Slezská univerzita v Opavě
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě

Doc. RNDr. Luděk Cienciala, Ph.D.

Úvod do logiky

Skripta do předmětu

Ústav informatiky
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě
Slezská univerzita v Opavě

Opava
2020

OBSAH:

1 ÚVOD DO LOGIKY

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY ÚVOD DO LOGIKY

Rychlý náhled

Cílem prvního a druhého modulu je uvedení do problematiky logiky, výrokové logiky, naučit používat výrokové spojky, naučit pracovat s výrokovými formulemi, převádět z přirozeného jazyka do symbolického jazyka výrokové logiky.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY ÚVOD DO LOGIKY

Klíčová slova

Logika, druhy logik, logické vyplývání, analytická pravdivost, sporná množina výroků, důkaz tvrzení

Existuje mnoho typů logik, například: Formální logika, matematická logika, modální logika (popis dynamického chování systému), dvouhodnotová, vícehodnotová logika, pravděpodobnostní logika, temporální (uvažuje pravdivost či nepravdivost v čase, disponuje prostředky pro vyjádření pojmů vždy nebo někdy) atd.

Termín logika často vyskytuje i v běžné řeči v rozmanitých slovních spojeních jako „to nemá žádnou logiku, neúprosná logika vývoje, ženská logika, logika věci vyžaduje, aby.... „apod.

Odkud termín logika vlastně pochází? Evangelista sv. Jan jedné ze svých kapitol praví, že na počátku bylo Slovo (řecky λογοζ), tedy jazyk, myšlení, uvažování, ale též řád věcí.

Logika

Logika se pokouší k objektům a pochodům lidského myšlení vytvořit adekvátní model pomocí určitých sobě vlastních prostředků. (stejně jako matematika nebo matematická informatika.) Model se vytváří na základě určitého zjednodušení (abstrakce) modelované reality, a to tak, aby vněm bylo obsaženo to nejdůležitější.

Za zakladatele logiky a to logiky formální je považován **Aristoteles**.

Formální logika je nejstarší pokus o modelování a modelové zkoumání zákonitostí vnímání a usuzování.

Jde o logiku založenou na dvouhodnotové interpretaci pojmu pravdivosti. Tvrzení může být buď pravdivé nebo nepravdivé. Logika je především věda o správném usuzování, o umění správné argumentace.

Obecně můžeme **úsudek** charakterizovat následujícím schématem: *Úsudek*
Na základě pravdivosti výroků (soudů, tvrzení) $V_1, \ldots, V_n$ soudím, že je pravdivý rovněž výrok V. (pozn. předpoklady = premisy)

Existují různé druhy úsudků – ne všemi se zabývá logika.
Obecně se nezabývá tzv. pravděpodobnostními úsudky:

Slunce doposud vyšlo každý den.
Tedy: Slunce (pravděpodobně) vyjde i zítra.

Nezabývá se úsudky generalizací:

Všechny labutě, které jsme dosud viděli, jsou bílé.
Tedy: Všechny labutě jsou bílé.

Budeme se zabývat tzv. deduktivními úsudky:

DEFINICE 1-1 LOGICKÉ VYPLÝVÁNÍ

Df

Úsudek $P_1, \ldots, P_n$ / Z je deduktivně správný (platný), značíme $P_1, \ldots P_n \vDash Z$, jestliže závěr Z logicky vyplývá z předpokladů $P_1, \ldots P_n$, tj. za všech okolností takových že jsou pravdivé všechny předpoklady $P_1, \ldots, P_n$ je (za těchto okolností) pravdivý i závěr Z.

Tedy jinými slovy: Za žádných okolností, nikdy se nemůže stát, aby byly všechny předpoklady $P_1, \ldots, P_n$ pravdivé a zároveň závěr Z byl nepravdivý.
Deduktivní usuzování v praktickém životě všichni více či méně používáme. Např. Víme, že všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté a zjistíme (např. za pomoci atlasu hub), že houba, kterou jsme nalezli, je muchomůrka zelená, pak jistě nebudeme tuto houbu ochutnávat a spolehneme se na logiku, neboť to nám zaručuje, že houba, kterou jsme našli, je prudce jedovatá.

Nyní uvedeme příklady jednoduchých, správných deduktivních úsudků:

- Všechny kovy se teplem roztahují. Měď je kov.
  Měď se teplem roztahuje.
- Je doma nebo odešel do kavárny. Je-li doma, pak nás očekává. Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.
- Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté. Tato tužka je muchomůrka zelená.
  Tato tužka je prudce jedovatá.
- Všichni muži mají rádi fotbal a pivo. Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal. Pepa má rád pouze milovníky fotbalu a piva.
  Některé ženy nemá Pepa rád.

Logika také zkoumá skladbu – konstrukci jednotlivých složených výrazů (soudů) z jejich podvýrazů. Jednou z disciplín logiky je proto rovněž tzv. **logická analýza jazyka** – spočívá v nalezení příslušné logické konstrukce vyjádřené daným výrazem. *Logická analýza jazyka*

Expresivní síla

Ovšem ne všechny deduktivně správné úsudky můžeme ověřit pomocí daného logického systému. Proto hovoříme o **expresivní síle logického systému**, která je dána tím, do jaké míry podrobnosti můžeme analyzovat jednotlivé výrazy. Ideální logický systém by nám měl umožnit analyzovat premisy do takové hloubky, abychom mohli odvodit všechny závěry, které z těchto premis logicky vyplývají a ověřit všechny správné úsudky.

Uvedeme příklady logických systémů podle jejich expresivní síly:

- Výroková logika umožňuje analyzovat pouze do úrovně elementárních výroků, jejichž strukturu již dále nezkoumá.
- Predikátová logika 1. řádu umožňuje analyzovat elementární výroky do úrovně vlastností jednotlivých objektů zájmu (tzv. individuí – prvků univerza diskursu) a jejich vztahů.
- Predikátové logiky vyšších řádů umožňují navíc analyzovat vlastnosti vlastností, vlastností funkcí, atd.

Vlastnosti deduktivních úsudků

Jaké jsou vlastnosti deduktivních úsudků? Ověříme-li správnost (platnost) úsudku, nedokážeme tím pravdivost závěru!

První vlastnost

První vlastností je, že platný úsudek může mít nepravdivý závěr.
Uvedeme příklad:

Je doma nebo odešel do kavárny.
Je-li doma, pak nás očekává.
Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.

Správnost úsudku nedokazuje, že dotyčný je v kavárně, jestliže nás neočekává, klidně mohl jít třeba do kina. V tom případě by ovšem zřejmě nebyla pravdivá první premisa. To neznamená, že platný úsudek, jehož závěr není pravdivý, by byl bezcenný.
Vždyť takovýto způsob běžně používáme, chceme-li demonstrovat, že někdo neříká pravdu. Představme si následující dialog:

Vy tedy tvrdíte, že $X_1, \ldots X_n$.
Avšak z vašich tvrzení plyne, že A.
Z A dále plyne, že B atd. až dostaneme závěr Z, který je evidentně nepravdivý.
Tedy vy tvrdíte Z, což není pravda.

Proto alespoň jedno z vašich původních tvrzení X_i není pravdivé.

Druhá vlastnost

Druhou vlastností deduktivních úsudků je **monotónnost**: Jestliže $P_1, \ldots P_n \vDash Z$, pak $P_1, \ldots P_n, P_{n+1} \vDash Z$, pro libovolnou další premisu P_{n+1}. Tuto vlastnost nemají jiné úsudky, které nejsou deduktivní.

Třetí a čtvrtá vlastnost

Třetí vlastností je **tranzitivita**: Jestliže $P_1, \ldots P_n \vDash Z$ a $Q_1, \ldots Q_m, Z \vDash Z'$, pak $P_1, \ldots P_n, Q_1, \ldots Q_m \vDash Z'$ a čtvrtou **reflexivita**: Je-li B rovna jedné z premis $P_1, \ldots P_n$, pak $P_1, \ldots P_n \vDash B$.

Nyní definujeme analytickou pravdivost a kontradikci.

DEFINICE 1-2 ANALYTICKÁ PRAVDIVOST

Výrok V je **analyticky pravdivý**, značíme $\models V$, je-li pravdivý za všech okolností, vždy. (Množina předpokladů je prázdná, V nemůže být nepravdivý.)

DEFINICE 1-3 SPORNÁ MNOŽINA

Množina $\{ P_1, ...P_n\}$ **výroků** je **sporná** (kontradiktorická, nesplnitelná) jestliže nemůže nikdy za každých okolností nastat případ, že by byly všechny $P_1, ...P_n$ pravdivé, značíme $P_1, ...P_n \models$ (Tedy z této množiny logicky vyplývá jakýkoli výrok, i nepravdivý, proto musí být vždy alespoň jeden P_i nepravdivý)

Důležitou vlastností je, že ze sporné množiny předpokladů vyplývá jakýkoli závěr.

Všechny pravdivé matematické výroky jsou analyticky pravdivé. Matematikové formulují a **dokazují** tvrzení. Výsledkem jejich práce je tedy zpravidla (ne-li vždy) nalezení nějakého důkazu. Avšak důkazy a jejich analýza je to, co zajímá logiky, důkaz je rovněž jedním z nejdůležitějších logických pojmů.

Důkaz

Co je to důkaz? Obecně řečeno, **důkaz tvrzení** A **z předpokladů** $P_1,\ldots,P_n$ je posloupnost tvrzení $B_1,\ldots,B_m$ taková, že: $B_m = A$ pro každé $i \leq m$ platí, že B_i je buď jeden z předpokladů P_j nebo B_i vznikne z předchozích $B_1,\ldots,B_{i-1}$ uplatněním nějakého **odvozovacího pravidla.**

2 VÝROKOVÁ LOGIKA

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY VÝROKOVÁ LOGIKA

Klíčová slova

Logika-výroková logika-jazyk výrokové logiky-spojky výrokové logiky.

Výrok

Výrok je jazykový výraz, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivý či nepravdivý.

Ne každá věta vyjadřuje výrok. Např. věta *Český král je holohlavý* nemůže být v současné době (kdy neexistuje český král) ani pravdivá, ani nepravdivá. Kdyby totiž nastal jeden z těchto případů, vyplývala by z ní existence českého krále!

Výroky dělíme na **jednoduché** (elementární, atomické), které nelze dále rozložit na výroky jednodušší, jsou to tvrzení, jehož žádná vlastní část již není výrokem a **složené**, které mají vlastní části – výroky.

Nyní uvedeme příklady jednotlivých typů výroků:
"Koupím si telefon, o němž si předtím přečtu recenzi." Jedná se o jednoduchý výrok.

"Když si jdu koupit telefon, tak si nejprve projdu pár recenzí." Jde o výrok složený, který lze rozložit na dva jednoduché výroky A a B, kde A = *"jdu si koupit telefon"* a B = *"nejprve si projdu pár recenzí"*. Jednoduché výroky jsou spojeny logickou spojkou **implikace**, která je zde zastoupena slovním spojením "když ..., tak".

"Není pravda, že jak telefon vypadá charakterizuje, to co umí." Jedná se o složený výrok, ale netvoří ho dva výroky jako v předešlém případě, ale jen jeden jednoduchý výrok A (A = *"jak telefon vypadá charakterizuje to co umí "*), u kterého je použita logická spojka **negace**.

"Je pravda, že čtení knih zvyšuje slovní zásobu a rozvíjí čtenářovu fantazii." Jedná se o složený výrok tvořený dvěma jednoduchými výroky A a B (A = *"čtení knih zvyšuje slovní zásobu"* a B = *"čtení knih rozvíjí čtenářovu fantazii"*) spojenými logickou spojkou **konjunkce** (vyjádřenou spojkou přirozeného jazyka - "a").

Výroková logika zkoumá způsob skládání jednoduchých výroků pomocí logických spojek do výroků složených. Jednoduché výroky vstupují do spojení pouze svou pravdivostní hodnotou a jsou navzájem nezávislé. Pravdivostní hodnota složeného výroku je tedy jednoznačně určena pravdivostními hodnotami jeho složek a druhem spojek, které tyto jednodušší složky spojují.

V matematických textech výrok tvaru „jestliže A, pak B“ bývá vyjadřován některým z těchto způsobů:

A je podmínka postačující pro B
B je podmínka nutná pro A

Případně

Aby B, k tomu stačí, že A
Aby A, k tomu je nutné, aby B.

Sledujme pravdivost. „*Gen je biologická struktura*.“ Je pravdivý výrok. *„Gen není biologická struktura.“* Je nepravdivý výrok.

„*Na Marsu je život.“ „Ve vesmíru existuje život i mimo Zemi.“* Míra přesvědčení o pravdivosti věty „*Na Marsu je život.“* klesá, u věty *„Ve vesmíru existuje život i mimo Zemi.“*

roste např. díky kosmickým výzkumům. Poslední dvě věty jsou pravdivé, nebo nepravdivé, ale naše prostředky, jak zjistit jejich pravdivostní hodnotu, nejsou dostatečně silné.

„Život je pravoúhlý.“ „Pravoúhlý život je když.“ Věta *„Pravoúhlý život je když.“* není dobře sestavená, její skladba neodpovídá pravidlům skladby českého jazyka, nemá tudíž smysl cokoli říkat o její pravdivosti či nepravdivosti. Věta *„Život je pravoúhlý.“* je sice gramaticky správná, avšak zjevně nesmyslná vzhledem k vadnému použití predikátu pravoúhlý. Zde nemá smysl uvažovat o její pravdivosti či nepravdivosti. Věta *„Pravoúhlý život je když.“* odporuje syntaxi, zatímco věta *„Život je pravoúhlý.“* sémantice českého jazyka.

Syntaxe jazyka

V **syntaxi** jazyka výrokové logiky je stanoveno, jakých symbolů abecedy jazyk používá a jsou předepsána pravidla zřetězování symbolů abecedy jazyka do útvarů zvaných formule jazyka. Jde tedy o soustavu syntaktických pravidel, umožňující konstruovat jistá zřetězení symbolů jazyka, která jsou jeho dobře utvořenými formulemi a patří proto do jeho slovníku.

Nyní definujeme abecedu jazyka výrokové logiky.

DEFINICE 2-1 ABECEDA JAZYKA VÝROKOVÉ LOGIKY

Mezi symboly **abecedy jazyka výrokové logiky** patří výhradně do některé z následujících skupin elementárních symbolů:

- symboly $a, b, c, \ldots a_1, b_1, c_1 \ldots$ pro prvotní proměnné označující elementární výroky
- symboly pro logické konstanty true a false,
- symboly pro logické spojky: negace $\neg$, konjunkce $\&$, disjunkce $\vee$, implikace $\rightarrow$, ekvivalence $\leftrightarrow$,
- pomocné symboly - závorky.

Syntax jazyka výrokové logiky vychází z množiny symbolů

- $a, b, c, \ldots a_1, b_1, c_1$ označujících výroky
- true a false.

Uvedené symboly představují atomické formule, ze kterých se vytvářejí další dobře utvořené výrokové formule podle pravidel.

Pravidla pro tvorbu formulí

Definujme pravidla pro tvorbu formulí výrokové logiky.
Základní pravidlo – báze: Každá atomická formule je formulí.
Indukce: Jsou-li X a Y formule, pak $\neg X$, $X \& Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$ a $X \leftrightarrow Y$ jsou formule.
Generalizace: všechny dobře utvořené formule jazyka výrokové logiky jsou výsledkem konečného počtu aplikací základního pravidla a pravidla indukce. Poznamenejme, že X a Y zastupují libovolné formule, jsou to metasymboly sloužící k označení formulí.

Příkladem formule může být:

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

Výrazy, které nejsou formulemi:

$\neg A \neg, A \vee (B \rightarrow) C)$

Jazyk výrokové logiky

Jazyk výrokové logiky je množina všech formulí výrokové logiky. V následující tabulce uvádíme alternativní označení výrokových spojek.

Symbol pro spojku	Alternativní Symboly
&	$\wedge$
$\rightarrow$	$\supset, \Rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\equiv, \Leftrightarrow$

Budeme používá následující konvence. Složenou formuli nejvyššího řádu netřeba závorkovat. Logické spojky uspořádáme do prioritní stupnice $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Ze dvou funktorů váže silněji ten, který je v uvedené stupnici umístěn více vlevo. Tuto konvenci však příliš "nezneužíváme" a závorky raději použijeme vždy, když chceme vyznačit strukturu formule. V případě, že o prioritě vyhodnocení nerozhodnou ani závorky ani prioritní stupnice, vyhodnocujeme formuli zleva doprava. např. formuli $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$ vyhodnocujeme tak, jako by byla zapsána $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$. U vícečlenných konjunkcí nebo disjunkcí není třeba (vzhledem k jejich asociativitě – viz dále) uvádět závorky, např. místo $(p \vee q) \vee r$ nebo $p \vee (q \vee r)$ lze psát pouze $p \vee q \vee r$. Tato konvence souvisí s předchozí konvencí na pořadí vyhodnocování nezáleží, a tedy lze standardně vyhodnocovat zleva doprava.

Podle definice	*S využitím konvencí*	*Hier.řád*
p, q	p, q	*0*
$(\neg p), (\neg q), (p \,\&\, q)$	$\neg p, \neg q, p \,\&\, q$	*1*
$((\neg p) \vee (\neg q)), (\neg(p \,\&\, q))$	$\neg p \vee \neg q, \neg(p \,\&\, q)$	*2*
$(((\neg p) \vee (\neg q)) \leftrightarrow (\neg(p \,\&\, q)))$	$\neg p \vee \neg q \leftrightarrow \neg(p \,\&\, q)$	*3*

V předchozí tabulce v prvním sloupci je zobrazen postup konstrukce složené formule striktně podle definice, ve druhém s maximálním využitím konvencí šetřících závorky, v třetím sloupci je uveden hierarchický řád formulí uvedených v daném řádku.

Podformule

Podformule definujeme jakou souvislou část formule, která je sama formulí. Každá formule je svou podformulí. Chceme-li hovořit o podformulích, které jsou různé od původní formule, používáme termín **vlastní podformule**.

Konstrukci formule lze vyjádřit i graficky pomocí tzv. **formačního stromu formule**.

DEFINICE 2-2 FORMAČNÍ STROM FORMULE

Formační strom formule *A* jazyka výrokové logiky je konečný binární strom, jehož všechny uzly jsou označeny návěstími – podformulemi formule *A* – tak, že platí:

- Kořen má 0-tou úroveň a je označen formulí *A*.
- Jestliže je uzel označen některým z návěstí $X \,\&\, Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \leftrightarrow Y$, kde X, Y jsou formule, pak uzly bezprostředně následující úrovně nesou po řadě (zleva doprava) návěstí X, Y.
- Je-li uzel označen podformulí $\neg X$, pak uzel bezprostředně následující úrovně nese jako návěstí podformuli X.

