváme

$$\overline{u}(\vec{p})u(\vec{p}) = \frac{m}{E_{\vec{p}}}u^\dagger(\vec{p})u(\vec{p}) = 2m,$$

kde jsme využili i vztah (92). Kvůli pozdějšímu využití napišme si, jak vypadá vztah (96) po záměně $\vec{p} \to -\vec{p}$

$$u^\dagger(-\vec{p})(E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{\gamma}.\vec{p} - m) = 0. \tag{97}$$

Stacionární řešení s ostrou hodnotou hybnosti II

Druhé partikulární řešení Diracovy rovnice budeme hledat ve tvaru

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}}(x) = c\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\, v(\vec{p})$$

Toto řešení, které je vlastní funkcí operátoru $\hat{\vec{p}}$ s vlastní hodnotou $(-\vec{p})$, se nazýva záporně frekvenčním. Podobně jako předtím dostáváme

$$v^\dagger(\vec{p})v(\vec{p}) = 2E_{\vec{p}}$$

$$(\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0 \tag{98}$$

$$\overline{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0. \tag{99}$$

$$(E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{\gamma}.\vec{p} + m)v(\vec{p}) = 0 \tag{100}$$

$$\overline{v}(\vec{p})v(\vec{p}) = -\frac{m}{E_{\vec{p}}}v^\dagger(\vec{p})v(\vec{p}) = -2m,$$

$$v^\dagger(-\vec{p})(E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{\gamma}.\vec{p} + m) = 0. \tag{101}$$

Vztahy mezi spinory kladně frekvenčního a záporně frekvenčního řešení použijeme mnohokrát v budoucnu.

$$\overline{v}(\vec{p})u(\vec{p}) = 0 \qquad \text{a} \qquad \overline{u}(\vec{p})v(\vec{p}) = 0$$

První z nich odvodíme tak, že od vztahu (99) vynásobeného zprava spinorem u odečteme vztah (93) vynásobený spinorem $\overline{v}$ zleva. Druhý odvodíme podobně pomocí vztahů (94) a (98).[4]

$$v^\dagger(-\vec{p})u(\vec{p}) = 0 \qquad \text{a} \qquad u^\dagger(-\vec{p})v(\vec{p}) = 0$$

Tady získáme první vztah tak, že rovnost (95) vynásobíme zleva spinorem $v^\dagger(-\vec{p})$ a odečteme od toho rovnost (101) vynásobenou zprava spinorem $u(\vec{p})$. Podobně postupujeme při odvozování druhého vztahu s využitím rovností (100) a (97).

Dvakrát více řešení Jestli chceme najít konkrétní řešení rovnice (93) pro spinor u a rovnice (98) pro spinor v musíme si zvolit reprezentaci γ matic. V učebnicích se většinou volí Diracova reprezentace, kde jsou tyto matice vyjádřeny pomocí Pauliho σ matic. Pro každý ze spinorů pak dostáváme dvě lineárně nezávislá řešení označena jako $u(\vec{p}, s)$ a $v(\vec{p}, s)$, kde index s nabývá hodnoty 1 a 2.[5] Dvě řešení odpovídají dvěma různým spinovým stavům. Tato situace se opakuje i když si vybereme jakoukoli reprezentaci γ matic. Dvě lineárně nezávislá řešení se vždy vybírají tak, aby pro $s' \neq s$ platila podmínka ortogonality ve tvaru

$$u^\dagger(\vec{p}, s')u(\vec{p}, s) = v^\dagger(\vec{p}, s')v(\vec{p}, s) = 0$$

[4]Sečtením zmiňovaných vztahů místo odečtení bychom dostali vztahy $\bar{v}\not{p}u = \bar{u}\not{p}v = 0$, ty ale nebudeme potřebovat.

[5]Abychom se vyhnuli záměně s maticovým indexem, index označující řešení jsme umístili do závorky.

S přihlédnutím k existenci dvou různých řešení pro spinory u i v a jejich ortogonalitě přepisujeme doposud odvozené vztahy takto:

$$u^\dagger(\vec{p},s')u(\vec{p},s) = 2E_{\vec{p}}\ \delta_{s',s} \tag{102}$$
$$\bar{u}(\vec{p},s')u(\vec{p},s) = 2m\ \delta_{s',s} \tag{103}$$
$$v^\dagger(\vec{p},s')v(\vec{p},s) = 2E_{\vec{p}}\ \delta_{s',s} \tag{104}$$
$$\bar{v}(\vec{p},s')v(\vec{p},s) = -2m\ \delta_{s',s} \tag{105}$$
$$\bar{v}(\vec{p},s')u(\vec{p},s) = 0 \tag{106}$$
$$\bar{u}(\vec{p},s')v(\vec{p},s) = 0 \tag{107}$$
$$v^\dagger(-\vec{p},s')u(\vec{p},s) = 0 \tag{108}$$
$$u^\dagger(-\vec{p},s')v(\vec{p},s) = 0 \tag{109}$$

Obecné řešení Diracovy rovnice pro volnou částici

Výše zmiňované partikulární řešení jsou platná pro všechny vektory hybnosti ze spektra plynoucího z naší normalizace na konečný objem. Každá lineární kombinace těchto řešení bude proto řešením Diracovy rovnice pro volnou částici

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p},s=1,2} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} \left[b_{\vec{p},s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} u(\vec{p},s) + d^*_{\vec{p},s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} v(\vec{p},s) \right] \ , \tag{110}$$

Konstanty $b_{\vec{p},s}$ a $d_{\vec{p},s}$ jsou úplně libovolné. V případě, že by byla zadána počáteční podmínka $\psi(\vec{x},t=0)=\chi(\vec{x})$ bylo by možné tyto konstanty z ní určit, ale tím se zabývat nebudeme.

Projekční operátory (matice)

V dalších vztazích se budou vyskytovat direktní součiny typu $u(\vec{p},s)\otimes\bar{v}(\vec{p},s)$, které představují čtvercovou matici 4x4 která má v a-tem řádku b-tého sloupce prvek $u_a(\vec{p},s)\bar{v}_b(\vec{p},s)$.

Projekční operátory které z lineární kombinace spinorů vybírají část která obsahuje spinory jednoho typu (u nebo v) definujeme vztahy

$$P_u(\vec{p})u(\vec{p},s) = u(\vec{p},s) \qquad P_v(\vec{p})v(\vec{p},s) = v(\vec{p},s) \qquad P_u(\vec{p})v(\vec{p},s) = 0 \qquad P_v(\vec{p})u(\vec{p},s) = 0$$

Platí taky

$$P_u(\vec{p}) + P_v(\vec{p}) = 1 \qquad P_u(\vec{p})P_v(\vec{p}) = 0 \qquad P_u^2(\vec{p}) = P_u(\vec{p}) \qquad P_v^2(\vec{p}) = P_v(\vec{p})$$

Projekční operátory můžeme vyjádřit dvěma způsoby. První využívá to, že bispinory splňují rovnice (93) a (98), t.j., že platí $\not{p}u = mu$ a $\not{p}v = -mv$. Máme

$$P_u(\vec{p}) = \frac{\not{p}+m}{2m} \tag{111}$$
$$P_v(\vec{p}) = -\frac{\not{p}-m}{2m}$$

Druhý způsob využívá platnost vztahů (103), (105), (106) a (107). Na jejich základě se můžeme lehce přesvědčit, že níže uvedené matice mají taky vlastnosti projekčních operátorů.

$$P_u(\vec{p}) = \frac{1}{2m}\sum_{s'=1,2} u(\vec{p},s')\otimes\bar{u}(\vec{p},s') \ , \tag{112}$$
$$P_v(\vec{p}) = -\frac{1}{2m}\sum_{s'=1,2} v(\vec{p},s')\otimes\bar{v}(\vec{p},s') \ .$$

Porovnáním vztahů (111) a (112) získáme vztahy, které se často používají ve výpočtech účinných průřezů reakcí s nepolarizovanými fermiony:

$$\sum_{s=1,2} u_a(\vec{p},s)\bar{u}_b(\vec{p},s) = (\not{p}+m)_{ab} \tag{113}$$
$$\sum_{s=1,2} v_a(\vec{p},s)\bar{v}_b(\vec{p},s) = (\not{p}-m)_{ab}$$

kde a a b jsou maticové indexy.

Spinory u a v v Diracově reprezentaci γ matic

Budeme nejdřív hledat řešení rovnice (95). Protože v reprezentaci (65) jsou γ matice vyjádřeny pomocí matic 2×2, je výhodné zapsat taky čtyřřádkovou matici $u(\vec{p})$ pomocí dvou dvouřádkových

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \eta(\vec{p}) \end{pmatrix} .$$

Rovnice (95) přechází na soustavu dvou lineárních homogenních rovnic pro dvě neznámé χ a η

$$\begin{aligned} (E_{\vec{p}} - m)\,\chi \ - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\eta &= 0_2 \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi \ + (E_{\vec{p}} + m)\,\eta &= 0_2 \end{aligned}$$

Víme, že podmínkou řešitelnosti je v tomto případě nulovost determinantu soustavy, o čem se snadno přesvědčíme s využitím vztahu $(\sigma.\vec{p})^2 = \vec{p}^2$. V principu je jedno, kterou z rovnic použijeme na vyjádření jedné neznámé pomocí druhé (homogenní soustava nefixuje neznamé absolutně). Kvůli tomu, abychom se vyhnuli výskytu výrazu $(E_{\vec{p}} - m)$ ve jmenovateli (pro pomalé částice se blíží k nule) volíme rovnici druhou. Dostaneme tak

$$\eta = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_{\vec{p}} + m}\,\chi$$

Protože χ a η jsou dvouřádkové matice, dostáváme dvě lineárně nezávislá řešení, což zdůrazníme zavedením indexu $s = 1, 2$. Existence dvou nezávislých řešení souvisí s tím, že Diracova rovnice popisuje fermiony se spinem 1/2. S ohledem na to, abychom splnili normalizační vztah (102) volíme

$$\chi_1 = \sqrt{E_{\vec{p}} + m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \chi_2 = \sqrt{E_{\vec{p}} + m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomu odpovídají dva spinory $u(\vec{p}, s)$

$$u(\vec{p},1) = \sqrt{E_{\vec{p}} + m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_{\vec{p}}+m} \\ \frac{p_x + \mathrm{i}p_y}{E_{\vec{p}}+m} \end{pmatrix} \qquad\qquad u(\vec{p},2) = \sqrt{E_{\vec{p}} + m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - \mathrm{i}p_y}{E_{\vec{p}}+m} \\ -\frac{p_z}{E_{\vec{p}}+m} \end{pmatrix}$$

Řešení $s = 1$ ($s = 2$) popisuje částici, která má ve své klidové soustavě ($\vec{p} = 0$) průmět spinového momentu hybnosti na os z roven $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$).

Podobně určíme spinor v, který vystupuje v záporně frekvenčním řešení Diracovy rovnice. Znovu ho rozepíšeme pomocí dvou dvourozměrných spinorů

$$v(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \eta(\vec{p}) \end{pmatrix} .$$

Po dosazení do rovnice (100) dostáváme

$$\begin{aligned} (E_{\vec{p}} + m)\,\chi \ - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\eta &= 0_2 \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi \ + (E_{\vec{p}} - m)\,\eta &= 0_2 \end{aligned}$$

Z podobných důvodů jako výše použijeme teď první rovnici a píšeme

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_{\vec{p}} + m}\,\eta \tag{114}$$

Dvě lineárně nezávislá řešení dostaneme volbou

$$\eta_1 = \sqrt{E_{\vec{p}} + m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \eta_2 = \sqrt{E_{\vec{p}} + m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odpovídající bispinory jsou

$$v(\vec{p},1) = \sqrt{E_{\vec{p}}+m}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E_{\vec{p}}+m} \\ \frac{p_x+\mathrm{i}p_y}{E_{\vec{p}}+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v(\vec{p},2) = \sqrt{E_{\vec{p}}+m}\begin{pmatrix} \frac{p_x-\mathrm{i}p_y}{E_{\vec{p}}+m} \\ -\frac{p_z}{E_{\vec{p}}+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.8 Relativistická kovariance Diracovy rovnice pro volnou částici

Einsteinův princip relativity vyžaduje, aby se tvar Diracovy rovnice (58), zapsané podrobněji jako

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^{\mu}} - m\psi(x) = 0 \ , \tag{115}$$

nezměnil po provedení Lorentzovy transformace

$$x'^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\, x^{\mu} \ , \tag{116}$$

t.j. aby platilo taky (sčítací index μ opatříme taky čárkou, i když na jeho označení nezáleží)

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu'}\frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'^{\mu'}} - m\psi'(x') = 0 \ . \tag{117}$$

Připouští se přitom, že vlnová funkce (Diracův bispinor) ψ se při transformaci (116) mění. Musí se však transformovat tak, aby se pozorovatelné veličiny z ní vypočtené patřičně transformovaly. Například, hustota toku pravděpodobnosti (70) se musí transformovat jako čtyřvektor. Transformaci vlnové funkce předpokládáme ve tvaru

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \tag{118}$$

kde $S(\Lambda)$ je čtvercová matice, prvky které závisí od transformační matice Λ. Dokázat relativistickou kovarianci Diracovy rovnice znamená dokázat existenci matice S. Budeme postupovat tak, že odvodíme rovnici, kterou musí matice S splňovat, aby z rovnice (115) vyplynula rovnice (117) a pak ukážeme, že taková matice existuje pro všechny třídy Lorentzových transformací. Kvůli stručnosti nepíšeme v dalším argumenty u ψ, ψ' a S.

Vychazime z rovnice (115). Dosadíme do ní

$$\psi = S^{-1}\psi'$$

a využijeme, že podle pravidla pro derivování složené funkce více proměnných platí

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial\psi'}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\,\frac{\partial\psi'}{\partial x'^{\mu'}} \ .$$

Dostáváme tak

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}S^{-1}\Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\,\frac{\partial\psi'}{\partial x'^{\mu'}} - mS^{-1}\psi' = 0 \ .$$

Po vynásobení této rovnice zleva maticí S máme

$$\mathrm{i}\Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\, S\gamma^{\mu}S^{-1}\frac{\partial\psi'}{\partial x'^{\mu'}} - m\psi' = 0 \ .$$

Srovnáním této rovnice se (117) vidíme, že musí platit

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\, S\gamma^{\mu}S^{-1} = \gamma^{\mu'} \ ,$$

což můžeme přepsat na tvar

$$S^{-1}\gamma^{\mu'}S = \Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\,\gamma^{\mu} \ . \tag{119}$$

Tento vztah představuje čtyři ($\mu' = 0,1,2,3$) rovnice pro určení matice S. Z nich se dají odvodit další vztahy, které budou užitečné později. Napišme nejdřív vztah hermitovsky sdružený ke (119):

$$S^{\dagger}(\gamma^{\mu'})^{\dagger}(S^{-1})^{\dagger} = \Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\,\gamma^{\mu\dagger} \ .$$

Po jeho vynásobení zleva i zprava maticí γ^0 nabyde pravá strana stejný tvar jako v rovnici (119), můžeme ji tedy nahradit levou stranou posledně jmenované. Současně použijeme $(\gamma^{\mu'})^\dagger = \gamma^0\gamma^{\mu'}\gamma^0$ a dostáváme

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^{\mu'} \gamma^0 (S^{-1})^\dagger \gamma^0 = S^{-1}\gamma^{\mu'} S \ .$$

Po vynásobení této rovnice zleva maticí S a zprava součinem matic $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0$ máme (současně přejmenujeme μ' na μ)

$$(S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)\gamma^\mu = \gamma^\mu (S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0) \ .$$

Tento vztah říká, že ozávorkovaný součin matic musí komutovat se všemi maticemi γ^μ. Ze souboru 16 bazových matic tomu vyhovuje jenom jednotková matice. Uvažovaný součin musí být tedy násobkem jednotkové matice

$$S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = b\mathbf{I} \ . \tag{120}$$

Z tohoto vztahu taky plyne, že

$$S^\dagger S = b\gamma^0 S^{-1}\gamma^0 S \tag{121}$$

Vztah (121) využijeme dvěma způsoby. Nejdříve nahradíme součin matic na pravé straně podle rovnice (119) a pak vypočteme stopu levé i pravé strany. Dostáváme

$$\mathrm{Tr}(S^\dagger S) = b\Lambda^0_{\ \mu}\ \mathrm{Tr}(\gamma^0\gamma^\mu) = 4b\Lambda^0_{\ 0} \ . \tag{122}$$

Protože stopa na levé straně je kladné číslo, b musí být reálné a musí také platit

$$b\Lambda^0_{\ 0} > 0 \ . \tag{123}$$

Z rovnosti matic (121) vyplývá rovnost determinantu

$$\det(S^\dagger S) = \det(b\gamma^0 S^{-1}\gamma^0 S) \ .$$

Z toho po úpravách (využijeme, že determinant součinu matic je roven součinu jejich determinantu a vztah $\det S^\dagger = (\det S)^*$) dostáváme pro modul (=absolutní hodnota komplexního čísla) determinantu S vyjádření

$$|\det S| = b^2 \ . \tag{124}$$

Transformace Diracovy vlnové funkce při vlastních ortochronních transformacích

Při hledání matice $S(\Lambda)$, která transformuje Diracovu vlnovou funkci $\psi(x)$ při vlastních ortochronních Lorentzových transformacích využijeme, že tyto transformace tvoří Lieovu grupu. Každou takovouto transformaci můžeme složit z mnoha (v limitě nekonečna mnoha) "malých"(v limitě infinitezimálně malých) transformací. Uvažujme proto nejdřív takovouto malou transformaci, t.j. transformaci, která se jen málo liší od identické. Její matici píšeme ve tvaru

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \mu} = \delta^{\mu'}_{\mu} + \varepsilon^{\mu'}_{\ \mu} \ , \tag{125}$$

kde $|\varepsilon^{\mu'}_{\ \mu}| \ll 1$. V dalším bude výhodné pracovat s transformační maticí se dvěma dolními indexy definovanou vztahem

$$\Lambda_{\alpha\mu} = g_{\alpha\mu'}\Lambda^{\mu'}_{\ \mu} \ .$$

Podobně definujeme i $\varepsilon_{\alpha\mu}$. Ze vztahu (125) máme

$$\Lambda_{\alpha\mu} = g_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\mu} \ . \tag{126}$$

Obecný požadavek invariantnosti metrického tenzoru

$$g^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu}\,\Lambda^{\nu'}_{\ \nu}\, g^{\mu\nu} \ ,$$

který zaručuje neměnnost skalárního součinu dvou čtyřvektorů při Lorentzově transformaci, můžeme přepsat na tvar

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\beta\nu}g^{\mu\nu} \ .$$

Když sem dosadíme matici (126) a zanedbáme součiny $\varepsilon_{\alpha\mu}\varepsilon_{\beta\nu}$, které jsou druhého řádu v malosti, po triviálních úpravách dostáváme, že matice popisující odchylku Lorentzovy transformace od identické musí být antisymetrická

$$\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} = 0 \ .$$

Při Lorentzových transformacích málo se lišících od identické, matice S se bude málo lišit od jednotkové

$$S = \mathbf{I} + \delta S \ . \tag{127}$$

Matice k ní inverzní je v uvazovaném přiblížení rovna

$$S^{-1} = \mathbf{I} - \delta S \ . \tag{128}$$

Skutečně, po vynásobení (127) s (128) dostaneme $\mathbf{I} - (\delta S)^2$, přičemž v našem přiblížení zanedbáváme členy, které obsahují změny v kvadrátu. Teď najdeme vztah, kterému musí vyhovovat matice δS. Nejdřív přepíšeme vztah (119) na tvar

$$S^{-1}\gamma_\alpha S = \Lambda_{\alpha\beta}\gamma^\beta \ , \tag{129}$$

a dosadíme do něj ze vztahu (126), (127) a (128). Po zanedbání kvadratického členu v δS dostáváme

$$\gamma_\alpha(\delta S) - (\delta S)\gamma_\alpha = \gamma^\beta \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Odchylka matice S od jednotkové matice je úměrná parametrům $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\delta S = A^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \ . \tag{130}$$

Koeficienty úměrnosti $A^{\mu\nu}$ jsou matice. Vzhledem k antisymetričnosti matice ε stačí se omezit na matice svázané vztahy $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, kterých máme šest lineárně nezávislých. Ze souboru šestnácti lineárně nezávislých matic které tvoří bázi v Diracově maticovém prostoru, tomu vyhovují jenom matice $\sigma^{\mu\nu}$ nebo jejich násobky

$$A^{\mu\nu} = k\sigma^{\mu\nu}. \tag{131}$$

$$k\varepsilon_{\mu\nu}\left[\gamma_\alpha, \sigma^{\mu\nu}\right] = \gamma^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{132}$$

Komutátor matic na levé straně je roven

$$[\gamma_\alpha, \sigma^{\mu\nu}] = 2\mathrm{i}(\delta^\mu_\alpha\gamma^\nu - \delta^\nu_\alpha\gamma^\mu)$$

V dalším využijeme, že vztah musí platit pro libovolnou infinitezimální transformaci, tj. pro libovolné $\varepsilon_{\mu\nu}$. Upravíme proto pravou stranu tak, aby v ní vystupovalo taky $\varepsilon_{\mu\nu}$.

$$\gamma^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu}\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\gamma^\beta = \varepsilon_{\mu\nu}\delta^\mu_\alpha\gamma^\nu$$

Levá strana vztahu (132) obsahuje $\varepsilon_{\mu\nu}$ kontrahováno s antisymetrickým výrazem, stejného tvaru musíme docílit i na pravé straně. Proto pokračujeme v úpravách

$$\gamma^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\gamma^\nu + \delta^\nu_\alpha\gamma^\mu + \delta^\mu_\alpha\gamma^\nu - \delta^\nu_\alpha\gamma^\mu\right) = \varepsilon_{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\gamma^\nu - \delta^\nu_\alpha\gamma^\mu\right)$$

Po dosazení do rovnice (132) a porovnání výrazů u $\varepsilon_{\mu\nu}$ dostáváme

$$2\mathrm{i}k(\delta^\mu_\alpha\gamma^\nu - \delta^\nu_\alpha\gamma^\mu) = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\gamma^\nu - \delta^\nu_\alpha\gamma^\mu).$$

$$k = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$S = \mathbf{I} - \frac{\mathrm{i}}{4}\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \tag{133}$$

Konečnou (neinfinetizimální) transformaci

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \mu} = \delta^{\mu'}_{\mu} + \omega^{\mu'}_{\ \mu}\,, \tag{134}$$

můžeme přibližně nahradit posloupností n "malých" transformací s $\varepsilon_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}/n$, pričemž pro matici transformující vlnovou funkci při konečné transformaci bude platit

$$S \approx \left(\mathbf{I} - \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}{n}\right)^n$$

V limitě $n \to \infty$ se vztah stává přesným a podle definice exponenty máme

$$S = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right\}$$

Protože argument tu vystupující exponenty je matice s nulovou stopou, platí $\det S = 1$, z čehož s přihlédnutím k vztahům (124) a (123) plyne, že při vlastních ortochronních transformacích je $b = 1$.

Transformace Diracovy vlnové funkce pri časové inverzi

$$\begin{aligned}\Lambda^{0}_{\ 0} &= -1\\ \Lambda^{k}_{\ k} &= 1\\ \Lambda^{\mu'}_{\ \mu} &= 0\end{aligned}$$

Vztah (119) implikuje

$$\begin{aligned}S^{-1}\gamma^0 S &= -\gamma^0\\ S^{-1}\gamma^k S &= \gamma^k\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}\gamma^0 S &+ S\gamma^0 = 0\\ \gamma^k S &- S\gamma^k = 0\end{aligned}$$

Jedinou maticí ze šestnácti bázových matic která antikomutuje s γ^0 a komutuje se všemi třemi γ^k je matice $\mathrm{i}\gamma^0\gamma_5$. Matice udávající transformaci Diracovy vlnové funkce při časové inverzi musí být proto násobkem této matice

$$S_T = \mathrm{i}\lambda_T\gamma^0\gamma_5. \tag{135}$$

Při opakované časové inverzi se vrátíme k původnímu toku času. Proto kvadrát matice S_T musí být roven jednotkové matici. Odtud dostáváme

$$\lambda_T^2 = 1.$$

Konstantu λ_T nazýváme časovou paritou. Může nabývat hodnotu +1 nebo -1 a pro daný typ částic musí být určena experimentálně. Matice hermitovsky sdružená k matici (135)

$$S_T^\dagger = -\mathrm{i}\lambda_T\gamma_5\gamma^0 = \mathrm{i}\lambda_T\gamma^0\gamma_5,$$

je rovna původní matici, která je tudíž hermitovská. Navíc je i unitární

$$S_T^\dagger S_T = \mathbf{I}.$$

Ze vztahu (122) plyne $b\Lambda^0_{\ 0} = 1$ a

$$b_T = -1 \tag{136}$$

Transformace Diracovy vlnové funkce při prostorové inverzi

$$\Lambda^0{}_0 = 1$$
$$\Lambda^k{}_k = -1$$
$$\Lambda^{\mu'}{}_\mu = 0$$

Vztah (119) implikuje

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^0 S &= \gamma^0 \\ S^{-1}\gamma^k S &= -\gamma^k \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} \gamma^0 S &- S\gamma^0 = 0 \\ \gamma^k S &+ S\gamma^k = 0 \end{aligned}$$

Jedinou maticí ze šestnácti bázových matic která komutuje s γ^0 a antikomutuje se všemi třemi γ^k je matice γ^0. Matice udávající transformaci Diracovy vlnové funkce při prostorové inverzi musí být proto násobkem této matice

$$S_P = \lambda_P \gamma^0. \tag{137}$$

$$\lambda_P^4 = 1.$$

Konstanta λ_P může nabývat hodnoty +1, -1, i, -i. Matice hermitovsky sdružená k matici (137) je rovna

$$S_P^\dagger = \lambda_P^* \gamma^0,$$

odkud plyne, že matice S_P není hermitovská[6], je však unitární

$$S_P^\dagger S_P = \mathbf{I}.$$

Ze vztahu (122) plyne $b\Lambda^0{}_0 = 1$ a

$$b_P = 1 \tag{138}$$

2.2.9 Transformace výrazů typu $\overline{\psi}\mathbf{\Gamma^A}\psi$

Pod Γ^A se rozumí některá ze šestnácti matic které jsme vybrali jako prvky báze v prostoru matic 4×4. Naše volba byla motivována hlavně tím, že při ní mají výrazy $\overline{\psi}\Gamma^A\psi$ dobře definované vlastnosti při Lorentzových transformacích. V literatuře se proto nazývají bilineárními kovarianty.