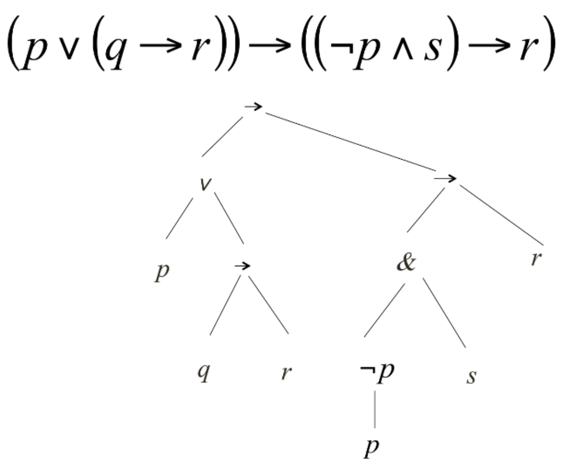
Listy jsou označeny atomickými formulemi vyskytujícími se v *A*.

VĚTA 2-1

Ke každé výrokové formuli existuje jediný odpovídající formační strom.

Uvedeme příklad formačního stromu k formuli

$$\left(p \vee (q \rightarrow r)\right) \rightarrow \left((\neg p \wedge s) \rightarrow r\right)$$



Vzájemné jednoznačné přiřazení dobře utvořené výrokové formule a jejího formačního stromu umožňuje definovat vedle složitosti konstrukce formule také její hloubku a základnu.

DEFINICE 2-3 HLOUBKA FORMULE

Hloubka formule je hloubkou formačního stromu.

DEFINICE 2-4 ZÁKLADNA FORMULE

Základnu formule tvoří množina atomických formulí, které jsou návěštími listů jejího formačního stromu.

DEFINICE 2-5 SLOŽITOAT FORMULE

Složitost formule je rovna počtu uzlů formačního stromu formule, které nejsou listy.

VĚTA 2-2

Složitost formule je rovna počtu výskytů logických spojek ve formuli.

Uvedeme příklad pro určení hloubky a základny formule:

$$((p \rightarrow q) \vee \text{false}) \rightarrow \neg q$$

$\rightarrow$

$\vee$ $\neg q$

$\rightarrow$ false q

p **q**

Formule má hloubku 3, neboť obsahuje maximálně uzly 3. úrovně. Základnu formule tvoří tři atomické formule *p, q, false.*

KONTROLNÍ OTÁZKA 1

1. O co se v logice snažíme?
2. Jakým typem úsudku se logika zabývá?
3. Jaké jsou vlastnosti deduktivních úsudků?
4. Co nazýváme analytickou pravdivostí, kontradikcí?
5. Kdy je množina výroků sporná?
6. Co nazýváme důkazem?
7. Co nazýváme výrokovou logikou?

CVIČENÍ 1

Příklad 1: Jedná se o výrok?

- Autobus může jet v úterý nebo ve středu.
- Odjíždím do Španělska a do Německa.
- Je ČR právním státem?
- Účast na akci je povinná nebo není povinná.
- Pavla nestuduje historii, nýbrž sociologii a právo.
- Není pravda, že jestliže souhlasíš s Petrem, pak souhlasím s Marcelou.
- Cassidy je živý nebo mrtvý.
- Je pravděpodobné, že půjde domů a do práce.

Příklad 2: Negujte:

- Budu se procházet nebo si zazpívám.
- Pavel nefandí ani Spartě ani Slavii.
- Je-li středa, je schůze.
- Jestli se budu hodně učit nebo budu mít štěstí, pak udělám zkoušku.
- Jestli se budu pilně učit, pak uspěju u zkoušky nebo budu mít pech.
- Jestli bude zítra třetí světová válka, pak zahyne více než 3 milióny lidí.
- Dám ti facku, když mě oklameš.
- Bude-li pěkné počasí a nepokazí-li se nám auto, pojedeme na pláž a budeme se koupat.

Příklad 3: Co vyplývá z následujících předpokladů?

Karel pojede autobusem nebo vlakem.
Jede-li Karel autobusem nebo svým vozem, pak přijede pozdě a zmešká schůzku.
Karel nepřišel pozdě.

Příklad 4: Převeďte větu v přirozeném jazyce na formuli ve výrokové logice.

- Neběží-li motor, je vada v motoru nebo nejde proud.
- Není pravda, že uchazeč umí anglicky i německy.

Příklad 5: Není černý, ale za to je hezký. Který z následujících výroků je pravdivý?

- Není černý jen tehdy, když je hezký.
- Je hezký.
- Není černý a hezký.
- Není černý.
- Není černý a je hezký.

Příklad 6: Hokejisté Havířova remizovali nebo prohráli se Slavií. Který z následujících výroků je pravdivý?

- Hokejisté Havířova neremizovali nebo neprohráli se Slavií.
- Hokejisté Havířova prohráli se Slavií.
- Jestliže hokejisté Havířova prohráli se Slavií, pak s ní neremizovali.
- Jestliže hokejisté Havířova remizovali se Slavií, pak s ní neprohráli.
- Hokejisté Havířova remizovali.

Příklad 7: Člověk je mrtvý jen tehdy, když zemřel. Který z následujících výroků je pravdivý?

- Člověk je mrtvý.
- Jestliže je člověk mrtvý, pak zemřel.
- Jestliže člověk nezemřel, pak není mrtvý.
- Člověk nezemřel.
- Člověk je mrtvý a zemřel.

Příklad 8: Fotbalisté trénují v létě a v zimě. Který z následujících výroků je určitě nepravdivý?

- Fotbalisté netrénují v létě.
- Fotbalisté netrénují v zimě.
- Fotbalisté netrénují v zimě, ale trénují v létě.
- Fotbalisté trénují v zimě a netrénují v létě.
- Fotbalisté netrénují v létě nebo v zimě.

SAMOSTATNÝ ÚKOL 1

Doplňte:

- Výrok „email nedošel“ je negací výroku …
- Výrok „$a \neq b$“ je negací výroku …
- Výrok „není pravda, že dopis nebyl odeslán“ je negací výroku…
- Negujeme-li výrok „0,9 není celé číslo“, dostáváme výrok…
- Negujeme-li výrok „$a \neq b$“, dostáváme výrok…
- Konjunkce „x je sudé číslo a x je prvočíslo“ má hodnotu pravda, právě když x = …

- Výrok tvaru „jestliže A, pak B“ se nazývá…
- Druhý výrok v implikaci se nazývá…
- První výrok v implikaci se nazývá…
- Výrok „jestliže je doma, je na facebooku“ je pravdivý v těchto situacích:
    - Je doma a je na facebooku
    - …
    - …
- Implikace je nepravdivá jen v případě, že antecedent je… a konsekvent je…
- Zdůvodněte pravdivost výroku „jestliže x = 0, pak xy = 0“. Tento výrok je pravdivý, protože je vyloučeno, aby …
- Ekvivalence „a-b = 0, když a jen když a = b“ je pravdivá, protože není možné, aby … nebo …
- Kdyby ekvivalence „x<y, když a jen kdy x = y“ byla pravdivá, muselo by platit, že …

SAMOSTATNÝ ÚKOL 2

Nechť p, s, v jsou po řadě výroky „pozorování probíhá“, „pokus skončil“, „výsledky se vyhodnocují“. Máme tyto výroky:

- Jestliže pozorování probíhá, pak pokus neskončil
- Jestliže pokus skončil a výsledky se vyhodnocují, pak pozorování neprobíhá.
- Není pravda, že pokus skončil a výsledky vyhodnocují.
- Pozorování probíhá, právě když pokus neskončil a výsledky se vyhodnocují.
- Výsledky se nevyhodnocují ani pokus neskončil.
- Není pravda, že pozorování probíhá nebo výsledky se vyhodnocují.
- Není pravda, že výsledky se nevyhodnocují.

Zapište dané výroky formálně.

3 SÉMANTIKA VÝROKOVÉ LOGIKY

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 180 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY SÉMANTIKA VÝROKOVÉ LOGIKY

Rychlý náhled

Cílem třetího modulu je zavedení sémantiky výrokové logiky, používání a porozumění pojmům tautologie, kontradikce, splnitelnost, logické vyplývání.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY SÉMANTIKA VÝROKOVÉ LOGIKY

Klíčová slova

Sémantika výrokové logiky, pravdivost, logické vyplývání, tautologie

Denotační sémantika, sémantická doména

Interpretovat formuli znamená proces přiřazování významu formuli. V **denotační sémantice** je stanoveno, jakým způsobem se jednotlivé prvky jazyka výrokové logiky interpretují, tzn. pravidla interpretace dobře utvořené formule. Oborem sémantické interpretace výrokové logiky je $M = \{\text{true, false}\}$ – **sémantická doména**.

Valuace výrokových symbolů

Pravdivostní ohodnocení (valuace) výrokových symbolů je zobrazení v, které ke každému výrokovému symbolu přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny $\{1,0\}$, která kóduje množinu {pravda, nepravda}.

Model jazyka VL

Pravdivostní ohodnocení všech výrokových symbolů jazyka definuje **model jazyka výrokové logiky**.

Pravdivostní funkce

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce w, která ke každému pravdivostnímu ohodnocení výrokových symbolů přiřazuje pravdivostní hodnotu celé formule.

Pravdivostní hodnota elementární formule je rovna pravdivostní hodnotě výrokového symbolu, tj $w(p)_v = v(p)$ pro všechny výrokové proměnné p.

A	B	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*

3.1 Tabulková metoda interpretace formule

Je nejjednodušší metoda, je použitelná jen pro málo složité formule. Vyskytuje-li se v dané formuli *n* atomických výroků, příslušná tabulka má 2^n řádků. Velikost pravdivostní tabulky formule, která se vejde do jediného řádku, může značně přesáhnout velikost normální knihy.

Jaká bude pravdivost následujícího složeného výroku: *„Gen je biologická struktura nebo na Marsu je život.“* První výrok je pravdivý, je i výsledný složený výrok pravdivý.

Model formule

Je-li formule *A* vytvořena z *k* různých výrokových symbolů, pak existuje celkem 2^k různých ohodnocení (valuací) *v* formule *A*. Každé ohodnocení *v* výrokových symbolů obsažených ve formuli *A*, pro které je hodnota pravdivostní funkce rovna 1, tedy $w(A)_v = 1$, se nazývá **model** této **formule**.

DEFINICE 3-1 SPLNITELNÁ FORMULE

Df

Formule A výrokové logiky je **splnitelná**, je-li $w(A)v = 1$ pro nějaké ohodnocení *v,* neboli existuje aspoň jeden model formule *A*.

DEFINICE 3-2 TAUTOLOGIE

Df

Formule *A* výrokové logiky je **tautologií /logickým zákonem/**, je-li $w(A)_v = 1$ pro všechna ohodnocení v neboli každé ohodnocení je modelem formule *A*.

Skutečnost, že formule A je tautologií, označujeme zápisem $\models A$.

DEFINICE 3-3 KONTRADIKCE

Df

Formule A výrokové logiky je **kontradikcí**, jestliže neexistuje takové ohodnocení výrokových symbolů, pro které by hodnota pravdivostní funkce formule A byla rovna 1, tj. $w(A)_v = 0$ pro všechna ohodnocení v, formule nemá model.

DEFINICE 3-4SPLNITELNÁ MNOŽINA FORMULÍ

Df

Množina formulí M je **splnitelná**, jestliže existuje valuace v taková, že $w(A)_v = 1$ pro každou formuli $A \in M$. Takové ohodnocení v se pak nazývá **model množiny** $\boldsymbol{M}$**.**

Výrokově logické vyplývání

Formule A **výrokově logicky vyplývá** *z* množiny formulí M, značíme $M \models A$, jestliže A je pravdivá v každém modelu množiny M.

Uvedeme zde příklad na interpretaci tabulkovou metodou.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3-1

Interpretujte formuli tabulkovou metodou formuli:

$$((p \vee q) \rightarrow \text{true}) \mathbin{\&} \neg q$$

Řešení příkladu

		X	Y		
p	q	$p \vee q$	$X \rightarrow true$	$\neg q$	$Y \& \neg q$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Z uvedené tabulky je zřejmé, že daná formule není tautologií, není kontradikcí, je splnitelná.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3-2

Zjistěte, zda množina formulí $M = \{p \rightarrow r, q \rightarrow r, p \vee q\}$ je splnitelná.

Řešení příkladu

p	q	r	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	1
1	0	1	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	0	1
1	1	1	**1**	**1**	**1**

Daná množina *M* je splnitelná a jejími modely jsou ohodnocení odpovídající 1., 3. a 5. řádku.
Dále z tabulky vidíme, že z množiny *M* logicky vyplývá formule *r*. Pro každý model této množiny je r pravdivá.

$$p \rightarrow r,\ q \rightarrow r,\ p \vee q \models r$$

*

Mezi důležité tautologie výrokové logiky patří:

- Tautologie s jediným výrokovým symbolem:
  - $\models p \leftrightarrow p$
  - $\models p \vee \neg p$ *zákon vyloučeného třetího*
  - $\models \neg(p \,\&\, \neg p)$ *zákon sporu*
  - $\models p \leftrightarrow \neg\neg p$ *zákon dvojí negace*
- Algebraické zákony:

- $\vDash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ *komutativní zákon pro* $\vee$
- $\vDash (p \,\&\, q) \leftrightarrow (q \& p)$ *komutativní zákon pro* &
- $\vDash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ *komutativní zákon pro* $\leftrightarrow$
- $\vDash (p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ *asociativní zákon pro* $\vee$
- $\vDash (p \,\&\, q) \,\&\, r \leftrightarrow p \,\&\, (q \,\&\, r)$ *asociativní zákon pro* &
- $\vDash ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$ *asociativní zákon pro* $\leftrightarrow$
- $\vDash (p \vee q) \,\&\, r \leftrightarrow (p \,\&\, r) \vee (q \,\&\, r)$ *distributivní zákon pro* &,$\vee$
- $\vDash (p \,\&\, q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \,\&\, (q \vee r)$ *distributivní zákon pro* $\vee$, &

- Zákony pro implikaci:
  - $\vDash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ *zákon simplifikace*
  - $\vDash (p \,\&\, \neg p) \rightarrow q$ *zákon Dunse Scota*
  - $\vDash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ *zákon kontrapozice*
  - $\vDash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \& q) \rightarrow r)$ *spojování předpokladů*
  - $\vDash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ *na pořadí předpokladů nezáleží*
  - $\vDash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ *hypotetický sylogismus*
  - $\vDash ((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ *tranzitivita implikace*
  - $\vDash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ *Fregův zákon*
  - $\vDash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ *reductio ad absurdum*
  - $\vDash ((p \rightarrow q) \,\&\, (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$ *reductio ad absurdum*
  - $\vDash (p \& q) \rightarrow p$, $\vDash (p \& q) \rightarrow q$
  - $\vDash p \rightarrow (p \vee q)$, $\vDash q \rightarrow (p \vee q)$

- Zákony pro vzájemné převody funktorů:
  - $\vDash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p)$
  - $\vDash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \,\&\, q) \vee (\neg q \,\&\, \neg p)$
  - $\vDash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
  - $\vDash \neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \,\&\, \neg q)$ *Negace implikace*
  - $\vDash \neg(p \,\&\, q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ *De Morganovy zákony*
  - $\vDash \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \,\&\, \neg q)$ *De Morganovy zákony*

VĚTA 3-1 VĚTA O SUBSTITUCI

V

Nechť A je tautologie výrokové logiky utvořená z výrokových symbolů $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nechť formule B vznikne z tautologie A simultánním nahrazením výrokových symbolů $p_1, p_2, \ldots, p_n$ formulemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (tj. substitucemi A_i za p_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$). Potom formule B je rovněž tautologií.

Důkaz :

Uvažujme libovolné pravdivostní ohodnocení výrokových symbolů obsažených ve formuli B a nechť při tomto ohodnocení mají formule $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pravdivostní hodnoty $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Udělíme-li tyto hodnoty výrokovým symbolům $p_1, p_2, \ldots, p_n$ formule A, budou mít formule A i B stejnou pravdivostní hodnotu. Vzhledem k tomu, že A je tautologie, bude tato pravdivostní hodnota vždy 1.

Schéma tautologií

Věta o substituci umožňuje vytvořit k dané tautologii neomezeně mnoho dalších tautologií, které mají s danou výchozí tautologií společný tvar.
Nahradíme-li v tautologii výrokové symboly $p, q, r, \ldots$ metasymboly $A, B, C, \ldots$ dostaneme z konkrétní výchozí tautologie **schéma tautologií** daného tvaru.

Např. z tautologie $(p \wedge q) \to p$ získáme tautologické schéma $(A \mathbin{\&} B) \to A$

$(p \mathbin{\&} q) \to p$

$(q \mathbin{\&} q) \to q$, $(\neg p \mathbin{\&} q) \to \neg p$,

$[(p \leftrightarrow r) \mathbin{\&} \neg q] \to (p \leftrightarrow r)$ atd.

Ekvivalentní formule

Formule A, B jsou **ekvivalentní** (označujeme $A \Leftrightarrow B$), nejsou-li od sebe odlišitelné pomocí žádného ohodnocení prvotních proměnných obsažených v obou formulích, tj. dávají-li jejich interpretace při odpovídajícím ohodnocení prvotních proměnných stejné pravdivostní hodnoty.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3-3

Rozhodněte, které dvojice formulí jsou ekvivalentní. Své tvrzení odůvodněte.

- $\neg\neg\neg(A \vee B)$, $\neg\neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B)$
- $\neg(\neg(A \mathbin{\&} B))$, $\neg(\neg A \vee \neg B))$
- $(A \to (B \to A))$, $((A \to B) \to (B \to A))$

Řešení příkladu

- $\neg\neg\neg(A \vee B)$, $\neg\neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B)$
  Ano, formule jsou ekvivaletní (de Morganův zákon pro disjunkci)
- $\neg(\neg(A \mathbin{\&} B))$, $\neg(\neg A \vee \neg B))$
  Ano, formule jsou ekvivalentní (de Morganův zákon pro konjunkci)
- $(A \to (B \to A))$, $((A \to B) \to (B \to A))$
  Ne, formule nejsou ekvivalentní (první formule je tautologie, zatímco druhá nikoli).

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3-4

Nechť A, B jsou formule výrokové logiky. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Když A je tautologie, tak $\neg A$ je kontradikce.
b) Když A není splnitelná, tak $\neg A$ je tautologie.

c) Když A je kontradikce a B je tautologie, tak $A \vee B$ je tautologie.
d) Když $\neg A$ není splnitelná, tak A je kontradikce

Řešení příkladu

a) Pokud je A tautologie, je A vždy pravdivá. Negace A je pak vždy nepravda a tudíž $\neg A$ je kontradikce.
b) Pokud A není splnitelná, neexistuje její ohodnocení, které by mělo hodnotu true, proto negace A nebude mít ohodnocení false a tudíž je to tautologie.
c) Pokud je B tautologie, pak každé její ohodnocení je true. Z definice disjunkce platí, že pokud je jedna z formulí spojených disjunkcí pravdivá, pak i celá disjunkce je pravdivá.
d) Pokud $\neg A$ není splnitelná, pak všechna její ohodnocení jsou nepravdivá a tudíž A musela být pro všechna tato ohodnocení pravdivá.

Výsledkem tedy je, že pravdivá tvrzení jsou a), b) a c).