V dalším budeme potřebovat transformační vztah pro diracovsky sdruženou vlnovou funkci. Nejdřív napíšeme vztah hermitovsky sdružený ke vztahu (118)

$$\psi'^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger$$

a pak mezi členy na pravé straně vložíme jednotkovou matici zapsanou ve tvaru $\gamma^0\gamma^0$ a vztah vynásobíme zprava maticí γ^0. Dostáváme tak

$$\overline{\psi'} = \overline{\psi}\gamma^0 S^\dagger \gamma^0,$$

co můžeme s využitím (120) přepsat na konečný tvar

$$\overline{\psi'}(x') = b\,\overline{\psi}(x) S^{-1}. \tag{139}$$

Vyšetříme teď transformační vlastnosti některých bilineárních kovariantů.

<u>Kovariant $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \overline{\psi}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$</u>

[6]Proto se částicím popsaným Diracovou rovnicí nedá připsat prostorová parita, v tabulkách částic označovaná jako P. Dá se však ukázat, že vnitřní parita soustavy částice–antičástice je rovna (-1).

Při úpravě použijeme vztahy (118) a (139):

$$S'(x') = \overline{\psi'}(x')\psi'(x') = b\,\overline{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = b\,S(x)$$

Kovariant $S(x)$ se podle tohoto výsledku chová jako skalár (nemění se, je invariantem) při ortochronních Lorentzových transformacích (boosty, prostorové rotace, prostorové zrcadlení), kdy je $b = 1$ a mění znaménko při neortochronních transformacích obsahujících zrcadlení času ($b = -1$).

Kovariant $\mathbf{V}^{\mu}(\mathbf{x}) = \overline{\psi}(\mathbf{x})\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{x})$

$$V'^{\,\mu'}(x') = \overline{\psi'}(x')\gamma^{\mu'}\psi'(x') = b\,\overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma^{\mu'}S\,\psi(x)$$

Pro výraz $S^{-1}\gamma^{\mu'}S$ použijeme vztah (119) a dostáváme

$$V'^{\mu'}(x') = b\,\Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\,V^{\mu}(x).$$

Tento kovariant se transformuje při ortochronních transformacích ($b = 1$) jako kontravariantní čtyřvektor, při transformacích obsahujících zrcadlení času ($b = -1$) jeho komponenty přibírají navíc znaménko mínus.

Kovariant $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \overline{\psi}(\mathbf{x})\gamma_{\mathbf{5}}\psi(\mathbf{x})$

$$P'(x') = \overline{\psi'}(x')\gamma_5\,\psi'(x') = b\,\overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5\,S\,\psi(x)$$

Pro matici γ_5 použijeme alternativní vyjádření (77) s tím, že očárkujeme sčítací indexy a mezi sousední gama matice vložíme jednotkovou matici ve tvaru SS^{-1}.

$$S^{-1}\gamma_5\,S = \frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}S^{-1}\gamma^{\alpha'}S\,S^{-1}\gamma^{\beta'}S\,S^{-1}\gamma^{\gamma'}S\,S^{-1}\gamma^{\delta'}S$$

Čtyřnásobným použitím vztahu (119) dostáváme

$$S^{-1}\gamma_5\,S = \frac{\mathrm{i}}{4!}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\ \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\Lambda^{\alpha'}_{\ \ \alpha}\ \Lambda^{\beta'}_{\ \ \beta}\ \Lambda^{\gamma'}_{\ \ \gamma}\ \Lambda^{\delta'}_{\ \ \delta}\ = \frac{\mathrm{i}}{4!}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \det\Lambda = \gamma_5\ \det\Lambda$$

a nakonec

$$P'(x') = b\ \det\Lambda\ P(x).$$

Při vlastních transformacích ($\det\Lambda = 1$) se tato veličina transformuje stejně jako skalár $S(x)$, při nevlastních transformacích ($\det\Lambda = -1$) přibírá navíc záporné znaménko. Jedná se o pseudoskalár.

Kovariant $\mathbf{A}^{\mu}(\mathbf{x}) = \overline{\psi}(\mathbf{x})\gamma_{\mathbf{5}}\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{x})$

$$A'^{\mu'}(x') = b\ \det\Lambda\,\Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\ A^{\mu}(x)$$

Kovariant $\mathbf{T}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \overline{\psi}(\mathbf{x})\sigma^{\mu\nu}\psi(\mathbf{x})$

$$T'^{\mu'\nu'}(x') = b\,\Lambda^{\mu'}_{\ \ \mu}\ \Lambda^{\nu'}_{\ \ \nu}\ T^{\mu\nu}(x)$$

2.3 Diracova rovnice pro částici v obecném elektromagnetickém poli

Vyjdeme z Diracovy rovnice pro volnou částici (56)

$$(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi(x) = 0,$$

použijeme princip minimální elektromagnetické interakce (32)

$$\partial_{\mu} \longrightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + \mathrm{i}qA_{\mu}$$

a dostáváme

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi(x) = 0, \tag{140}$$

neboli v Diracově označení

$$(\mathrm{i}\,\not{\partial} - q\not{A} - m)\psi(x) = 0. \tag{141}$$

Aby byla Diracova rovnice kovariantní při kalibrační transformaci

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi,$$

tj, aby platilo

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D'_\mu - m\right)\psi'(x) = 0, \tag{142}$$

kde

$$D'_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}qA'_\mu,$$

musíme předpokládat, že Diracova vlnová funkce se při kalibrační transformaci řídí pravidlem

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}\psi.$$

Pak se o kovariantnosti Diracovy rovnice přesvědčíme tak, že použijeme

$$D'_\mu\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}\psi(x)\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\chi}D_\mu\psi(x)$$

a z (142) odvodíme (140).

Diracova rovnice pro částici v obecném elektromagnetickém poli vypadá velice triviálně, její obsah je však bohatý. Analýza její nerelativistické limity, provedena např. v učebnici A.S. Davydov: Kvantová mechanika (SPN Praha 1978), ukazuje, že DR vede na Pauliho rovnici včetně členu který popisuje interakci spinového magnetického momentu s magnetickým polem (tento člen se pri odvozování Pauliho rovnice ze Schrödingerovy pomocí principu minimální elektromagnetické interakce musí dodávat rukou). Navíc vede na správnou spin-orbitální interakci a Darwinovu kontaktní interakci.

Diracova rovnice správně popisuje leptony bez vnitřní struktury, např. elektron a pozitron.[7] Při aplikaci na hadrony se spinem $\frac{1}{2}$ (např. proton, neutron) se musí dodat člen, který popisuje anomální magnetický moment, způsobený jejich vnitřní strukturou.

3 Klasická a kvantová teorii volných polí

3.1 Úvodní poznámky

Při budování klasické teorie pole se budeme inspirovat klasickou mechanikou soustavy mnoha částic. Pak při přechodu od klasické ke kvantové teorii pole budeme postupovat podobně jako při přechodu od klasické mechaniky k mechanice kvantové. Připomeňme si proto základní poznatky z klasické teoretické mechaniky.

Soustava n částic které jsou podrobeny v vazbám má $f = 3n - v$ stupňů volnosti. To znamená, že existuje f funkcí času $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, f$, které konfiguraci soustavy (polohy částic) v každém okamžiku charakterizují. Tyto funkce nazveme zobecněnými souřadnicemi a jejich časové derivace $\dot{q}(t)$ zobecněnými rychlostmi. V nejjednodušším případě soustavy bez vazeb jimi můžou být kartézské souřadnice částic a jejich derivace.

K popisu dynamiky soustavy (tj odvození toho, jak se budou zobecněné souřadnice měnit s časem) se zavádí Lagrangeova funkce $L(q, \dot{q}, t)$ jako rozdíl celkové kinetické energie $T(q, \dot{q})$ a funkce $U(q, \dot{q}, t)$, která popisuje síly na soustavu a v soustavě působící.[8] Diferenciální rovnice pro zobecněné souřadnice se dají odvodit z Hamiltonova variačního principu, ve kterém vystupuje účinek

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t.$$

[7] Není to úplně pravda, existují jemné jevy, které je schopna popsat až kvantová teorie pole (např. Lambův posuv).

[8] V relativistické mechanice zahrnuje i klidovou energii, viz vztah (29).

Hranaté závorky zdůrazňují, že účinek je funkcionál ("funkce funkcí") závislý na tom jaké jsou funkce $q_i(t)$. Hamiltonův variační princip

$$\delta S[q] = 0$$

říká, že pro funkce $q_i(t)$ správně popisující pohyb částic ze zafixovaných bodů $q_i(t_1)$ do zafixovaných bodů $q_i(t_2)$ má účinek stacionární hodnotu. To znamená, že když správné funkce nahradíme funkcemi malinko odlišnými, účinek se nezmění.
Z Hamiltonova principu plynou Lagrangeovy rovnice II. druhu[9]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, v$$

Dále definujeme zobecněné hybnosti (conjugate momenta) vztahy

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, \ldots, v \tag{143}$$

V kapitole 2.1.4 jsme pro zobecněnou hybnost zvolili označení s velkým P, abychom ji odlišili od mechanické $p_i = m_i \dot{q}_i$. Toto označení zde opouštíme. Pomocí Legendreovy duální transformace zavedeme Hamiltonovu funkci

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{v} p_i\, \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \tag{144}$$

pričemž zobecněné rychlosti vystupující na pravé straně vyjádříme ze vztahů (143), aby levá strana byla funkcí jenom zobecněných hybností, zobecněných souřadnic a času. I když jsou další věci spojené s Hamiltonovou funkcí a jejich korespondence s kvantovou mechanikou zajímavé, tady zmíníme už jenom definici Poissonových závorek dvou funkcí $f(p, q)$ a $g(p, q)$

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{v} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right),$$

z níž plyne vztah

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}, \tag{145}$$

kde δ_{kl} je Kroneckerovo delta.

<u>Od klasické ke kvantové mechanice</u>

V kvantové mechanice nahrazujeme zobecněné souřadnice a zobecněné hybnosti, které jsou funkcemi času, operátory od času nezávislými a místo klasické Poissonovy závorky mezi kanonicky sdruženými veličinami postulujeme komutátor jejich operátorů

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = \mathrm{i}\,\hbar\,\delta_{kl}\,.$$

Příkladem je dobře známy komutátor

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar\,.$$

Tento komutátor splníme když v x-reprezentaci zvolíme $\hat{x} = x$ a $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, nebo v p-reprezentaci $\hat{x} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}$ a $\hat{p}_x = p_x$.

3.2 Reálné skalární pole

3.2.1 Klasická teorie

Obecné řešení Kleinovy–Gordonovy rovnice (27) je v případě když položíme $b_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}$ reálnou funkcí souřadnic a času. Tato funkce představuje určité pole, v každém bodě prostoru je definována funkce času, pro tento bod specifická. Abychom si lépe uvědomili o co jde, označme si tuto funkci trochu jinak: $\varphi(x) \to \varphi(\vec{x}, t) \to \varphi_{\vec{x}}(t)$. V terminologii klasické mechaniky, kdy počet stupňů volnosti je dán počtem funkcí času které dynamický systém charakterizují, je pole dynamickým systém s nespočetně mnoha stupni volnosti, index u funkce času může nabývat nespočetně mnoho hodnot $\vec{x} \in \mathcal{R}^3$.

[9]Jak je známo, v Lagrangeových rovnicích I. druhu na levé straně vystupuje namísto Lagrangeovy funkce kinetická energie a na pravé straně namísto nuly zobecněné síly. V teorii pole tyto rovnice nemají analogii.

Hamiltonův variační princip V mechanice je v případě navzájem neinteragujících částic Lagrangeova funkce dána součtem Lagrangeových funkcí jednotlivých částic

$$L = \sum_i L_i(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

V případě dynamické soustavy se spojitým indexem nahradíme součet integrálem a budeme psát

$$L = \int_{(V)} \mathcal{L}(\varphi(\vec{x}, t), \partial\varphi(\vec{x}, t))\mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

kde jsme zavedli Lagrangeovu hustotu $\mathcal{L}$ jako funkci pole φ a jeho všech časoprostorových derivací, nejen časové (směřujeme k vytvoření relativistické teorie). Explicitní závislost na čase, která je v mechanice způsobena časově proměnnými vnějšími poli, neuvažujeme. Objem prostoru ve kterém se polem zabýváme je V.

Účinek S pomocí Lagrangeovy hustoty postupně vyjádříme jako

$$S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{(V)} \mathrm{d}^3\mathrm{x}\ \mathcal{L}(\varphi(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{t}), \partial\varphi(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{t})) = \int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \mathcal{L}(\varphi(\mathrm{x}), \partial\varphi(\mathrm{x}))$$

kde Ω označuje časoprostorovou oblast integrace. Počítejme, jak se změní účinek když k funkci φ přidáme funkci $\delta\varphi$.

$$\delta S = \int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi)\right] = \int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi)\right]$$

Druhý člen v hranaté závorce teď vyjádříme pomocí vzorce pro derivaci součinu

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right] = \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi)$$

Dostáváme

$$\delta S = \int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\delta\varphi + \int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right]$$

Označíme

$$\Lambda^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi$$

a pro výpočet posledního integrálu použijeme Gaussovu větu

$$\int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \partial_\mu\Lambda^\mu = \oint_{(\Sigma)} \Lambda^\mu \mathrm{d}\sigma_\mu\,,$$

kde na pravé straně je integrál po uzavřené nadploše Σ obepínající časoprostorovou oblast Ω. Protože na hranici oblasti Ω je ve smyslu Hamiltonova variačního principu $\delta\varphi = 0$, je tam i $\Lambda^\mu = 0$ a předmětný integrál je nulový. Takže $\delta S = 0$ implikuje podmínku

$$\int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\delta\varphi = 0\,,$$

která musí být splněna pro libovolnou funkci $\delta\varphi$. To je možné jedině tak, že výraz v hranaté závorce je sám roven nule

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0\,. \tag{146}$$

Dostali jsme Lagrangeovu rovnici pro reálné skalární pole. Fakt, že toto pole splňuje Kleinovu-Gordonovu rovnici, využijeme k určení Lagrangeovy hustoty tak, aby Lagrangeova rovnice přešla na rovnici Kleinovu-Gordonovu. Přesvědčíme se, že

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2}\left[(\partial_\alpha\varphi)\partial^\alpha\varphi - m^2\varphi^2\right] \tag{147}$$

tento požadavek splňuje[10]. Vypočteme si nejdřív potřebné derivace

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\left[\frac{1}{2}(\partial_\alpha \varphi)\partial^\alpha \varphi\right] = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\left[(\partial_\alpha \varphi)\partial_\beta \varphi\right] = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left[\delta^\mu_\alpha \partial_\beta \varphi + \delta^\mu_\beta \partial_\alpha \varphi\right] = \partial^\mu \varphi$$

Po dosazení těchto derivací do (146) dostáváme KG rovnici $(\Box + m^2)\varphi = 0$.

Hamiltonův formalismus. Při přechodu od Lagrangeova k Hamiltonovu formalismu v teoretické mechanice se nejdřív definují zobecněné hybnosti, které jsou kanonicky sdruženými proměnnými k zobecněným souřadnicím, vztahem $P_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. V teorii pole pracujeme namísto Lagrangeovy funkce L s její hustotou $\mathcal{L}$. Proto taky definujeme hustotu kanonicky sdružené proměnné k polní funkci vztahem

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)}{\partial \dot{\varphi}(x)} \tag{148}$$

V případě reálného skalárního pole s Lagrangovou hustotou (147) konkrétně vychází

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x)\,. \tag{149}$$

Dalším krokem v teoretické mechanice bylo zavedení Hamiltonovy funkce vztahem (144). Když hledáme analog tohoto vztahu v teorii pole, Hamiltonovu funkci H nahradíme integrálem z její hustoty $\mathcal{H}$, podobně jak jsme to již udělali s Lagrangeovou funkcí. Ale čím nahradíme součet přes všechny stupně volnosti

$$X = \sum_{i=1}^{v} p_i\, \dot{q}_i$$

tam vystupující? Abychom na to přišli, rozdělme objem V, ve kterém pole skoumáme, na v buněk, každou o objemu ΔV. Každé buňce přiřadíme diskrétní dynamickou proměnnou $q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, v)$jako hodnotu pole v bodě $\vec{x}_i$ někde uvnitř i-té části, $q_i(t) = \varphi(\vec{x}_i, t)$. Příslušnou diskrétní zobecněnou hybnost $p_i(t)$ vypočteme jako hustotu kanonicky sdružené hybnosti v bodě $\vec{x}_i$ vynásobenou objemem ΔV, $p_i(t) = \pi(\vec{x}_i, t)\Delta V$, kde

$$\pi(\vec{x}_i, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(\vec{x}_i, t)}\,.$$

Takže bude

$$X = \sum_{i=1}^{v} \pi(\vec{x}_i, t)\dot{\varphi}(\vec{x}_i, t)\Delta V\,.$$

V limitě $V \to \infty$ přechází tato suma na objemový integrál

$$X = \int_{(V)} \pi(x)\dot{\varphi}(x)\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Takže v případě reálneho skalárního pole vypadá Legendreova duální transformace takto:

$$\int_{(V)} \mathcal{H}(\varphi, \pi)\mathrm{d}^3\mathrm{x} = \int_{(\mathrm{V})} \pi(\mathrm{x})\dot{\varphi}(\mathrm{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x} - \int_{(\mathrm{V})} \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Protože tento vztah musí platit nezávisle na tom, jak vybereme objem V, musí platit odpovídající vztah mezi integrandmi. Pro hustotu Hamiltonovy funkce (budeme ji říkat Hamiltonova hustota) proto platí

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)\,. \tag{150}$$

Při použití Lagrangeovy hustoty reálného skalárního pole (147) dostáváme

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + m^2\varphi^2 + (\nabla\varphi)^2\right]\,. \tag{151}$$

[10]Na tomto místě je zavedení konstanty 1/2 neopodstatněné, mohla by tam být jakákoliv jiná konstanta. V dalším upozorníme na místa, které výběr 1/2 zdůvodňují.

Tenzor energie–hybnosti. Ukázali jsme, jak určíme Hamiltonovu hustotu, které má taky význam hustoty energie pole. Jako taková, musí splňovat zákon zachování energie v diferenciálním tvaru, kterým je rovnice kontinuity. V ní vystupuje taky hustota toku energie, kterou zatím neznáme. Dále, když má pole energii, musí mít i (mechanickou) hybnost, kterou taky zatím neumíme spočíst. V mechanice spojitých prostředí se zavádí tenzor energie-hybnosti $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, kterého komponenta $\mathcal{T}^{0\nu}$ má význam hustoty ν-té komponenty čtyřvektoru hybnosti $P^{\mu} \equiv (E, \vec{P})$. Komponenty $\mathcal{T}^{k\nu}$ zase udávají k-tou složku hustoty toku příslušné komponenty P^{ν} čtyřvektoru hybnosti. Musí proto splňovat čtyři rovnice kontinuity

$$\partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad \text{pro } \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{152}$$

Později si ukážeme, jak se tenzor energie-hybnosti určí na základě homogennosti časoprostoru. Teď se ho pokusíme uhodnout. Zaveďme si proto do vztahu (150) tenzorové indexy

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}\partial^0\varphi - \mathcal{L}\, g^{00}$$

a předpokládejme jeho zobecnění ve tvaru

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial^\nu\varphi - \mathcal{L}\, g^{\mu\nu}\,. \tag{153}$$

To, jestli jsme se správně strefili, nám ukáže kontrola pomocí rovnice kontinuity. Počítejme tedy

$$\partial_\mu\mathcal{T}^{\mu\nu} = \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\partial^\nu\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu\partial^\nu\varphi - \partial^\nu\mathcal{L}$$

Výraz v hranaté závorce nahradíme tím, co plyne z Lagrangeovy rovnice (146) a derivujeme Lagrangeovu hustotu jako složenou funkci.

$$\partial_\mu\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\partial^\nu\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu\partial^\nu\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\partial^\nu\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial^\nu\partial_\mu\varphi = 0,$$

kde jsme využili, že na pořadí derivací v posledním členu nezáleží. Tím je opodstatněnost našeho výběru (153) potvrzena. Kdybychom tam ale v prvním členu na pravé straně indexy μ a ν vyměnili, výsledkem kontroly pomocí rovnice kontinuity by nebyla nula, ale komplikovaný, určitě nenulový výraz.

Při odvozování vztahů (146), (148), (150) a (153) jsme nevyužili konkrétní tvar Lagrangeovy hustoty pro reálné skalární pole, které je jednokomponentním. Proto půjdou jednoduše zobecnit a použít i pro vícekomponentní pole (komplexní skalární, elektromagnetické, spinorové).

Ještě si napišme, kvůli pozdějšímu použití, tři vztahy platné pro reálné skalární pole. První se týka hustoty j-té komponenty hybnosti pole a plyne z (153) a (148)

$$\mathcal{T}^{0j}(x) = \pi(x)\,\partial^j\varphi(x)\,. \tag{154}$$

Druhým je připomenutí, jak vypadá obecné řešení Kleinovy-Gordonovy rovnice (27) v případě $b_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}$

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})} + a^*_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})}\right]. \tag{155}$$

Třetí vztah dostaneme, když toto řešení dosadíme do (149)

$$\pi(x) = (-\mathrm{i})\sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[a_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})} - a^*_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x})}\right]. \tag{156}$$

3.2.2 Kvantová teorie

Kvantovou teorii reálného skalárního pole vytvoříme tak, že konjugované dynamické proměnné z hamiltonovského formalismu $\varphi(x)$ a $\pi(x)$, které jsou funkcemi času, nahradíme operátory $\hat{\varphi}(\vec{x})$ a $\hat{\pi}(\vec{x})$, od času nezávislými a postulujeme pro ně komutační vztah. V kvantové mechanice máme komutační vztahy mezi operátory které odpovídají diskrétním konjugovaným veličinám ve tvaru $[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = \mathrm{i}\delta_{kl}$ a i $[\hat{q}_k, \hat{q}_l] = 0$, $[\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0$. Ve spojitém spektru indexů se nabízí komutátory

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x})\ ,\hat{\pi}(\vec{x}\,')\right] = \mathrm{i}\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \tag{157}$$

s třírozměrnou Diracovou funkcí delta a

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x})\ ,\hat{\varphi}(\vec{x}\,')\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x})\ ,\hat{\pi}(\vec{x}\,')\right] = 0\,. \tag{158}$$

Ověřme si životaschopnost nápadu (157) tak, že si v našem prostoru vytvoříme buňky, kterým přiřadíme diskrétní dynamické proměnné. Buňce s indexem i o objemu V_i přiřadíme zobecněnou souřadnici rovnou střední hodnotě pole v buňce

$$q_i(t) = \frac{1}{V_i}\int_{(V_i)} \mathrm{d^3x}\ \varphi(\mathrm{\tilde{x}, t})$$

a zobecněnou hybnost rovnou integrálu z přidružené hustoty

$$p_i(t) = \int_{(V_i)} \mathrm{d^3x}\ \pi(\mathrm{\tilde{x}, t})\,.$$

Přejděme teď k operátorům a počítejme komutátor

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = \frac{1}{V_k}\int_{(V_k)} \mathrm{d^3x}\int_{(\mathrm{V_l})} \mathrm{d^3x'}\ [\hat{\varphi}(\mathrm{\tilde{x}}), \hat{\pi}(\mathrm{\tilde{x}}')] = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{V_k}}\int_{(\mathrm{V_k})} \mathrm{d^3x}\int_{(\mathrm{V_l})} \mathrm{d^3x'}\ \delta(\mathrm{\tilde{x}} - \mathrm{\tilde{x}}'),$$

kde jsme již zabudovali náš předpoklad (157). Pokud se jedná o různé buňky ($k \neq l$), integrační oblasti se nepřekrývají, delta funkce je identicky rovna nule a komutátor taky. V případě, že $l = k$ máme nejdřív

$$\int_{(V_k)} \mathrm{d^3x'}\ \delta(\mathrm{\tilde{x}} - \mathrm{\tilde{x}}') = 1$$

a pak

$$\frac{1}{V_k}\int_{(V_k)} \mathrm{d^3x} = 1$$

s výsledkem $[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = \mathrm{i}$, jak má být. Když se teď podíváme na vztahy (155) a (156), zjistíme, že není zatím jasné, jak se při přechodu k operátorům časově nezávislým zbavíme času na jejich pravých stranách. Definujme proto nekonečně mnoho funkcí času

$$a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}$$

a po jejich zavedení do (155) a (156) se stanou jedinými místy na pravých stranách kde vystupuje čas. Jsou přitom dynamickými proměnnými, protože stav pole můžeme zadat tak, že specifikujeme funkci $\varphi(x)$ nebo, ekvivalentně, zadáme všechny $a_{\vec{k}}(t)$. Proto při přechodu ke kvantové teorii nahradíme taky tyto dynamické proměnné operátory od času nezávislými $a_{\vec{k}}(t) \to \hat{a}_{\vec{k}}$. Z reálné funkce $\varphi(x)$ chceme udělat hermitovský operátor $\hat{\varphi}(\vec{x})$. To docílíme tak, že komplexní sdružení na pravé straně nahradíme sdružením hermitovským $a^*_{\vec{k}}(t) \to \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$. Dostáváme tak operátory

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x})}\right], \tag{159}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = (-\mathrm{i})\sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}}\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]. \tag{160}$$

Objevují se v nich operátory $\hat{a}_{\vec{k}}$, o kterých zatím nic nevíme, jenom předpokládáme, že nejsou hermitovské. Abychom určili jejich vlastnosti, musíme si je vyjádřit pomocí operátorů $\hat{\varphi}$ a $\hat{\pi}$, pro které už máme stanovené komutační vztahy (157) a (158). Postupujeme takto: Vztah (159) vynásobíme exponentou $\exp\{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}\}$ a vyintegrujeme přes normalizační objem, přičemž využíváme že tato integrace vede na Kroneckerovo delta [vztah (14) a jemu podobné se změnou znaménka u některé z hybností]

$$\int_{(V)} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} d^3x = \sqrt{\frac{V}{2\omega_{\tilde{k}'}}} \left(\hat{a}_{\tilde{k}'} + \hat{a}^\dagger_{-\tilde{k}'}\right)$$

Vztah (160) vynásobíme imaginární jednotkou a exponentou $\exp\{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}\}$ a pak vyintegrujeme přes normalizační objem

$$i\int_{(V)} \hat{\pi}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} d^3x = \sqrt{\frac{V\omega_{\tilde{k}'}}{2}} \left(\hat{a}_{\tilde{k}'} - \hat{a}^\dagger_{-\tilde{k}'}\right).$$

V obou dvou vztazích přejmenujeme $\vec{k}'$ na $\vec{k}$, první vynásobíme $\omega_{\vec{k}}$ a potom vztahy sečteme

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \int_{(V)} \left[\omega_{\vec{k}}\hat{\varphi}(\vec{x}) + i\hat{\pi}(\vec{x})\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x\,.$$

Vztah pro $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}$ získáme okřížkováním a přejmenováním $\vec{k}$ na $\vec{k}'$. Přejmenujeme taky integrační proměnnou, abychom ji po dosazení do komutátoru odlišili od té v $\hat{a}_{\vec{k}}$.