*

KONTROLNÍ OTÁZKA 2

1. Co nazýváme sémantikou výrokové logiky?
2. Co nazýváme tautologií, kontradikcí?
3. Kdy je formule splnitelná?
4. Kdy říkáme, že závěr vyplývá z daných předpokladů?

CVIČENÍ 2

Příklad 1: Slunce nesvítí právě tehdy, když je mlha. Je mlha. Který z následujících výroků je pravdivý.

- Slunce svítí.
- Je mlha a slunce nesvítí.
- Slunce nesvítí.
- Není mlha.
- Není mlha a slunce nesvítí.

Příklad 2: (A) Stát je založen na demokracii.
(B) Stát se nesmí vázat na ideologii.

Určete, který z následujících výroků je pravdivý.

- Stát je založen na demokracii a nesmí se vázat na ideologii.
- Stát není založen na demokracii a smí se vázat na ideologii.
- Stát je založen na demokracii právě tehdy, když se nesmí vázat na ideologii.
- Jestliže stát není založen na demokracii, pak se smí vázat na ideologii.
- Stát je založen na demokracii nebo se nesmí vázat na ideologii.

Příklad 3: Pro formuli *w* a interpretaci *I* určete *I(w)*

- $w = [\,\neg p \to (\,q \,\&\, \neg q\,)\,] \to p$
  - $I(p) = 1,\ I(q) = 0$
- $w = (\,p \vee q\,) \to (\,\neg p \,\&\, q\,)$
  - $I(p) = 1,\ I(q) = 1$
- $w = (\,p \to q\,) \to (\,q \to p\,)$
  - $I(p) = 0,\ I(q) = 1$

Příklad 4: Napište pravdivostní tabulku pro formuli *w* definovanou takto:

- $w = \ p \to (\,\neg p \to q\,)$
- $w = \ p \to (\,q \to r\,)$
- $w = [(\,p \to q\,) \to (\,\neg p \,\&\, q\,)\ ] \vee \neg q$
- $w = (\,p \to q\,) \to (\,q \to p\,)$
- $w = (\,p \to q\,) \to [\,\neg(\,p \vee q\,) \to \neg\,(\,r \vee p\,)\,]$

Příklad 5: Jsou následující formule tautologií

- $(\,A \to B\,) \to (\,A \vee B\,)$
- $(\,(\,A \to B\,) \to (\,\neg A \,\&\, B\,)\,) \vee \neg B$
- $(\,(\,A \to C\,) \vee (\,B \to C\,)\,) \to (\,A \to B\,)$
- $(\,\neg A \to (\,B \vee C\,)\,) \to (\,\neg B \to (\,A \to \neg C\,)\,)$

4 NORMÁLNÍ FORMY VÝROKOVÝCH FORMULÍ

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY NORMÁLNÍ FORMY VÝROKOVÝCH FORMULÍ

Cílem čtvrtého modulu je znalost převodu formulí na kanonické tvary formulí.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY NORMÁLNÍ FORMY VÝROKOVÝCH FORMULÍ

Normální tvary výrokových formulí, disjunktní normální formy formulí, konjunktivní normální formy formulí.

Klíčová slova

Někdy je výhodné pracovat s menším počtem logických spojek. Pro normální formy formulí výrokové logiky je charakteristické, že vystačí s trojicí logických spojek – negace, konjunkce, disjunkce. Mezi kanonické tvary paří disjunktivní normální tvar a konjunktivní normální tvar.

VĚTA 4-1

Každá výroková formule je ekvivalentní s jistou formulí, která je v disjunktivním normálním tvaru, a také s jistou formulí, která je v konjunktivním normálním tvaru.

Není pravda, že konjunktivní nebo disjunktivní normální tvar formule je určen jednoznačně, a nepomůže dodat “až na pořadí členů v konjunkcích a disjunkcích”.

Příklad je formule:

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$$

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$$

$$(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee p)$$

Literál, klauzule

Literál je výrokový symbol nebo jeho negace. Je-li p atomický výrok, tak **literálem** ne formuli ve tvaru p nebo $\neg p$. Disjunkce několika literálů se nazývá **klauzule**. **Elementární konjunkce** (EK) je konjunkce literálů. **Elementární disjunkce** (ED) je disjunkce literálů.

DNF

Disjunktivní normální forma obsahuje jen spojky negace, konjunkce a disjunkce. Výroková formule je v **disjunktní normální formě**, je-li disjunkcí několika podformulí (disjunktů) o nichž platí:

- Každý disjunkt je konjukcí konečně mnoha literálů (prvotních proměnných nebo jejich negací).
- V žádném disjunktu se sobě odpovídající pozitivní a negativní literály nevyskytují současně.

Úplná disjunktivní normální forma je taková, v níž každý disjunkt obsahuje literály všech proměnných formule.
Např. $a\&(b\vee\neg(\neg c\to a))$ je úplná disjunktivní normální forma následující formule $(a\&b\&\neg c)\vee(a\&b\&c)$.

DEFINICE 4-1 ÚED

Úplná elementární disjunkce (**ÚED**) dané množiny výrokových symbolů je elementární disjunkce, ve které se každý symbol z dané množiny vyskytuje právě jednou (buďto prostě nebo negovaný).

DEFINICE 4-2 DNF

Disjunktivní normální forma (**DNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar disjunkce elementárních konjunkcí.

DEFINICE 4-3 UDNF

Úplná disjunktivní normální forma (**UDNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar disjunkce úplných elementárních konjunkcí.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4-1

Převeďte do úplné disjunktivní normální formy formuli $(a\to b)\vee(\neg a\&c)$.

Řešení příkladu

				X	Y	
a	b	c	$\neg a$	$a \rightarrow b$	$\neg a \& c$	$X \vee Y$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

$$(\neg a \& \neg b \& \neg c) \vee (\neg a \& \neg b \& c) \vee (\neg a \& b \& \neg c) \vee ((\neg a \& b \& c) \vee (a \& b \& \neg c) \vee (a \& b \& c)$$

*

Každá výroková formule, která není kontradikcí, je ekvivalentní jisté formuli v disjunktivní normální formě.

Dvě úplné disjunktivní normální formy téže formule se mohou lišit nejvýše pořadím složek v téže disjunkci nebo konjunkci.

Disjunktivní normální forma kontradikce je prázdná disjunkce.

Výroková formule je v konjunktivní normální formě, je-li konjunkcí několika klauzulí(konjunktů) o nichž platí:

- Každý konjunkt je disjunkcí konečně mnoha literálů.
- V žádném konjunktu se sobě odpovídající pozitivní a negativní literály nevyskytují současně.
- Úplná konjunktivní normální forma je taková v níž každá klauzule obsahuje literály všech proměnných formule.

DEFINICE 4-4 UÉK

Úplná elementární konjunkce (ÚEK) dané množiny výrokových symbolů je elementární konjunkce, ve které se každý symbol z dané množiny vyskytuje právě jednou (buďto prostě nebo negovaný).

DEFINICE 4-5 KNF

Konjunktivní normální forma (**KNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar konjunkce elementárních disjunkcí.

DEFINICE 4-6 UKNF

Úplná konjunktivní normální forma (**UKNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar konjunkce úplných elementárních disjunkcí.

ÚDNF a UKNF dané formule nazýváme **kanonickými (standardním) tvary** této formule.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4-2

Najděte normální úplnou konjunktivní formu formule $(\neg a\rightarrow c)\rightarrow(b\&(\neg c\rightarrow a))$.

Řešení příkladu

Začátek stejný, jako bychom hledali úplnou disjunktivní normální formu, ale ne dané formule, ale její negace, nalezneme ji a pak opět znegujeme a využitím De Morganových pravidel převedeme do úplné konjunktivní normální formy formule původní.

			X	Y	Z		
a	b	c	$\neg a\to c$	$\neg c\to a$	$b\&Y$	$X\to Z$	$\neg(X\to Z)$
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Úplná disjunktivní normální forma je $(\neg a\&\neg b\&c)\vee(a\&\neg b\&\neg c)\vee(a\&\neg b\&c)$.
Její negace $(a\vee b\vee\neg c)\&(\neg a\vee b\vee c)\&(\neg a\vee b\vee\neg c)$ je UKNF původní formule.
Tento tvar formule lze zjednodušit:

$(a\vee b\vee\neg c)\&(\neg a\vee b\vee c)\&(\neg a\vee b\vee\neg c)$
$((a\vee\neg c)\&(\neg a\vee c)\&(\neg a\vee\neg c))\vee b$
$((a\vee\neg c)\&(\neg a\vee(c\&\neg c)))\vee b$
$((a\vee\neg c)\&(\neg a\vee false))\vee b$
$((a\vee\neg c)\&\neg a))\vee b$
$((a\&\neg a)\vee(\neg c\&\neg a))\vee b$
$(false\vee(\neg c\&\neg a))\vee b$
$(\neg c\vee b)\&(\neg a\vee b)$

*

Stejného výsledku lze dosáhnou také přímo úpravami, tj. náhradou výrokových spojek jinými spojkami, odpovídajícími této formě.

Postup:

- Přepis spojky $\leftrightarrow$ spojkami $\to$ a $\&$

  $\models(X\leftrightarrow Y)\Leftrightarrow(X\to Y)\&(Y\to X)$

- Přepis spojky $\rightarrow$
  podle $\models(X\rightarrow Y)\Leftrightarrow(\neg X\vee Y)$

Použití dle potřeby De Morganových pravidel a pravidel distributivity.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4-3

Pomocí úprav sestavte DNF formule: $(a\vee b)\rightarrow(a\&\neg b)$.

Řešení příkladu

Implikaci vyjádříme jako disjunkci předpokladu a závěru:

$$\neg(a\vee b)\vee(a\&\neg b).$$

Použijeme de Morganův zákon pro disjunkci:

$$(\neg a\&\neg b)\vee(a\&\neg b)$$

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4-4

Pomocí úprav sestavte KNF formule: $(\neg a\rightarrow c)\rightarrow(b\&(\neg c\rightarrow a))$.

Řešení příkladu

$(\neg a\rightarrow c)\rightarrow(b\&(\neg c\rightarrow a))$
$\neg(a\vee c)\vee(b\&(c\vee a))$
$(\neg a\&\neg c)\vee(b\&(c\vee a))$
$((\neg a\&\neg c)\vee b)\&((\neg a\&\neg c)\vee(c\vee a))$
$((\neg a\&\neg c)\vee b)\&(\neg(a\vee c)\vee(c\vee a))$
$((\neg a\&\neg c)\vee b)\&true$
$(\neg a\vee b)\&(\neg c\vee b)$

*

VĚTA 4-2

Každou formuli, která není kontradikcí, lze vyjádřit ve tvaru UDNF.

Důkaz :

Důkaz je konstruktivní – stačí ukázat, jak se pomocí tabulky UDNF vytvoří.

VĚTA 4-3

Každou formuli, která není tautologií, lze vyjádřit ve tvaru UKNF.

Důkaz :

Důkaz je konstruktivní - ukážeme, jak se požadovaný tvar nalezne.

DEFINICE 4-7 FUNKČNĚ ÚPLNÁ MNOŽINA LOGICKÝCH SPOJEK

Množina logických spojek je **funkčně úplná**, jestliže lze pomocí této množiny nahradit (přepisem formulí na formule ekvivalentní) všechny zbývající logické spojky.

VĚTA 4-4

Následující soustavy pravdivostních funkcí jsou funkcionálně úplné:

- pravdivostní funkce příslušející funktorům $\{\neg, \&, \vee\}$,
- pravdivostní funkce příslušející funktorům $\{\neg, \&\}$ nebo $\{\neg, \vee\}$,
- pravdivostní funkce příslušející funktorům $\{\neg, \rightarrow\}$.

Množina spojek $\{\&, \vee\}$ není úplná.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4-5

Alchymista je zavřen ve vězení, protože se mu stále nedaří přeměna olova ve zlato. Dostane pět motáků, z nichž první čtyři obsahují následující výroky:

p – Podaří se ti přeměna olova ve zlato

q – 1.4. bude tvůj švagr jmenován prokurátorem

r – Po 1.4. bude soud.
První moták zní: $p \& q \& r$
Druhý moták zní: $p \& q \& \neg r$
Třetí moták zní: $\neg p \& \neg q \& r$
Čtvrtý moták zní: $\neg p \& \neg q \& \neg r$
Pátý moták zní: Alespoň jeden z předchozích motáků je pravdivý.

Otázka: Co se vlastně nebohý alchymista dozvěděl?.

Řešení příkladu

$(p \& q \& r) \vee (p \& q \& \neg r) \vee (\neg p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& \neg q \& \neg r)$.
Máme tedy nalézt formuli, k níž je tato UDNF ekvivalentní.
Dostaneme:
$(p \& q \& r) \vee (p \& q \& \neg r) \vee (\neg p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& \neg q \& \neg r) \Leftrightarrow (p \& q) \& (r \vee \neg r) \vee (\neg p \& \neg q) \& (r \vee \neg r) \Leftrightarrow (p \& q) \vee (\neg p \& \neg q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

Odpověď: Podaří se ti přeměna olova ve zlato tehdy a jen tehdy, když bude 1.4. tvůj švagr jmenován prokurátorem.

*

KONTROLNÍ OTÁZKA 3

1. Jak převádíme formule do disjunktivní, konjunktivní normální formy?
2. Kdy je množina spojek funkcionálně úplná?

CVIČENÍ 3

Příklad 1: Negujte slovně i formálně

- Když píšu program, přemýšlím, jestli funguje.
- Program funguje právě tehdy, když je správně napsaný.
- Jestliže nevěnuji řešení dostatek času, je výsledek nejistý a musím začít znovu.
- Neumím programovat v Javě, ale umím syntaxi C++.
- Petr a Pavel věří v budoucnost IT, Tomáš a Emil kroutí hlavou.
- Budete-li mít dobré výsledky, nebudete mít problém ve škole a budete v pohodě.

Příklad 2: Následující tvrzení vyjádřete jiným (ekvivalentním) způsobem.

- Není-li mokro, nepršelo.
- Každý žvejk je samec.
- Žádný učený z nebe nespadl.
- Není nikdo, kdo by skákal z mostu a jedl olivy.
- Existují politici, kteří v mládí kouřili trávu.

Příklad 3: Ověřte splnitelnost množiny formulí. (pomocí tabulky)

- $T= \{(p\to q)\&r,\ q\ \&\ r,\ r\to s,\ p\ \&\ \neg s\}$
- $F=\{(p\ \&\ q\ \&\ r)\to[(s\ \&\ \neg t)\vee(\neg s\ \&\ t)],\ q\ \&\ r,\ \neg s,\ \neg t,\ p\}$
- $G=\{q\to r,\ r\to p,\ q\to p\}$
- $Y=\{q\to r,\ r\to p,\ \neg(q\to p)\}$
- $Z=\{(p\vee q)\leftrightarrow r,\ r,\ \neg p,q\}$

Příklad 4: U následujících formulí rozhodněte, o jakou formuli se jedná (splnitelná, tautologie, kontradikce). Využijte ekvivalentních úprav formulí

- $(q\&p)\to[(p\to q)\ \&\ (\neg p\vee q)]$
- $[(p\to q)\ \&\ (q\vee p)]\to(\neg p\vee q)$

Příklad 5: Určete UDNF (pomocí tabulky)

- $[p\&(p\to q)]\to[(\neg p\vee q)\&(q\vee p)]$
- $[(p\to q)\ \&\ (\neg r\to\neg q)]\&\neg r\&p$
- $(a\to b)\to c$

Příklad 6: Vyjádřete v úplné konjunktivní normální formě (pomocí tabulky)

- $(a\leftrightarrow b)\to(\neg a\&c)$
- $[p\&(p\to q)]\to[(\neg p\vee q)\&(q\vee p)]$

Příklad 7: Vyjádřete formuli v DNF pomocí úprav

- $(a\leftrightarrow b)\to(c\vee d)$

5 SPLNITELNOST A PLATNOST, LOGICKÝ DŮSLEDEK

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY SPLNITELNOST A PLATNOST, LOGICKÝ DŮSLEDEK

V pátém modulu se zabíráme splnitelností, platností a dedukcí ve výrokové logice.

Rychlý náhled

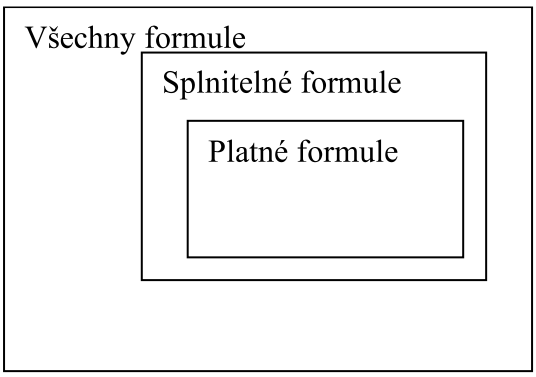
KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY SPLNITELNOST A PLATNOST, LOGICKÝ DŮSLEDEK

Splnitelnost, platnost, dedukce ve výrokové logice.

Klíčová slova

Všechny atomické formule obsahující pouze prvotní proměnné jsou splnitelné. Atomická formule tvořená logickou konstantou true je tautologie, zatímco false je kontradikce neboli nesplnitelná atomická formule. Kontradikce jsou nesplnitelné neboli nekonsistentní formule. Platné formule jsou zároveň formulemi splnitelnými neboli konsistentními.

Formule A je platná právě tehdy je-li $\neg A$ nesplnitelná. Toho se využívá při důkazech platnosti formulí. Převedeme na problém nesplnitelnosti její negace. Hovoříme o tak zvané proceduře popření.



Pro rozhodování platnosti nebo splnitelnosti formule A se hovoří často o rozhodovacích algoritmech. Přitom se zde rozumí rozhodovací procedura, která skončí odpovědí ano, patří-li formule A do množiny platných (splnitelných) formulí, resp. skončí odpovědí ne, jestliže A do této množiny nepatří.

Pro rozhodování splnitelnosti výrokových formulí můžeme použít:

- Rozhodovací algoritmy
- Rozhodovaní sémantickými stromy
- Quineův rozhodovací algoritmus
- Nepřímé důkazy logické platnosti implikací
- Rozhodování tablovou metodou
- Rozhodování rezoluční metodou

Rozhodovací procedura splnitelnosti řeší zároveň i problém rozhodovací procedury platnosti formule, neboť formule je platná, právě když její negace je nesplnitelná.

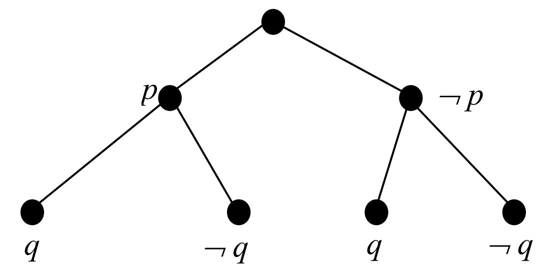
5.1 Rozhodování pomocí sémantického stromu

V sémantickém stromu je každá proměnná p výrokové formule zastoupena dvojicí literálů.

literály

- Pozitivní literál proměnné zastupuje jeho pravdivostní hodnotu true.
- Negativní literál $\neg p$ zastupuje jeho pravdivostní hodnotu false.
- Strom složený z hran a uzlů tvoří systém větví procházejících uzly vždy od kořene až po list.

Příklad sémantického stromu formule, která má dvě proměnné p a q vidíme na obrázku: Obrázek 1



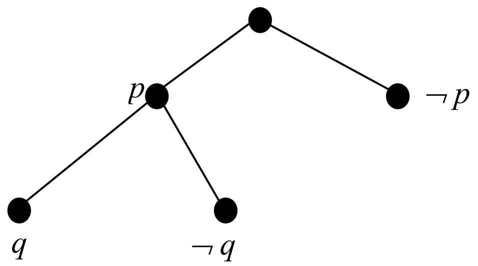
Obrázek 1Úplný sémantický strom formule

Úplný sémantický strom formule

U úplného sémantického stromu z každého uzlu sémantického stromu vycházejí právě dvě hrany příslušející pozitivnímu a negativnímu literálu téže výrokové proměnné. Každá větev úplného sémantického stromu od kořene až k listu představuje jedno z možných ohodnocení atomických proměnných vystupujících ve formuli. Koncovému listu pak přísluší výsledek interpretace formule při tomto ohodnocení. Žádná z větví neobsahuje více než jeden výskyt literálu téže proměnné.

Úplný sémantický strom zachycuje v případě konečné formule všechna možná ohodnocení jejích proměnných. Je-li množina proměnných nekonečná, je nekonečný i odpovídající sémantický strom.

Na obrázku Obrázek 2 vidíme neúplný sémantický strom.



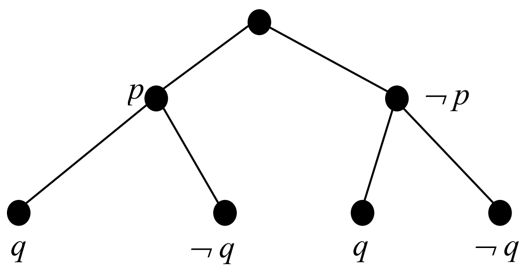
Obrázek 2 Neúplný sémantický strom formule

Pro zjištění, zdali je formule splnitelná zkoušíme všechna možná ohodnocení stejně jako u pravdivostní tabulky, až do té doby, než nalezneme větev, která vede k výsledku true.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-1

Sestavte sémantický strom formule a rozhodněte o splnitelnosti formule $p\&(\neg q \vee \neg p)$.

Řešení příkladu



Sledování nejlevější větve nám dává hodnotu true pro p. Na druhé hladině true pro q. Takže tato větev nám dává hodnotu false.
Další větev pro p true a pro q false. Teď dostáváme hodnotu true. Dál nemusím pokračovat, daná formule je splnitelná.
Je daná formule platná? Není, museli bychom u všech větví dostat true anebo dokazovat nesplnitelnost formule, která je její negací.

*

5.2 Quineův algoritmus

Základní myšlenka daného algoritmu je, že sledování větve sémantické stromu vždy končí tam, kde pokračování v průchodu větví již nevede ke změně výsledné pravdivostní hodnoty.

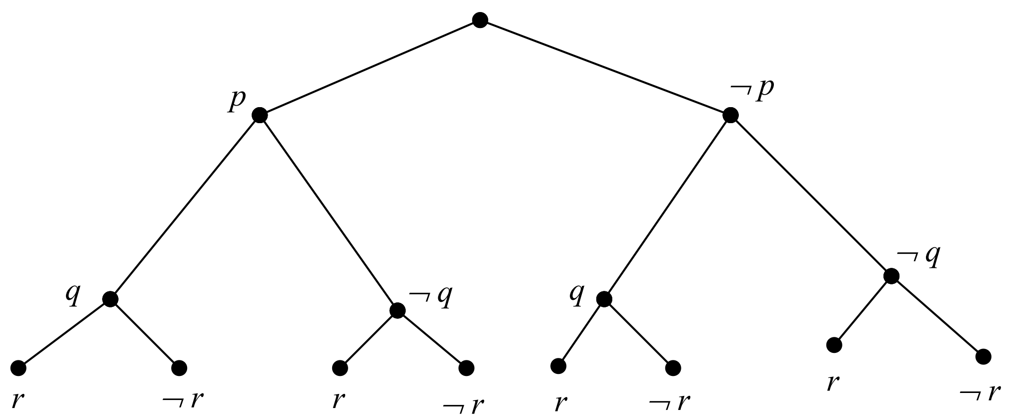
U předchozí formule $p\&(\neg q \vee \neg p)$ bychom skončili u pravé větve hned.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-2

Sestavte sémantický strom a rozhodně pomocí Quineova algoritmu, zdali formule je splnitelná: $(((p\&q)\to r)\&(p\to q))\to(p\to r)$.

Řešení příkladu

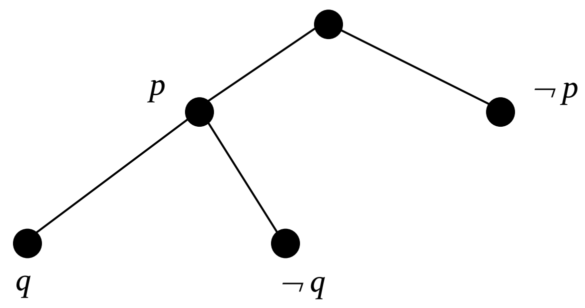
Formule obsahuje tři prvotní proměnné, uspořádání v sémantickém stromu není podstatné. Vezmeme abecední pořadí.



Při sledování nejlevější větve sémantického stromu formule má p na první hladině true, což vede k redukci původní formule na $((q\to r)\&q)\to r$, na druhé hladině, kdy i q je true, se formule dále redukuje na $r\to r$, což je vždy true.
Při volbě false pro q vede redukce na druhé hladině k formuli $false\to r$, což je rovněž vždy *true*.
Pravá větev, kdy p je *false*, vede na první hladině k redukci formule $((false\to r)\&true)\to true$, která je vždy true bez ohledu na ohodnocení q a r.
Formule je tedy platná

*

Pokud jsme aplikovali Quineův algoritmus na daný příklad se prohledávání úplného sémantické stromu o třech hladinách zredukovalo na prohledávání neúplného stromu z následujícího obrázku.



Obrázek 3Neúplný sémantický strrom pro formuli z příkladu 5-2

5.3 Reductio ad absurdum

Redukční algoritmus rozhodování logické platnosti formule je v podstatě jejím nepřímým důkazem. Algoritmus je aplikovatelný především na formule obsahující řadu výskytů spojky implikace.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-3

Dokažte platnost rezolučního principu:

$$\frac{a \vee b, \neg b \vee c}{a \vee c}$$

Řešení příkladu

$A = ((a \vee b) \& (\neg b \vee c)) \rightarrow (a \vee c)$

Předpoklad, že výsledek interpretace formule A je nepravdivý, musí tedy platit

$I(A) = false$

1. $I(((a \vee b) \& (\neg b \vee c))) = true$
2. $I(a \vee c) = false$

Analýza ze 2. $I(a) = false$

$I(c) = false$

$I(((a \vee b) \& (\neg b \vee c))) = false$ ve sporu s 1.

*

Sémantická korektnost formální důkazové metody – každá pomocí ní dokazatelná formule příslušného jazyka je logicky platná. Sémantická úplnost formální důkazové metody – lze-li pomocí ní dokázat všechny logicky platné formule příslušného jazyka.

Přímé a nepřímé důkazy logických důsledků

Přímým postupem je formule postupnými kroky odvozována z výchozích předpokladů pomocí daných pravidel.

Nepřímé postupy spočívají v tom, že formule, která má být z daných předpokladů dokázána je popřena, z čeho pak postupnými kroky odvozování vyplyne spor. Při důkazu logické platnosti formule postupují nepřímé důkazové metody tak, že dokazují nesplnitelnost negace této formule.

Nejužívanější typy nepřímých důkazových postupů jsou:

- Tablový důkaz
- Rezoluční důkaz

Oba dva se opírají o následující, formule je logickým důsledkem dané množiny předpokladů, právě když je množina formulí sestávající ze všech daných předpokladů a negace předpokládaného závěru nesplnitelná.

5.4 Tablová metoda

Tablová metoda je jistou modifikací využití formačního stromu, znázornění postupného rozkladu formule až na její literály. Je především vhodná pro formule s hlavní spojkou $\&$, stejně jako spojkou podformulí. V případě, že je ve formuli $\vee$, pomocí de Morganových pravidel, u $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$ lépe použít nepřímého důkazu.

α - pravidla (pravidla pro spojku $\&$) obsahuje pravidla přepisu výrokových spojek $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vyskytujících se v dané formuli na spojku $\&$.

α	α_1	α_2
$\neg\neg A$	A	
$A_1 \& A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftarrow A_2)$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

β-pravidla (pravidla pro spojku $\vee$) obsahuje pravidla přepisu výrokových spojek $\neg$, $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vyskytujících se v dané formuli na spojku $\vee$.

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \& B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftarrow B_2$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-4

Pomocí sémantického tabla rozhodněte o splnitelnosti formule: $(p \vee q) \& (\neg p \& \neg q)$.

Řešení příkladu

$$(p \vee q) \& (\neg p \& \neg q)$$

$$\downarrow$$

$$p \vee q, \neg p, \neg q$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$p, \neg p, \neg q \qquad\qquad q, \neg p, \neg q$$

$$\boldsymbol{X} \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{X}$$

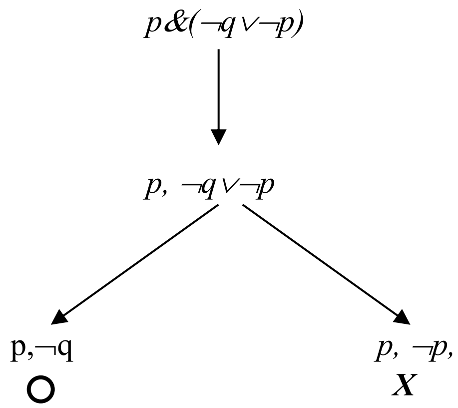
Na začátku jsme použili alfa pravidlo pro konjunkci a jako druhé jsme použili beta pravidlo pro disjunkci. Rozložili jsme danou formuli až na jednotlivé literály. Pokud se v listu vyskytuje pozitivní a negativní literál stejné proměnné, považujeme danou větev za uzavřenou a označíme křížkem. Pokud se v listu nevyskytují navzájem opačné větve označujeme danou větev za otevřenou a označíme kolečkem. Stačí, aby alespoň jedna větev byla otevřená a formule je splnitelná. Pozor, pokud by každá z větví byla označená kolečkem, neznamená to, že daná formule je tautologií, pouze to znamená, že je splnitelná. Pokud bychom chtěli dokázat, že daná formule je tautologií, museli bychom použít tablovou metodu na negaci dané formule a dokázat, že její negace je nesplnitelná, kontradikcí a tudíž původní nenegovaná formule je tautologií.
V našem příkladu jsou obě dvě větve uzavřené. Daná formule není splnitelná, je nesplnitelná, tzn. kontradikcí.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-5

Pomocí sémantického tabla rozhodněte o splnitelnosti formule: $p\&(\neg q \vee \neg p)$.

Řešení příkladu



U této formule nejdříve použijeme alfa pravidlo pro konjunkci a poté beta pravidlo pro disjunkci.
Po rozkladu až na jednotlivé literály zjišťujeme, že první větev je otevřená, tzn. , že daná formule je splnitelná.

*

5.5 Dedukce ve výrokové logice

Výroková logika představuje model lidského vnímání světa, myšlení. Vyjádření, co z čeho vyplývá, schopnost skutečného lidského myšlení nazýváme schopností dedukce.

Každé ohodnocení proměnných formule *A*, které vede k její interpretaci hodnotou true, představuje model formule *A*. Model množiny formulí *U* představuje každé takové ohodnocení prvotních proměnných vyskytujících se v *U*, které dává pro všechny formule množiny *U* výsledek interpretace *true*.

Problém dedukce

Problém rozhodování, zdali určitá formule *A* vyplývá z množiny formulí *U*, se nazývá problém dedukce.

Tautologický důsledek

Ve výrokové logice hovoříme o formuli *A*, vyplývající z množiny formulí *U* jako (tauto)logickém důsledku *U*. Množina formulí *U* je v tomto pojetí speciální množinou předpokladů (speciálních axiómů), na níž je postavena určitá teorie.

DEFINICE 5-1 TAUTOLOGICKÝ DŮSLEDEK

Df

Formule A **je tautologickým důsledkem** množiny U formulí, platí-li pro všechny modely množiny formulí U, že formule A je v nich splněna (true), označujeme $U \models A$ nebo formou zlomku:

$$\frac{U}{A}$$

Potom teorii lze definovat takto: Je dána množina U výchozích formulí – speciálních axiómů (předpokladů) teorie. Množinu $T(U)$ se nazývá **teorií** vybudovanou na U, je-li každý prvek množiny $T(U)$ formulí, která je logickým důsledkem U platí tedy $T(U) = \{A \mid U \models A\}$.

Teorie vybudovaná na množině formulí

Problém dedukce se většinou formuluje takto, že z množiny hypotéz $\{H_1, H_2, .. H_n\}$ vyplývá závěr Z.

Množina hypotéz $U = \{H_1, H_2, .. H_n\}$ tedy tvoří speciální axiómy teorie a Z je jejím tautologickým důsledkem:

$\{H_1, H_2, .. H_n\} \models Z$.

Je-li $U \models Z$, hovoříme o platnosti formule Z ve všech modelech množiny formulí U.

Následující věta nám říká, že problém dedukce lze též vyjádřit jako tautologii:

$$\models (H_1 \& H_2 \& \dots \& H_n) \rightarrow Z$$

VĚTA 5-1

V

Nechť $H_1, H_2, .. H_n$ jsou výrokové formule. Jestliže Z je tautologickým důsledkem množiny formulí $\{H_1, H_2, .. H_n\}$, pak formule $(H_1 \& H_2 \& .. \& H_n) \rightarrow Z$ je tautologie.

Důkaz :

Nepřímý

Existuje-li ohodnocení takové, že $I((H_1 \& H_2 \& .. \& H_n) \rightarrow Z) \Leftrightarrow false$, pak pro toto ohodnocení musí platit $I(Z) \Leftrightarrow false$ a zároveň $I(H_1 \& H_2 \& \dots \& H_n) \Leftrightarrow true$. To však je ve sporu s předpokladem věty.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-6

Ukažte, že formule $y \vee z$ je tautologickým důsledkem formulí $x \vee y$ a $\neg x \vee z$.

Řešení příkladu

x	y	z	$x \vee y$	$\neg x \vee z$	Modely	$y \vee z$	
0	0	0	0	1	-	0	
0	0	1	0	1	-	1	
0	1	0	1	1	M	1	*
0	1	1	1	1	M	1	*
1	0	0	1	0	-	0	
1	0	1	1	1	M	1	*
1	1	0	1	0	-	1	
1	1	1	1	1	M	1	*

Formule $y \vee z$ je splněna pro všechny modely množiny předpokladů teorie $\{x \vee y, \neg x \vee z\}$. Dané řádky jsou označené hvězdičkou.

*

Za množinu předpokladů teorie výrokové logiky lze považovat libovolnou neprázdnou splnitelnou množinu U formulí výrokové logiky. Kdyby tato množina formulí byla nesplnitelná, neměla by model a proto by jejím logickým důsledkem byla libovolná formule (zároveň i její negace), což by vedlo ke sporné teorii.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-7

Ukažte, zdali z daných předpokladů vyplývá daný závěr:
Když se ohlédl, spatřil ji. Spatřil ji. ⊨ Ohlédl se.

Řešení příkladu

$o \to s,\ s \models o$

o	s	o→s	Modely	o
0	0	1	-	0
0	1	1	M	0
1	0	0	-	1
1	1	1	M	1

Nejdříve určíme model. Ve druhém řádku tabulky je množina předpokladů splněna, ale závěr nikoliv. Z daných předpokladů nevyplývá daný závěr.

*

Formule je logickým důsledkem předpokladů. Platí, že pro každý model množiny formulí, je formule splněna.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5-8

Kdyby jí to neřekl, nikdy by na to nepřišla. Kdyby se nebyla zeptala, nebyl by jí to řekl. Přišla na to. ⊨ Musela se zeptat.

Řešení příkladu

$\neg r \to \neg p,\ \neg z \to \neg r,\ p \models z$

p	r	z	$\neg r$	$\neg p$	$\neg z$	$\neg r \to \neg p$	$\neg z \to \neg r$	modely	z
0	0	0	1	1	1	1	1		0
0	0	1	1	1	0	1	1		1
0	1	0	0	1	1	1	0		0
0	1	1	0	1	0	1	1		1
1	0	0	1	0	1	0	1		0
1	0	1	1	0	0	0	1		1
1	1	0	0	0	1	1	0		0
1	1	1	0	0	0	1	1	M	1

*

KONTROLNÍ OTÁZKA 4

1. Jakým způsobem zjišťujeme splnitelnost, platnost ve výrokové logice?
2. Kdy formule je tautologickým důsledkem množiny formulí?

CVIČENÍ 4

Příklad 1: Zjistěte, zda z premis vyplývá závěr. (pomocí tabulky)

- Petr je malý nebo chytrý.

  Petr je malý.
  Z: Petr je malý a chytrý.

- Jestliže hraji hokej, mám na sobě dres.

  Hraji hokej.
  Z: Mám na sobě dres.

- Jestliže hraji hokej, mám na sobě dres.

  Mám na sobě dres.
  Z: Hraji hokej.

- Nejsem sportovec, ale jsem právník.

  Jsem historik.
  Z: Jsem právník a historik.

Příklad 2: Zjistěte, zda platí logické vyplývání, tedy zda platí $T \models \Phi$

- $T = \{(p \to q) \,\&\, r,\ q \,\&\, r,\ r \to s\}$

  $\Phi = \neg(p \,\&\, \neg s)$
- $T = \{(p \,\&\, q \,\&\, r) \to [(s \,\&\neg\, t) \vee (\neg s \,\&\, t)], q \,\&\, r,\ \neg s,\ \neg t\}$

  $\Phi = \neg p$
- $T = \{p \,\&\, q,\ \neg p \ \to q\}$

  $\Phi = q$

Příklad 3: Ověřte platnost úsudku (pomocí úprav):

- Nefunguje-li program jak má, je chyba v programu nebo není.

  Je-li chyba v programu, musím se poradit se svým cvičícím.
  Program funguje.
  Z: Nefunguje-li program, musím se poradit se svým cvičícím.

Příklad 4: Převeďte do symbolického jazyka a ověřte platnost úsudků:

- Neběží-li motor, je vada v motoru nebo nejde proud.

  Je-li vada v motoru, je třeba volat opraváře.
  Proud jde.
  Z: Neběž-li motor, je třeba volat opraváře.
- Není pravda, že uchazeč umí anglicky i německy.