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'} = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}'}}} \int_{(V)} \left[\omega_{\vec{k}'}\hat{\varphi}(\vec{x}') - i\hat{\pi}(\vec{x}')\right] e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} d^3x'\,.$$

Po dosazení získaných vyjádření do komutátoru dostáváme

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \frac{(-i)}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} \int_{(V)} d^3x \int_{(V)} d^3x' \left\{\omega_{\tilde{k}}\left[\hat{\varphi}(\tilde{x})\,,\hat{\pi}(\tilde{x}')\right] - \omega_{\tilde{k}'}\left[\hat{\pi}(\tilde{x})\,,\hat{\varphi}(\tilde{x}')\right]\right\} e^{i(\tilde{k}'\cdot\tilde{x}' - \tilde{k}\tilde{x})}\,.$$

Komutátor mezi dvěma φ a i ten mezi dvěma π jsou nulové, tak jsme je ani neuvedli. Dva zbývající jsou úměrné delta funkci, pomocí které ihned provedeme integraci přes čárkovanou proměnnou. Další integrace vede na Kroneckerovo delta

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \frac{\omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}'}}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} \int_{(V)} e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}}\, d^3x = \frac{\omega_{\tilde{k}} + \omega_{\tilde{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\tilde{k}}\omega_{\tilde{k}'}}}\delta_{\tilde{k},\tilde{k}'}$$

Poslední výraz je nenulový jenom když $\vec{k}' = \vec{k}$, můžeme proto položit $\omega_{\vec{k}'} = \omega_{\vec{k}}$ a dostáváme jednoduchý výsledek[11]

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\,. \tag{161}$$

Pro stejné hybnosti je tento komutátor roven jedné, takže když zadefinujeme operátor

$$\hat{N}_{\vec{k}} = \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}\,, \tag{162}$$

budeme o něm vědet, že jeho vlastní hodnoty jsou nezáporná celá čísla (kapitola 1.1). Podobným postupem, jak jsme získali komutátor (161), bychom dokázali i další důležité vztahy

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}_{\vec{k}'}\right] = 0 \qquad \text{a} \qquad \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = 0,$$

pomocí kterých odvodíme po dvounásobném použití (161) komutátor

$$\left[\hat{N}_{\vec{k}}\,,\hat{N}_{\vec{k}'}\right] = 0\,. \tag{163}$$

[11] Toto je první místo, které zdůvodňuje výběr konstanty 1/2 v (147). S jinou konstantou by se změnily vztahy (149), (156) a (160). Komutační vztah (157) by pak vedl na jinou pravou stranu komutátoru (161).

Operátor energie reálného skalárního pole. Když uskutečníme přechod od funkcí k operátorům v Hamiltonově hustotě reálného skalárního pole (151) získáme operátor

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left[\hat{\pi}^2 + m^2\hat{\varphi}^2 + (\nabla\hat{\varphi})^2\right] . \tag{164}$$

objemovou integrací kterého dostaneme operátor energie, neboli Hamiltonův operátor reálného skalárního pole

$$\hat{H} = \int_{(V)} \hat{\mathcal{H}}(\vec{x})\ \mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Budeme počítat integrály z jednotlivých členů v hranaté závorce, přičemž použijeme vztahy (159) a (160). Kvadrát operátoru vyjádříme jako součin samého se sebou, přičemž abychom součin dvou sum přes hybnosti mohli napsat jako dvojitou sumu, u druhé označíme jinak sčítací index. Integrál ze součinu exponent hned vyčíslíme pomocí vztahu (14), vzniklé V se vykrátí s tím co pochází z odmocnin ve jmenovateli.

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} \hat{\pi}(\vec{x})\hat{\pi}(\vec{x})\ \mathrm{d}^3\mathrm{x} &= -\frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} - \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} - \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^2\int_{(V)} \hat{\varphi}(\vec{x})\hat{\varphi}(\vec{x})\ \mathrm{d}^3\mathrm{x} &= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{m^2}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\frac{m^2}{\omega_{\vec{k}}}(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}})
\end{aligned}$$

Pro výpočet příspěvku od posledního členu v (164) potřebujeme

$$\nabla\hat{\varphi}(\vec{x}) = \mathrm{i}\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{k}}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x})}\right] .$$

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} [\nabla\hat{\varphi}(\vec{x})].\nabla\hat{\varphi}(\vec{x})\ \mathrm{d}^3\mathrm{x} &= -\frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{\vec{k}.\vec{k}'}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} - \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{k}^{\,2}}{\omega_{\vec{k}}}(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}})
\end{aligned}$$

Při sčítaní druhého a třetího příspěvku využijeme $\vec{k}^{\,2}+m^2 = \omega^2_{\vec{k}}$. Součet všech tří příspěvků vynásobený $\frac{1}{2}$ z (164) dá

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\ \omega_{\vec{k}}(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}) \tag{165}$$

Když teď druhý člen v závorce vyjádříme pomocí komutačního vztahu (161), dostáváme

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}}\ \omega_{\vec{k}}\,\hat{N}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\ \omega_{\vec{k}}$$

První suma má jasnou interpretaci: když příjmeme, že $\hat{N}_{\vec{k}}$ je operátor počtu částic s hybností $\vec{k}$, tak po jeho vynásobení energií jedné částice $\omega_{\vec{k}}$ dostáváme operátor energie všech částic s hybností $\vec{k}$ a sečtením přes všechny hybnosti dostáváme operátor energie všech částic, který budeme nazývat

Hamiltonovým operátorem reálného skalárního pole. Druhá suma ve výše uvedeném vztahu, nám optimistický pohled kazí. Od počtu částic nezávisí a jako součet nekonečně mnoha k nule nekonvergujících členů diverguje. Jedno řešení by bylo tento člen jednoduše ignorovat s poukazem na to, že energie je určena až na aditivní konstantu. My použijeme jiné řešení, změníme vztah pro operátor Hamiltonovy hustoty (164). Opravňuje nás k tomu fakt, že v klasickém vztahu (151) na pořadí funkcí nezáleží, ale při přechodu k operátorům na jejich pořadí už záleží a je třeba toto pořadí upřesnit. Zavedeme pojem normálního součinu, ve kterém jsou operátory uspořádány tak, že na prvních místech posloupnosti jsou kreační operátory $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$ a až za nimi následují operátory anihilační $\hat{a}_{\vec{k}}$. Normální součin se označuje pomocí dvouteček. Když předepíšeme normální uspořádání v operátoru Hamiltonovy hustoty

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} : \left[\hat{\pi}^2 + m^2\hat{\varphi}^2 + (\nabla\hat{\varphi})^2\right] : \ , \tag{166}$$

už nebudeme muset použít na změnu pořadí operátorů ve vztahu (165) komutační vztah (tímto krokem se nám do výsledku to nekonečno vplížilo) a pro Hamiltonův operátor dostaneme sympatický výsledek[12]

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}\, \hat{N}_{\vec{k}} \,. \tag{167}$$

V případě volných polí (tj. bez interakce), operátory počtů částic v jednotlivých stavech $\hat{N}_{\vec{k}}$ komutují s Hamiltonovým operátorem, počty samotné jsou tudíž konstantní. Jiná situace nastane, když se do Hamiltonova operátoru zavede interakce částic mezi sebou, nebo s jiným typem částic.

Operátor hybnosti reálného skalárního pole. Operátor j-té složky hybnosti pole získáme jako integrál

$$\hat{P}^j = \int_{(V)} \hat{\mathcal{T}}^{0j}(\vec{x}) \tag{168}$$

z operátoru odpovídajícímu hustotě (154), do kterého, po zkušenosti s Hamiltonovým operátorem, zavedeme rovnou i normální součin

$$\hat{\mathcal{T}}^{0j}(\vec{x}) = \ : \hat{\pi}(\vec{x})\, \partial^j \hat{\varphi}(\vec{x}) : \,. \tag{169}$$

Vystupuje v něm i derivace operátoru (159) podle kovariantní souřadnice x_j, která je rovna

$$\partial^j \hat{\varphi}(\vec{x}) = (-\mathrm{i}) \sum_{\vec{k}} \frac{k^j}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}}\ \hat{a}_{\vec{k}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}}\ \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] .$$

Při dosazování operátoru $\hat{\pi}$ z (160) změníme označení sčítacího indexu na $\vec{k}'$. Při výpočtu integrálu (168) změníme pořadí integrace a sumace. Integrace se bude týkat čtyř součinů dvou exponent, výsledek okamžitě napíšeme pomocí vztahu (14) a dostáváme

$$\begin{aligned}
\hat{P}^j &= \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \frac{k^j}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}'}}{\omega_{\vec{k}}}} : (\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\hat{a}_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}',\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} - \hat{a}_{\vec{k}'}\hat{a}_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}',\vec{k}}) : \\
&= \sum_{\vec{k}} \frac{k^j}{2} (2\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}) \,,
\end{aligned}$$

kde jsme využili, že energie od směru hybnosti nezávisí, jenom od její velikosti. Druhý a třetí člen v závorce dají nulový příspěvek k sumě přes všechna $\vec{k}$. Jsou totiž symetrické při záměně $\vec{k} \to -\vec{k}$ a jsou násobené faktorem k^j, který při této záměně mění znaménko. Takže dostáváme výsledek

$$\hat{P}^j = \sum_{\vec{k}} k^j\, \hat{N}_{\vec{k}} \,,$$

[12]Taky díky $\frac{1}{2}$ ve vztahu (147) pro Lagrangeovu hustotu.

anebo ve vektorovém tvaru

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k}} \vec{k}\, \hat{N}_{\vec{k}}\,.$$

Tento výsledek je názorný a nevyžaduje další komentář. Jenom poznamenejme, že kdybychom ve vztahu (147) zvolili místo $\frac{1}{2}$ jinou konstantu, taky tento vztah by vypadal jinak.

Fokův prostor (v *angl.* literatuře Fock). Setkali sme se s několika operátory, ale zatím nevíme na co tyto operátory působí. Operátory v nejčastěji používané x-reprezentaci kvantové mechaniky působí na vlnové funkce a vlastní funkce hermitovských operátorů. Jenže teď jsme z vlnových funkcí udělali operátory! Takže si prostor ve kterém tyto operátory působí, musíme zkonstruovat. Návod jak to udělat získáme, když si uvědomíme rozdíl mezi kvantovou mechanikou a kvantovou teorií pole. V kvantové mechanice přiřazujeme jednotlivým částicím hybnosti[13] (anebo se zajímáme o to, jaká je pravděpodobnost, že zvolená částice bude mít určitou hybnost). V kvantové teorii pole je to naopak. Každé hybnosti přiřadíme počet částic které tuto hybnost mají (anebo se zajímáme o to, jaká je pravděpodobnost, že zvolenou hybnost bude mít určitý počet částic).

Bázovými vektory v hledaném prostoru budou proto stavové vektory s fixními počty částic s danými hybnostmi. Základem bude stavový vektor stavu ve kterém není žádná částice, budeme jej nazývat vakuum a označovat $|0\rangle$. Pak tam přidáme nekonečně mnoho stavů ve kterých je jedna částice s hybností $\vec{k}_i$

$$\left|1_{\vec{k}_i}\right\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_i}\,|0\rangle\ ,$$

dvě částice s hybností $\vec{k}_i$ (viz kapitola 1.1)

$$\left|2_{\vec{k}_i}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_i}\right)^2 |0\rangle\ ,$$

jedna částice s hybností $\vec{k}_i$ a jedna částice s hybností $\vec{k}_j$ $(i \neq j)$

$$\left|1_{\vec{k}_i}, 1_{\vec{k}_j}\right\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_i}\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_j}\,|0\rangle$$

a tak dále. Takto vytvořený prostor se nazývá Fokovým prostorem (pro bozony). Obecný stav je popsán jako superpozice bázových stavů.

3.3 Lagrangeův a Hamiltonův formalismus pro vícekomponentní pole

Polem n-komponentním nazýváme takové, kterým je v každém bodě prostoru definováno n reálných funkcí času. Např. komplexní skalární pole je polem dvoukomponentním, dvěmi reálnými funkcemi jsou reálná a imaginární část funkce $\phi(\vec{x}, t)$.
Uvažujme pole s komponentami $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$, s účinkem zapsaném podobně jako v kapitole 2.1

$$S[\phi] = \int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\mathcal{L}(\phi(\mathrm{x}), \partial\phi(\mathrm{x}))\,,$$

kde teď ale označení ϕ znamená, že uvažujeme všech n funkcí ϕ_i. Variaci účinku vyjádříme jako integrál z variace Lagrangeovy hustoty, která je po započtení variací všech funkcí ϕ rovna

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right]$$

Postupem podobným tomu, co jsme použili v kapitole 2.1 dostáváme z Hamiltonova principu $\delta S = 0$ podmínku

$$\int_{(\Omega)} \mathrm{d}^4\mathrm{x}\ \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mathrm{i}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\mathrm{i})}\right]\delta\phi_\mathrm{i} = 0\,.$$

[13] Pořád používáme normalizaci na konečný objem s diskrétním spektrem hybností $\vec{k}_i$, kde index i nabývá nekonečně mnoha hodnot.

S přihlédnutím k tomu, že variace mohou být libovolné a pro různé indexy jsou nekorelované, tato podmínka se dá splnit jenom tak, že výraz v každé hranaté závorce je roven nule. Dostáváme tak n Lagrangeových rovnic

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n\,. \tag{170}$$

V dalším kroku definujeme ke každé komponentě ϕ_i k ní příslušnou komponentu **konjugovaného pole**

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \tag{171}$$

a pomocí polní verze Legendreovy duální transformace zavedeme Hamiltonovu hustotu

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(x)\dot{\phi}_i(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{172}$$

Tenzor energie-hybnosti pro n-komponentní pole má tvar

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \mathcal{L}\, g^{\mu\nu}\,. \tag{173}$$

3.4 Komplexní skalární pole

3.4.1 Klasická teorie

Pro komplexní skalární pole se nabízí zavedení dvou komponent pole předpisem

$$\phi_1(x) = \mathrm{Re}\ \varphi(x) \qquad\qquad \phi_2(x) = \mathrm{Im}\ \varphi(x)$$

Ukazuje se, že je výhodnější (zejména vzhledem k pozdějšímu přechodu ke kvantové teorii) namísto reálné a imaginární části pracovat s jejich lineárně nezávislými lineárními kombinacemi

$$\phi_1(x) = \varphi(x) \equiv \mathrm{Re}\ \varphi(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\ \varphi(x) \qquad \text{a} \qquad \phi_2(x) = \varphi^*(x) \equiv \mathrm{Re}\ \varphi(x) - \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\ \varphi(x)$$

které zaručují že nekorelované variace funkcí φ a φ^* jsou z hlediska variačního počtu ekvivaletní nekorelovaným variacím funkcí Re φ a Im φ.
Lagrangeovy rovnice (170) tak nabývají pro komplexní skalární pole tvar

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \;=\; 0\,, \tag{174}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} \;=\; 0\,. \tag{175}$$

Kleinovu–Gordonovu rovnici pro funkci φ dostaneme z (175) a tu pro funkci φ^* z (174) když zvolíme Lagrangeovu hustotu

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi^*, \partial\varphi, \partial\varphi^*) = (\partial_\alpha \varphi^*)\partial^\alpha \varphi - m^2 \varphi^* \varphi\,. \tag{176}$$

Příslušná odvození jsou ještě jednodušší než v případě reálneho skalárního pole, protože φ a φ^* považujeme za nezávislé. O správnosti výběru multiplikační konstanty (=1) se přesvědčíme později, když pro komutační vztahy polních operátorů a pro operátory polních veličin dostaneme rozumné výsledky.
Z obecné definice konjugovaného pole (171) plyne

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*(x) \qquad \text{a} \qquad \pi^*(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}(x)\,. \tag{177}$$

Pro Hamiltonovu hustotu podle vztahu (172) v případě komplexního skalárního pole máme

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi, \varphi^*, \pi^*) = \pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \varphi^*, \partial\varphi^*)\,,$$

což po dosazení Lagrangeovy hustoty (176) a vyjádření časových derivací podle (177) vede na

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi, \varphi^*, \pi^*) = \pi^* \pi + (\nabla \varphi^*) \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \,. \tag{178}$$

Pro hustotu j-té komponenty hybnosti pole podle (173) platí

$$\mathcal{T}^{0j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial^j \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} \partial^j \varphi^* \,,$$

což s přihlédnutím k (177) dá

$$\mathcal{T}^{0j} = \pi \, \partial^j \varphi + \pi^* \, \partial^j \varphi^* \,. \tag{179}$$

U Kleinovy-Gordonovy rovnice jsme pro hustotu elektrického náboje získali vztah [viz vztah (23) a text za ním]

$$\rho = \mathrm{i}e(\varphi^* \partial_0 \varphi - \varphi \, \partial_0 \varphi^*).$$

Nahrazením časových derivací konjugovanými poly (177) ho převedeme na tvar

$$\rho = \mathrm{i}e(\varphi^* \pi^* - \varphi \, \pi). \tag{180}$$

Napišme si ještě, jaká konjugovaná pole odpovídají podle (177) obecnému řešení Kleinovy–Gordonovy rovnice (27)

$$\pi(x) \;=\; \dot{\varphi}^*(x) = \mathrm{i} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[a^*_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}.\vec{x})} - b_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}.\vec{x})} \right], \tag{181}$$

$$\pi^*(x) \;=\; \dot{\varphi}(x) = (-\mathrm{i}) \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[a_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}.\vec{x})} - b^*_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}.\vec{x})} \right]. \tag{182}$$

3.4.2 Kvantová teorie

Při přechodu od klasické ke kvantové teorii komplexního skalárního pole budeme postupovat obdobně jako u reálného skalárního pole: pole $\varphi(x)$, $\pi(x)$, $\varphi^*(x)$ a $\pi^*(x)$, které jsou funkcemi času a souřadnic, nahradíme operátory od času nezávislými $\hat{\varphi}(\vec{x})$, $\hat{\pi}(\vec{x})$, $\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x})$ a $\hat{\pi}^\dagger(\vec{x})$ (pričemž komplexní sdružení nahradíme hermitovským) a postulujeme pro ně komutační vztahy

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}\,')\right] = \mathrm{i}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \qquad \text{a} \qquad \left[\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(\vec{x}\,')\right] = \mathrm{i}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \,. \tag{183}$$

Dále postulujeme, že ostatní možné komutátory jsou nulové, např

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x}) \;, \hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}\,')\right] = 0 \,.$$

Čas vystupuje ale i v zápisu obecného řešení KG rovnice jako superpozice časově závislých partikulárních řešení (27)

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^*_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \right].$$

Při nahrazení funkce času na levé straně operátorem od času nezávislým, musíme patřičně upravit i pravou stranu. Budeme aplikovat postup který jsme již použili při přechodu od klasické ke kvantové teorii reálného skalárního pole. Zavedeme dvě funkce času

$$a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_{\vec{k}} t} \qquad \text{a} \qquad b_{\vec{k}}(t) = b_{\vec{k}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_{\vec{k}} t}$$

a výše uvedený vztah přepíšeme s jejich využitím

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} + b^*_{\vec{k}}(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \right].$$

Teď vidíme, že nově zavedené funkce hrají úlohu dynamických proměnných, protože jednoznačně určují stav pole. Proto při přechodu ke kvantové teorii nahradíme i tyto funkce operátory, přičemž komplexní sdružení nahradíme hermitovským. Dostáváme

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}} \, \hat{a}_{\vec{k}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}.\vec{x}} \, \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}} \right] \tag{184}$$

Podobně postupujeme i u dalších operátorů

$$\hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \hat{b}_{\vec{k}} \right] \tag{185}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = \mathrm{i} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \hat{b}_{\vec{k}} \right] \tag{186}$$

$$\hat{\pi}^{\dagger}(\vec{x}) = (-\mathrm{i}) \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \hat{a}_{\vec{k}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}} \right] \tag{187}$$

Teď chceme zjistit, jaké komutační vztahy nově zavedené operátory $\hat{a}_{\vec{k}}$ a $\hat{b}_{\vec{k}}$ splňují. Nejdřív je vyjádříme pomoci polních operátorů $\hat{\varphi}(\vec{x})$, $\hat{\pi}(\vec{x})$, $\hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{x})$ a $\hat{\pi}^{\dagger}(\vec{x})$ pak při výpočtu jejich komutátorů použijeme komutátory polních operátoru [ze kterých jsou nenulové jen dva uvedené v (183)]. Pro určení $\hat{a}_{\vec{k}}$ se nabízí kombinace vztahů (184) a (187).

Vztah (184) vynásobíme exponentou $\exp\{-\mathrm{i}\vec{k}' \cdot \vec{x}\}$ a vyintegrujeme přes normalizační objem, přičemž využíváme že tato integrace vede na Kroneckerovo delta [vztah (14) a jemu podobné se změnou znaménka u některé z hybností]

$$\int_{(V)} \hat{\varphi}(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}} \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \sqrt{\frac{\mathrm{V}}{2\omega_{\vec{\mathrm{k}}'}}} \left(\hat{\mathrm{a}}_{\vec{\mathrm{k}}'} + \hat{\mathrm{b}}^{\dagger}_{-\vec{\mathrm{k}}'} \right)$$

Vztah (187) vynásobíme imaginární jednotkou a exponentou $\exp\{-\mathrm{i}\vec{k}'.\vec{x}\}$ a pak vyintegrujeme přes normalizační objem

$$\mathrm{i} \int_{(V)} \hat{\pi}^{\dagger}(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}} \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \sqrt{\frac{\mathrm{V}\omega_{\vec{\mathrm{k}}'}}{2}} \left(\hat{\mathrm{a}}_{\vec{\mathrm{k}}'} - \hat{\mathrm{b}}^{\dagger}_{-\vec{\mathrm{k}}'} \right) .$$

V obou dvou vztazích přejmenujeme $\vec{k}'$ na $\vec{k}$, první vynásobíme $\omega_{\vec{k}}$, potom vztahy sečteme a dostáváme výsledek

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \int_{(V)} \left[\omega_{\vec{k}} \hat{\varphi}(\vec{x}) + \mathrm{i}\hat{\pi}^{\dagger}(\vec{x}) \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathrm{d}^3\mathrm{x} \, . \tag{188}$$

Podobně bychom kombinací vztahů (185) a (186) dostali

$$\hat{b}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \int_{(V)} \left[\omega_{\vec{k}} \hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{x}) + \mathrm{i}\hat{\pi}(\vec{x}) \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathrm{d}^3\mathrm{x} \, . \tag{189}$$

Teď už můžeme počítat různé komutátory. Ukážeme si podrobně výpočet komutátoru $\left[\hat{a}_{\vec{k}} \, , \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'} \right]$. Vztah pro $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'}$ získáme okřížkováním vztahu (188) a přejmenováním $\vec{k}$ na $\vec{k}'$. Přejmenujeme taky integrační proměnnou, abychom ji po dosazení do komutátoru odlišili od té v $\hat{a}_{\vec{k}}$.

$$\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'} = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}'}}} \int_{(V)} \left[\omega_{\vec{k}'} \hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{x}') - \mathrm{i}\hat{\pi}(\vec{x}') \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \, .$$

Po dosazení získaných vyjádření do komutátoru dostáváme

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}} \, , \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'} \right] = \frac{(-\mathrm{i})}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} \int_{(V)} \mathrm{d}^3\mathrm{x} \int_{(\mathrm{V})} \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \left\{ \omega_{\vec{\mathrm{k}}} \left[\hat{\varphi}(\vec{\mathrm{x}}) \, , \hat{\pi}(\vec{\mathrm{x}}') \right] - \omega_{\vec{\mathrm{k}}'} \left[\hat{\pi}^{\dagger}(\vec{\mathrm{x}}) \, , \hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{\mathrm{x}}') \right] \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{\mathrm{k}}'\cdot\vec{\mathrm{x}}' - \vec{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{x}})} \, .$$

Komutátory $\left[\hat{\varphi}\ ,\hat{\varphi}^\dagger\right]$ a $\left[\hat{\pi}\ ,\hat{\pi}^\dagger\right]$ jsou nulové, tak jsme je ani nepsali. Dva zbývající jsou úměrné delta funkci, pomocí které ihned provedeme integraci přes čárkovanou proměnnou. Další integrace vede na Kroneckerovo delta

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\ ,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \frac{\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}'}}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\int_{(V)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'-\vec{k}).\vec{x}}\ \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \frac{\omega_{\tilde{\mathrm{k}}}+\omega_{\tilde{\mathrm{k}}'}}{2\sqrt{\omega_{\tilde{\mathrm{k}}}\omega_{\tilde{\mathrm{k}}'}}}\delta_{\tilde{\mathrm{k}},\tilde{\mathrm{k}}'}\,.$$

Poslední výraz je nenulový jenom když $\vec{k}'=\vec{k}$, můžeme proto položit $\omega_{\vec{k}'}=\omega_{\vec{k}}$ a dostáváme jednoduchý výsledek

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\ ,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\,. \tag{190}$$

Pro $\vec{k}'=\vec{k}$ je na pravé straně jednotka, na základě čehož víme, že když definujeme operátor $\hat{N}_{\vec{k}}=\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}$, budou jeho vlastní hodnoty nezáporná celá čísla (to bude operátor počtu částic s hybností $\vec{k}$).

Podobně bychom odvodili

$$\left[\hat{b}_{\vec{k}}\ ,\hat{b}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\,, \tag{191}$$

což nás vede k definici operátoru $\hat{\overline{N}}_{\vec{k}}=\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}$, o kterém si ukážeme, že je to operátor počtu antičástic s hybností $\vec{k}$. Všechny ostatní myslitelné komutátory by nám vyšli rovné nule.

Hamiltonův operátor komplexního skalárního pole

Z Hamiltonovy hustoty klasického komplexního pole (178) uděláme operátor tím, že nahradíme všechna pole operátory, změníme komplexní sdružení na hermitovské a předepíšeme normální součin, který zafixuje pořadí operátorů v součinech. Výsledkem je

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}) = \,:\left\{\hat{\pi}^\dagger(\vec{x})\hat{\pi}(\vec{x})+[\nabla\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x})].\nabla\hat{\varphi}(\vec{x})+m^2\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x})\hat{\varphi}(\vec{x})\right\}:\,. \tag{192}$$

Hamiltonův operátor komplexního skalárního pole je dán jako integrál

$$\hat{H} = \int_{(V)}\hat{\mathcal{H}}(\vec{x})\ \mathrm{d}^3\mathrm{x}\,,$$

který se dá napsat jako normální součin ze součtu tří příspěvků. Postupujíc podobně jako při výpočtu Hamiltonova operátoru reálného skalárního pole [pouze s nahrazením některých operátorů $\hat{a}$ operátory $\hat{b}$ v souladu se vztahy (184–187)] pro tyto příspěvky dostaneme

$$\int_{(V)}\hat{\pi}^\dagger(\vec{x})\hat{\pi}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x} = \frac{1}{2}\sum_{\tilde{\mathrm{k}}}\omega_{\tilde{\mathrm{k}}}\left(\hat{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}-\hat{\mathrm{b}}^\dagger_{-\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}-\hat{\mathrm{a}}_{-\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{b}}_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{b}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{b}}_{\tilde{\mathrm{k}}}\right)\,,$$

$$\int_{(V)}[\nabla\varphi^\dagger(\vec{x})].\nabla\hat{\varphi}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x} = \frac{1}{2}\sum_{\tilde{\mathrm{k}}}\frac{\tilde{\mathrm{k}}^2}{\omega_{\tilde{\mathrm{k}}}}\left(\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{-\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{b}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{b}}_{-\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{b}}_{\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{b}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}\right)\,,$$

$$\int_{(V)}m^2\varphi^\dagger(\vec{x})\hat{\varphi}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x} = \frac{1}{2}\sum_{\tilde{\mathrm{k}}}\frac{\mathrm{m}^2}{\omega_{\tilde{\mathrm{k}}}}\left(\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{-\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{b}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{b}}_{-\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{k}}}+\hat{\mathrm{b}}_{\tilde{\mathrm{k}}}\hat{\mathrm{b}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}}\right)\,,$$

Nejdřív sečteme druhý a třetí příspěvek s využitím vztahu $\vec{k}^2+m^2=\omega^2_{\vec{k}}$. Pak přidáme první příspěvek a na výsledek aplikujeme pravidlo normálního součinu. Dostáváme

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}+\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}})+\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}-\hat{b}^\dagger_{-\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{b}_{-\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}-\hat{a}_{-\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\right)$$

Druhá a třetí suma jsou rovny nule[14], protože výrazy v závorkách jsou lichými funkcemi $\vec{k}$ (dva kreační operátory kumutují, stejně jako dva anihilační) a při sčítání přes všechny $\vec{k}$ dají nulu. Když

[14]U reálného skalárního pole, kde platí $\hat{b}_{\vec{k}}=\hat{a}_{\vec{k}}$, se tyto sumy vůbec nevyskytly.

teď zavedeme operátor počtu částic s hybností $\vec{k}$ jako $\hat{N}_{\vec{k}} = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}$ a obdobný pro antičástice $\hat{\overline{N}}_{\vec{k}} = \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}$, pro Hamiltonův operátor komplexního skalárního pole dostáváme názorný výsledek

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \, (\hat{N}_{\vec{k}} + \hat{\overline{N}}_{\vec{k}}) \tag{193}$$

Operátor hybnosti komplexního skalárního pole

Z hustoty j-té komponenty hybnosti pole (179) uděláme operátor předpisem

$$\hat{\mathcal{T}}^{0j}(\vec{x}) = \,:\left\{\hat{\pi}(\vec{x})\,\partial^j\hat{\varphi}(\vec{x}) + [\partial^j\hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{x})]\hat{\pi}^{\dagger}(\vec{x})\right\}:\,. \tag{194}$$

Na pořadí operátorů uvnitř složené závorky nezáleží, konečné slovo bude mít operace normálního součinu. Zvolili jsme takové pořadí, aby dva členy ve složené závorce byly navzájem hermitovsky sdružené. Operátor j-té komponenty hybnosti pole určíme integrací

$$\hat{P}^j = \int_{(V)} \hat{\mathcal{T}}^{0j}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Můžeme ho zapsat ve tvaru

$$\hat{P}^j = \,:\left(\hat{P}^j_1 + \hat{P}^j_2\right):\,,$$

kde

$$\hat{P}^j_1 = \int_{(V)} \hat{\pi}(\vec{x})\,\partial^j\hat{\varphi}(\vec{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

a $\hat{P}^j_2 = (\hat{P}^j_1)^{\dagger}$. Při výpočtu $\hat{P}^j_1$ postupujeme stejně jako v případě reálného skalárního pole, až na částečnou záměnu $\hat{a}_{\vec{k}} \to \hat{b}_{\vec{k}}$. Vychází

$$\hat{P}^j_1 = \sum_{\vec{k}} \frac{k^j}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}} - \hat{b}_{-\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}}\right)\,.$$

Po určení $\hat{P}_2$ hermitovským sdružením, jeho přidání k $\hat{P}_1$ a aplikací normálního součinu dostáváme

$$\hat{P}^j = \sum_{\vec{k}} k^j\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} k^j\left(\hat{a}^{\dagger}_{-\vec{k}}\hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{b}^{\dagger}_{-\vec{k}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} k^j\left(\hat{b}_{-\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}}\right)$$

Výrazy v závorkách ve druhé a třetí sumě jsou teď sudými funkcemi vektoru $\vec{k}$. Po vynásobení jeho j-tou komponentou se opět stávají funkcemi lichými, což má za následek, že součty přes všechny hybnosti jsou rovny nule. Pro hybnost pole, zapsanou už ve vektorovém tvaru, tak dostáváme výsledek

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k}} \vec{k}\;(\hat{N}_{\vec{k}} + \hat{\overline{N}}_{\vec{k}}) \tag{195}$$

Operátor náboje komplexního skalárního pole.

Operátor hustoty náboje dostaneme tak, že ve vztahu (180) nahradíme pole operátory a zavedeme normální součin, který zaručí, že pořadí operátorů ve výsledku nebude záviset na tom, jaké pořadí operátorů při nahrazování polí operátory zvolíme.

$$\hat{\rho}(\vec{x}) = \mathrm{ie}:\left[\hat{\varphi}^{\dagger}(\vec{x})\hat{\pi}^{\dagger}(\vec{x}) - \hat{\pi}(\vec{x})\,\hat{\varphi}(\vec{x})\right]:\,. \tag{196}$$

Operátor náboje komplexního skalárního pole dostaneme integrací

$$\hat{Q} = \int_{(V)} \hat{\rho}(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Po dosazení z (196) tento vztah můžeme přepsat na tvar

$$\hat{Q} = e:(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2):$$

kde

$$\hat{Q}_1 = \mathrm{i}\int_{(V)} \hat{\varphi}^\dagger(\vec{x})\hat{\pi}^\dagger(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x} \qquad \text{a} \qquad \hat{\mathrm{Q}}_2 = (-\mathrm{i})\int_{(\mathrm{V})} \hat{\pi}(\tilde{\mathrm{x}})\hat{\varphi}(\tilde{\mathrm{x}})\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Evidentně platí $\hat{Q}_2 = \hat{Q}_1^\dagger$, což je hned dvakrát dobrá zpráva. Jednak to znamená, že operátor Q je hermitovský, jak se na operátor fyzikální veličiny sluší. A pak, že stačí počítat jenom $\hat{Q}_1$. Prostým hermitovským sdružením potom dostaneme $\hat{Q}_2$. Po dosazení (185) a (187) do $\hat{Q}_1$ a záměně pořadí integrace a sumace dostáváme

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}'}}{\omega_{\vec{k}}}}\int_{(V)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\hat{b}_{\vec{k}}\right]\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\hat{a}_{\vec{k}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\right]\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Po využití nám známeho pravidla pro integraci exponent výjde

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{b}^\dagger_{-\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}\,\hat{a}_{-\vec{k}} - \hat{b}_{\vec{k}}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\right)$$

Po získání $\hat{Q}_2$ hermitovským sdružením a jeho přidání k $\hat{Q}_1$ dostaneme

$$\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 = \sum_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{b}_{\vec{k}}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{b}^\dagger_{-\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\hat{b}_{\vec{k}}\,\hat{a}_{-\vec{k}} - \hat{b}_{-\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}\right)\,.$$

Druhá a třetí suma jsou rovny nule, protože výrazy v závorkách jsou lichými funkcemi $\vec{k}$ a při sčítání přes všechny $\vec{k}$ dají nulu. Po uplatnění normálního součinu a vynásobení elementárním nábojem vychází

$$\hat{Q} = e\left(\hat{N} - \hat{\overline{N}}\right)\,,$$

kde $\hat{N} = \sum_{\vec{k}}\hat{N}_{\vec{k}}$ je operátor celkového počtu částic (bez ohledu na jejich hybnosti) a $\hat{\overline{N}} = \sum_{\vec{k}}\hat{\overline{N}}_{\vec{k}}$ je operátor celkového počtu antičástic.

3.4.3 Heisenbergův obraz pro volná pole

Sledováním paralely s přechodem od klasické mechaniky ke kvantové mechanice jsme se dostali do verze kvantové teorie pole v níž operátory nezávisí na čase, do Schrödingerova obrazu (*angl.* Schroedinger picture). V tomto obraze je časový vývoj stavu diktován rovnicí

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi;t\right\rangle_S = \hat{H}_S\left|\psi;t\right\rangle_S\,,$$

která má formální řešení

$$\left|\psi;t\right\rangle_S = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_S t}\left|\psi;t=0\right\rangle_S$$

V této kapitole přejdeme do Heisenbergova obrazu, ve kterém stavový vektor od času nezávisí, zato operátory se stanou funkcemi času, což umožní jejich relativisticky kovariantní zápis. Návod na přechod nám poskytuje předešlý vztah. Když na jeho obě strany uplatníme operátor $\exp\left\{\mathrm{i}\hat{H}_S t\right\}$, na pravě straně dostaneme stavový vektor od času nezávislý. Stavový vektor v Heisenbergově obraze dostaneme ze stavového vektoru ve Schrödingerově obrazu předpisem

$$|\psi\rangle_H = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_S t}\left|\psi;t\right\rangle_S$$

Protože $\hat{H}_S$ je operátorem hermitovským, je operátor provádějící transformaci operátorem unitárním.

Připomeňme si, co pro unitární transformace platí (stavy označujeme Φ, operátory $\hat{O}$, transformační operátor $\hat{U}$; stavy a operátory po transformaci čárkujeme).

1. Unitárnost transformačního operátoru: $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$
2. Transformace stavů: $|\Phi'\rangle = \hat{U}\,|\Phi\rangle$
3. Transformace konjugovaných stavů:$\langle\Phi'| = \langle\Phi|\,\hat{U}^\dagger$
4. Transformace operátorů: $\hat{O}' = \hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger$
5. Invariantnost skalárního součinu: $\langle\Phi_2'|\Phi_1'\rangle = \langle\Phi_2|\Phi_1\rangle$
6. Invariantnost maticových elementů a středních hodnot: $\left\langle\Phi_2'|\hat{O}'|\Phi_1'\right\rangle = \left\langle\Phi_2|\hat{O}|\Phi_1\right\rangle$
7. Kovariantnost komutátorů: $\left[\hat{O}_1\,,\hat{O}_2\right] = \hat{O}_3 \Rightarrow \left[\hat{O}_1'\,,\hat{O}_2'\right] = \hat{O}_3'$

Operátor $\hat{a}_{\vec{k}}$ v Heisenbergově obraze

V souladu s výše uvedeným pro operátor $\hat{a}_{\vec{k}}$ v Heisenbergově obraze platí

$$\hat{a}_{\vec{k}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\hat{a}_{\vec{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\,, \tag{197}$$

kde $\hat{H}$ je Hamiltonův operátor (193) komplexního skalárního pole. K odlišení operátoru $\hat{a}_{\vec{k}}$ v Heisenbergově obraze od toho v obraze Schrödingerově postačuje vyznačení jeho závislosti na čase, subskripty H a S nebudeme používat. U Hamiltonova operátoru by to bylo dvounásob zbytečné, protože je v obou obrazech stejný. Protože všechny operátory počtu částic a antičástic mezi sebou komutují, můžeme exponentu ze součtu napsat jako součin exponent

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t} = \exp\left\{\mathrm{i}\sum_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}'}\hat{N}_{\vec{k}'}t\right\}\ \exp\left\{\mathrm{i}\sum_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}'}\hat{\overline{N}}_{\vec{k}'}t\right\}$$

a podobně i pro exponentu se záporným znaménkem. Protože operátor $\hat{a}_{\vec{k}}$ komutuje se všemi operátory $\hat{\overline{N}}_{\vec{k}'}$, můžeme "antičásticovou"exponentu s kladným znaménkem přesunout až za operátor $\hat{a}_{\vec{k}}$, kde se s odpovídající exponentou se záporným znaménkem "sjedničkuje". Zbývající exponenty převedeme na součin ještě jednodušších exponent

$$\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}'}\hat{N}_{\vec{k}'}t\right\} = \prod_{\vec{k}'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}'}\hat{N}_{\vec{k}'}t}$$

a ty s $\vec{k}' \neq \vec{k}$ zase můžeme přesunout a "sjedničkovat". Zbyde nám

$$\hat{a}_{\vec{k}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}\hat{N}_{\vec{k}}t}\hat{a}_{\vec{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}\hat{N}_{\vec{k}}t}\,. \tag{198}$$

Počítejme teď komutátor

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{N}_{\vec{k}}\right] = \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} = \left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right]\hat{a}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}$$

Abychom si zjednodušili psaní, označíme $\hat{a}_{\vec{k}} = \hat{A}$, $\hat{N}_{\vec{k}} = \hat{B}$ a $\omega_{\vec{k}}t = \alpha$. Platí

$$\left[\hat{A}\,,\hat{B}\right] = \hat{A}.$$

Pravá strana ve vztahu (198) má v našem označení tvar

$$\hat{F}(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{B}}\hat{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{B}}\,.$$

Teď použijeme trik často používaný při odvozování operátorových identit (myslím, že pochází od Gassera). Předešlý vztah zderivujeme, využijeme komutátor a po úpravě získame diferenciální rovnici

$$\hat{F}'(\alpha) = -\mathrm{i}\hat{F}(\alpha)\,,$$

řešení které umíme okamžitě napsat

$$\hat{F}(\alpha) = \hat{F}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}.$$

Protože $F(0) = \hat{A}$, máme výsledek

$$\hat{F}(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{A}.$$

Po návratu k původnímu označení (198) dostáváme pro anihilační operátor částice v Heisenbergově obraze vyjádření

$$\hat{a}_{\vec{k}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}\hat{a}_{\vec{k}}\,. \tag{199}$$

Podobně bychom dostali pro anihilační operátor antičástice v Heisenbergově obraze vztah

$$\hat{b}_{\vec{k}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}\hat{b}_{\vec{k}}\,. \tag{200}$$

Operátory pole v Heisenbergově obraze

Operátory $\hat{\varphi}$ a $\hat{\varphi}^\dagger$ v Heisenbergově obraze získáme tak, že ve vztazích (184) a (185) nahradíme původní $\hat{a}_{\vec{k}}$ a $\hat{b}_{\vec{k}}$ operátory těmi podle vztahů (199) a (200). Využijeme přitom, že platí $\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}.\vec{x} = kx$ (součin čtyřvektorů k a x v námi používané metrice). Dostaneme tak

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\;\hat{a}_{\vec{k}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\;\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}\right] \tag{201}$$

$$\hat{\varphi}^\dagger(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\;\hat{b}_{\vec{k}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\;\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] \tag{202}$$

To, že se jedná o operátory v Heisenbergově obraze je vyznačeno jejich závislostí na čtyřvektoru x, index H není potřebný. Konjugované polní operátory π a $\pi^\dagger$ v Heisenbergově obraze potřebovat nebudeme. Jejich schrödingerovské verze nám posloužily při odvozování operátorů $\hat{H}$, $\hat{\vec{P}}$ a $\hat{Q}$, které si svůj tvar zachovávají i v Heisenbergově obraze.

Operátory $\hat{\varphi}(x)$ a $\hat{\varphi}^\dagger(x)$ je výhodné zapsat jako součty dvou operátorů

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^{(+)}(x) + \hat{\varphi}^{(-)}(x) \qquad\qquad \hat{\varphi}^\dagger(x) = \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x) + \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x)$$

Operátory (+) jsou nazývané kladně frekvenční[15], obsahují anihilační operátory a argument exponenty je $-\mathrm{i}kx$; operátory (-) jsou nazývané záporně frekvenční, obsahují kreační operátory a argument exponenty je $\mathrm{i}kx$. Tady je jejich explicitní vyjádření:

$$\hat{\varphi}^{(+)}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\;\hat{a}_{\vec{k}} \tag{203}$$

$$\hat{\varphi}^{(-)}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\;\hat{b}^\dagger_{\vec{k}} \tag{204}$$

$$\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\;\hat{b}_{\vec{k}} \tag{205}$$

$$\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\;\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \tag{206}$$

Pojďme teď počítat komutátor operátoru $\hat{\varphi}(x)$ s operátorem $\hat{\varphi}^\dagger(x')$ v Heisenbergově obraze[16]. Protože $\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{b}_{\vec{k}'}\right] = \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,,\hat{b}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = 0$, hledaný komutátor stačí počítat jako součet dvou jednodušších

$$\left[\hat{\varphi}(x)\;,\hat{\varphi}^\dagger(x')\right] = \left[\hat{\varphi}^{(+)}(x)\;,\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\right] + \left[\hat{\varphi}^{(-)}(x)\;,\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x')\right] \tag{207}$$

[15]Trochu matoucí označení pochází z toho, že u nich je závislost na čase stejná jako u vlnových funkcí v nerelativistické kvantové mechanice

[16]Úvaha: Ve Schrödingerově obraze tyto operátory komutují, komutátory jsou kovariantní vůči unitárním transformacím, takže komutátor bude nulový i v Heisenbergově obraze, kam se ze Schrödingerova obrazu dostaneme unitární transformací. Kde je chyba v této úvaze?

Při výpočtu prvního komutátoru použijeme vztah (206), kde kromě přeznačení x na x' změníme i sčítací index na $\vec{k}'$, a vztah (203).

$$\left[\hat{\varphi}^{(+)}(x)\ ,\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\right] = \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-k'x')} \left[\hat{a}_{\vec{k}}\ ,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'}\right] = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}$$

Upravíme si tento vztah pro případ limity nekonečně velkého normalizačního objemu a spojitého spektra hybností. Použijeme přitom vztah

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\vec{k})\ \mathrm{d}^3k\ . \tag{208}$$

Dokážeme si ho tak, že celý k prostor rozdělíme na stejně veliké buňky o rozměrech Δk_x, Δk_y, Δk_z. Počet možných vektorů $\vec{k}$ v každé z buněk je podle vztahu (12) roven $V\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z/(2\pi)^3$. Součet přes i-tou buňku můžeme nahradit součinem hodnoty funkce $f(\vec{k})$ v bodě někde uvnitř této buňky, kterou označíme $f(\vec{k}_i)$, a počtu vektorů $\vec{k}$ v této buňce. Součet přes všechny hodnoty $\vec{k}$ můžeme počítat jako součet součtů v buňkách

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = \frac{1}{V}\sum_{i} f(\vec{k}_i) \frac{V\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{i} f(\vec{k}_i)\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z\,.$$

V limitě $V\to\infty$ hustota bodů v k prostoru neomezeně roste a rozměry buněk můžeme volit libovolně malé, takže součet přes buňky přechází na trojný integrál ve vztahu (208).

Po náhradě sumace integrací můžeme uvažovaný komutátor vyjádřit vztahem

$$\left[\hat{\varphi}^{(+)}(x), \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\right] = \mathrm{i}\Delta^{(+)}(x-x')\,, \tag{209}$$

po tom, co jsme zavedli funkci

$$\Delta^{(+)}(\xi) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,. \tag{210}$$

Podobně získame pro druhý komutátor vystupující ve vztahu (207) vyjádření

$$\left[\hat{\varphi}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x')\right] = \mathrm{i}\Delta^{(-)}(x-x')\,, \tag{211}$$

kde

$$\Delta^{(-)}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\,. \tag{212}$$

Pro komutátor (207) na základě znalosti dílčích komutátorů tak píšeme

$$\left[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}^{\dagger}(x')\right] = \mathrm{i}\Delta(x-x')\,, \tag{213}$$

kde

$$\Delta(\xi) = \Delta^{(+)}(\xi) + \Delta^{(-)}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\right)\,. \tag{214}$$

Abychom si ukázali souvislost komutátoru (213) s odpovídajícím komutátorem ve Schrödingerově obraze (který je nulový), přepíšeme tuto funkci do jiného tvaru. Nejdřív v exponentách separujeme časovou komponentu čtyřrozměrného součinu od prostorové

$$\Delta(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}}\right)$$

pak roztrhneme integrál na dva, ve druhém uděláme substituci $\vec{k}' = -\vec{k}$ a pak $\vec{k}'$ přejmenujeme zpátky na $\vec{k}$. Po opětovném spojení integrálů máme

$$\Delta(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi_0} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi_0}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}}.$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že $\Delta(\xi) = 0$ když $\xi_0 = 0$. Pro stejně časový komutátor tak platí

$$\left[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}^\dagger(x')\right]_{t=t'} = 0\,.$$

Funkce Δ (214) se dá po několika krocích zapsat do relativisticky invariantního tvaru. Pak můžeme usoudit, že komutátor (213) je roven nule nejenom pro $t = t'$, ale vždy, když jsou čtyřvektory x a x' odděleny prostorupodobným intervalem $(x - x')^2 < 0$, který znamená, že události v těchto časoprostorových bodech nemůžou příčinně souviset.