  Uchazeč neumí anglicky.
  Z: Uchazeč neumí německy.
- Je-li pan X otcem Jirky a má krevní skupinu A a také Jirkova matka má skupinu A, pak Jirka má některou z krevních skupin A nebo 0

  Pan X i Jirkova matka mají krevní skupinu A.
  Jirka nemá krevní krevní skupinu A.
  Jirka nemá krevní skupinu 0.
  Z: Pan X není otcem Jirky.
- Jestliže studuji, dosáhnu dobrého postavení.

  Jestliže nestuduji, užívám si.
  Z: Buď dosáhnu dobrého postavení nebo si užívám.

Příklad 5: Pomocí sémantického tabla dokažte, že formule je tautologie.

- $(p \,\&\, (p \to q)) \to ((\neg p \vee q) \,\&\, (q \vee p))$

Příklad 6: Pomocí sémantického tabla rozhodněte, jaká je formule.

- $(p \vee q) \to (\neg p \,\&\, q)$

Příklad 7: Najděte rezolventy

- $x \vee \neg y \vee z$

  $\neg x \vee z \vee \neg t$
- $a \vee b$

  $\neg b \vee c$
- $p \vee q \vee r \vee \neg s$

  $p \vee q \vee s \vee \neg t$

6 REZOLUČNÍ PRINCIP

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY REZOLUČNÍ PRINCIP

Cílem šestého modulu je rezoluční princip a jeho aplikace pro důkaz, že formule je tautologie, pro důkaz správnosti úsudku.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY REZOLUČNÍ PRINCIP

Rezoluční princip, klausulární forma, princip vyvracení, rezoluční pravidlo.

Klíčová slova

Rezoluční metodou ve výrokové logice (automatické dokazování) dokazujeme **nesplnitelnost** dané formule (resp. množiny formulí) a je uplatnitelná na formuli v **konjunktivní normální formě (KNF).**

Využívá dvou jednoduchých tvrzení:

- Je-li formule A tautologie, pak formule $\neg A$ je kontradikce a naopak. (Důkaz zřejmý.)

  Symbolicky:

  $$\models A \text{ právě když } \neg A \models$$

- Rezoluční pravidlo odvozování: Nechť l je literál.
  Z formule $(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l)$ odvoď $(A \vee B)$.
  Zapisujeme:

  $$\frac{(A \vee l) \ \& \ (B \vee \neg l)}{(A \vee B)}$$

Dané pravidlo není přechodem k ekvivalentní formuli, ale zachovává **splnitelnost.**

Důkaz: Nechť je formule $(A \vee l)$ **&** $(B \vee \neg l)$ splnitelná, tedy pravdivá při nějaké valuaci v. Pak při této valuaci musí být pravdivé oba disjunkty (tzv. klausule) $A \vee l$ a $B \vee \neg l$. Nechť je dále $v(l) = 0$. Pak $w(A) = 1$ a tedy $w(A \vee B) = 1$. Nechť je naopak $v(l) = 1$. Pak $w(\neg l) = 0$ a musí být $w(B) = 1$, a tedy $w(A \vee B) = 1$. V obou případech je tedy formule $A \vee B$ pravdivá v modelu původní formule, a tedy splnitelná.

Uvědomme si, že důkaz byl proveden pro jakýkoli model *v*. Jinými slovy platí, že pravidlo zachovává i pravdivost:

$$(\mathbf{A} \vee l) \mathbin{\&} (\mathbf{B} \vee \neg l) \vDash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}).$$

Klausule

Jednotlivé disjunkty v KNF nazýváme **klausule,** a proto je KNF také nazývána **klausulární forma.**

Pokud budeme chtít dokázat, že **formule A je tautologie** budeme postupovat takto:

- Formuli A znegujeme a převedeme do KNF.
- Nyní uplatňujeme pravidlo rezoluce.

Pokud při postupném "vyškrtávání" literálů s opačným znaménkem dospějeme k prázdné klausuli, je tato evidentně nesplnitelná, tedy také původní $\neg A$ je nesplnitelná a A je tautologie.

Chceme-li dokázat **správnost úsudku** $P_1,\dots,P_n \vDash Z$, postup je následující

- Závěr Z znegujeme a dokazujeme, že množina $\{P_1,\dots,P_n, \neg Z\}$ je sporná.

Jinými slovy, dokazujeme, že formule $(P_1 \mathbin{\&} P_2 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} P_n) \rightarrow Z$ je tautologie, tedy že její negace $P_1 \mathbin{\&} P_2 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} P_n \mathbin{\&} \neg Z$ je kontradikce.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6-1

Ověřte platnost úsudku $p \rightarrow q,\ r \vee \neg q,\ \neg r\ /\ \neg p$.

Řešení příkladu

Jednotlivé klausule zapíšeme pod sebe (s negovaným závěrem) a uplatňujeme pravidlo rezoluce:

1. $\neg p \vee q$
2. $r \vee \neg q$
3. $\neg r$
4. p

--------------		*alternativně:*	
5. q	*(1. a 4)*	*5'* $\neg p \vee r$	*(1.a 2.)*
6. r	*(2. a 5.)*	*6'* $\neg p$	*(5'a 3.)*
7. *false*	*(3. a 6.)*	*7' false*	*(6' a 4)*

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6-2

Ověřte platnost následujícího úsudku h, ¬h ∨p∨q, ¬p∨c, ¬q ∨c ⊨ c.

Řešení příkladu

$\{ h, \neg h \vee p \vee q, \neg p \vee c, \neg q \vee c, \neg c\}$

1.	h	
2.	$\neg h \vee p \vee q$	
3.	$p \vee q$	*rezolventa 1, 2*
4.	$\neg q \vee c$	
5.	$p \vee c$	*rezolventa 3, 4*
6.	$\neg p \vee c$	
7.	c	*rezolventa 5, 6*
8.	$\neg c$	
9.	*false*	*rezolventa 7, 8*

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6-3

Ověřte platnost následujícího úsudku p∨q, p→ r, q →s ⊨ r ∨s.

Řešení příkladu

$\{p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee s, \neg r, \neg s\}$

1.	$p \vee q$	
2.	$\neg p \vee r$	
3.	$q \vee r$	*rezolventa 1, 2*
4.	$\neg q \vee s$	
5.	$r \vee s$	*rezolventa 3, 4*
6.	$\neg r$	
7.	s	*rezolventa 5, 6*
8.	$\neg s$	
9.	*false*	*rezolventa 7, 8*

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6-4

Ověřte platnost úsudku:
Je doma nebo odešel do kavárny.
<u>Je-li doma, pak nás očekává.</u>
Z: Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.

Řešení příkladu

Označíme jednotlivé elementární výroky: d – "je doma", k – "odešel do kavárny", o – "očekává nás" a formalizujeme:

$d \vee k$	1. $d \vee k$	
$d \to o$	2. $\neg d \vee o$	
-------	3. $\neg o$	
$\neg o \to k$	4. $\neg k$	*(klausule 3. a 4. tvoří negovaný závěr* $\neg o \,\&\, \neg k$*)*
	5. d	*(1. a 4.)*
	6. o	*(2. a 5.)*
	7. *false*	*(3. a 6.)*

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6-5

Dokažte, že formule $[(p \to q) \,\&\, \neg q] \to \neg p$ je tautologie.

Řešení příkladu

Formuli znegujeme a převedeme do klausulární formy: $[(\neg p \vee q) \,\&\, \neg q] \,\&\, p$
Klauzule:

1. $\neg p \vee q$
2. $\neg q$
3. p
4. $\neg p$ *rezoluce 1.2.*
5. *False*

*

Metoda automatického dokazování nalezla široké uplatnění v počítačovém dokazování (je na ní, resp. na obecné rezoluci pro predikátovou logiku, založen např. programovací jazyk PROLOG), v expertních systémech a v dalších oblastech umělé inteligence.

Metoda automatického dokazování se opírá o tři principy:

- **Princip vyvrácení**, převádějící problém důkazu dané formule na problém důkazu nesplnitelnosti negace této formule.
- **Rezoluční odvozovací pravidlo** – jediné odvozovací pravidlo používané metodou.
- **Robinsonův rezoluční princip** umožňující vyvodit spor z nesplnitelné formule a tak dokázat její nesplnitelnost (a tím dokázat platnost původní formule).

Klauzule je konečná disjunkce literálů. **Literál** je výrokový symbol nebo jeho negace. **Prázdná klauzule** je klauzule, která neobsahuje ani jeden literál. **Hornova klauzule** je klauzule s nejvýše jedním pozitivním (negovaným) literálem. **Klauzulární forma** dané formule je ekvivalentní formule ve tvaru konjunkce klauzulí.

Speciální případy klauzulí:

- Klauzule bez antecedentů $\{\ \} \Rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
- Klauzule bez konsekventů, tj. Hornova klauzule se všemi literály negativními $\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \Rightarrow \{\ \}$
- Klauzule s jediným konsekventem, tj. Hornova klauzule s jediným pozitivním literálem $\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \Rightarrow \{p_1\}$, neboli $(q_1 \,\&\, q_2 \,\&\dots\&\, q_m) \rightarrow p_1$
- Prázdná klauzule $\{\ \} \Rightarrow \{\ \}$

VĚTA 6-1 PRINCIP VYVRÁCENÍ

V

Formule B vyplývá z předpokladů $A_1, A_2, \dots, A_n$, značíme $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, právě tehdy, je-li formule $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\dots\&\, A_n \,\&\, \neg B$ kontradikcí.

Důkaz :

Speciálně pro $n=1$:

1. $A \models B$	
2. $A \rightarrow B$	je tautologií
3. $\neg A \vee B$	je tautologií
4. $\neg(A \,\&\, \neg B)$	je tautologií
5. $A \,\&\, \neg B$	je kontradikcí

Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$	
2. $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\dots\&\, A_n \rightarrow B$	je tautologií
3. $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B$	je tautologií
4. $\neg(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\dots\&\, A_n \,\&\, \neg B)$	je tautologií
5. $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\dots\&\, A_n \,\&\, \neg B$	je kontradikcí

VĚTA 6-2

V

Jsou-li splnitelné klausule $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee L,\ B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n \vee \neg L$, pak je splnitelná také klausule $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$, neboli: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee L,\ B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n \vee \neg L \models A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$.

Speciálně platí:

- $m = 0,\ n = 0:\ L,\ \neg L \mid\!- \mathit{false}$ odvození sporu
- $m = 0,\ n = 1:\ L,\ \neg L \vee B \mid\!- B$ pravidlo MP
- $m = 1,\ n = 1:\ L \vee A, \neg L \vee B \mid\!- A \vee B$ zákl. tvar rezol. pravidla

DEFINICE 6-1 REZOLUČNÍ UZÁVĚR FORMULE

Df

Nechť F je formule v klauzulárním tvaru (neboli konjunktivní množina klauzulí). Symbolem $R(F)$ označme formuli F rozšířenou o všechny rezolventy všech rezoluce schopných dvojic klauzulí z F. **Rezolučním uzávěrem formule *F* *n*-tého řádu** nazveme formuli R_n(F) definovanou rekurzivně takto:

- $R_0(F) = F$,
- $R_i(F) = R(R_{i-1}(F)),\ i=1,2,\ldots,n$

VĚTA 6-3 ROBINZONŮV REZOLUČNÍ PRINCIP

V

Formule F v klauzulárním tvaru je kontradikcí (nesplnitelná) právě tehdy, existuje-li přirozené číslo n takové, že R_n(F) obsahuje prázdnou klauzuli.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 6-6

Dokažme nesplnitelnost následující konjunktivní množiny klauzulí
$\{p \vee q,\ p \vee r,\ \neg q \vee \neg r,\ \neg p\}$
neboli následující konjunktivní normální formy
$(p \vee q)\ \&\ (p \vee r)\ \&\ (\neg q \vee \neg r)\ \&\ (\neg p)$.

Řešení příkladu

1.	$p \vee q$	výchozí klauzule
2.	$p \vee r$	výchozí klauzule
3.	$\neg q \vee \neg r$	výchozí klauzule
4.	$\neg p$	výchozí klauzule

	Systematicky:	
5.	$p \vee \neg r$	rezoluce: 1,3
6.	q	rezoluce: 1,4
7.	$p \vee \neg q$	rezoluce: 2,3
8.	r	rezoluce: 2,4
9.	p	rezoluce: 2,5
10.	$\neg r$	rezoluce: 3,6
11.	$\neg q$	rezoluce: 3,8
12.	$\neg r$	rezoluce: 4,5
13.	$\neg q$	rezoluce: 4,7
14.	*false*	rezoluce: 4,9

Optimálně:	
5'. q	rezoluce: 1,4
6'. r	rezoluce: 2,4
7'. $\neg q$	rezoluce: 3,6
8'. *false*	rezoluce: 5,7

*

KONTROLNÍ OTÁZKA 5

1. Uveďte tvar rezoluční pravidla.
2. Uveďte význam rezolučního principu.
3. O co se rezoluční princip opírá?

CVIČENÍ 5

Příklad 1: Ověřte platnost/neplatnost úsudku rezoluční metodou

- Nefunguje-li program, je chyba v programu nebo není v pořádku systém.
  Je-li chyba v programu, musím se poradit se cvičícím.
  Systém je v pořádku.
  Z: Nefunguje-li program, musím se poradit se cvičícím.

- Má přednášku nebo se toulá po škole.

  Jestliže má přednášku, pak se jedná o vzorného studenta.
  Z: Jestliže se nejedná o vzorného studenta, pak se toulá po škole.

- Není pravda, že student umí Javu a C++.

  Student neumí Javu.
  Z: Student neumí C++.

- Jestliže se problému věnuji, tak ten problém vyřeším.

  Jestliže se problému nevěnuji, pak mám na práci něco jiného.
  Z: Vyřeším ten problém nebo mám na práci něco jiného.

- Jestliže pracuji, potom vydělávám peníze, ale jestliže jsem líný, pak si užívám.

  Buď pracuji nebo jsem líný.

Nicméně, jestliže jsem líný, pak nevydělávám, zatím co jestliže pracuji, pak si neužívám.

Z: Proto si užívám.

Příklad 2: Formalizujte následující věty. Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda věta pod čarou je sémantickým důsledkem vět nad čarou.

- Jestliže bude pršet, nepůjdeme na výpravu.

  Jestliže nepůjdeme na výpravu, půjdeme do kina.
  Půjdeme-li do kina a bude pršet, pojedeme autobusem.
  Pojedeme-li autobusem, budeme potřebovat peníze.
  Bude pršet.

  Budeme potřebovat peníze

- Na zájezd do Řecka pojede Petr nebo Pavel.

  Jestliže pojede Pavel, pojede Simona a nepojede Renata.
  Jestliže pojede Tomáš, pojede i Renata.
  Jestliže pojede Simona, pojede Tomáš.

  Petr Pojede na zájezd do Řecka.

Příklad 3: Odvoďte, co všechno vyplývá.

- p1: Karel pojede autobusem nebo vlakem.

  p2: Jede-li Karel autobusem nebo svým vozem, pak přijede pozdě a zmešká schůzku.
  p3: Karel nepřišel pozdě.

- p1: Je-li úterý, je přednáška a není cvičení.

  p2: Dnes je přednáška i cvičení.
  p3: Je-li cvičení, pak nepotřebujeme projektor.

Příklad 4: Doplňte chybějící předpoklad, aby byl úsudek platný. Vypište všechny možnosti.

- P1: Je-li Karel v Praze, Je Helena v Brně.

  P2: Je-li úterý, není Helena v Brně.
  P3: ?

  Z: Helena je v Brně nebo není úterý.

Příklad 5: Rezoluční metodou rozhodněte, zda S je splnitelná množina klausulí.

- $S = \{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s \vee t,\ \neg s \vee y,\ \neg t,\ \neg p \vee \neg x,\ \neg q \vee w,\ \neg q \vee \neg w\}$
- $S = \{a,\ \neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg d \vee f,\ \neg d \vee b,\ \neg c \vee q,\ \neg f \vee q,\ \neg q\}$
- $S = \{x \vee y,\ \neg z \vee t,\ \neg x \vee t,\ \neg y \vee z,\ \neg t\}$

7 AXIOMATICKÝ SYSTÉM VÝROKOVÉ LOGIKY

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY AXIOMATICKÝ SYSTÉM VÝROKOVÉ LOGIKY

Cílem sedmého modulu je popsat axiomatické systémy výrokové logiky a to Hilbertova a Gentzenova typu.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY AXIOMATICKÝ SYSTÉM VÝROKOVÉ LOGIKY

Axiomatické systémy výrokové logiky, Hilbertovský axiomatický systém, Gentzenovský axiomatický systém.

Klíčová slova

Tautologie lze definovat pomoci sémantického pojmu pravdivostního ohodnocení. Tautologie lze definovat také syntakticky, totiž jako formule, které lze odvodit mechanickou aplikací jistých strukturálních pravidel. Tautologie jsou ty formule, které lze formálně dokázat pomocí pravidel jistého důkazového systému neboli kalkulu.

Kalkulus chápeme jako množinu odvozovacích pravidel. Kalkulus je korektní vůči sémantice klasické výrokové logiky, jestliže každá formule v něm dokazatelná je tautologie. Kalkulus je úplný, jestliže je korektní, a navíc všechny tautologie jsou v něm dokazatelné.

Formální axiomatický systém libovolné teorie (a speciálně také výrokové logiky) je zadán trojicí údajů:

- jazykem,
- množinou axiómů,
- množinou odvozovacích pravidel.

Jazyk teorie je množina všech (dobře utvořených) formulí jazyka. **Množina axiómů** teorie je vybraná podmnožina množiny všech formulí. Axiómy představují základní teorémy teorie, které jsou považovány za výchozí. Axióm je vlastně pravidlo s nulovým počtem předpokladů. ***Odvozovací pravidla*** umožňují odvozovat (dokazovat) nové ***teorémy*** na základě axiómů a teorémů již dokázaných.

Formální teorie (v širším slova smyslu) je tvořena axiómy a všemi formulemi, které lze z nich pomocí odvozovacích pravidel odvodit.
Označíme-li jednotlivé zmiňované množiny jako:
A – množina axiómů (teorie v užším slova smyslu, "v kostce"),
T – množina teorémů (teorie v širším slova smyslu), DUF – množina všech dobře utvořených formulí (tj. jazyk)
S – množina všech slov v abecedě jazyka, pak platí následující vztahy:

$A \subset T \subset DUF \subset S$.

Postup **budování axiomatické teorie** (formálního systému či logického kalkulu) tedy sestává z těchto kroků:

- Vymezení jazyka teorie, který je dán
  - abecedou
  - gramatikou – pravidla, jak tvořit DUF.
- Výběr jisté (vlastní) podmnožiny formulí jako axiómů.
- Stanovení pravidel odvozování.
- Demonstrace bezespornosti (korektnosti) teorie, tj. axiómů a pravidel.
- Interpretace formulí.