Chronologický součin

Chronologickým součinem (chronological product, time-ordered product) nazýváme takový součin operátorů ve kterém jsou tyto uspořádány podle časového argumentu, ten s největším na prvním místě. Definujeme Dysonův chronologický operátor $\hat{P}$, který operátory podle času uspořádá

$$\hat{P}\left[\hat{A}_1(t_1)\hat{A}_2(t_2)\dots\hat{A}_n(t_n)\right] = \hat{A}_{i_1}(t_{i_1})\hat{A}_{i_2}(t_{i_2})\dots\hat{A}_{i_n}(t_{i_n})\,,$$

kde $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$. Ještě existuje Wickův chronologický operátor $\hat{T}$, který pro fermionové operátory předepisuje další pravidlo, pro bozonové operátory se neliší od Dysonova operátoru. V obecných vztazích budeme užívat Wickův operátor, i když je pak budeme aplikovat jenom na bozonové operátory, jako například teď.

Zůžení operátorů

Zůžení (contraction) dvou operátorů definujeme jako rozdíl jejich Wickova chronologického součinu a jejich normálního součinu.

$$\hat{A}^\bullet\hat{B}^\bullet = \hat{T}(\hat{A}\hat{B}) \;-\; :\hat{A}\hat{B}:\,. \tag{215}$$

Věnujme se zúžení operátorů $\hat{\varphi}(x)$ a $\hat{\varphi}^\dagger(x')$. Abychom mohli určit jejich normální součin, musíme oba rozložit na kladně frekvenční (obsahuje anihilační operátory) a záporně frekvenční (obsahuje kreační operátory) část

$$\begin{aligned} :\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(x'): &= \;:\left[\hat{\varphi}^{(+)}(x) + \hat{\varphi}^{(-)}(x)\right]\left[\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x') + \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\right]: \\ &= \hat{\varphi}^{(+)}(x)\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x') + \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\hat{\varphi}^{(+)}(x) + \hat{\varphi}^{(-)}(x)\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x') + \hat{\varphi}^{(-)}(x)\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x') \end{aligned}$$

Při určování chronologického součinu není rozklad na kladně a záporně frekvenční části potřebný. Avšak když chceme od chronologického součinu odečíst normální, musíme rozklad stejně udělat.

Jako výsledek pro $t > t'$ jednoduše dostáváme

$$\hat{\varphi}(x)^\bullet\hat{\varphi}^\dagger(x')^\bullet = \hat{\varphi}^{(+)}(x)\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x') - \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\hat{\varphi}^{(+)}(x) = \left[\hat{\varphi}^{(+)}(x)\;, \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(x')\right]\,.$$

V případě $t' > t$ se objeví v mezivýsledku i komutátor kladně frekvenčních i komutátor záporně frekvenčních částí, které jsou však nulové, takže znovu dostáváme jednoduchý výsledek

$$\hat{\varphi}(x)^\bullet\hat{\varphi}^\dagger(x')^\bullet = \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x')\hat{\varphi}^{(-)}(x) - \hat{\varphi}^{(-)}(x)\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x') = -\left[\hat{\varphi}^{(-)}(x)\;, \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(x')\right]\,.$$

Když vyjádříme komutátory pomocí dříve zavedených funkcí, můžeme naše výsledky shrnout takto

$$\hat{\varphi}(x)^\bullet\hat{\varphi}^\dagger(x')^\bullet = \left\langle \begin{array}{ll} \mathrm{i}\Delta^{(+)}(x - x') & \text{jestli } x_0 > x'_0 \\ \\ -\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x - x') & \text{jestli } x_0 < x'_0 \end{array} \right.\,,$$

anebo, když zavedeme další funkci předpisem

$$\Delta_\mathrm{F}(\xi) = \left\langle \begin{array}{ll} \Delta^{(+)}(\xi) & \text{jestli } \xi_0 > 0 \\ \\ -\Delta^{(-)}(\xi) & \text{jestli } \xi_0 < 0 \end{array} \right.\,, \tag{216}$$

tak jednodušším vztahem

$$\hat{\varphi}(x)^{\bullet}\hat{\varphi}^{\dagger}(x')^{\bullet} = \mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(x - x')\,. \tag{217}$$

Moc jsme si přitom nepomohli, jenom jsme "vidličku"přesunuli z jednoho vztahu do druhého. Avšak níže dokážeme, že funkce (216) se dá zapsat v kompaktním tvaru jako

$$\Delta_{\mathrm{F}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{d}^4k, \tag{218}$$

kde ε je malá kladná konstanta, kterou po získání měřitelných výsledků klademe rovnu nule. Na rozdíl od podobných vztahů se kterými jsme se doposud setkali, všechny čtyři komponenty čtyřvektoru k jsou nezávislé, neplatí tudíž $k^2 = m^2$ ani $k_0 = \omega$, kde $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ je energie částice.

Důkaz začneme tím, že exponentu ve vztahu (218) napíšeme jako součin dvou exponent a čtyřrozměrný integrál jako třírozměrný z funkce která obsahuje i integrál přes k_0. Když dále využijeme, že platí $k^2 - m^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 = k_0^2 - \omega^2$ dostáváme

$$\Delta_{\mathrm{F}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}} I(\omega, \xi_0)\mathrm{d}^3k, \tag{219}$$

kde

$$I(\omega; \xi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k_0; \xi_0)\mathrm{d}k_0, \tag{220}$$

kde

$$f(k_0; \xi_0) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\xi_0}}{k_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{221}$$

K výpočtu integrálu (220) použijeme residuovou větu z teorie analytických funkcí. Funkci (221) rozšíříme do celé komplexní roviny k_0 a integrační cestu v (220) doplníme na uzavřenou křivku tak, aby integrál po přidané křivce byl roven nule. Volba přidané křivky bude záviset od hodnoty parametru ξ_0, který určuje chování exponenty ve funkci (221) pro Im $k_0 \to \pm\infty$. Tuto exponentu napíšeme jako součin dvou exponent

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\xi_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_0 \mathrm{Re}\, k_0}\ \mathrm{e}^{\xi_0 \mathrm{Im}\, k_0}.$$

Absolutní hodnota první z nich je rovna jedné. Pro kladná ξ_0 druhá exponenta neomezeně roste při postupu vzhůru v horní polorovině, a blíží se k nule při postupu dolů v dolní polorovině. Proto pro kladná ξ_0 musíme integrační cestu doplnit půlkružnicí v dolní polorovině. Pro záporná ξ_0 musíme volit půlkružnici v horní polorovině.

V dalším využijeme že platí

$$k_0^2 - \left(\omega - \mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2\omega}\right)^2 = k_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4\omega^2}.$$

Pro malé ε můžeme poslední člen na pravé straně zanedbat a jmenovatel ve vztahu (220) zapsat pomocí komplexních konstant

$$k_{0+} = \omega - \mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2\omega}$$

a

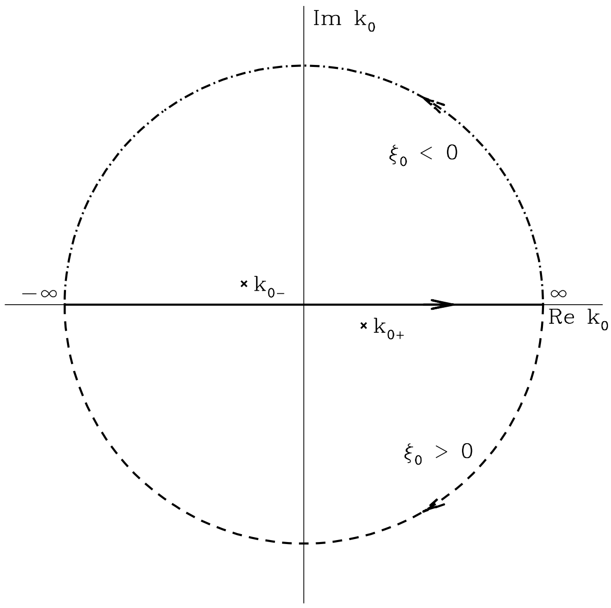
$$k_{0-} = -k_{0+}$$

Pro funkci (221) tak získáváme vyjadření

$$f(k_0; \xi_0) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\xi_0}}{(k_0 - k_{0+})(k_0 - k_{0-})}, \tag{222}$$

ze kterého je vidět, že tato funkce má dva jednoduché póly. Ten v bodě k_{0+} leží v dolní polorovině, druhý v bodě k_{0-} v polorovině horní. Rezidua funkce (222) jsou dány vztahy

$$R(k_{0+}) = \lim_{k_0 \to k_{0+}} \left[(k_0 - k_{0+})f(k_0; \xi_0)\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi_0}}{2\omega} \tag{223}$$



a

$$R(k_{0-}) = \lim_{k_0 \to k_{0-}} [(k_0 - k_{0-}) f(k_0; \xi_0)] = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi_0}}{2\omega}, \tag{224}$$

ve kterých jsme již položili $\varepsilon = 0$. Podle reziduové věty je integrál (220) roven

$$I(\omega; \xi_0 > 0) = -2\pi \mathrm{i} R(k_{0+}) \tag{225}$$

$$I(\omega; \xi_0 < 0) = 2\pi \mathrm{i} R(k_{0-}) \tag{226}$$

Po dosazení (223) do (225) a získaného výsledku do (219) se s přihlédnutím k (210) přesvědčíme, že (218) splňuje horní větev vztahu (216).

Případ $\xi_0 < 0$ vyžaduje víc pozornosti. Použitím vztahů (224), (226) a (219) dostáváme

$$\Delta_{\mathrm{F}}(\xi) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{2\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}}.$$

Součin dvou exponent tam vystupujících se zatím nedá zapsat jako jedna exponenta obsahující v argumentu součin čtyřvektorů $k \equiv (\omega, \vec{k})$ a ξ. To umožní až substituce $\vec{k} = -\vec{k}'$ a následné přejmenování $\vec{k}'$ na $\vec{k}$. Porovnáním s (212) se pak přesvědčíme, že (218) splňuje i dolní větev vztahu (216). Tím je důkaz vztahu (218) ukončen.

Několik poznámek:

1. Když vypočteme vakuovou střední hodnotu vztahu (217) a použijeme i definici kontrakce dostáváme

$$\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(x - x') = \left\langle 0 \middle| T \left[\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^\dagger(x') \right] \middle| 0 \right\rangle ,$$

protože vakuová střední hodnota normálního součinu je rovna nule.

2. V literatuře se používá funkce $G_F(x - x')$, nazývaná Feynmanovým skalárním propagátorem. Naše funkce $\Delta_{\mathrm{F}}(x - x')$ se od ní liší znaménkem.

3. Platí

$$(\Box + m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x - x') = -\delta(x - x') ,$$

funkce $\Delta_{\mathrm{F}}(x - x')$ je, až na znaménko, Greenovou funkcí Kleinovy-Gordonovy rovnice.

3.5 Klasická teorie elektromagnetického pole

Tento materiál se zabývá kvantováním elektromagnetického pole. Pro pohodlí studujícího, který by si chtěl osvěžit vědomosti získané v už absolvovaných předmětech obecné i teoretické fyziky, v první části uvádíme potřebný materiál z klasické fyziky.

3.5.1 Používané jednotky

Coulombův zákon popisující sílu kterou ve vakuu působí jedna částice s elementárním nábojem e na druhou stejně nabitou, má v různých soustavách jednotek tvary níže uvedené. Současně uvádíme i vztahy pro bezrozměrnou konstantu jemné struktury α, která má ve všech soustavách jednotek hodnotu 1/137,035999084(21).

- Soustava SI
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

- Gauss-ova soustava (CGSE)
$$F = \frac{e^2}{r^2} \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

- Heaviside-ova soustava (racionalizovaná CGSE)
$$F = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{r^2} \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$$

3.5.2 Základní rovnice elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole v prostředí bez vázaných nábojů (které se nacházejí v dielektriku) a skrytých proudů (nacházejících se v magnetiku), tj. ve vakuu ve kterém se nacházejí jenom volné náboje s hustotou $\rho(t,\vec{x})$ a vektorem proudové hustoty $\vec{j}(t,\vec{x})$, je charakterizováno vektorem intenzity elektrického pole $\vec{E}(t,\vec{x})$ a vektorem indukce magnetického pole $\vec{B}(t,\vec{x})$. Tyto jsou definovány pomocí silového působení na zkušební elektrický náboj q. V Gaussově a Heavisidově soustavě jednotek platí pro Lorentzovu sílu (podle holandského fyzika Henrika Antoona Lorentze) vztah

$$\vec{F}(t,\vec{x}) = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right). \tag{227}$$

Pro zadané ρ a $\vec{j}$ získáme $\vec{E}$ a $\vec{B}$ řešením Maxwellových rovnic. V Heavisideově soustavě jednotek, kterou budeme v dalším používat, mají tyto tvar

$$\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{c} \tag{228}$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho \tag{229}$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{230}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{231}$$

Z rovnic (228) a (229) plyne rovnice kontinuity (zákon zachování náboje v diferenciálním tvaru)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \tag{232}$$

která je tak nutnou podmínkou platnosti Maxwellových rovnic.

Vynásobme skalárně rovnici (228) vektorem $\vec{E}$, rovnici (230) vektorem $\vec{B}$ a vypočteme z nich součet členů s časovými derivacemi

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} - c(\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}).$$

Po úpravě máme

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{E}^{\,2}+\vec{B}^{\,2}}{2} + \vec{j}\cdot\vec{E} = -c\,\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{233}$$

Ujasněme si nejdřív význam druhého členu na levé straně. Pro energii bodové částice platí $\mathcal{E} = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}}$ a pro její časovou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{E}\,\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{v}\cdot\vec{E},$$

kde q je náboj částice. Použili jsme přitom relativistickou pohybovou rovnici se sílou (227). Člen $\vec{j}\cdot\vec{E} = \rho\,\vec{v}\cdot\vec{E}$ podle toho představuje časovou derivaci hustoty energie částic. Zaveďme teď označení

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right) \tag{234}$$

$$\vec{S} = c\,(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{235}$$

a zintegrujme (233) přes určitou prostorovou oblast Ω. Po použití Gaussovy-Ostrogradského věty dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w\mathrm{d}^3\mathrm{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \tilde{\mathrm{j}}\cdot\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{d}^3\mathrm{x} = -\oint_\Sigma \tilde{\mathrm{S}}\cdot\mathrm{d}\tilde{\sigma},$$

kde Σ označuje uzavřenou plochu obklopující oblast Ω. Levá strana se dá interpretovat jako rychlost změny celkové energie v oblasti Ω, pozůstávající z energie elektromagnetického pole a energie částic, kdežto integrál na pravé straně jako energie, která proteče plochou Σ za jednotku času. Veličina w definována vztahem (234) je proto hustotou energie elektromagnetického pole, a vektor $\vec{S}$ (235), nazývaný Poyntingovým vektorem, je hustotou proudu energie (energie, která proteče za jednotku času jednotkovou ploškou postavenou kolmo na $\vec{S}$).

Maxwellovy rovnice (228–231) představují soustavu vzájemně svázaných diferenciálních rovnic pro šest neznámých funkcí, kterými jsou komponenty vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$. Situace se dá zjednodušit, když zavedeme nové funkce $\varphi(t,\vec{x})$ ("skalární"potenciál) a $\vec{A}(t,\vec{x})$ (vektorový potenciál) a vyjádříme pomocí nich vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vztahy

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{236}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}. \tag{237}$$

Tím automaticky splníme homogenní Maxwellovy rovnice (230) a (231). Po dosazení do vztahů (228) a (229) získáváme rovnice

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\,\varphi = \rho \tag{238}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} + \mathrm{grad}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A}\right) = \frac{\vec{j}}{c}, \tag{239}$$

které představují soustavu čtyř svázaných parciálních diferenciálních rovnic pro čtyři neznáme funkce čtyř proměnných. V dalším využijeme, že potenciály φ a $\vec{A}$ nejsou určeny jednoznačně. Když totiž zavedeme jiné potenciály vztahy

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{240}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\chi, \tag{241}$$

kde $\chi = \chi(t,\vec{x})$ je libovolná diferencovatelná funkce času a souřadnic, bude platit $\mathrm{rot}\,\vec{A}' = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ a

$$\mathrm{grad}\,\varphi' + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \mathrm{grad}\,\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Proto když vypočteme $\vec{E}$ a $\vec{B}$ z nových potenciálů φ' a $\vec{A}'$ pomocí vztahů analogických k (236) a (237), dostaneme stejné hodnoty jako z potenciálů původních φ a $\vec{A}$. Přechod od jeděch potenciálů k jiným pomocí vztahů (240) a (241) se nazývá kalibrační (cejchovací) transformací. Všechny kalibrační transformace tvoří abelovskou (komutativní) grupu, dvě postupné transformace generované funkcemi

χ a χ' se dají zapsat jako jedna transformace generovaná funkcí $\chi'' = \chi + \chi'$, přičemž zjevně na pořadí transformací nezáleží.

Existence kalibračních transformací nám umožňuje vybírat potenciály které splňují určitý vztah, tzv. kalibrační podmínku. Mluvíme o určité kalibraci potenciálů. Často používanou je Lorenzova (podle dánskeho fyzika Ludviga Valentina Lorenze[17]) kalibrační podmínka

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \tag{242}$$

Dokážeme, že tuto podmínku je možno na potenciály vždy naložit. Předpokládajme, že vycházíme z potenciálů, které ji nesplňují, funkce $\Phi = \Phi(t, \vec{x})$ na pravé straně vztahu

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = \Phi(t, \vec{x}) \tag{243}$$

není identicky rovna nule. Provedeme kalibrační transformaci podle vztahů (240) a (241) a vypočteme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}' = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \Delta\chi$$

Když teď požadujeme anulování levé strany (tj. Lorenzovu kalibrační podmínku pro nové potenciály) a použijeme vztah (243) dostáváme parciální diferenciální rovnici pro funkci χ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta\chi = \Phi.$$

V matematice se ukazuje, že tato rovnice má vždy řešení. Navíc, protože její obecné řešení dostaneme tak, že k partikulárnímu řešení připočteme libovolný násobek řešení odpovídající rovnice bez pravé strany, funkcí χ je nespočetně mnoho. Proto Lorenzova kalibrační podmínka nevybírá jenom jednu kalibraci, ale celou třídu kalibrací (Lorenz family of gauges). Toto nám umožňuje naložit ještě další kalibrační podmínku, i když tady je už výběr značně omezen.

V Lorenzově kalibraci přecházejí parciální diferenciální rovnice pro potenciály na tvar

$$\Box\varphi = \rho \tag{244}$$

$$\Box\vec{A} = \frac{\vec{j}}{c}, \tag{245}$$

kde jsme použili d'Alembertův operátor

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Zavedeme teď relativistické čtyřvektory $x \equiv (ct, \vec{x})$, $j \equiv (c\rho, \vec{j})$ a $A \equiv (\varphi, \vec{A})$, a i dvakrát kontravariantní tenzor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{246}$$

Pomocí vztahů (236) a (237) najdeme jeho vyjádření pomocí komponent vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{247}$$

Odpovídající dvakrát kovariantní tenzor je

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{248}$$

[17] J.D. Jackson and L.B. Okun, Rev. Mod. Phys. 73, 663 (2001).

Kontrakce těchto dvou tenzorů poskytne jeden ze dvou relativistických invariantů elektromagnetického pole

$$F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^{\,2} - \vec{E}^{\,2}\right). \tag{249}$$

Druhý invariant elektromagnetického pole se dostane kontrakcí duálního tenzoru

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

s tenzorem $F^{\mu\nu}$. Je jím $4\vec{E}\cdot\vec{B}$ (pro náš výběr $\varepsilon_{0123} = 1$).

První dvě Maxwellovy rovnice (228) a (229) se teď dají zapsat ve tvaru

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c}j^\nu. \tag{250}$$

Rovnice kontinuity (232) pro čtyřvektor hustoty náboje v kovariantním tvaru

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \tag{251}$$

plyne z toho, že po aplikaci operátoru ∂_ν na vztah (250) dostáváme na levé straně součin symetrického a antisymetrického tenzoru, který musí být nulový.

Po dosazení definice (246) do rovnice (250) získáváme nasledující čtyři rovnice ($\nu = 0, 1, 2, 3$) pro čtyřpotenciál

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{1}{c}j^\nu, \tag{252}$$

které jsou ekvivalentní dřívějším vztahům (238) a (239). Po aplikaci Lorenzovy kalibrační podmínky (242), nabývající teď tvar

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{253}$$

se rovnice (252) zjednoduší na

$$\Box A^\nu = \frac{1}{c}j^\nu. \tag{254}$$

3.5.3 Volné elektromagnetické vlnění

Připomeňme nejdřív řešení Maxwellových rovnic v prostoru bez nábojů ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$), které popisují šíření elektromagnetického signálu nebo vlnění vakuem. Po aplikaci operátoru $c^{-1}\partial/\partial t$ na rovnici (228) dostáváme

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{255}$$

Výraz na pravé straně vypočteme tak, že na rovnici (230) uplatníme operátor rotace. Dostáváme

$$\frac{1}{c}\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \Delta\vec{E} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \Delta\vec{E},$$

kde jsme využili nulovost divergence podle rovnice (229). Po dosazení do (255) získáváme d'Alembertovu (vlnovou) rovnici

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = 0, \tag{256}$$

která popisuje vlnění šířící se rychlostí c. Podobně by jsme získali vlnovou rovnici pro vektor indukce magnetického pole

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = 0. \tag{257}$$

Později ukážeme, že se jedná o příčné vlnění, tj. že vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou kolmé na směr postupu vlnění a že jsou kolmé i navzájem a jejich velikost je stejná.

Rovnice pro čtyřpotenciál v Lorenzově kalibraci nabývají teď tvar

$$\Box A^\nu = 0, \tag{258}$$

nebo podrobněji

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\,\varphi \;=\; 0 \tag{259}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} \;=\; 0 \tag{260}$$

Ukážeme, že v tomto případě můžeme přejít k novým potenciálům $\varphi' \equiv 0$ a $\vec{A}'$ bez toho, abychom narušili Lorenzovu kalibrační podmínku. Podmínkou pro to je, aby funkce χ, která generuje kalibrační transformaci (240,241), splňovala homogenní rovnici

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \Delta\chi = 0. \tag{261}$$

Abychom po dosazení do (240) dosáhli $\varphi' \equiv 0$, musí tato funkce taky splňovat vedlejší podmínku

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \varphi\,. \tag{262}$$

Příkladem takové funkce je

$$\chi(t,\vec{x}) = c\int_0^t \varphi(t',\vec{x})\mathrm{d}t' + \chi_0(\vec{x}), \tag{263}$$

kde χ_0 je řešením Poissonovy rovnice

$$\Delta\chi_0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varphi(t,\vec{x})}{\partial t}\right)_{t=0}$$

Důkaz, že funkce $\chi(t,\vec{x})$ (263) splňuje podmínku (262) je triviální. Při důkazu, že splňuje i (261), se musí využít (259), což poukazuje na to, že uvažovaná kalibrace se dá dosáhnout jenom pro volná pole. Po dosazení (263) do (241) a opětovného využití (259) vychází $\mathrm{div}\vec{A}'=0$, jak musí být, aby Lorenzova kalibrační podmínka zůstala nadále zachována.

Při dalším vyšetřování volného elektromagnetického pole budeme předpokládat splnění kalibračních podmínek $\mathrm{div}\vec{A}=0$ (Coulomb gauge, radiation gauge, transverse gauge) a $\varphi=0$. Tyto podmínky ale nejsou relativisticky kovariantní, $\varphi \equiv A_0$ jako nultá komponenta čtyřvektoru přibírá při Lorentzově transformaci příspěvky od prostorových komponent. Podobně ani $\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A}$ není, jako skalární součin dvou prostorových vektorů, relativistickým invariantem. Proto jsou mezivýpočty prováděné v Coulombově kalibraci vázané na jednu vztažní soustavu.

V námi zvolené kalibraci teda stačí uvažovat jenom vlnovou rovnici pro vektorový potenciál (260). Všimněme si nejdřív rovinnou vlnu, kdy hodnoty $\vec{A}$ jsou v rovině kolmé na směr šíření všude stejné. Pro jednoduchost si vyberme vlnu šířící se ve směru osi x. Pak $\vec{A}$ nezávisí od y a z a rovnice (260) se redukuje na rovnici

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} = 0,$$

která má jedno z řešení (druhé popisuje vlnění šířící se opačným směrem) ve tvaru

$$\vec{A}(t,x) = \vec{f}(p), \qquad \text{kde}\;\; p = t - \frac{x}{c}.$$

$\vec{f}$ je dvakrát diferencovatelná libovolná (nemusí se jednat o harmonické vlnění) vektorová funkce jednoho argumentu. Z kalibrační podmínky $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ a nezávislosti na y a z plyne $\partial A_x/\partial x = -(1/c)f_x' = 0$. Proto musíme na funkci $\vec{f}$ naložit podmínku $f_x' = 0$. Dostáváme tak, že vektor

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\vec{f}\,'$$

má nulovou komponentu E_x, čili je kolmý na směr šíření. Pro vektor indukce magnetického pole dostáváme[18]

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \left[\nabla\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\times\vec{f}\,' = -\frac{1}{c}\vec{i}\times\vec{f}\,' = \vec{i}\times\vec{E}, \tag{264}$$

[18]Využijeme přitom větu z vektorové analýzy $\nabla\times\vec{f}(p) = (\mathrm{grad}\;p)\times\vec{f}\,'(p)$. Její důkaz najdete v sekci 3.6.3.

kde $\vec{i}$ je jednotkový vektor ve směru osi x. Ze vztahu (264) je vidět, že vektor $\vec{B}$ je kolmý na směr šíření i na vektor $\vec{E}$ a že jeho velikost je stejná jako velikost vektoru $\vec{E}$ (důsledek toho, že $\vec{E}$ je kolmé na $\vec{i}$).