Množina axiómů

Množina axiómů je:

- Vždy neprázdná a musí být rozhodnutelná v množině DUF (jinak bychom nemohli v takovém systému nic dokazovat).
  - To znamená, že existuje algoritmus, který pro každou DUF určí, zda je to axióm nebo ne.
- Může být konečná nebo nekonečná.
  - Konečná množina axiómů je triviálně rozhodnutelná.
  - Nekonečné množiny axiómů musí být charakterizovány algoritmem vytváření axiómů, nebo častěji konečnou množinou tzv. ***axiómových schémat***.
- Axiómy jsou voleny tak, aby byly pravdivé v každé interpretaci – *tautologie*.

Navíc stanovujeme tzv. **speciální axiómy,** které charakterizují přímo danou teorii (např. aritmetiku přirozených čísel a ty volíme tak, aby byly *pravdivé v zamýšlené interpretaci teorie*. (Výroková logika či predikátová logika 1. řádu – mohou být tedy považovány za teorie bez speciálních axiómů – ***logické kalkuly***.)

Odvozovací pravidla

Množina odvozovacích pravidel je:

- Tvořena několika nebo dokonce jen jedním pravidlem (jsou-li axiómy reprezentovány schématy).
- Odvozovací pravidla převádějí DUF na DUF a jsou volena tak, aby byla sémanticky ***korektní***, tj. aby "zachovávala pravdivost" (jinak bychom obdrželi nekorektní systém, ve kterém je možno dokázat vše, a takový systém jistě není z praktického hlediska užitečný).
  - Odvozovací pravidla tedy umožňují vytvářet teorémy, tj. dokazatelné formule.
  - **Důkaz** je konečná posloupnost kroků – DUF, z nichž každá je buď axióm nebo vznikne z předchozích DUF pomocí odvozovacího pravidla. Posledním krokem je dokazovaná formule – teorém.

Někdy bývá stanoven ještě jeden přirozený ”kosmetický” požadavek na množinu axiómů: Množina axiómů má být **nezávislá,** tj. žádný axióm není dokazatelný z ostatních axiómů.

Přirozeným požadavkem je (syntaktická) **bezespornost (konzistence):** Alespoň jedna formule není dokazatelná (ve sporném systému dokážeme vše). (Ekvivalentním požadavkem v systémech obsahujících $\neg$, $\&$ je to, že není dokazatelná formule typu $A \;\&\; \neg A$, případně v systémech s $\neg$, $\rightarrow$ formule typu $\neg(A \rightarrow A)$.

Bezespornost

S tímto souvisí rovněž sémantická bezespornost, neboli **korektnost** systému: Každý teorém je logicky pravdivá formule (v případě teorie bez speciálních axiómů), nebo logicky vyplývá ze speciálních axiómů (předpokladů). Tedy ”to, co dokážeme, je pravdivé”. Označíme-li množinu speciálních axiómů jako SA, můžeme požadavek korektnosti zapsat schematicky:
Jestliže $\vdash T$ pak $\vDash T$, resp. jestliže $SA \vdash T$ pak $SA \vDash T$.

Problém:
Je dokazatelnost totéž co (logická) pravdivost? Jinými slovy, jsou dokazatelné **přesně** ty výroky, které jsou (logicky) pravdivé?
D. **Hilbert** (význačný matematik počátku 20. století) očekával kladnou odpověď na výše uvedené otázky a vytyčil tzv. program axiomatizace matematiky.
Kurt **Gödel** (největší logik 20. století) dokázal **věty o úplnosti,** které dávají pozitivní odpověď na tyto otázky (pro výrokovou logiku a) pro predikátovou logiku 1. řádu, tedy ”obrácené” tvrzení ke korektnosti: Jestliže $\vDash$ T pak $\vdash$ T, resp. jestliže SA $\vDash$ T pak SA $\vdash$ T (tzv. silná věta o úplnosti).

Hilbert však očekával ještě více, a to že všechny ”matematické pravdy” lze ”mechanicky” finitně dokázat (z vhodných axiomů), tedy že takové bezesporné teorie, které charakterizují aritmetiku přirozených čísel, jsou úplné v tom smyslu, že každá formule je v dané teorii **rozhodnutelná,** tj. na základě axiomů teorie můžeme dokázat buďto danou formuli nebo její negaci. Tedy že všechny formule, které jsou **pravdivé v** zamýšlené **interpretaci** nad množinou přirozených čísel jsou v této teorii dokazatelné.

Gödelovy **věty o neúplnosti** dávají velice překvapivou odpověď – existují **pravdivé leč nedokazatelné výroky aritmetiky** přirozených čísel. Tedy Hilbertův program není (v plné šíři) uskutečnitelný.

S (ne)úplností úzce souvisí problém **rozhodnutelnosti**: Existuje algoritmus, který o libovolné dobře utvořené formuli určí, zda je to teorém (dokazatelná DUF) čili (v korektním systému) logicky pravdivá formule?
Dá se dokázat:

- pro výrokovou logiku lze vyvinout kalkuly, které jsou
    - bezesporné
    - úplné
    - rozhodnutelné
- pro predikátovou logiku 1. řádu lze vyvinout kalkuly, které jsou
    - bezesporné
    - úplné

  - jen parciálně rozhodnutelné (tj. pokud daná DUF je tautologie, pak algoritmus po konečném počtu kroků odpoví ANO, jinak nemusí vydat žádnou odpověď – může ”cyklovat” či odpoví NE)
  - nelze vyvinout rozhodnutelný kalkul pro PL1 (problém **logické pravdivosti je v PL1 nerozhodnutelný)**
- pro predikátovou logiku 2. řádu (a vyšších) lze vyvinout
  - bezesporné kalkuly
  - neúplný
  - nerozhodnutelný (ani parciálně)

K charakteristice dokazatelnosti byly vytvořeny dva typy formálních systémů:

- Gentzenova typu
- Hilbertova typu

7.1 Formální systém Gentzenova typu

DEFINICE 7-1 FORMÁLNÍ SYSTÉM HILBERTOVA TYPU

Df

- **Abeceda**
  - Výrokové symboly: p, q, r,... /případně s indexy/
  - Logické funktory: $\neg$, $\rightarrow$
  - Závorky: (,)   /případně [,],{,}/
- **Gramatika (DUF)**:
  - p, q, r,... jsou formule.
  - Je-li A formule, pak $(\neg A)$ je formule.
  - Jsou-li A,B formule, pak $(A \rightarrow B)$ je formule.
  - Jiných formulí než podle (1), (2), (3) není.
- ***Jazyk***: množina všech (dobře utvořených) formulí.
- **Axiómová schémata:**
  - A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - A2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - A3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- **Odvozovací pravidlo:**   MP: $A, A \rightarrow B \vdash B$

Pozn. Rozšíříme-li množinu spojek do $\{\neg, \rightarrow, \&, \vee\}$ a tedy vytvoříme jiný formální systém, pak axiomy A1 – A10, přidáme k tomu MP a získáme definici jiného systému.

- *A1:* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- *A2:* $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- *A3:* $A \rightarrow (A \vee B)$
- *A4:* $B \rightarrow (A \vee B)$
- *A5:* $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C) \rightarrow B)$
- *A6:* $A \& B \rightarrow A$
- *A7:* $A \& B \rightarrow B$
- *A8:* $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B)$

- $A9: (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
- $A10: \neg\neg A \to A$

Z pohledu věty o úplnosti oba dva systémy jsou ekvivalentní: jenom tautologie jsou dokazatelné. Všechny axiomy nebo věty prvního systému jsou axiomy nebo věty druhého a naopak. Odlišnost je jednoduchost formálních důkazů.

Definovaný axiomatický systém pracuje pouze s funktory $\neg$, $\to$. Vzhledem k tomu, že pravdivostní funkce příslušné k těmto funktorům tvoří funkcionálně úplný systém, postačí tyto funktory k vytvoření sémanticky úplné logiky.
Ostatní výrokotvorné funktory můžeme používat jako zkratky (zkracující a zpřehledňující zápis formulí) definované takto:

- $A \mathbin{\&} B \ =df\ \neg(A \to \neg B)$
- $A \vee B \ =df\ \neg A \to B$
- $A \leftrightarrow B = df\ (A \to B) \mathbin{\&} (B \to A)$

Symboly $\&$, $\vee$, $\leftrightarrow$ nepatří do jazyka definovaného axiomatického systému, jsou to metasymboly sloužící k označování složených formulí jistého typu.

DEFINICE 7-2 DŮKAZ FORMULE

Důkaz formule A ***za předpokladů*** $A_1, A_2, \dots, A_k$ $/k \geq 0/$ je konečná posloupnost formulí $B_1, B_2, \dots, B_n$ taková, že: Pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ je B_i

- buď předpoklad A_j $(j \in \{1, \dots, k\})$
- nebo axióm
- nebo formule, která vznikla aplikací pravidla MP na některé dvě formule z množiny $\{B_1, B_2, \dots, B_{i-1}\}$.
- B_n je dokazovaná formule A.

Skutečnost, že formule A je dokazatelná za předpokladů $A_1, A_2, \dots, A_k$ označujeme zápisem $\mathbf{A_1, A_2, \dots, A_k \vdash A}$.

Hilbertův systém je **korektní**, tedy sémanticky bezesporný. Především, snadno ověříme, že všechny axiómy systému jsou ***tautologie***.

Jediné pravidlo systému (MP) "***zachovává pravdivosť***" v tom smyslu, že formule B, která vznikne aplikací pravidla na formule A_1, A_2 z těchto formulí logicky vyplývá. Tedy platí: Pokud $A_1, A_2 \vdash B$, pak $A_1, A_2 \models B$. (**Věta Postova**).

Všimněme si, že z definice důkazu vyplývá, že i axióm je teorémem. Jeho důkaz je triviální: důkazem axiómu je axióm sám.

Důkaz $B_1, B_2, \dots, B_n$ formule A za předpokladů $A_1, A_2, \dots, A_k$ je nejenom důkazem formule $A = B_n$, ale obsahuje i důkazy $B_1, B_2, \dots, B_i$ všech formulí B_i pro $i = 1, 2, \dots, n-1$.

VĚTA 7-1

V

$\vdash A \to A$ (schématu formulí)

Důkaz :

1.	$\vdash A \to ((A \to A) \to A)$	A1
2.	$\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	A2
3.	$\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP na 1. , 2.
4.	$\vdash A \to (A \to A)$	A1
5.	$\vdash A \to A$	MP na 3. , 4.

VĚTA 7-2

V

Formule $A \to C$ za předpokladů $A \to B,\ B \to C$.

Důkaz :

1. $A \to B$		1.předpoklad
2. $B \to C$		2.předpoklad
3. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$		A2
4. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	$A1\ A/(B \to C)$	B/A
5. $A \to (B \to C)$		MP:2,4
6. $(A \to B) \to (A \to C)$		MP:5,3
7. $A \to C$		MP:1,6

Tedy: $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

VĚTA 7-3 O DEDUKCI

V

$A_1, A_2,\dots,A_k \vdash A \to B$ právě tehdy, když $A_1, A_2,\dots,A_k, A \vdash B$. (Speciálně pro k=0: $\vdash A \to B$ právě tehdy, když $A \vdash B$)

Důkaz :

1. Nechť $A_1, A_2,\dots,A_k \vdash A \to B$. Tedy existuje posloupnost formulí $B_1, B_2,\dots,B_n$, která je důkazem formule $A \to B$ z předpokladů $A_1, A_2, \dots,A_k$. Důkazem formule B z předpokladů $A_1, A_2,\dots,A_k, A$ bude pak posloupnost formulí $B_1, B_2,\dots,B_n, A, B$, kde $B_n = A \to B$ a B je výsledkem aplikace pravidla MP na formule B_n a A.

2. Nechť $A_1, A_2,...,A_k, A \vdash B$. Tedy existuje posloupnost formulí $C_1, C_2, ..., C_r = B$, která je důkazem formule B z předpokladů $A_1, A_2, ..., A_k$, A. Dokážeme, že formule $A \rightarrow C_i$ je platná pro všechna $i = 1, 2,...,r$. Tím bude speciálně dokázáno také $A \rightarrow C_r$, což chceme dokázat. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle délky důkazu.

   a) Je-li délka důkazu 1, pak pro jedinou formuli $C1$ důkazu mohou nastat tři případy:
   - C_1 je předpokladem A_i,
   - C_1 je axiómem,
   - C_1 je formulí A.

   V prvních dvou případech důkazem formule $A \rightarrow C_1$ je posloupnost formulí:

1.	C_1	předpoklad nebo axióm
2.	$C_1 \rightarrow (A \rightarrow C_1)$	A1
3.	$A \rightarrow C_1$	MP:1,2

   V třetím případě je třeba dokázat $A \rightarrow A$. Důkaz této formule již dříve.

   b) Dokážeme, že z předpokládané platnosti formule $A \rightarrow C_n$ pro $n = 1, 2,...,i\text{-}1$ plyne její platnost také pro $n=i$.

   Pro C_i mohou nastat čtyři případy:
   - C_i je předpokladem A_i,
   - C_i je axiómem,
   - C_i je formulí A, C_i je bezprostředním důsledkem formulí C_j a $C_k = (C_j \rightarrow C_i)$, kde $j, k < i$. V prvních třech případech probíhá důkaz formule $A \rightarrow C_i$ stejným způsobem jako v bodě 1.
   - V posledním čtvrtém případě je důkazem posloupnost formulí:

1.	$A \rightarrow C_j$	indukční předpoklad
2.	$A \rightarrow (C_j \rightarrow C_i)$	indukční předpoklad
3.	$(A \rightarrow (C_j \rightarrow C_i)) \rightarrow ((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow C_i))$	A2
4.	$(A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow C_i)$	MP:2,3
5.	$A \rightarrow C_i$	MP:1,4

Podle věty o dedukci každému teorému (a speciálně také axiómu) ve tvaru implikace odpovídá odvozovací pravidlo (příp. několik odvozovacích pravidel) a naopak. Tak např.:

Teorém:	Pravidlo
$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$	$A, A \rightarrow B \vdash B$ /pravidlo MP/
$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ /ax.schéma A1/	$A \vdash B \rightarrow A$, a $A, B \vdash A$
$\vdash A \rightarrow A$ příklad	$A \vdash A$
$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
příklad	$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

VĚTA 7-4

$\vdash A \to (\neg A \to B)$, *resp.* $A, \neg A \vdash B$.

Důkaz :

1.	A	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	A3
4.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
5.	$\neg B \to \neg A$	MP: 2,4
6.	$A \to B$	MP: 5,3
7.	B	MP: 1,6

VĚTA 7-5

Z předpokladu $\neg B \to \neg A$ je dokazatelná formule $A \to B$.

Důkaz :

1. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ A3
2. $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$

VĚTA 7-6

$\vdash \neg a \to (a \to b)$

Důkaz :

1.	$\vdash \neg a \to (\neg b \to \neg a)$	A1
2.	$\neg a \vdash \neg b \to \neg a$	dedukce 1
3.	$\vdash (\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$	A3
4.	$\neg a \vdash (a \to b)$	MP na 2. a 3.
5.	$\vdash \neg a \to (a \to b)$	dedukce na 4.

VĚTA 7-7

$\neg\neg a \to a$

Důkaz :

1. $\neg\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a)$ podle předchozího
2. $\vdash (\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a) \rightarrow (\neg\neg a \rightarrow a)$ A3
3. $\neg\neg a \vdash \neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$ dedukce na 1.
4. $\neg\neg a \vdash \neg\neg a \rightarrow a$ MP na 2. a 3.
5. $\neg\neg a \vdash a$ dedukce na 4.
6. $\vdash \neg\neg a \rightarrow a$ dedukce na 5.

VĚTA 7-8

V

$\vdash b \rightarrow \neg\neg b$

Důkaz :

1. $\vdash \neg\neg\neg b \rightarrow \neg b$ podle předchozího
2. $\vdash (\neg\neg\neg b \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow \neg\neg b)$ A3
3. $\vdash b \rightarrow \neg\neg b$ MP na 1. a 2.

VĚTA 7-9 O NEUTRÁLNÍ FORMULI

V

Je-li $U, A \vdash B$ i $U, \neg A \vdash B$, pak $U \vdash B$.

Důkaz :

1. $U, A \vdash B$ předpoklad
2. $U \vdash A \rightarrow B$ dedukce na 1.
3. $U, \neg A \vdash B$ předpoklad
4. $U \vdash \neg A \rightarrow B$ dedukce na 3.
5. $U, (A \vee \neg A) \vdash B$ věta o důkazu rozborem případů
6. $U, (\neg A \rightarrow \neg A) \vdash B$ přepis výrokové spojky $\vee$
7. $U \vdash (\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow B$ dedukci na 6.
8. $\vdash \neg A \rightarrow \neg A$ věta
9. $U \vdash B$ MP na 7. a 8.

V

VĚTA 7-10 POMOCNÁ VĚTA PRO DŮKAZ POSTOVY VĚTY

Nechť formule A je sestavena z výrokových symbolů $p_1, p_2,\dots,p_n$. Označme písmenem v pravdivostní ohodnocení (valuaci) těchto proměnných a zápisem $w(A)$ pravdivostní ohodnocení formule A, jež je tímto ohodnocením indukováno. Potom platí:

$p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A^v$, /*/, kde

zápis A^v značí buď formuli $\neg A$ (je-li $w(A) = 0$ při ohodnocení v), nebo formuli A (je-li $w(A) = 1$ při ohodnocení v).

Důkaz :

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle konstrukce formule A. Ve formálním systému může mít formule A právě jeden z následujících třech tvarů:

1. $A = p$ elementární formule
2. $A = \neg B$ složená formule ve tvaru negace
3. $A = B \rightarrow C$ složená formule ve tvaru implikace

Indukční krok. Dokážeme, že z předpokladu platnosti vztahu /*/ pro komponenty B, C složené formule vyplývá platnost vztahu /*/ pro celé složené formule $\neg B$ a $B \rightarrow C$.

a. Složená formule má tvar $\neg B$. Podle indukčního předpokladu platí $p_1^v, p_2^v,\dots,p_n^v \vdash B^v$. Máme dokázat $p_1^v, p_2^v,\dots,p_n^v \vdash (\neg B)^v$. K tomu, abychom to dokázali, stačí dokázat $B^v \vdash (\neg B)^v$. Jsou dvě možnosti: buď $w(B) = 0$ a pak $\neg B \vdash \neg B$ a nebo $w(B) = 1$ a pak $B \vdash \neg\neg B$. Vztah $B^v \vdash (\neg B)^v$ je dokázaný.
b. Složená formule má tvar $B \rightarrow C$. Podle indukčního předpokladu platí $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash B^v$ a $p_1^v, p_2^v,\dots,p_n^v \vdash C^v$. Máme dokázat $p_1^v, p_2^v,\dots,p_n^v \vdash (B \rightarrow C)^v$. K tomu, abychom to dokázali, stačí dokázat $B^v, C^v \vdash (B \rightarrow C)^v$. Čtyřem různým ohodnocením formulí B, C odpovídají následující čtyři pravidla, jejichž platnost třeba ověřit:

a) $\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$
b) $\neg B, C \vdash B \rightarrow C$
c) $B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$
d) $B, C \vdash B \rightarrow C$

Důkaz a),b):

1.	$\neg B$	předpoklad
2.	$\neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$	teorém
3.	$B \rightarrow C$	MP: 1,2

Důkaz c):

1.	B	předpoklad
2.	$\neg C$	předpoklad
3.	$((B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$	ax.schéma A3
4.	$B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)$	teorém /ekvivalent MP/
5.	$(B \rightarrow C) \rightarrow C$	MP: 1,4
6.	$\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)$	MP: 5,3

7. $\neg(B \to C)$ MP: 2,6

Důkaz d):

1. C předpoklad
2. $C \to (B \to C)$ ax.schéma A1
3. $B \to C$ MP: 1,2

VĚTA 7-11 POSTOVA

V

Úplnost a korektnost logického kalkulu výrokové logiky
Každá dokazatelná formule je tautologií a každá tautologie je dokazatelná, tj.
$\vdash A$ právě tehdy, když $\vDash A$.