3.5.4 Obecné řešení jako superpozice monochromatických rovinných vln

Vlnové rovnici (260) vyhovuje řešení ve tvaru monochromatické rovinné vlny s vlnovým vektorem $\vec{k}$

$$\vec{A}_{\vec{k},\lambda}(t,\vec{x}) = a_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + a^*_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}, \tag{265}$$

kde $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$ je úhlová frekvence, $a_{\vec{k},\lambda}$ je libovolná konstanta a $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}$ je konstantní vektor s obecně komplexními složkami, nazývaný polarizačním vektorem. Z kalibrační podmínky div $\vec{A}_{\vec{k},\lambda} = 0$ plyne

$$\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{k} = 0, \tag{266}$$

čili polarizační vektor musí být kolmý na vektor $\vec{k}$. Existují dva takové lineárně nezávislé vektory, odlišujeme je indexem $\lambda = 1,2$ a normujeme podmínkou

$$\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = \delta_{\lambda',\lambda}. \tag{267}$$

K obvykle používané komplexní formě monochromatické rovinné vlny jsme hned na pravou stranu vztahu (265) přidali vlnu komplexně sdruženou, abychom dostali reálný vektor $\vec{A}$.

Obecné řešení vlnové rovnice (260) dostaneme jako lineární kombinaci řešení (265) pro všechny vektory $\vec{k}$ povolené naší normalizací na konečný objem a pro obě polarizace

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[c_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + c^*_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right], \tag{268}$$

kde jsme vyjádřili argumenty exponenty pomocí součinu čtyřvektorů. Libovolné konstanty $a_{\vec{k},\lambda}$ jsme napsali jako součin faktoru před hranatou závorkou a jiných libovolných konstant $c_{\vec{k},\lambda}$. Smysl této faktorizace jsme u skalárního a spinorového pole zdůvodnili normalizací Kleinovy-Gordonovy nebo Diracovy vlnové funkce, její vhodnost u elektromagnetického pole uvidíme až po zavedení druhého kvantování. Pro vektor intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole máme

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}}\left[c_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - c^*_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right] \tag{269}$$

a

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[c_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - c^*_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right]. \tag{270}$$

Uveďme ještě pro ilustraci příklady polarizačních vektorů v případě, že vlnění postupuje ve směru osi z, tj. když $\vec{k} \equiv (0,0,\omega/c)$. Vektorový potenciál zvolíme podle (265) ale pro jednoduchost volíme koeficient a reálný a určujeme $\vec{E}$ v takové rovině kolmé na $\vec{k}$ pro kterou je $\exp\{\mathrm{i}k_z z\} = 1$. Ve zjednodušeném označení máme

$$\vec{A} = a\left(\vec{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \vec{\varepsilon}^{\,*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right).$$

Pro vektor $\vec{E}$ dostáváme

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{a\,\omega}{c}\,\mathrm{i}\,\left(\vec{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \vec{\varepsilon}^{\,*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

což rozepsáno pro jeho nenulové složky dá

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{2a\,\omega}{c}(\mathrm{Im}\ \varepsilon_x\cos\omega t - \mathrm{Re}\ \varepsilon_x\sin\omega t)\\ E_y &= \frac{2a\,\omega}{c}(\mathrm{Im}\ \varepsilon_y\cos\omega t - \mathrm{Re}\ \varepsilon_y\sin\omega t). \end{aligned}$$

Je mnoho způsobů jak vybrat dvojici lineárně nezávislých polarizačních vektorů. Dvojice reálných vektorů

$$\vec{\varepsilon}_1 \equiv (1,0,0) \qquad \text{a} \qquad \vec{\varepsilon}_2 \equiv (0,1,0)$$

slouží k popisu vlnění lineárně polarizovaného ve směru osi x ($\lambda = 1$) nebo y ($\lambda = 2$). Jinou možnost představují vektory

$$\vec{\varepsilon}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0) \qquad \text{a} \qquad \vec{\varepsilon}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0).$$

Pro první z nich vychází

$$E_x = -\frac{\sqrt{2}a\,\omega}{c}\sin\omega t \qquad \text{a} \qquad E_y = \frac{\sqrt{2}a\,\omega}{c}\cos\omega t,$$

což představuje pravotočivou kruhovou polarizaci. Pro druhý z nich dostáváme E_y s opačným znaménkem, což vede na levotočivou kruhovou polarizaci.

Kvůli zjednocení popisu elektromagnetického pole založeného na Lorenzově a Coulombově kalibraci s jinými přístupy, zavádíme zde i čtyřrozměrné polarizační vektory

$$\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda} \equiv (0, \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}), \tag{271}$$

splňující kromě podmínky prostorové transverzálnosti (266) i podmínku časoprostorové transverzálnosti

$$k_\mu\, \varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda} = 0$$

a vztah ortonormovanosti

$$(\varepsilon_{\vec{k},\lambda'})^*_\mu\, \varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda} = -\delta_{\lambda',\lambda},$$

plynoucí ze vztahu (267). Později budeme potřebovat i polarizační tenzor, definovaný jako

$$P^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda} \varepsilon^{\nu *}_{\vec{k},\lambda}. \tag{272}$$

Z této definice a výše uvedených podmínek plyne, že polarizační tenzor musí splňovat

$$P^{\mu\nu}k_\nu = k_\mu P^{\mu\nu} = P^{\mu j}k_j = k_i P^{i\nu} = 0 \qquad P^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = P^{ij}g_{ij} = -2$$

$$(\varepsilon^*_{\vec{k},\lambda})_\mu P^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu *}_{\vec{k},\lambda} \qquad P^{\mu\nu}(\varepsilon_{\vec{k},\lambda})_\nu = -\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda} \tag{273}$$

Při dokazovaní posledních dvou vztahů označíme sčítací index v (272) jako λ'.

Abychom mohli polarizační tenzor (272) vyjádřit pomocí složek čtyřvektorů, potřebujeme soustavu tří čtyřvektorů (vlnový čtyřvektor k, dva polarizační čtyřvektory) doplnit dalším lineárně nezávislým čtyřvektorem n. Volíme ho tak, aby v naší vybrané vztažné soustavě platilo $n \equiv (1,0,0,0)$. Pak platí

$$P^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{(nk)^2} + \frac{k^\mu n^\nu + n^\mu k^\nu}{(nk)}. \tag{274}$$

O správnosti tohoto vyjádření polarizačního tenzoru se přesvědčíme tak, že pro něj ověříme platnost vztahů (273). Pro složky polarizačního tenzoru s "prostorovými"indexy máme

$$P^{ij} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\omega^2_{\vec{k}}}. \tag{275}$$

Vztah (268) můžeme zapsat i v čtyřvektorové notaci

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[c_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + c^*_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu\,*}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} \right]. \tag{276}$$

Čtyřvektorový potenciál (276) splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku ve všech soustavách a v naší vybrané soustavě taky Coulombovu kalibrační podmínku $\varphi = A^0 \equiv 0$.

3.5.5 Elektromagnetické pole jako dynamická soustava s nespočetným počtem stupňů volnosti

(V dalším klademe $c = 1$.)
V každém bodě prostoru je elektromagnetické pole definováno čtyřmi funkcemi času, čtyřmi dynamickými proměnnými. Jedná se o soustavu s nespočetně mnoha stupni volnosti, o čtyřkomponentní pole ve smyslu kapitoly 3.3. Komponentami jsou složky čtyřpotenciálu A^ν, nebo ekvivalentně A_ν, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Jeho dynamika je tudíž popsána čtyřmi Lagrangeovými rovnicemi (170) (28)], které v tomto případě nabývají tvar

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \qquad \nu = 0, 1, 2, 3$$

Lagrangeovu hustotu volíme tak, aby vedla na rovnice pro čtyřpotenciál, které plynou z Maxwellových rovnic. My použijeme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - j^\alpha A_\alpha\,. \tag{277}$$

Nejdřív si ji přepíšeme na tvar vhodnější z hlediska dosazování do Lagrangeových rovnic

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\partial^\alpha A^\beta - j^\alpha A_\alpha \tag{278}$$

Pomocí vztahů

$$\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta \quad , \quad \frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \quad \text{a} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu$$

pak dostáváme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu}\,.$$

Po dosazení do Lagrangeových rovnic vychází

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, 3\ ,$$

což souhlasí s rovnicemi (250), plynoucími z Maxwellových rovnic.

Pole konjugované ke komponentě pole A_ν je podle obecných pravidel teorie pole (171) rovno

$$\pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0}. \tag{279}$$

Pole konjugované ke komponentě A_0 je rovno nule.

V dalším uvažujeme jenom volné elektromagnetické pole, pro které je

$$j^\nu \equiv 0$$

Hamiltonova hustota (172) je teď rovna

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L}$$

a vychází stejně jako komponenta $\mathcal{T}^{00}$ tenzoru energie-hybnosti (173)

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^2 g^{\mu\nu} - F^{\mu\rho}\,\partial^\nu A_\rho\ .$$

Ten splňuje zákony zachování energie a hybnosti v diferenciálním tvaru

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \tag{280}$$

ze kterých plyne časová nezávislost komponent čtyřvektoru hybnosti elektromagnetického pole

$$P^{\nu} = \int_{(V)} \mathcal{T}^{0\nu} \mathrm{d}^3\mathrm{x} \qquad \nu = 0,1,2,3\ , \tag{281}$$

kde se integruje přes zvolený konečný objem na hranici kterého klademe periodické okrajové podmínky.

===

Hamiltonova hustota ani tenzor energie-hybnosti nejsou kalibračně invariantní. Proto se zavádí Belinfanteho tenzor (modifikovaný tenzor energie-hybnosti) vztahem

$$\Theta^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\mu\nu} + \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu), \tag{282}$$

který díky identitě

$$\partial_\mu \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = 0$$

taky splňuje diferenciálni zákon zachování (280). Navíc, integrací jeho složky $\Theta^{0\nu}$ dostaneme stejnou hodnotu jako ze vztahu (281), protože objemový integrál z přidaného členu v (282) je roven nule. Abychom to dokázali, zaveďme pro zvolené ν vektor $\vec{v}$ předpisem $v^k = F^{0k} A^\nu$. Pak máme

$$\int \partial_\rho (F^{0\rho} A^\nu)\, \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \int \mathrm{div}\, \tilde{\mathrm{v}}\ \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \oint \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{dS}}\ .$$

Poslední integrál je roven nule díky periodickým okrajovým podmínkám. Pro volné elektromagnetické pole platí homogenní verze rovnice (250), což nám umožňuje zjednodušit dodatečný člen v (282)

$$\partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = -(\partial_\rho F^{\rho\mu}) A^\nu + F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu = F^{\mu\rho}\, \partial_\rho A^\nu,$$

čímž získáváme Belinfanteho tenzor ve tvaru

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^2\, g^{\mu\nu} + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu,$$

který je kalibračně invariantní, symetrický a s nulovou stopou Θ^μ_μ. Hustota energie se dá vyjádřit pomocí (247) a (248) jako

$$\mathcal{H} = \Theta^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}),$$

kdežto hustota x-té složky hybnosti vychází

$$\Theta^{01} = F^{0k} F_k{}^1 = F^{0k} F_{1k} = E_y B_z - E_z B_y = (\vec{E} \times \vec{B})_x\,.$$

Dopočtením ostatních složek a jejich spojením získáváme vektor hustoty hybnosti

$$\vec{S} \equiv (\Theta^{01}, \Theta^{02}, \Theta^{03}) = \vec{E} \times \vec{B}\,.$$

===

Kvůli pozdějšímu použití uvádíme ještě kunjugované pole (279) k j-té složce vektorového potenciálu v kalibraci $\varphi = 0$

$$\pi_j = F_{j0} = -\dot{A}_j = \dot{A}^j \tag{283}$$

$$\pi_j(t, \vec{x}) = -\mathrm{i} \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[c_{\vec{k},\lambda} \varepsilon^j_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - c^*_{\vec{k},\lambda} \varepsilon^{j\,*}_{\vec{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right] \tag{284}$$

3.6 Kvantová teorie elektromagnetického pole

3.6.1 Kvantování ve Schrödingerově obraze

Podobně jako u skalárního pole, ke kvantové teorii elektromagnetického pole dospějeme tak, že dynamické proměnné, které jsou funkcemi času, nahradíme operátory od času nezávislými a postulujeme pro ně komutační vztahy. Záměnu provedeme v obecném řešení (268) vlnové rovnice (260) v Lorenzově a Coulombově kalibraci

$$\vec{A}(t,\vec{x}) \longrightarrow \hat{\vec{A}}(\vec{x})$$

$$c_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} = c_{\vec{k},\lambda}(t) \longrightarrow \hat{c}_{\vec{k},\lambda}$$

$$c^*_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t} = c^*_{\vec{k},\lambda}(t) \longrightarrow \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}$$

Po vzoru dvoukomponentního skalárního pole [tam se operátory příslušné dvěma různým komponentám rozlišovali písmenky ($\hat{a}_{\vec{k}}$, $\hat{b}_{\vec{k}}$), tady se rozlišují indexem $\lambda = 1, 2$] postulujeme komutační vztahy

$$\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\,,\hat{c}_{\vec{k}',\lambda'}\right] = 0, \tag{285}$$

$$\left[\hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,,\hat{c}^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right] = 0, \tag{286}$$

$$\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\,,\hat{c}^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}\,. \tag{287}$$

Zvolené komutační vztahy odpovídají tomu, že chceme interpretovat operátory $\hat{c}_{\vec{k},\lambda}$ jako anihilační a operátory $\hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}$ jako kreační fotonu s hybností $\vec{k}$ a polarizací λ. Operátor počtu fotonů by pak byl $\hat{N}_{\vec{k},\lambda} = \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}$. Správnost této interpretace potvrdíme dodatečně výpočtem celkové energie a celkové hybnosti elektromagnetického pole.[19] Po přechodě do kvantové teorie získáváme vektorový operátor elektromagnetického pole

$$\hat{\vec{A}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right], \tag{288}$$

j-tou komponentu konjugovaného operátoru pole

$$\hat{\pi}_j(\vec{x}) = -\mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^j_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right], \tag{289}$$

operátor intenzity elektrického pole

$$\hat{\vec{E}}(\vec{x}) = \mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} \left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right], \tag{290}$$

a operátor indukce magnetického pole

$$\hat{\vec{B}}(\vec{x}) = \mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]. \tag{291}$$

Poslední dva operátory hned využijeme při vyjádření operátoru Hamiltonovy hustoty

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}) = \frac{1}{2} :(\hat{\vec{E}}^{\,2} + \hat{\vec{B}}^{\,2}):,$$

[19] U skalárního pole jsme postulovali komutační vztahy mezi operátory polí ($\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}^\dagger$) a operátory konjugovaných polí ($\hat{\pi}$, $\hat{\pi}^\dagger$). Komutační vztahy mezi kreačními a anihilačními operátory jsme z nich odvodili. K objasnění důvodu opačného postupu se vrátíme později.

integrací kterého získáme Hamiltonův operátor elektromagnetického pole

$$\hat{H} = \int \hat{\mathcal{H}}(\vec{x}) \mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Budeme ho počítat jako součet dvou příspěvků

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\int :\hat{\vec{E}}^{\,2}(\vec{x}): \mathrm{d}^3\mathrm{x} \qquad \mathrm{a} \qquad \hat{\mathrm{H}}_2 = \frac{1}{2}\int :\hat{\vec{\mathrm{B}}}^{\,2}(\tilde{\mathrm{x}}): \mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

V prvním příspěvku vystupuje skalární součin dvou operátorů $\hat{\vec{E}}$. Při dosazování z (290) u druhého z nich použijeme čárkované indexy. Po záměně pořadí sumace a integrace dostáváme

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= -\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'} \frac{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}{4V}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x} : \left(\hat{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}\cdot\tilde{\mathrm{x}}} - \hat{\mathrm{c}}^{\dagger}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda}\tilde{\varepsilon}^{\,*}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}\cdot\tilde{\mathrm{x}}}\right)\cdot\left(\hat{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}'\cdot\tilde{\mathrm{x}}} - \hat{\mathrm{c}}^{\dagger}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\tilde{\varepsilon}^{\,*}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}'\cdot\tilde{\mathrm{x}}}\right) : \\
&= -\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{\omega_{\vec{k}}}{4}\Big[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} - \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',\vec{k}} \\
&\quad -\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',\vec{k}} + \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}\Big] \\
&= \sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}\left\{\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{\lambda'}\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{-\vec{k},\lambda'}(\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda'}) + \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda'}(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{-\vec{k},\lambda'})\right]\right\}, \qquad (292)
\end{aligned}$$

když jsme i využili, že $\omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$. Při výpočtu druhého příspěvku se nám bude hodit vztah z vektorového počtu

$$(\vec{k}\times\vec{a})\cdot(\vec{k}\times\vec{b}) = \vec{k}\cdot[\vec{a}\times(\vec{k}\times\vec{b})] = \vec{k}\cdot[\vec{k}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{k})\vec{b}\,] = \vec{k}^{\,2}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{k})(\vec{b}\cdot\vec{k})\,,$$

ve kterém navíc nemusíme druhý člen uvažovat, protože jako $\vec{a}$ a $\vec{b}$ budou v dalším vystupovat polarizační vektory, které jsou kolmé na $\vec{k}$. Dále využijeme, že pro fotony platí $\vec{k}^2 = \omega^2_{\vec{k}}$.

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 &= -\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{4V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x} : \left[\hat{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda}(\tilde{\mathrm{k}}\times\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}\cdot\tilde{\mathrm{x}}} - \hat{\mathrm{c}}^{\dagger}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda}(\tilde{\mathrm{k}}\times\tilde{\varepsilon}^{\,*}_{\tilde{\mathrm{k}},\lambda})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}\cdot\tilde{\mathrm{x}}}\right]\cdot \\
&\quad \left[\hat{c}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}',\lambda'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}} - \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right] : \\
&= -\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{4\omega_{\vec{k}}}\Big[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} - \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',\vec{k}} \\
&\quad -\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',\vec{k}} + \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k}',\lambda'})\delta_{\vec{k}',-\vec{k}}\Big] \\
&= \sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}\left\{\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda'}\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{-\vec{k},\lambda'}(\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda'}) + \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda'}(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{-\vec{k},\lambda'})\right]\right\} \qquad (293)
\end{aligned}$$

Sečtením (292) a (293) dostáváme

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda}\omega_{\vec{k}}\hat{N}_{\vec{k},\lambda} \qquad (294)$$

kde

$$\hat{N}_{\vec{k},\lambda} = \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda} \qquad (295)$$

má význam operátoru počtu částic (fotonů) s hybností $\vec{k}$ a polarizací λ. K potvrzení této interpretace vypočtěme ještě operátor celkové hybnosti elektromagnetického pole

$$\hat{\vec{P}} = \int \hat{\vec{S}}\mathrm{d}^3\mathrm{x},$$

kde

$$\hat{\vec{S}} =: \hat{\vec{E}}\times\hat{\vec{B}}:$$

je Poyntingův operátor. S využitím $\vec{a}\times(\vec{k}\times\vec{b}) = \vec{k}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{k})$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{P}} &= -\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'} \frac{1}{2V}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}'}}{\omega_{\vec{k}}}}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\colon \left(\hat{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}'\cdot\tilde{\mathrm{x}}} - \hat{\mathrm{c}}^\dagger_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\tilde{\varepsilon}^{\,*}_{\tilde{\mathrm{k}}',\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\mathrm{k}}'\cdot\tilde{\mathrm{x}}}\right) \\
&\quad\times\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]\colon \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\lambda'}\vec{k}\left[\hat{c}_{-\vec{k},\lambda'}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda'}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}) - \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda'}(\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda'}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\right. \\
&\quad\left. -\hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda'}(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda'}) + \hat{c}^\dagger_{-\vec{k},\lambda'}\hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{-\vec{k},\lambda'}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})\right] \\
&= \sum_{\vec{k},\lambda}\vec{k}\,\hat{c}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{c}_{\vec{k},\lambda} - \sum_{\vec{k}}\left[\hat{\vec{X}}(\vec{k}) + \hat{\vec{X}}^\dagger(\vec{k})\right],
\end{aligned}$$

kde jsme označili

$$\hat{\vec{X}}(\vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{k}\sum_{\lambda,\lambda'}\hat{c}_{-\vec{k},\lambda'}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(\vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda'}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}).$$

Tento operátor je lichou funkcí $\vec{k}$, proto je jeho součet přes všechny $\vec{k}$ roven nule. Pro operátor celkové hybnosti elektromagnetického pole tak dostáváme

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k},\lambda}\vec{k}\,\hat{N}_{\vec{k},\lambda}\,, \tag{296}$$

což podporuje interpretaci operátoru (295) jako operátoru počtu fotonů s hybností $\vec{k}$ a polarizací λ.

=============

Teď se věnujme komutátorům mezi operátory pole vycházejíc z komutačních vztahů mezi anihilačními a kreačními operátory (285–287). Začněme s komutátorem mezi složkami operátoru (288).

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A}^i(\vec{x})\,,\hat{A}^j(\vec{x}\,')\right] &= \sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\left\{\left[c_{\vec{k},\lambda}\,,c^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right]\varepsilon^i_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j\,*}_{\vec{k}',\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}\,')}\right. \\
&\quad\left.+\left[c^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,,c_{\vec{k}',\lambda'}\right]\varepsilon^{i\,*}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^j_{\vec{k}',\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}\,')}\right\} \\
&= \sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}}\left[\varepsilon^i_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} - \varepsilon^{i\,*}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^j_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\right] \\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}}\left[P^{ij}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} - P^{ij}(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\right] \\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}}\left[P^{ij}(\vec{k}) - P^{ij}(-\vec{k})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}.
\end{aligned}$$

Protože P^{ij} je sudou funkcí $\vec{k}$ (viz. (275)) tak nakonec dostáváme

$$\left[\hat{A}^i(\vec{x})\,,\hat{A}^j(\vec{x}\,')\right] = 0.$$

Podobně by se odvodilo, že pro složky operátoru konjugovaného pole (289) platí

$$\left[\hat{\pi}_i(\vec{x})\,,\,\hat{\pi}_j(\vec{x}\,')\right] = 0.$$

Teď určíme komutátor komponenty $\hat{A}^i$ operátoru (288) a operátoru $\hat{\pi}_j$ (289), který je konjugovaným k operátoru $\hat{A}^j$.

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A}^i(\vec{x})\,,\hat{\pi}_j(\vec{x}\,')\right] &= -\mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'}\frac{1}{2V}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}'}}{\omega_{\vec{k}}}}\Big\{-\left[c_{\vec{k},\lambda}\,,c^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\right]\varepsilon^{i}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j\,*}_{\vec{k}',\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}\,')} \\
&\quad+\left[c^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\,,c_{\vec{k}',\lambda'}\right]\varepsilon^{i\,*}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j}_{\vec{k}',\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}\,')}\Big\} \\
&= \mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{2V}\left[\varepsilon^{i}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}+\varepsilon^{i\,*}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{j}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\right] \\
&= \mathrm{i}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V}\left[P^{ij}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}+P^{ij}(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\right] \\
&= \mathrm{i}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2V}\left[P^{ij}(\vec{k})+P^{ij}(-\vec{k})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}.
\end{aligned}$$

S využitím vztahu (275) nakonec vychází

$$\left[\hat{A}^i(\vec{x})\,,\hat{\pi}_j(\vec{x}\,')\right]=\frac{\mathrm{i}}{V}\sum_{\vec{k}}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\omega^2_{\vec{k}}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}. \tag{297}$$

Po přechodě k spojitému spektru hybností dostáváme

$$\left[\hat{A}^i(\vec{x})\,,\hat{\pi}_j(\vec{x}\,')\right]=\mathrm{i}\delta^{ij}_{\perp}(\vec{x}-\vec{x}\,'), \tag{298}$$

kde na pravé straně je tzv. transversální delta funkce

$$\delta^{ij}_{\perp}(\vec{x}-\vec{x}\,')=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\omega^2_{\vec{k}}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}.$$

Všimněme si, že komutátor (297) a (298) je nenulový i mezi operátorem určité dynamické proměnné a operátorem konjugovaným jiné dynamické proměnné. Je to důsledek toho, že tři dynamické proměnné $A^1(t,\vec{x})$, $A^2(t,\vec{x})$ a $A^3(t,\vec{x})$ nejsou nezávislé, ale svázané podmínkou $\mathrm{div}\,\vec{A}=\partial_iA^i=0$. Tato podmínka přechází i na operátory a proto po aplikaci operátoru ∂_i na vztah (297) dostáváme na levé i pravé straně nulu. Podobně, i transversální delta funkce ve vztahu (298) splňuje podmínku

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^{ij}_{\perp}(\vec{x}-\vec{x}\,')=0.$$

Pro nezávislé dynamické proměnné bychom na pravé straně vztahu (298) očekávali $\mathrm{i}\delta^{ij}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$.
============================

Díky tomu, že nultá komponenta polarizačního čtyřvektoru (271) je v naší vybrané soustavě rovna nule, můžeme vektor (288) formálně doplnit na čtyřvektor který se podobá operátoru vyskytujícímu se v jiných přístupech ke kvantování elektromagnetického pole, liší se však od nich vlastnostmi polarizačních čtyřvektorů.

$$\hat{A}^{\mu}(\vec{x})=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}+\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\right], \tag{299}$$

3.6.2 Operátor elektromagnetického pole v Heisenbergově obraze

$$\hat{A}^{\mu}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\hat{A}^{\mu}(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}$$

$$\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t} \tag{300}$$

Sumaci v Hamiltonově operátoru (294) teď vyjádříme pomocí čárkovaných indexů, abychom je odlišili od indexů vybraného operátoru $\hat{c}_{\vec{k},\lambda}$.