Obecněji platí: $A_1, A_2,\dots,A_n \vdash B$ právě tehdy, když $A_1, A_2, \dots, A_n \vDash B$.

Důkaz :

Nechť $\vdash A$, dokážeme $\models A$. (***Korektnost***)

Formule A je buď axióm a nebo je dokazatelná z axiómů pomocí opakovaného používání odvozovacího pravidla MP. Je-li axiómem, pak je tautologií – o tom se přesvědčíme pro všechna tři axiómová schémata metodou pravdivostních funkcí /metodou 0-1/.

Použití pravidla MP zachovává "tautologičnost": jsou-li formule B, $B \to C$ tautologiemi, pak také formule C musí být tautologií /kdyby pro nějaké pravdivostní ohodnocení výrokových symbolů bylo $w(B) = 1$ a při tom $w(C)=0$, pak by pro toto ohodnocení bylo $w(B \to C) = 0$ a formule $B \to C$ by nebyla tautologií/.

Protože všechny teorémy lze odvodit z axiómů pomocí opakovaného užití pravidla MP, jsou všechny teorémy tautologiemi.

Nechť $\models$ A, dokážeme $\vdash$ A. (***Úplnost***)

Protože formule A je tautologií, je $A^v = A$ pro všechna pravdivostní ohodnocení výrokových symbolů v. Je tedy $p_1^v, p_2^v,\dots,p_n^v \vdash A$ pro všechna ohodnocení v. Platí tedy speciálně také $p_1, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A$, $\neg p_1, p_2^v,\dots,p_n^v \vdash A$. Odtud podle věty o neutrální formuli dostáváme $p_2^v, \dots, p_n^v \vdash A$ pro všechna ohodnocení v. Speciálně opět platí $p_2, \dots, p_n^v \vdash A$, $\neg p_2,\dots, p_n^v \vdash A$ a počet předpokladů lze opět snížit o jeden.

Tímto způsobem lze pokračovat až nakonec po n krocích nalezneme $\vdash A$. Tautologie A je tedy dokazatelnou formulí.

Formální systém je sporný, je-li v něm dokazatelná libovolná formule. Formální systém, který není sporný, je bezesporný.

VĚTA 7-12

V

Je-li U sporná množina výrokových formulí, pak $U \not\vdash A$ *i* $U \not\vdash \neg A$.

Důkaz :

Je-li z *U* dokazatelná libovolná formule, pak zřejmě je z *U* dokazatelná jak formule *A*, tak i formule $\neg A$.

Poznámka :

- Důsledkem věty o úplnosti je fakt, že formální systém výrokové logiky je bezesporný.
- Pojem bezespornosti lze zobecnit i na množiny formulí. Je-li *T* množina formulí nějakého formálního systému, říkáme, že *T* je sporná, je-li každá formule (daného formálního systému) dokazatelná z množiny *T*. Jinak říkáme, že T je bezesporná.

Formální systém je sporný, právě když je sporná prázdná množina formulí.

VĚTA 7-13

V

Výroková logika je bezesporný formální systém.

Důkaz :

Předpokládejme, že formální systém výrokové logiky je sporný, musí tedy v něm být dokazatelná libovolná formule, tj. $\vdash$ A i $\vdash \neg$ A. Podle Postovy věty by pak byly tautologiemi zároveň A i $\neg$A, což není z hlediska jejich sémantiky možné.

VĚTA 7-14

V

Konečná množina formulí je bezesporná právě když je splnitelná.

Důkaz :

1. Je-li $U = \{B_1, B_2, \ldots B_k\}$ bezesporná množina formulí, pak podle definice existuje formule *A* taková, že neplatí $U \not\vdash A$. Podle jedné z předchozích vět by tedy neplatilo $\not\vdash (B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_k) \rightarrow A$.

   Podle věty Postovy pak nemůže ani $\not\models (B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_k) \rightarrow A$. Musí existovat ohodnocení v, pro něž formule $(B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_k) \rightarrow A$ nabývá hodnotu. Takové ohodnocení musí formuli $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_k$ a tedy i každému B_i přiřazovat hodnotu 1.

2. Nepřímo: Je-li $U = \{B_1, B_2, \dots B_k\}$ sporná, pak existuje formule A taková, že $U \vdash A \ \& \ \neg A$. Podle Postovy věty pak formule $(B_1 \ \& \ B_2 \ \& \dots \& \ B_k) \rightarrow A \ \& \ \neg A$ (označíme ji B) musí být tautologií. Pro libovolné ohodnocení v, pak $w = 1$. Protože však $w'(A \& \neg A) = 0$ vždy nemůže být i $(B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k) = 1$, neboť by pak B nebyla tautologií. Z toho ale vyplývá, že existuje $1 \leq j \leq k$ takové, že $w(Bj) = 0$.

Věta o úplnosti pro hilbertovský kalkulus spolu s tabulkovou metodou zaručují existenci algoritmu, který po každou výrokovou formuli rozhodne, je-li dokazatelná v Hilbertovském axiomatickém systému.

Šlo by takový algoritmus odvodit přímo z definice důkazu, bez odvolání se na sémantiku? Možná, že o existenci důkazu dané formule v Hilbertovském kalkulu by šlo rozhodnout tak, že bychom se okusili důkaz dané formule sestrojit od konce, tj. že bychom se pokusili zpětným užíváním pravidel kalkulu dospět od dané formule k axiomům. Pravidlo modus ponens má bohužel pro tento účel nevýhodnou vlastnost, že dvojic formulí z nichž lze jedním užitím pravidla MP odvodit danou formuli, je nekonečně mnoho.

Studium Gentzenovského kalkulu dá nám odpověď, jakou cenu je třeba zaplatit za kalkulus, jehož pravidla by neměla právě popsanou nevýhodnou vlastnost pravidla MP.

V Gentzenovském kalkulku se na rozdíl od Hilbertovského kalkulu nedokazují jednotlivé formule, ale sekventy. Někdy se proto označuje jako sekventový kalkul. Sekvent je definován jako dvojice konečných množin formulí.

7.2 Gentzenovský formální systém výrokové logiky

Gentzenovský formální systém disponuje pouze jedním axiómem a řadou odvozovacích pravidel tohoto tvaru:

$$\frac{S_1, \dots , S_n}{S}$$

Formule S je jako závěr odvozena z formulí $S_1, \dots, S_n$ – z předpokladů dedukce.

Následující axióm není v pravém smyslu formulí výrokové logiky, ale množinou formulí.

Axióm gentzenovského formálního systému výrokové logiky je množina formulí U obsahující komplementární pár atomických formulí $\{p, \neg p\} \in U$.

Axiom GFS

Odvozovací pravidla gentzenovského systému jsou dvojího typu:

- α - pravidla daná schématem

$$\frac{U_1 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{U_1 \cup \{\alpha\}}$$

a tabulkou

α	α_1	α_2
A	$\neg\neg A$	
$A_1 \vee A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \& A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftarrow A_2$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftrightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg(A_2 \rightarrow A_1)$

- β-pravidla daná schématem

$$\frac{U_1 \cup \{\beta_1\} \qquad U_2 \cup \{\beta_2\}}{U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

a tabulkou

β	β_1	β_2
$B_1 \& B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \vee B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftarrow B_2)$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftrightarrow B_2$	$B_1 \rightarrow B_2$	$B_2 \rightarrow B_1$

Důkaz

Důkaz v gentzenovském formálním systému výrokové logiky je posloupnost sekvencí formulí taková, že každá sekvence je buď axiómem nebo je odvozena z jednoho nebo dvou předcházejících členů posloupnosti pomocí některého odvozovacího pravidla.

Je-li formule A posledním prvkem posloupnosti a, nazývá se posloupnost jejím důkazem a samotná formule A formulí dokazatelnou.
Označení dokazatelné formule stejně jako v hilbertovském: $\vdash A$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7-1

Dokažte v Gentzenovském axiomatickém systému $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$.

Řešení příkladu

1.	$\neg p, q, p$	axióm
2.	$\neg q, q, p$	axióm
3.	$\neg(p \vee q), q, p$	β-$\vee$ na 1. a 2.
4.	$\neg(p \vee q), (q \vee p)$	α-$\vee$ na 3.
5.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	α-$\to$ na 4

*

Je možno znázornit i graficky, je to v podstatě sémantické tablo konstruované opačným směrem, přičemž uzlové sekvence tvoří duální sekvence formulí.

Sekvence literálů zavěšena listech sémantického stromu představovaly jejich konjunkce, zde se jedná o disjunkci literálů komplementárních.

Daná pravidla jsou duální k pravidlům sémantického tabla.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 7-2

Dokažte v Gentzenovském axiomatickém systému $\vdash (p \vee (q \& r)) \to ((p \vee q) \& (p \vee r))$

Řešení příkladu

1.	$\neg p, p, q$	axióm
2.	$\neg p, (p \vee q)$	α-$\vee$ na 1.
3.	$\neg p, p, r$	axióm
4.	$\neg p, (p \vee r)$	α-$\vee$ na 3
5.	$\neg p, (p \vee q) \& (p \vee r)$	β-$\&$ na 2. 4.
6.	$\neg q, \neg r, p, q$	axióm
7.	$\neg q. \neg r, (p \vee q)$	α-$\vee$ na 6
8.	$\neg q, \neg r, p, r$	axióm
9.	$\neg q, \neg r, (p \vee r)$	α-$\vee$ na 8.
10.	$\neg q, \neg r, (p \vee q) \& (p \vee r)$	β-$\&$ na 7. a 9.
11.	$\neg(q \& r), (p \vee q) \& (p \vee r)$	α-$\&$ na 10.
12.	$\neg(p \vee (q \& r)), (p \vee q) \& (p \vee r)$	β-v na 5. a 11.
13.	$(p \vee (q \& r)) \to ((p \vee q) \& (p \vee r))$	α-$\to$ na 12.

*

KONTROLNÍ OTÁZKA 6

1. Popište Hilbertovský axiomatický systém.
2. Popište Gentzenovský axiomatický systém.

CVIČENÍ 6

Příklad 1: Dokažte v Hilbert. Ax. systému

- $\vdash a \to (\neg a \to b)$, *resp.* $a, \neg a \vdash b$
- $\vdash \neg a \to (a \to b)$ *(využijte větu o dedukci)*
- $\vdash \neg\neg a \to a$
- $\vdash b \to \neg\neg b$
- $\vdash (a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$, *resp.* $(a \to b) \vdash \neg b \to \neg a$
- $\vdash a \,\&\, b \to a$, *resp.* $a \,\&\, b \vdash a$

Příklad 2: Dokažte v Gentz. ax. systému

- $\vdash p \vee (q \,\&\, r)) \to ((p \vee q) \,\&\, (p \vee r))$

8 PREDIKÁTOVÁ LOGIKA 1. ŘÁDU

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY PREDIKÁTOVÁ LOGIKA 1. ŘÁDU

Cílem osmého modulu je predikátová logika 1. řádu.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY PREDIKÁTOVÁ LOGIKA 1. ŘÁDU

Predikátová logika 1. řádu, pravdivost, splnitelnost, logické vyplývání.

Klíčová slova

Pouze jen malá část úsudků může být formalizována a dokázána v rámci výrokové logiky.

Pokusme se např. ověřit typ (zjevně správného) úsudku charakterizovaný následujícím příkladem:

Každý člověk je omylný.
Jan je člověk.

Jan je omylný.

Označíme-li uvedené tři věty symboly p, q, r, pak pokus o formalizaci v rámci výrokové logiky je dán následujícím úsudkem: $p, q \vDash r$, což odpovídá formuli: $(p \,\&\, q) \rightarrow r$.

Tato formalizace je však zřejmě nedostačující, a to z těchto důvodů. Uvedené tři výroky jsou z hlediska VL elementární a navzájem nezávislé, avšak ve skutečnosti mají vnitřní komponenty, jsou strukturované, a existuje mezi nimi prostřednictvím těchto komponent vazba. Termín "člověk" se vyskytuje ve výrocích p i q, termín "omylný" ve výrocích p i r, a termín "Jan" ve výrocích q i r.

Formule $(p \,\&\, q) \rightarrow r$ není tautologií, úsudek $p, q \vDash r$ není platný, i když úsudek demonstrovaný příkladem evidentně platný je.

V predikátové logice, která je zobecněním výrokové logiky, je uvedený úsudek formalizován jako

$\forall x\, [p(x) \rightarrow q(x)],\ p(J) \mid= q(J)$, resp. následující formulí

$\{\forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)]\ \&\ p(J)\} \rightarrow q(J)$, kde

- x je předmětová (individuová) proměnná probíhající určitou předmětnou oblast – universum diskursu,
- J je individuová konstanta z dané předmětné oblasti (v uvedeném příkladě konkrétní člověk Jan),
- p, q jsou určité vlastnosti předmětů z universa diskursu (v uvedeném příkladě je interpretujeme jako vlastnosti myslících bytostí "být člověkem" a "být omylný"), $p(x)$, $q(x)$ resp. $p(J)$, $q(J)$ značí, že x resp. J má vlastnost p resp. q,
- zápis $\forall$x[ ] značí, že pro všechna individua z předmětné oblasti platí to, co je uvedeno v hranatých závorkách.

Další příklady jsou:

Každé celé číslo je racionální
1 je celé číslo

Tedy 1 je racionální číslo

Každý člověk je smrtelný.
Aristoteles je člověk

Tedy Aristoteles je smrtelný.

V dalším se budeme zabývat pouze tzv. **predikátovou logikou 1. řádu**, která formalizuje úsudky o vlastnostech předmětů a vztazích mezi předměty pevně dané předmětné oblasti (univerza).

Nebudeme se zabývat formalizací úsudků, které navíc vypovídají i o vlastnostech vlastností a vztahů a o vztazích mezi vlastnostmi a vztahy. Tím se zabývají **predikátové logiky druhého a vyšších řádů**.

Predikátová logika 1. řádu je zobecněním výrokové logiky, kterou můžeme považovat za logiku nultého řádu. Predikátová logika 1. řádu je postačující pro formalizaci mnohých matematických i jiných teorií.

DEFINICE 8-1 JAZYK PREDIKÁTOVÉ LOGIKY 1. ŘÁDU

Df

Abeceda predikátové logiky je tvořena následujícími skupinami symbolů:

- ***Logické symboly***
  - předmětové (individuové) proměnné: $x, y, z, \ldots$ (příp. s indexy)
  - symboly pro spojky: $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - symboly pro kvantifikátory $\forall$, $\exists$
  - případně binární predikátový symbol = (predikátová logika s rovností)
- ***Speciální symboly*** (určují specifiku jazyka)

- predikátové symboly(relační symboly):
    - p, q, r,... /příp. s indexy/
- funkční symboly: f, g, h,... /příp. s indexy/

- Ke každému funkčnímu a predikátovému symbolu je přiřazeno nezáporné číslo n ($n \geq 0$), tzv. arita, udávající počet individuových proměnných, které jsou argumenty funkce nebo predikátu.
- ***Pomocné symboly*** /závorky, čárka/: *(,)* /případně i *[,],{,}*/, ,

Abecedy výrokové a predikátové logiky mají společného: 5 symbolů logických spojek, logické konstanty a některé symboly pomocné – závorky. Nově jsou zde zavedeny symboly pro proměnné a konstanty, n-ární funktory a n-ární predikátové symboly, kvantifikátor a pomocný symbol čárka.

Funkční symboly četnosti nula se nazývájí konstanty. Funkční a predikátové symboly se nazývají dohromady mimologické symboly. Logickým spojkám a kvantifikátorům se říká logické symboly.

Jazyk je tedy množina mimologických symbolů spolu s údajem, který pro každý prvek množiny určuje, zda je to funkční nebo predikátový symbol a jaká je jeho četnost.

Jazyk predikátové logiky, jak byl vymezen výše, je jazyk logiky 1. řádu, pro niž je charakteristické to, že *jediný přípustný typ proměnných jsou individuové proměnné.* Pouze individuové proměnné lze vázat kvantifikátory. Volbou jazyka je dáno, o čem se v dané teorii může mluvit.

Definice gramatiky, která udává, jak tvořit:

Definice gramatiky

- ***termy*:**
    - každý symbol proměnné je term
    - jsou-li $t_1,\dots,t_n$ ($n \geq 0$) termy a je-li f n-ární funkční symbol, pak výraz $f(t_1,\dots,t_n)$ je term; pro $n = 0$ se jedná o nulární funkční symbol, neboli individuovou konstantu (značíme a, b, c, …)
    - jen výrazy dle předchozího jsou termy
- ***atomické formule*:**
    - je-li p n-ární predikátový symbol a jsou-li $t_1,\dots,t_n$ termy, pak výraz $p(t_1,\dots,t_n)$ je atomická formule
    - jsou-li t_1 a t_2 termy, pak výraz ($t_1 = t_2$) je atomická formule
- ***formule*:**
    - každá atomická formule je formule
    - je-li výraz A formule, pak $\neg A$ je formule
    - jsou-li výrazy A a B formule, pak výrazy $(A \vee B)$, $(A \,\&\, B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ jsou formule
    - je-li x proměnná a A formule, pak výrazy $\forall xA$ a $\exists xA$ jsou formule
    - jen výrazy dle předchozího jsou formule.

Zápis formulí můžeme zjednodušit na základě následujících konvencí o vynechávání závorek:

- Elementární formule a formuli nejvyššího řádu netřeba závorkovat (vnější závorky vynecháváme).

- Závorky je možné vynechávat v souladu s následující prioritní stupnicí funktorů: *(∀, ∃)*, ¬, &, ∨, →, ↔. Každý funktor vlevo od vybraného funktoru váže silněji než vybraný funktor.
- V případě, že o prioritě vyhodnocení nerozhodnou ani závorky ani prioritní stupnice, vyhodnocujeme formuli zleva doprava.
- Speciálně vzhledem k asociativitě konjunkce a disjunkce, netřeba při zápisu vícečlenných konjunkcí a disjunkcí užívat žádné závorky.
- Vedle závorek *(,)* lze užívat i závorky *[,]*,*{,}*.

Z definice gramatiky je zřejmé, že termy jsou vytvářeny z proměnných, konstant a funktorů.

Bázový term je term neobsahující žádné proměnné.