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}',\lambda'} \omega_{\vec{k}'} \hat{N}_{\vec{k}',\lambda'}$$

Protože operátory počtu fotonů v různych stavech navzájem komutují, můžeme exponencielu ze součtu v (300) napsat jako součin exponenciál

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t} = \prod_{\vec{k}',\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}'}\hat{N}_{\vec{k}',\lambda'}t}$$

a podobně i exponencielu se záporným znaménkem. Teď obě vyjádření dosadíme do (300) a využijeme, že platí $\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\hat{N}_{\vec{k}',\lambda'} = \hat{N}_{\vec{k}',\lambda'}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}$ kromě případu, kdy $\vec{k}' = \vec{k}$ a současně $\lambda' = \lambda$. To nám umožňuje všechny exponenciely až na jednu přesunout z pravého součinu k levému, kde si najdou sobě odpovídajíci exponencielu s kladným znaménkem a spolu dají jednotku. Zůstane nám tak

$$\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t\hat{N}_{\vec{k},\lambda}}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t\hat{N}_{\vec{k},\lambda}}$$

Platí přitom $[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}, \hat{N}_{\vec{k},\lambda}] = \hat{c}_{\vec{k},\lambda}$, což nám umožňuje využít následující větu [dokázanou při odvozování vztahu (199)]: Když dva operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ splňují $[\hat{A}, \hat{B}\,] = \hat{A}$, pak platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{B}}\hat{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{B}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\hat{A}.$$

Jako výsledek dostáváme

$$\hat{c}_{\vec{k},\lambda}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}$$

a

$$\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}.$$

Čtyřvektorový operátor elektromagnetického pole v Heisenbergově obraze vyjádříme pomocí kreačních a anihilačních operátorů v tomto obraze:

$$\hat{A}^{\mu}(x) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left[\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right] \tag{301}$$

a rozdělíme ho na kladně a záporně frekvenční část

$$\hat{A}^{\mu(+)}(x) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\hat{c}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,, \tag{302}$$

$$\hat{A}^{\mu(-)}(x) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\hat{c}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\mu\,*}_{\vec{k},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,. \tag{303}$$

Pro komutátor kladně frekvenční části se záporně frekvenční dostáváme

$$\begin{aligned}\left[A^{\mu(+)}(x)\ , A^{\nu(-)}(x')\right] &= \sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'} \frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\left[c_{\vec{k},\lambda}\ , c^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\right]\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\nu\,*}_{\vec{k}',\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-k'x')} \\ &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\sum_{\lambda}\varepsilon^{\mu}_{\vec{k},\lambda}\varepsilon^{\nu\,*}_{\vec{k},\lambda}\,.\end{aligned}$$

Použijeme definici polarizačního tenzoru (272) a píšeme

$$\left[A^{\mu(+)}(x)\ , A^{\nu(-)}(x')\right] = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}P^{\mu\nu}(\vec{k})\,. \tag{304}$$

V limitě spojitého spektra ($V \to \infty$), kdy

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3},$$

máme

$$\left[A^{\mu(+)}(x)\ ,A^{\nu(-)}(x')\right] = \mathrm{i}D^{(+)\mu\nu}(x-x'), \tag{305}$$

kde

$$D^{(+)\mu\nu}(x-x') = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_{\vec{k}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}P^{\mu\nu}(\vec{k})$$

Podobný výsledek dostáváme v limitě spojitého spektra pro komutátor

$$\left[A^{\mu(-)}(x)\ ,A^{\nu(+)}(x')\right] = \mathrm{i}D^{(-)\mu\nu}(x-x') \tag{306}$$

kde

$$D^{(-)\mu\nu}(x-x') = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_{\vec{k}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}P^{\mu\nu}(\vec{k}) \tag{307}$$

V teorii interagujících polí, kterou se budeme zabývat v letním semestru, hraje důležitou úlohu zúžení operátorů elektromagnetického pole. Zúžení (kontrakce) dvou operátorů pole je definováno jako rozdíl Wickova chronologického součinu a normálního součinu

$$\hat{A}^{\mu\bullet}(x)\hat{A}^{\nu\bullet}(x') = T[\hat{A}^{\mu}(x)\hat{A}^{\nu}(x')] - :\hat{A}^{\mu}(x)\hat{A}^{\nu}(x'):\ . \tag{308}$$

Při určování normálního součinu musíme polní operátory napsat jako součet kladně frekvenčních částí (obsahují jenom anihilační operátory) a záporně frekvenčních částí (kreační operátory). Proto podobný rozklad použijeme i v chronologickém součinu a dostáváme

$$\hat{A}^{\mu\bullet}(x)\hat{A}^{\nu\bullet}(x') = \left\{ \begin{array}{ll} \left[A^{\mu(+)}(x)\ ,A^{\nu(-)}(x')\right] & \text{jestli } x_0 > x'_0 \\ \\ -\left[A^{\mu(-)}(x)\ ,A^{\nu(+)}(x')\right] & \text{jestli } x_0 < x'_0 \end{array} \right. . \tag{309}$$

Zavedeme teď funkci

$$D_F^{\mu\nu}(x-x') = \left\{ \begin{array}{ll} D^{(+)\mu\nu}(x-x') & \text{jestli } x_0 > x'_0 \\ \\ -D^{(-)\mu\nu}(x-x') & \text{jestli } x_0 < x'_0 \end{array} \right. \tag{310}$$

pomocí které můžeme vztah (309) přepsat na tvar

$$\hat{A}^{\mu\bullet}(x)\hat{A}^{\nu\bullet}(x') = \mathrm{i}D_F^{\mu\nu}(x-x'). \tag{311}$$

Pro funkci (310) můžeme pomocí residuové věty, podobně jako u skalárního pole, najít kompaktní vyjádření

$$D_F^{\mu\nu}(x-x') = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}P^{\mu\nu}(\vec{k})\,. \tag{312}$$

Když porovnáme vakuovou střední hodnotu levé a pravé strany vztahu (308) a využijeme, že levá strana není operátor, ale funkce, a že vakuová střední hodnota normálního součinu je nula, tak můžeme taky napsat

$$\left\langle 0\middle|T\left[\hat{A}^{\mu}(x)\hat{A}^{\nu}(x')\right]\middle|0\right\rangle = \mathrm{i}D_F^{\mu\nu}(x-x').$$

V alternativním přístupu (Suraj N. Gupta, Konrad Bleuler) ke kvantování elektromagnetického pole se nekladou kalibrační podmínky, ale uvažují se, kromě dvou fyzikálních (transverzálních) polarizací fotonu, i polarizace skalární a podélná. Tento přístup je explicitně relativisticky kovariantní, vyskytují se v něm ale jiné problémy (indefinitní metrika, nutnost dokazovat, že ve fyzikálních procesech se příspěvky skalárních a podélných fotonů navzájem ruší). V polarizačním tenzoru (272) se tam sčítá přes všechny čtyři polarizace a tento tím nabývá jednodušší tvar

$$P^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\,.$$

Jednodušší tvar nabývá i funkce (312)

$$D_F^{\mu\nu}(x-x') = -g^{\mu\nu}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\,, \tag{313}$$

pomocí které je vyjádřena kontrakce dvou operátorů elektromagnetického pole. Integrál na pravé straně je roven funkci Δ_F (218), počítanou pro $m=0$.

Dá se ukázat, a na konkrétních příkladech se o tom přesvědčíme, že při výpočtech měřitelných veličin (účinné průřezy, rychlosti rozpadu) se členy úměrné čtyřvektoru k v polarizačním tenzoru (274) neprojeví, pokud je příslušný proces popsán tzv. stromovými Feynmanovými diagramami, které budeme v letním semestru výhradně uvažovat. Proto budeme i v našem přístupu používat vztah (313).

3.6.3 Odvození vztahu $\nabla\times\vec{f}(p) = (\mathrm{grad}\ p)\times\vec{f}\,'(p)$.

Připomeňme výpočet komponent vektorového součinu $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ v kartézských souřadnicích $c_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$, kde ε_{ijk} je kompletně antisymetrický tenzor zafixován podmínkou $\varepsilon_{123}=1$. Uvažujeme vektorovou funkci $\vec{f}(p)$ argumentu, který je funkcí souřadnic $p=p(x,y,z)$. Označíme $\vec{f}\,'=\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}p}$. Máme

$$[\nabla\times\vec{f}(p)]_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_j f_k(p) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial f_k(p)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}f_k'(p)\frac{\partial p}{\partial x_j},$$

kde jsme použili pravidlo pre derivaci složené funkce. Po záměně pořadí součinitelů máme

$$[\nabla\times\vec{f}(p)]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial p}{\partial x_j}f_k'(p) = \varepsilon_{ijk}(\nabla\,p)_j f_k'(p) = [(\nabla p)\times\vec{f}\,'(p)]_i\,.$$

Protože to platí pro všechna i, platí to i ve vektorovém tvaru.

3.7 Klasická teorie spinorového pole

Pole definované diracovským bispinorem (který je řešením Diracovy rovnice pro volný hmotný fermion se spinem 1/2) je osmikomponentní, v každém bodě prostoru máme osm nezávislých dynamických proměnných, tj. osm reálných funkcí času. Jsou to reálné a imaginární části čtyř komplexních funkcí prostorových souřadnic a času ψ_1, ψ_2, ψ_3 a ψ_4, které jsou komponentami jednosloupcové čtyřřádkové matice $\psi(x)$. Místo nich je výhodné pracovat s osmi lineárně nezávislými lineárními kombinacemi těchto reálných funkcí, které se vybírají jako ψ_a a $\overline{\psi}_a$ pro $a=1,\ldots 4$.[20] Konkrétní tvar dynamických proměnných $\overline{\psi}_a$ závisí od reprezentace gama matic, pro nejčastěji používanou Diracovu reprezentaci je např. $\overline{\psi}_3 = -\mathrm{Re}\ \psi_3 + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\ \psi_3$.

3.7.1 Lagrangeův formalismus

Jedna z možných Lagrangeových hustot spinorového pole má tvar

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\overline{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu\psi(x)) - (\partial_\mu\overline{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x)\right] - m\overline{\psi}(x)\psi(x). \tag{314}$$

Osm polních Lagrangeových rovnic ($a=1,\ldots,4$)

$$\begin{aligned}\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_a} &= 0\\ \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\overline{\psi}_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}_a} &= 0\end{aligned}$$

[20]Připomínáme, že Diracovsky sdružený spinor je jednořádková čtyřsloupcová matice definovaná pomocí hermitovsky sdruženého spinoru vztahem $\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$.

vede na osm rovnic pro komponenty spinorů $\overline{\psi}$ a ψ, které se dají zapsat v maticovém tvaru jako známá Diracova rovnice (58)

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\,\psi(x) = 0$$

a rovnice k ní dirakovsky sdružená (71)

$$\overline{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}} + m\right) = 0\ .$$

3.7.2 Hamiltonův formalismus

Komponenty konjugovaných polí jsou podle obecné definice (171) rovny

$$\pi_a(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_a)} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\psi}(x)\gamma^0)_a\,, \tag{315}$$

$$\overline{\pi}_a(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\overline{\psi}_a)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^0\psi(x))_a\,. \tag{316}$$

Hamiltonovu hustotu získáme pomocí polní Legendreovy duální transformace (172)

$$\mathcal{H} = \sum_{a=1}^{4}\left[\pi_a\dot{\psi}_a + \overline{\pi}_a\dot{\overline{\psi}}_a\right] - \mathcal{L}\,.$$

Vychází

$$\mathcal{H}(\psi,\overline{\psi}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[(\partial_k\overline{\psi}(x))\gamma^k\psi(x) - \overline{\psi}(x)\gamma^k(\partial_k\psi(x))\right] + m\overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{317}$$

Z obecného vztahu pro tenzor energie-hybnosti N-komponentního pole (173)

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)}\partial^\nu\phi_n - \mathcal{L}\ g^{\mu\nu} \tag{318}$$

pro spinorové pole plyne

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - (\partial^\nu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi\right], \tag{319}$$

kde jsme už využili, že z Diracovy rovnice pro spinor ψ a spinor k němu dirakovsky sdružený vyplývá

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi &= m\psi, \\ \mathrm{i}\partial_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha &= -m\overline{\psi}, \end{aligned} \tag{320}$$

což po dosazení do (314) vede k $\mathcal{L} = 0$. Jestliže ještě použijeme symbol $\leftrightarrow$ definován vztahem

$$f_1(x)\overleftrightarrow{\partial^\nu}f_2(x) = f_1(x)\partial^\nu f_2(x) - [\partial^\nu f_1(x)]f_2(x)$$

dostáváme

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial^\nu}\psi(x). \tag{321}$$

Od času nezávislý čtyřvektor energie-hybnosti spinorového pole je proto roven

$$P^\nu = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{(V)}\psi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\nu}\psi(x)\mathrm{d}^3\mathrm{x}. \tag{322}$$

V dalším využijeme, že po zavedení označení[21]

$$X(x) = \mathrm{i}\dot{\psi}(x) \tag{323}$$

[21] Tato veličina nemá specielní význam, ale usnadní nám výpočet Hamiltonova operátoru spinorového pole.

přechází hustota energie na tvar

$$\mathcal{T}^{00}(x) = \frac{1}{2}\left[X^\dagger(x)\psi(x) + \psi^\dagger(x)X(x)\right]. \tag{324}$$

Obecné řešení Diracovy rovnice jsme psali ve tvaru

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u(\vec{p},s)b_{\vec{p},s} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}v(\vec{p},s)d^*_{\vec{p},s}\right] , \tag{325}$$

ze kterého pro veličinu definovanou vztahem (323) máme

$$X(x) = \sum_{\vec{p},s} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2V}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u(\vec{p},s)b_{\vec{p},s} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}v(\vec{p},s)d^*_{\vec{p},s}\right]. \tag{326}$$

3.8 Kvantová teorie spinorového pole

3.8.1 Operátor spinorového pole ve Schrödingerově obraze

Obecné řešení Diracovy rovnice (325) přepíšeme na tvar

$$\psi(\vec{x},t) = \sum_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}u(\vec{p},s)b_{\vec{p},s}(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}v(\vec{p},s)d^*_{\vec{p},s}(t)\right] ,$$

kde $b_{\vec{p},s}(t) = b_{\vec{p},s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}t}$ a $d^*_{\vec{p},s}(t) = d^*_{\vec{p},s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}}t}$. Podobně jako při přechodu od klasické mechaniky ke kvantové, i tady se z dynamických proměnných, které jsou funkcemi času, stávají operátory od času nezávislé:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x},t) &\longrightarrow \hat{\psi}(\vec{x}) \\ b_{\vec{p},s}(t) &\longrightarrow \hat{b}_{\vec{p},s} \\ d^*_{\vec{p},s}(t) &\longrightarrow \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \end{aligned}$$

$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \sum_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}v(\vec{p},s)\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right] . \tag{327}$$

3.8.2 Operátor energie spinorového pole

Hamiltonův operátor spinorového pole je dán objemovým integrálem

$$\hat{H} = \int_{(V)} \hat{\mathcal{H}}(\vec{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x} \tag{328}$$

z operátoru Hamiltonovy hustoty

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[(\partial_k\hat{\overline{\psi}}(\vec{x}))\gamma^k\hat{\psi} - \hat{\overline{\psi}}\gamma^k(\partial_k\hat{\psi}(\vec{x}))\right] + m\hat{\overline{\psi}}\hat{\psi}. \tag{329}$$

Výpočet tímto způsobem je však komplikovaný, máme tři příspevky (i když u druhého se dá využít, že je hermitovsky sdružený k prvnímu). V každém z nich se vyskytují členy utvořené ze spinorů u a v které se nedají jednoduše vyjádřit a vyruší se až po sloučení všech tří příspěvků.

Použijeme proto alternativní vyjádření (324) hustoty energie klasického spinorové pole, ve kterém nahradíme klasické proměnné operátory

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left[\hat{X}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x}) + \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{X}(\vec{x})\right] . \tag{330}$$

Operátor $\hat{X}$ získáme tak, že ve vztahu (326) přejdeme od klasických proměnných k operátorům

$$\hat{X}(\vec{x}) = \sum_{\vec{p},s} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2V}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}v(\vec{p},s)\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right] . \tag{331}$$

Počítejme nejdřív příspěvek k operátoru energie pole (328) od prvního členu v hranaté závorce v (330), t.j.

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\int_{(V)} \hat{X}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,. \tag{332}$$

Pro $\hat{\psi}(\vec{x})$ použijeme vyjádření (327). Hermitovským sdružením vztahu (331) a očárkováním sčítacích indexů dostáváme

$$\hat{X}^\dagger(\vec{x}) = \sum_{\vec{p}',s'}\sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{2V}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}}u^\dagger(\vec{p}',s')\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}}v^\dagger(\vec{p}',s')\hat{d}_{\vec{p}',s'}\right]\,. \tag{333}$$

Po dosazení (333) a (327) do (332) a při využití vztahů typu

$$\int_{(V)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\mathrm{x} = \mathrm{V}\delta_{\mathrm{\vec{p}},\mathrm{\vec{p}}'} \tag{334}$$

postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= \frac{1}{4V}\sum_{\substack{\vec{p},s\\ \vec{p}',s'}}\sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}}\int_{(V)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}}u^\dagger(\vec{p}',s')\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}}v^\dagger(\vec{p}',s')\hat{d}_{\vec{p}',s'}\right] \\
&\quad \times\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}v(\vec{p},s)\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right]\mathrm{d}^3\mathrm{x} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\substack{\vec{p},s\\ \vec{p}',s'}}\sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}}\left[u^\dagger(\vec{p}',s')u(\vec{p},s)\delta_{\vec{p}',\vec{p}}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p},s} + u^\dagger(\vec{p}',s')v(\vec{p},s)\delta_{\vec{p}',-\vec{p}}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right. \\
&\quad \left. - v^\dagger(\vec{p}',s')u(\vec{p},s)\delta_{\vec{p}',-\vec{p}}\,\hat{d}_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p},s} - v^\dagger(\vec{p}',s')v(\vec{p},s)\delta_{\vec{p}',\vec{p}}\,\hat{d}_{\vec{p}',s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\vec{p},s,s'}\left[u^\dagger(\vec{p},s')u(\vec{p},s)\hat{b}^\dagger_{\vec{p},s'}\hat{b}_{\vec{p},s} + u^\dagger(-\vec{p},s')v(\vec{p},s)\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right. \\
&\quad \left. - v^\dagger(-\vec{p},s')u(\vec{p},s)\hat{d}_{-\vec{p},s'}\hat{b}_{\vec{p},s} - v^\dagger(\vec{p},s')v(\vec{p},s)\hat{d}_{\vec{p},s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right]\,.
\end{aligned}$$

Teď využijeme některé ze vztahů (102-109), konkrétně,

$$\begin{aligned}
&u^\dagger(\vec{p},s')u(\vec{p},s) = v^\dagger(\vec{p},s')v(\vec{p},s) = 2E_{\vec{p}}\,\delta_{s',s}\,, \\
&u^\dagger(-\vec{p},s')v(\vec{p},s) = v^\dagger(-\vec{p},s')u(\vec{p},s) = 0
\end{aligned} \tag{335}$$

a dostáváme

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\sum_{\vec{p},s}E_{\vec{p}}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s} - \hat{d}_{\vec{p},s}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right)\,. \tag{336}$$

Podobně bychom mohli počítat i příspěvek k operátoru energie pole (328) od druhého členu v hranaté závorce ve vztahu (330)

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}\int_{(V)} \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{X}(\vec{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x}\,.$$

Není to však nutné. Využijeme, ze druhý člen je hermitovsky sdružený k prvnímu a že tedy i integrál z něho musí být hermitovsky sdružený k $\hat{H}_1$. Ze vztahu (336) je vidět, že operátor $\hat{H}_1$ vyšel jako hermitovský. Proto je $\hat{H}_2 = \hat{H}_1$ a

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p},s}E_{\vec{p}}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s} - \hat{d}_{\vec{p},s}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\right)\,. \tag{337}$$

První člen v závorce můžeme interpretovat jako operátor počtu částic s hybností $\vec{p}$ ve spinovém stavu s

$$\hat{N}_{\vec{p},s} = \hat{b}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s}\,. \tag{338}$$

Po jeho vynásobení energií jedné částice $E_{\vec{p}}$ a provedení součtu, jak je to uděláno v (337), dostáváme správně operátor energie všech částic v objemu V.

Druhý člen v (337) však podobnou interpretaci neumožňuje. Kdybychom předpokládali (podobně jako u skalárního a elektromagnetického pole) platnost komutačního vztahu

$$\left[\hat{d}_{\vec{p},s}\ ,\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right] = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}\delta_{s,s'} \tag{339}$$

vůbec si nepomůžeme, protože operátor počtu antičástic

$$\hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} = \hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s} \tag{340}$$

by do sumy v (337) vstupoval s negativním znaménkem. Když však předpokládáme, že pro operátory spinorového pole jsou komutační vztahy nahrazeny antikomutačními, t.j. jestliže místo (339) napíšeme

$$\left\{\hat{d}_{\vec{p},s}\ ,\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}\,\delta_{s,s'} \tag{341}$$

kde symbol s kroucenými závorkami, nazývany antikomutátorem, je definován vztahem

$$\left\{\hat{A}\,,\hat{B}\right\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\ , \tag{342}$$

tak můžeme psát $\hat{d}_{\vec{p},s}\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s} = -\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s} + 1 = -\hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} + 1$. Hamiltonův operátor (337) přechází na tvar

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p},s} E_{\vec{p}}\left(\hat{N}_{\vec{p},s} + \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} - 1\right),$$

ve kterém je už operátor počtu antičástic se správným znaménkem. Objevuje sa tam však záporné nekonečno

$$\sum_{\vec{p},s}\left(-E_{\vec{p}}\right) = -\infty.$$

Můžeme se ho zbavit třeba tím, že prohlásíme, že energie je určena až na aditivní konstantu, takže tu konstantu nemusíme psát. Korektnější způsob je redefinovat operátor Hamiltonovy hustoty zavedením normálního součinu

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}) = \ :\frac{\mathrm{i}}{2}\left[(\partial_k\hat{\overline{\psi}}(\vec{x}))\gamma^k\hat{\psi} - \hat{\overline{\psi}}\gamma^k(\partial_k\hat{\psi}(\vec{x}))\right] + m\hat{\overline{\psi}}\hat{\psi}:, \tag{343}$$

který sa pak objeví i ve vztahu (337). Když navíc doplníme definici normálního součinu tak, že při výměně pořadí dvou operátorů spinoroveho pole se změní znaménko, tak bude $:\hat{d}_{\vec{p},s}\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}: = -\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s}$ a Hamiltonův operátor dostáváme ve tvaru

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p},s} E_{\vec{p}}\left(\hat{N}_{\vec{p},s} + \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s}\right), \tag{344}$$

který vyjadřuje to, co od něho očekáváme.

Opodstatněnost předpokladů které jsme učinili (antikomutační vztahy místo komutačních, dodatečné pravidlo normálního součinu) si ověříme výpočtem dalších dvou operátorů spinorového pole: celkového náboje a celkové hybnosti.

Operátor náboje spinorového pole určíme jako integrál z operátoru hustoty náboje. Ten získáme tak, že z klasické hustoty náboje, která je součinem náboje částice a hustoty pravděpodobnosti

$$\rho_Q(x) = (-e)\psi^{\dagger}(x)\psi(x)$$

uděláme operátor (hned ho definujeme i s normálním součinem). Pro operátor náboje tak máme

$$\hat{Q} = (-e)\int_{(V)} :\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x}): \mathrm{d}^3\mathrm{x}. \tag{345}$$

Pro operátor $\hat{\psi}(\vec{x})$ použijeme vztah (327), ze kterého plyne i vztah pro operátor hermitovsky sdružený

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = \sum_{\vec{p}',s'} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}'}}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}} u^\dagger(\vec{p}',s')\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}} v^\dagger(\vec{p}',s')\hat{d}_{\vec{p}',s'} \right] . \tag{346}$$

V něm jsme zvolili sčítací indexy čárkované. Po dosazení (327) a (346) do (345) a úpravách s využitím (334) a (335) dostáváme vztah

$$\hat{Q} = (-e) \sum_{\vec{p},s} \left(\hat{N}_{\vec{p},s} - \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} \right) , \tag{347}$$

který má jasnou fyzikální interpretaci a říká, že náboj antičástice je opačný jako náboj částice.

Určeme nakonec operátor hybnosti spinoroveho pole. Ve vztahu (322) pro k-tou komponentu hybnosti klasického spinorového pole přejdeme k operátorům a máme

$$\hat{P}^k = \frac{\mathrm{i}}{2} \int :\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial^k} \hat{\psi}(\vec{x}): \, \mathrm{d}^3\mathrm{x} . \tag{348}$$

Na pravé straně je součet dvou príspěvků

$$\hat{P}^k_1 = \frac{\mathrm{i}}{2} \int :\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \partial^k \hat{\psi}(\vec{x}): \mathrm{d}^3\mathrm{x} \tag{349}$$

a

$$\hat{P}^k_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2} \int : \left[\partial^k \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \right] \hat{\psi}(\vec{x}): \mathrm{d}^3\mathrm{x} .$$

Platí $\hat{P}^k_2 = [\hat{P}^k_1]^\dagger$, takže stačí vypočíst jenom $\hat{P}^k_1$. Použijeme vztah (327) spolu s

$$\partial^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} = -\mathrm{i}p^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

a dostaneme

$$\partial^k \hat{\psi}(\vec{x}) = -\mathrm{i} \sum_{\vec{p},s} \frac{p^k}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} v(\vec{p},s)\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \right] .$$

Po dosazeni tohoto vztahu a (346) do (349), vyjádření integrálů z exponent pomocí vztahů typu (334) a využití tak získaných Kroneckerových symbolů na provedení sumace pres $\vec{p}\,'$ dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{P}^k_1 &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{p},s} \frac{p^k}{2E_{\vec{p}}} \sum_{s'} : \Big[u^\dagger(\vec{p},s')u(\vec{p},s)\hat{b}^\dagger_{\vec{p},s'}\hat{b}_{\vec{p},s} - u^\dagger(-\vec{p},s')v(\vec{p},s)\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \\ &\quad + v^\dagger(-\vec{p},s')u(\vec{p},s)\hat{d}_{-\vec{p},s'}\hat{b}_{\vec{p},s} - v^\dagger(\vec{p},s')v(\vec{p},s)\hat{d}_{\vec{p},s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \Big] : . \end{aligned}$$

V prvním a čtvrtém členu využijeme normování spinorů

$$u^\dagger(\vec{p},s')u(\vec{p},s) = v^\dagger(\vec{p},s')(\vec{p},s) = 2E_{\vec{p}}\ \delta_{s',s},$$

a dále to, ze normální součin změní pořadí operátorů ve čtvrtém členu a i jeho znaménko. Kde se dá, zavedeme operátory počtu částic a antičástic.

$$\hat{P}^k_1 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{p},s} p^k \left(\hat{N}_{\vec{p},s} + \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} \right) + \hat{Q}^k$$

kde jsme oznacili

$$\hat{Q}^k = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} \frac{p^k}{2E_{\vec{p}}} \sum_{s,s'} \left[u^\dagger(-\vec{p},s')v(\vec{p},s)\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},s'}\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} - v^\dagger(-\vec{p},s')u(\vec{p},s)\hat{d}_{-\vec{p},s'}\hat{b}_{\vec{p},s} \right] .$$

Ze vztahů (335) plyne $\hat{Q}^k = 0$. Protože pak je operátor $\hat{P}^k_1$ hermitovsky, $\hat{P}^k_2 = \hat{P}^k_1$ a $\hat{P}^k = 2\hat{P}^k_1$:

$$\hat{P}^k = \sum_{\vec{p},s} p^k \left(\hat{N}_{\vec{p},s} + \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} \right) ,$$

neboli ve vektorovém tvaru

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{p},s} \vec{p} \left(\hat{N}_{\vec{p},s} + \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s} \right) . \tag{350}$$

3.8.3 Kreační a anihilační operátory, operátory počtu částic a antičástic. Fokův prostor pro fermiony

Při hledání tří operátorů týkajících se globálnich veličin spinorového pole ($\hat{H}$, $\hat{Q}$, $\hat{\vec{P}}$) jsme zjistili, že akceptovatelné výsledky dostaneme když předpokládáme, že kreační a anihilační operátory antičástic splňují antikomutační relace místo komutačních. Je však možné, že toto představuje jenom "špičku ledovce"a že všechny myslitelné relace mezi všemi kreačními a anihilačními operátory jsou antikomutační. Jedná se o těchto šest vztahů:

$$\left\{\hat{b}_{\vec{p},s}\,,\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{d}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}\,\delta_{s,s'}\,, \tag{351}$$

$$\left\{\hat{b}_{\vec{p},s}\,,\hat{b}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{d}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{b}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{b}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = 0\,. \tag{352}$$

Další čtyři jsou už důsledkem (352) a toho, že antikomutátor se nezmění, když v něm prohodíme pořadí operátorů:

$$\left\{\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\,,\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}\right\} = \left\{\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\,,\hat{d}_{\vec{p}',s'}\right\} = 0\,. \tag{353}$$

Formalismus kreačních a anihilačních operátorů, jak jsme jej používali v případě kvantovaného skalárního a elektromagnetického pole, byl založen na vztazích odvozených pro zvyšovací a snižovací operátor v sekci 1.1 studijního materiálu I. Podle tohoto vzoru jsme pro každý jednočásticový stav definovali anihilační a kreační operátor, splňující stejný komutátor jako snižovací operátor se zvyšovacím. Ještě jsme dodali podmínku, že všechny operátory odpovídající různým jednočásticovým stavům navzájem komutují.

Nahrazení komutačních vztahů mezi operátory vztahy antikomutačními má významné důsledky. Pro srovnání uveďme komutační vztah mezi kreačními operátory skalární částice ve dvou různých stavech $\left[a^{\dagger}_{\vec{k}}\,,a^{\dagger}_{\vec{k}'}\right] = 0$. V případě $\vec{k}' = \vec{k}$ se z něj stává nic nevypovídající identita. Když si ale napíšeme první antikomutátor ze série vztahů (353) pro $\vec{p}' = \vec{p}$ a $s' = s$, dostáváme[22]

$$\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s} = \left(\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\right)^2 = 0\,.$$

Z toho plyne, že když působíme na stavový vektor

$$\left|1_{\vec{p},s}\right\rangle = \hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\left|0\right\rangle$$

kreačním operátorem $\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}$ nedostaneme stav se dvěmi částicemi, ale nulu. Takže není možné, aby se v určitém stavu nacházelo víc částic než jedna (Pauliho princip). Rovnice pro vlastní stavy a vlastní hodnoty operátoru počtu částic je tedy

$$\hat{N}_{\vec{p},s}\left|n_{\vec{p},s}\right\rangle = n_{\vec{p},s}\left|n_{\vec{p},s}\right\rangle \qquad \text{pro} \qquad n_{\vec{p},s} = 0,1 \tag{354}$$

Teď si ověříme, že vyjádření operátorů počtu částic v určitém jednočásticovém stavu, charakterizovaném hybností $\vec{p}$ a indexem spinového stavu s,

$$\hat{N}_{\vec{p},s} = \hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s}$$

platí i po přechodu k antikomutátorům. Pro jednoduchost nebudeme psát indexy. Vycházíme ze vztahů

$$\hat{b}\,\hat{b}^{\dagger} + \hat{b}^{\dagger}\hat{b} = 1 \qquad |1>= \hat{b}^{\dagger}|0> \qquad |0>= \hat{b}\,|1> \qquad \hat{b}\,|0>= 0 \qquad \hat{b}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger} = 0$$

Označme teď $\hat{N} = \hat{b}^{\dagger}\hat{b}$ a počítejme

$$\hat{N}|1>= \hat{b}^{\dagger}\hat{b}\,\hat{b}^{\dagger}|0>= \hat{b}^{\dagger}(1-\hat{b}^{\dagger}\hat{b})|0>= 1\,|1>$$

$$\hat{N}|0>= \hat{b}^{\dagger}\hat{b}\,|0>= 0\,|0>$$

[22] Zabýváme se částicemi, ale všechno co bude v dalším odvozeno, platí i pro antičástice.

Tyto dva výsledky jsou ve shodě se vztahem (354). Vyjádření operátoru počtu částic jako součinu kreačního a anihilačního operátoru zůstává v platnosti i po přechodu k antikomutátorům.

Z toho, že pro fermionové operátory platí antikomutační vztahy, plyne další důležitý vztah

$$\hat{N}^k = \hat{N} \qquad \text{pro} \qquad k \geq 1\,. \tag{355}$$

Důkaz provedeme metodou matematické indukce.
a) k=2

$$\hat{N}^2 = \hat{b}^\dagger \hat{b}\,\hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{b}^\dagger (1 - \hat{b}^\dagger \hat{b})\hat{b} = \hat{N}$$

b) předpokládáme, že vztah platí pro $l = k - 1$, tj že $\hat{N}^l = \hat{N}$ a počítáme

$$\hat{N}^k = \hat{N}^l \hat{N} = \hat{N}\hat{N} = \hat{N}\,.$$

V posledním kroku jsme jsme použili a). Tím je důkaz proveden.

Vztah (355) poskytuje alternativní důkaz, že v každém stavu může být nanejvýš jedna částice. Vycházíme ze vztahu

$$\hat{N}|n >= n|n >$$

Uplatníme na něj operátor $\hat{N}$. Na levé straně vzniklé rovnice uplatníme (355) a na pravé nahradíme operátor $\hat{N}$ vlastní hodnotou n. Dostáváme další vztah

$$\hat{N}|n >= n^2|n > \;.$$

Odečtením vztahů dostáváme rovnici

$$n(n-1) = 0\,,$$

která má dvě zjevná řešení.

Teď ještě dokážeme, že operátory počtu částic v různých stavech mezi sebou komutují, tj že platí

$$\left[\hat{N}_{\vec{p},s}\;, \hat{N}_{\vec{p}',s'}\right] = 0\,. \tag{356}$$

Pro jednoduchost si označíme $\hat{N}_i = \hat{N}_{\vec{p},s}$ a $\hat{N}_j = \hat{N}_{\vec{p}',s'}$, stříšky nad operátory nepíšeme.

$$\begin{aligned} N_i N_j &= b_i^\dagger b_i\, b_j^\dagger b_j = b_i^\dagger(\delta_{ij} - b_j^\dagger b_i) b_j = b_i^\dagger b_j \delta_{ij} + b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i = b_i^\dagger b_j \delta_{ij} - b_j^\dagger b_i^\dagger b_j b_i \\ &= b_i^\dagger b_j \delta_{ij} - b_j^\dagger(\delta_{ij} - b_j b_i^\dagger) b_i = (b_i^\dagger b_j - b_j^\dagger b_i)\delta_{ij} + N_j N_i = N_j N_i \end{aligned}$$

Komutace operátorů počtu částic s operátory počtu antičástic se dokazuje ještě jednodušeji, protože teď jsou všechny antikomutátory nulové.

Báze Fokova prostoru pro fermiony je jednodušší než pro bozony (skalární částice, fotony) protože stavy s více než jednou částicí (antičásticí) se stejnými kvantovými čísly jsou vyloučeny.

3.8.4 Operátor spinorového pole v Heisenbergově obraze

V Heisenbergově obraze stavové vektory od času nezávisí, kdežto operátory ano. Přechod ze Schrödingerova obrazu do Heisenbergova je obecně zprostředkován unitární transformací stavů

$$|\Phi >_H = \hat{U}(t)|\Phi; t >_S$$

a operátorů

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}(t)\hat{O}_S \hat{U}^\dagger(t),$$

kde unitární operátor $\hat{U}(t)$ je dán vztahem

$$\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}. \tag{357}$$

V případě spinorového pole je Hamiltonův operátor roven

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p},s} E_{\vec{p}} \left(\hat{N}_{\vec{p},s} + \hat{\overline{N}}_{\vec{p},s}\right) \tag{358}$$

a operátor (357) je dán exponentou ze součtu příspěvků jednotlivých stavů částic a antičástic ve tvaru součinu energie jedné částice a operátoru počtu částic nebo antičástic. Protože všechny operátory počtu mezi sebou komutují

$$\left[\hat{N}_{\vec{p}',s'}\ ,\hat{N}_{\vec{p},s}\right] = \left[\hat{N}_{\vec{p}',s'}\ ,\hat{\overline{N}}_{\vec{p},s}\right] = \left[\hat{\overline{N}}_{\vec{p}',s'}\ ,\hat{\overline{N}}_{\vec{p},s}\right] = 0,$$

můžeme exponentu ze součtu napsat jako součin exponent

$$\hat{U}(t) = \prod_{\vec{p}',s'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{N}_{\vec{p}',s'}\,t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{\overline{N}}_{\vec{p}',s'}\,t} \tag{359}$$

a podobně pro operátor hermitovsky sdružený

$$\hat{U}^\dagger(t) = \prod_{\vec{p}',s'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{N}_{\vec{p}',s'}\,t}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{\overline{N}}_{\vec{p}',s'}\,t}. \tag{360}$$

Budeme hledat operátor $\hat{\psi}$ v Heisenbergově obraze

$$\hat{\psi}(x) = \hat{U}(t)\hat{\psi}(\vec{x})\hat{U}^\dagger(t).$$

Indexy S a H jsme potlačili, příslušnost k určitému obrazu je zřejmá z argumentu operátoru, kterým je buďto prostorový vektor $\vec{x}$ (Schrödingerův obraz) nebo časoprostorový vektor $x \equiv (t, \vec{x})$ (Heisenbergův obraz). Ze vztahu (327) je vidět, že když operátor $\hat{\psi}(\vec{x})$ obložíme operátory $\hat{U}(t)$ a $\hat{U}^\dagger(t)$, na pravé straně vztahu (327) dojde k obložení operátorů $\hat{b}_{\vec{p},s}$ a $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}$, ostatních prvků se působení operátorů netýká. Operátor $\hat{\psi}(x)$ bude pomocí anihilačních a kreačních operátorů v Heisenbergově obraze

$$\hat{b}_{\vec{p},s}(t) = \hat{U}(t)\hat{b}_{\vec{p},s}\hat{U}^\dagger(t) \tag{361}$$

a

$$\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}(t) = \hat{U}(t)\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{U}^\dagger(t)$$

vyjádřen stejně jako byl operátor $\psi(\vec{x})$ vyjádřen pomocí $\hat{b}_{\vec{p},s}$ a $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}$ ve Schrödingerově obraze. Platí tedy

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s}(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}} v(\vec{p},s)\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}(t)\right]\ . \tag{362}$$

Po dosazení (359) a (360) do (361) máme

$$\hat{b}_{\vec{p},s}(t) = \prod_{\vec{p}',s'} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{N}_{\vec{p}',s'}t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{\overline{N}}_{\vec{p}',s'}t}\right) \hat{b}_{\vec{p},s} \prod_{\vec{p}',s'} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{N}_{\vec{p}',s'}t}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}'}\hat{\overline{N}}_{\vec{p}',s'}t}\right). \tag{363}$$

Jestli $\vec{p}' \neq \vec{p}$ nebo $s' \neq s$ tak platí

$$\hat{b}_{\vec{p},s}\hat{N}_{\vec{p}',s'} = \hat{b}_{\vec{p},s}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p}',s'} = -\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p}',s'} = \hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p},s} = \hat{N}_{\vec{p}',s'}\hat{b}_{\vec{p},s},$$

čili $\left[\hat{b}_{\vec{p},s}\ ,\hat{N}_{\vec{p}',s'}\right] = 0$. Podobně se dá ukázat, že vztah $\left[\hat{b}_{\vec{p},s}\ ,\hat{\overline{N}}_{\vec{p}',s'}\right] = 0$ platí pro všechny $\vec{p}'$ a s'. Proto ve vztahu (363) můžeme všechny exponenty až na jednu přenést z jedné závorky do druhé, kde po vynásobení vhodným partnerem dají jedničku. Zůstane nám tak

$$\hat{b}_{\vec{p},s}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}}\hat{N}_{\vec{p},s}t}\ \hat{b}_{\vec{p},s}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}\hat{N}_{\vec{p},s}t}$$

Exponenty tam vystupující se dají upravit pomocí vztahu $(\hat{N}_{\vec{p},s})^k = \hat{N}_{\vec{p},s}$ pro $k \geq 1$. Dostáváme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}}\hat{N}_{\vec{p},s}t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}E_{\vec{p}}t)^k}{k!}\hat{N}^k_{\vec{p},s} = 1 + \hat{N}_{\vec{p},s}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}E_{\vec{p}}t)^k}{k!} = 1 + \hat{N}_{\vec{p},s}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}}t} - 1\right)$$

a

$$\hat{b}_{\vec{p},s}(t) = \left[1 + \hat{N}_{\vec{p},s}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}}t} - 1\right)\right]\hat{b}_{\vec{p},s}\left[1 + \hat{N}_{\vec{p},s}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}t} - 1\right)\right]$$

Teď využijeme, že platí

$$\hat{b}_{\vec{p},s}\hat{N}_{\vec{p},s} = \hat{b}_{\vec{p},s}\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s} = \hat{b}_{\vec{p},s}\left(1 - \hat{b}_{\vec{p},s}\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\right) = \hat{b}_{\vec{p},s}$$

i

$$\hat{N}_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s} = \hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s}\hat{b}_{\vec{p},s} = 0$$

a dostáváme

$$\hat{b}_{\vec{p},s}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}t}\hat{b}_{\vec{p},s}.$$

Podobně by se ukázalo, že

$$\hat{d}_{\vec{p},s}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{p}}t}\hat{d}_{\vec{p},s}$$

a tedy

$$\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{p}}t}\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}.$$

Pro operátory spinorového pole v Heisenbergově obraze po využití $E_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x} = px$ dostáváme

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}v(\vec{p},s)\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\right] \tag{364}$$

a

$$\hat{\overline{\psi}}(x) = \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\overline{u}(\vec{p},s)\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p},s} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\overline{v}(\vec{p},s)\hat{d}_{\vec{p},s}\right]. \tag{365}$$

3.8.5 Antikomutační vztahy a zúžení operátorů spinorového pole

Někdy je výhodné rozložit operátory spinorového pole (364) a (365) v Heisenbergově obraze na kladně a záporně frekvenční části

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &= \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x)\\ \hat{\overline{\psi}}(x) &= \hat{\overline{\psi}}^{(+)}(x) + \hat{\overline{\psi}}^{(-)}(x)\end{aligned} \tag{366}$$

kde

$$\hat{\psi}^{(+)}(x) = \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u(\vec{p},s)\hat{b}_{\vec{p},s}\ , \tag{367}$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x) = \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}v(\vec{p},s)\hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\ , \tag{368}$$

$$\hat{\overline{\psi}}^{(+)}(x') = \sum_{\vec{p}',s'}\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}'}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x'}\overline{v}(\vec{p}',s')\hat{d}_{\vec{p}',s'}, \tag{369}$$

$$\hat{\overline{\psi}}^{(-)}(x') = \sum_{\vec{p}',s'}\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}'}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x'}\overline{u}(\vec{p}',s')\hat{b}^{\dagger}_{\vec{p}',s'}. \tag{370}$$

Kvůli pozdějšímu použití jsme části operátoru $\hat{\overline{\psi}}$ vyjádřili v časoprostorovém bodě x' a sumační indexy jsme zvolili čárkované. Následující dva antikomutátory jsou nulové, protože všechny spinorové anihilační operátory mezi sebou antikomutují, stejně jako všechny operátory kreační.

$$\left\{\hat{\psi}^{(+)}_a(x)\,,\hat{\overline{\psi}}^{(+)}_b(x')\right\} = \left\{\hat{\psi}^{(-)}_a(x)\,,\hat{\overline{\psi}}^{(-)}_b(x')\right\} = 0 \tag{371}$$

Maticové indexy a a b jsme museli zavést, protože pro celé nečtvercové matice nemá antikomutátor (ani komutátor) smysl. Teď počítejme antikomutátor

$$\begin{aligned}\left\{\hat{\psi}_a^{(+)}(x)\,,\hat{\overline{\psi}}_b^{(-)}(x')\right\} &= \frac{1}{2V}\sum_{\substack{\vec{p},s\\ \vec{p}',s'}}\frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}'}E_{\vec{p}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u_a(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x'}\overline{u}_b(\vec{p}',s')\left\{\hat{b}_{\vec{p},s}\,,\hat{b}^\dagger_{\vec{p}',s'}\right\} \\ &= \sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE_{\vec{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}\sum_{s=1,2}u_a(\vec{p},s)\overline{u}_b(\vec{p},s)\end{aligned} \tag{372}$$

Využijeme, že platí

$$\sum_{s=1,2}u_a(\vec{p},s)\overline{u}_b(\vec{p},s)=(\not{p}+m)_{ab}$$

a taky

$$p_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}=\mathrm{i}\partial_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}, \tag{373}$$

čímž dostáváme

$$\left\{\hat{\psi}_a^{(+)}(x)\,,\hat{\overline{\psi}}_b^{(-)}(x')\right\}=(\mathrm{i}\not{\partial}+m)_{ab}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE_{\vec{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}.$$

S podobnou sumou jsme se setkali u skalárního pole, tam se jenom používalo jiné označení (k místo p, $\omega_{\vec{k}}$ místo $E_{\vec{p}}$). Tam se ukázalo, že v limitě neomezeně rostoucího normalizačního objemu platí

$$\lim_{V\to\infty}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2VE_{\vec{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}=\mathrm{i}\;\Delta^{(+)}(x-x'),$$

kde

$$\Delta^{(+)}(x-x')=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\vec{p}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}.$$

Když teď zavedeme čtvercovou (4x4) matici funkcí předpisem

$$S^{(+)}(x-x')=(\mathrm{i}\not{\partial}+m)\Delta^{(+)}(x-x'),$$

v limitě neomezeně rostoucího normalizačního objemu dostávame

$$\left\{\hat{\psi}_a^{(+)}(x)\,,\hat{\overline{\psi}}_b^{(-)}(x')\right\}=\mathrm{i}S_{ab}^{(+)}(x-x').$$

Podobně v této limitě vyjde

$$\left\{\hat{\psi}_a^{(-)}(x)\,,\hat{\overline{\psi}}_b^{(+)}(x')\right\}=\mathrm{i}S_{ab}^{(-)}(x-x').$$

kde

$$S^{(-)}(x-x')=(\mathrm{i}\not{\partial}+m)\Delta^{(-)}(x-x')$$

je matice funkcí definována pomocí funkce $\Delta^{(-)}$, známé z kvantové teorie skalárního pole jako

$$\Delta^{(-)}(x-x')=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\vec{p}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}=[\Delta^{(+)}(x-x')]^*.$$

Zúžení (contraction) spinorových operátorů (364) a (365)

$$\hat{\psi}_a^\bullet(x)\hat{\overline{\psi}}_b^\bullet(x')=T[\hat{\psi}_a(x)\hat{\overline{\psi}}_b(x')]-:\hat{\psi}_a(x)\hat{\overline{\psi}}_b(x'): \tag{374}$$

je definováno jako rozdíl Wickova chronologického součinu a normálního součinu. U obou součinů platí pravidlo, že při každé výměne pořadí dvou spinorových operátorů se mění znaménko. Když si uvědomíme, že kladně frekvenční operátory obsahují jenom anihilační operátory, kdežto záporně frekvenční jenom kreační, tak pro normální součin máme (časoprostorové argumenty kvůli stručnosti nepíšeme)

$$:\hat{\psi}_a\hat{\overline{\psi}}_b: = \hat{\psi}_a^{(+)}\hat{\overline{\psi}}_b^{(+)} - \hat{\overline{\psi}}_b^{(-)}\hat{\psi}_a^{(+)} + \hat{\psi}_a^{(-)}\hat{\overline{\psi}}_b^{(+)} + \hat{\psi}_a^{(-)}\hat{\overline{\psi}}_b^{(-)}. \tag{375}$$

Wickův chronologický součin závisí od pořadí časových argumentů

$$T[\hat{\psi}_a(x)\hat{\overline{\psi}}_b(x')] = \begin{cases} \psi_a(x)\hat{\overline{\psi}}_b(x') & \text{jestli } x_0 > x'_0 \\ \\ -\hat{\overline{\psi}}_b(x')\psi_a(x) & \text{jestli } x_0 < x'_0 \end{cases} \tag{376}$$

Když teď vyjádříme součiny operátorů na pravé straně vztahu (376) pomocí jejich kladně a záporně frekvenčních částí podle (366) a spolu s (375) dosadíme do vztahu (374) dostáváme

$$\hat{\psi}_a^{\bullet}(x)\hat{\overline{\psi}}_b^{\bullet}(x') = \begin{cases} \left\{\hat{\psi}_a^{(+)}(x)\,,\hat{\overline{\psi}}_b^{(-)}(x')\right\} & \text{jestli } x_0 > x'_0 \\ \\ -\left\{\hat{\psi}_a^{(-)}(x)\,,\hat{\overline{\psi}}_b^{(+)}(x')\right\} & \text{jestli } x_0 < x'_0 \end{cases}. \tag{377}$$

Antikomutátory na pravé straně jsou vyjádřeny pomocí funkcí $S^{(+)}$ a $S^{(-)}$, zaveďme tedy funkci

$$S_F(x-x') = \begin{cases} S^{(+)}(x-x') & \text{jestli } x_0 > x'_0 \\ \\ -S^{(-)}(x-x') & \text{jestli } x_0 < x'_0 \end{cases}, \tag{378}$$

která nám umožní přepsat vztah (377) v kompaktním tvaru

$$\hat{\psi}_a^{\bullet}(x)\hat{\overline{\psi}}_b^{\bullet}(x') = \mathrm{i}\ [S_F(x-x')]_{ab} \tag{379}$$

Matice funkcí $S_F(x-x')$ se nazývá Feynmanovým propagátorem spinorového pole a dá se vyjádřit pomocí funkce $\Delta_F(x-x')$, zavedené u skalárního pole

$$S_F(x-x') = (\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + m)\Delta_F(x-x'). \tag{380}$$

Protože platí

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}d^4p, \tag{381}$$

pomocí vztahu (373) získáváme pro Feynmanův propagátor vyjadření

$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}d^4p. \tag{382}$$

Připomeňme ještě, že vakuová střední hodnota z normálního součinu je vždy rovna nule. Proto taky platí

$$\left\langle 0 \,\middle|\, T\left[\hat{\psi}_a(x)\hat{\overline{\psi}}_b(x')\right] \,\middle|\, 0\right\rangle = \mathrm{i}\ [S_F(x-x')]_{ab}.$$