Bázový term

Kvantifikátory umožňují zavést do jazyka možnost formálního vyjádření toho, že n-četný predikát platí nebo neplatí pro všechny nebo jen pro některé n-tice prvků univerza diskurzu. Kvantifikátory se vždy vtahují k symbolům pro proměnné obsažené v dané formuli.

Jazyk elementární aritmetiky je případem jazyka predikátové logiky 1. řádu s rovností. Má tyto (speciální) funkční symboly:

- nulární symbol: *0* (konstanta nula)
- unární symbol: *s* (funkce následník)
- binární symboly: + a × (sčítání a násobení)
- Příkladem termů jsou (používáme infixní notaci pro + a ×):
  0, $s(x)$, $s(s(x))$, $(x + y) \times s(s(0))$, atd.
- Formulemi jsou např. výrazy:
  $s(0) = (0 \times x) + s(0)$, $\exists x\, (y = x \times z)$, $\forall x\, [(x = y) \rightarrow \exists y\, (x = s(y))]$

Výskyt proměnné

Výskyt proměnné x ve formuli A ***je vázaný***, jestliže je součástí nějaké podformule $\forall x B(x)$ nebo $\exists x B(x)$ formule *A*. ***Proměnná x je vázaná ve formuli*** *A*, má-li v *A* vázaný výskyt. Výskyt proměnné x ve formuli *A*, který není vázaný, nazýváme ***volný***. ***Proměnná x je volná ve formuli*** *A*, má-li v *A* volný výskyt. Formule, v níž každá proměnná má buď všechny výskyty volné nebo všechny výskyty vázané, se nazývá ***formulí s čistými proměnnými***. Formule se nazývá ***uzavřenou***, neobsahuje-li žádnou volnou proměnnou. Formule, která obsahuje aspoň jednu volnou proměnnou se nazývá ***otevřenou***. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné formule *A*. Potom uzavřenou formuli

$$\forall A =df\, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A \quad \text{resp.} \quad \exists A =df\, \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n A,$$

nazýváme ***generálním*** resp. ***existenčním uzávěrem formule*** *A*.

Formule je rovněž uzavřená, neobsahuje-li žádnou proměnnou. Tatáž proměnná může mít ve formuli volný i vázaný výskyt, například:

$x < 0 \rightarrow \forall x(-x > 0)$

Symbolem *A(x/t)* označujeme formuli, která vznikne z formule A ***korektní substitucí termu*** t ***za proměnnou*** *x*. Má-li být substituce korektní musí splňovat následující pravidla:

- Při substituci nahrazujeme *všechny volné výskyty* proměnné *x* ve formuli *A*.
- Substituovat lze *pouze volné výskyty* proměnné *x* ve formuli *A*.

- Žádná individuová proměnná vystupující v termu t se po provedení substituce x/t nesmí stát ve formuli A vázanou (v takovém případě je term t za proměnnou x ve formuli A ***nesubstituovatelný***).

Symbolem $A(x_1,x_2,\ldots,x_n / t_1,t_2,\ldots,t_n)$ označujeme formuli, která vznikne z formule A korektními substitucemi x_i/t_i pro $i = 1, 2,\ldots,n$. Všechny formule tvaru $A(x_1, x_2,\ldots,x_n / t_1, t_2,\ldots,t_n)$ nazýváme ***instancemi formule*** A.

Jestliže formule A po substituci termů za proměnné již neobsahuje žádnou proměnnou, nazývá se bázovou instancí A. Proměnné obsažené ve formulích umožňují vyjadřovat obecná tvrzení. Dosazováním termů za proměnné lze pak získat jednotlivé instance formule, které představují tvrzení o jejich speciálních případech.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8-1

Nechť formulí $A(x)$ je: $p(x) \rightarrow \forall y\, q(x, y)$ a term t nechť je $f(y)$.

Proveďte substituci $A(x/f(y))$.

Řešení příkladu

Provedeme-li substituci $A(x/f(y))$, dostaneme:

$$p(f(y)) \rightarrow \forall y\, q(f(\mathbf{y}), y).$$

Vidíme, že druhý (zvýrazněný) výskyt proměnné y není volný (přitom původně zde byla volná proměnná x, takže jsme změnili "smysl výrazu").

Tedy term $f(y)$ není substituovatelný za x v dané formuli A,

tj. $p(x) \rightarrow \forall y\, q(x, y)$.

*

Nyní si ukážeme, jak převádět z přirozeného jazyka do symbolického jazyka PL1. Jde o analýzu výrazů přirozeného jazyka v rámci PL1.

Volba predikátových (a funkčních) konstant je libovolná potud, že nesmí dojít ke "kolizi vlastností, funkcí či vztahů". Výrazy jako "všichni", "každý", "nikdo", apod. "překládáme" všeobecným kvantifikátorem $\forall$, výrazy jako "někdo", "někteří", apod. "překládáme" existenčním kvantifikátorem $\exists$.

Dále budeme předpokládat, že jde o jazyk nad homogenním universem, proto v následujících příkladech považujeme za universum diskursu (obor proměnnosti proměnných) množinu všech individuí. Pro přehlednost budeme používat velká písmena pro predikátové symboly.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 8-2

Analyzujte v jazyce PL1 následující výroky:

1. Nikdo, kdo není zapracován (P), nepracuje samostatně (S).
2. Ne každý talentovaný (T) spisovatel (Sp) je slavný (Sl).
3. Pouze zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).
4. Ne každý člověk (C), který hodně mluví (M), nemá co říci (R).
5. Někdo je spokojen (Sn) a někdo není spokojen.
6. Někteří chytří lidé (Ch) jsou líní (L).
7. Všichni zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).

Řešení příkladu

Jako pomůcka k řešení může sloužit tato zásada: Po všeobecném kvantifikátoru $\forall$ následuje formule ve tvaru implikace ($\rightarrow$), kdežto po existenčním kvantifikátoru formule ve tvaru konjunkce (&).

1. Nikdo, kdo není zapracován (P), nepracuje samostatně (S).
   $\forall x\ [\neg P(x) \rightarrow \neg S(x)]$
2. Ne každý talentovaný (T) spisovatel (Sp) je slavný (Sl).
   $\neg\forall x\ \{[T(x)\ \&\ Sp(x)] \rightarrow Sl(x)\}$
3. Pouze zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).
   $\forall x\ [V(x) \rightarrow Z(x)]$
4. Ne každý člověk (C), který hodně mluví (M), nemá co říci (R).
   $\neg\forall x\ \{[C(x)\ \&\ M(x)] \rightarrow \neg R(x)\}$
5. Někdo je spokojen (Sn) a někdo není spokojen.
   $\exists x\ Sn(x)\ \&\ \exists x\ \neg Sn(x)$
6. Někteří chytří lidé (Ch) jsou líní (L).
   $\exists x\ [Ch(x)\ \&\ L(x)]$
7. Všichni zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).
   $\forall x\ [Z(x) \rightarrow V(x)]$

*

8.1 Sémantika PL1 – interpretace formulí

Sémantika neboli význam formulí predikátové logiky 1. řádu, je dána jejich interpretací. Než tento pojem přesně definujeme, uvedeme několik neformálních motivací a vysvětlení. Položíme-li si otázku, zda daná formule PL1 je pravdivá či ne, pak taková otázka je v podstatě nesmyslná, pokud nevíme, co formule znamená, tedy jak je interpretována.

Tak např. formule

$\forall x\ p(f(x), x)$

- může "říkat", že pro všechna přirozená čísla platí, že jejich druhá mocnina je větší než to číslo, nebo že pro všechny lidi platí, že jejich otec je starší než dotyčný člověk, pak je samozřejmě v takových interpretacích pravdivá.
- Může ale také znamenat, že pro všechna přirozená čísla platí, že jejich druhá mocnina je menší než to číslo, nebo že pro všechny lidi platí, že jejich otec je mladší než dotyčný člověk, pak je samozřejmě (v takové interpretaci) nepravdivá.

V čem tedy spočívá interpretace formule? Nejprve musíme stanovit, "o čem mluvíme", tedy jaká je předmětná oblast – obor proměnnosti (individuových) proměnných, tj. zvolíme jistou *neprázdnou* množinu – ***universum diskursu***, jejíž prvky jsou ***individua.*** Jelikož predikátové symboly mají vyjadřovat vztahy mezi těmito předměty – prvky universa, přiřadíme každému *n*-árnímu ***predikátovému symbolu*** jistou *n*-ární ***relaci*** (tj. podmnožinu Kartézského součinu) nad universem. Speciálně, jedná-li se o unární predikátový symbol ($n = 1$), pak přiřadíme podmnožinu universa. Podobně ***funkční symboly*** budou vyjadřovat *n*-ární ***funkce*** nad universem. Teprve poté, co je daná formule interpretována, můžeme ***vyhodnotit*** její ***pravdivost*** či nepravdivost ***v dané interpretaci.***

Informace představují data spolu se svou interpretací. Interpretací dat se rozumí jejich významová stránka. Pojem informace je tedy neoddělitelný od sémantiky dat.

Je zde však ještě jeden problém, a to jsou proměnné. Proměnným jazyka PL1 přiřazujeme ***valuací*** individua, tj. prvky universa. (Proměnným jazyka PL2 mohou být přiřazeny také vlastnosti či funkce.) Jak uvidíme dále z definice sémantiky kvantifikátorů, pravdivostní hodnota formule nezávisí na hodnotě vázaných proměnných (pouze volné proměnné jsou "skutečné" proměnné). Obsahuje-li však formule nějaké volné proměnné, můžeme vyhodnotit její pravdivost v interpretaci pouze *v* ***závislosti na ohodnocení*** (valuaci) ***volných proměnných***. Při některé valuaci může být formule v dané interpretaci pravdivá, při jiné nepravdivá.

Tak např. formule

$\forall x\ p(f(x), y)$

- může být interpretována nad množinou celých čísel tak, že symbolu p je přiřazena relace větší nebo rovno ($\geq$), symbolu f funkce druhá mocnina (tedy f(x) "znamená" x^2).
- Pak formule "říká", že pro každé celé číslo x platí, že x^2 je větší než nebo rovno jistému číslu ***y.***
- Tedy pravdivost formule v této interpretaci závisí na ohodnocení (valuaci) proměnné *y*.
- Přiřadíme-li např. *y* číslo 5, je formule nepravdivá, přiřadíme-li třeba číslo -3 nebo 0, je formule pravdivá.
- Obecně bude formule pravdivá (v této interpretaci) pro každou valuaci proměnné *y,* která přiřadí *y* záporné číslo nebo nulu, nepravdivá pro všechny valuace, které přiřadí proměnné *y* číslo kladné.

DEFINICE 8-2 INTERPRETACE JAZYKA PL1

Df

Interpretace jazyka predikátové logiky 1. řádu je tato trojice objektů (která je někdy nazývána *interpretační struktura*):

- *Neprázdná* množina M, která se nazývá **universum diskursu** a její prvky jsou **individua.**
- Interpretace funkčních symbolů jazyka, která přiřazuje každému *n*-árnímu funkčnímu symbolu f určité **zobrazení** $f_M: M^n \rightarrow M$.

Interpretace predikátových symbolů jazyka, která přiřazuje každému *n*-árnímu predikátovému symbolu *p* jistou *n*-ární relaci p_M nad *M*, tj. **podmnožinu Kartézského součinu** M^n**.**

Každý *n*-ární funkční symbol je tedy interpretován jako funkce, která přiřazuje *n*-tici individuí právě jedno individuum, tj. zobrazení z $M \times ... \times M$ do *M*. Specielně:

- je-li $n = 0$, pak se jedná o nulární funkční symbol, tedy o individuovou konstantu, které je přiřazen prvek universa – individuum
- je-li $n = 1$, pak se jedná o unární funkční symbol, kterému je přiřazena funkce o jednom argumentu (např. nad množinou čísel x^2, $x + 1$, nad množinou individuí otec(*x*), matka(*x*), atd.)
- je-li $n = 2$, pak se jedná o binární funkční symbol, kterému je přiřazena binární funkce se dvěma argumenty (např. nad množinou čísel $x + y$, $x.y$, atd.)

Každý *n*-ární predikátový symbol p je interpretován jako *n*-ární relace p_M, tj. podmnožina Kartézského součinu M ×...× M, neboli zobrazení $M \times ... \times M \rightarrow \{1,0\}$. Tato relace p_M se nazývá **obor pravdivosti** predikátu. Speciálně:

- je-li $n = 0$, pak se jedná o nulární predikátový symbol, kterému je přiřazena hodnota *1* nebo *0* (pravda, nepravda) tak, jak to již známe z výrokové logiky.
- je-li $n = 1$, pak se jedná o unární predikátový symbol, kterému je přiřazena podmnožina universa *M*. (Vlastnosti tedy v PL1 vyjadřujeme – poněkud nepřesně – jako podmnožiny universa.)
- je-li $n = 2$, pak se jedná o binární predikátový symbol, kterému je přiřazena binární relace nad universem (např. relace větší, menší, apod.)

Výroková logika je tedy speciálním (nejjednodušším) případem predikátové logiky, a to 0. řádu, ve které pracujeme pouze s nulárními predikáty a nepotřebujeme proto termy, funkční symboly, individuové proměnné ani universum diskursu (obor proměnnosti proměnných). Nulárním predikátům přiřazujeme pouze hodnoty pravda, nepravda.

Ohodnocení (valuace) individuových proměnných je zobrazení *e*, které každé proměnné *x* přiřazuje hodnotu $e(x) \in M$ (prvek univerza).

Ohodnocení termů e^* indukované ohodnocením proměnných *e* je induktivně definováno takto:

- $e^*(x) = e(x)$
- $e^*(f(t_1, t_2,...,t_n)) = f_M(e^*(t_1), e^*(t_2),...,e^*(t_n))$, kde f_M je funkce přiřazená v dané interpretaci funkčnímu symbolu *f*.

Hodnotou (realizací) termu *t* v interpretaci *I* je tedy vždy jistý *prvek universa.* Tedy funkční symboly jsou "jména funkcí – zobrazení", termy jsou "jména prvků universa", zatímco predikátové symboly jsou “jména relací” a formule jsou “jména pravdivostních hodnot”.

DEFINICE 8-3 PRAVDIVOST FORMULE

Df

Pravdivost formule A v interpretaci I pro ohodnocení e individuových proměnných (což značíme $|=_I A[e]$ – formule A je pravdivá v I pro e, nebo také A ***je splněna v I ohodnocením e***), je definována v závislosti na tvaru formule:

Je-li A atomická formule tvaru

- $p(t_1, \ldots, t_n)$, kde p je predikátový symbol (různý od =) a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $|=_I A[e]$, jestliže platí $< e^*(t_1), e^*(t_2),\ldots,e^*(t_n)> \in p_M$, kde p_M je relace přiřazená interpretací I symbolu p – obor pravdivosti p. Tedy individua, která jsou hodnotou termů $t_1, \ldots, t_n$, jsou v relaci p_M.
- $(t_1 = t_2)$, pak $|=_I A[e]$, jestliže platí $e^*(t_1) = e^*(t_2)$, tj. oba termy jsou realizovány týmž individuem.

Je-li A složená formule tvaru

- $\neg B$, pak $|=_I A[e]$ jestliže neplatí $|=_I B[e]$
- B & C, pak $|=_I A[e]$, jestliže platí $|=_I B[e]$ a $|=_I C[e]$
- $B \vee C$, pak $|=_I A[e]$, jestliže platí $|=_I B[e]$ nebo $|=_I C[e]$
- $B \rightarrow C$, pak $|=_I A[e]$, jestliže neplatí $|=_I B[e]$ nebo platí $|=_I C[e]$
- $B \leftrightarrow C$, pak $|=_I A[e]$, jestliže platí $|=_I B[e]$ a $|=_I C[e]$, nebo neplatí $|=_I B[e]$ a neplatí $|=_I C[e]$.

Je-li A formule tvaru

- $\forall x\ B$, pak $|=_I A[e]$, jestliže pro *libovolné* individuum $i \in M$ platí $|=_I B[e(x/i)]$, kde $e(x/i)$ je valuace stejná jako e až na to, že přiřazuje proměnné x individuum i.
- $\exists x\ B$, pak $|=_I A[e]$, jestliže pro *alespoň jedno* individuum $i \in M$ platí $|=_I B[e(x/i)]$, kde $e(x/i)$ je valuace stejná jako e až na to, že přiřazuje proměnné x individuum i.

Je-li universum diskursu konečná množina $M = \{a_1,\ldots,a_n\}$, pak platí následující ekvivalence formulí:

$$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \,\&\, \ldots \,\&\, A(a_n)$$
$$\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee \ldots \vee A(a_n).$$

Z definice kvantifikátorů je navíc zřejmé, že platí:

$$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg A(x),$$
$$\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg A(x).$$

Formule A je splnitelná v interpretaci I, jestliže *existuje* ohodnocení e proměnných takové, že platí $|=_I A\,[e]$.

Formule A je pravdivá v interpretaci I, značíme $|=_I \boldsymbol{A}$, jestliže pro *všechna* možná ohodnocení e individuových proměnných platí, že $|=_I A[e]$.

Formule A je splnitelná, jestliže existuje interpretace I, ve které je splněna, tj. jestliže existuje interpretace I a valuace e takové, že $|=_I A[e]$. Taková interpretace I a valuace e, tedy dvojice $\langle I,e \rangle$, pro kterou platí $|=_I A[e]$, se nazývá ***model*** formule.

Formule A je tautologií (logicky pravdivá), značíme $|=$ ***A***, jestliže je pravdivá v každé interpretaci.

Formule A je kontradikcí, jestliže nemá model, tedy neexistuje interpretace I, která by formuli A splňovala.

Podmnožinou množiny splnitelných formulí je množina formulí platných v dané struktuře při všech jejích možných valuacích a podmnožinou této podmnožiny je pak množina logicky platných formulí.

Model množiny formulí $\{A_1,\ldots,A_n\}$ je taková interpretace I (a případně valuace e volných proměnných), která splňuje všechny formule $A_1,\ldots,A_n$, tedy dvojice $\langle I,e \rangle$, pro kterou platí $|=_I A_1[e],\ldots, |=_I A_n[e]$.

Formule B logicky vyplývá z formulí $A_1, \ldots, A_n$, značíme $\boldsymbol{A_1,\ldots,A_n} |= \boldsymbol{B}$, jestliže B je pravdivá v každém modelu množiny formulí $A_1,\ldots,A_n$. Tedy pro každou interpretaci I, která splňuje formule $A_1, \ldots, A_n$ ($|=_I A_1[e],\ldots, |=_I A_n[e]$) platí, že splňuje také formuli B ($|=_I B[e]$).

Formule A, B ***jsou (sémanticky) ekvivalentní***, jestliže pro všechny interpretace I a všechny valuace e mají stejná pravdivostní ohodnocení. Skutečnost, že formule A, B jsou ekvivalentní zapisujeme: $A \Leftrightarrow B$.

VĚTA 8-1

V

Nechť platí: A je formule výrokové logiky sestavená z výrokových symbolů $p_1, p_2,\ldots,p_n$, $B_1,B_2,\ldots,B_n$ jsou libovolné formule predikátové logiky, formule A' vznikne z formule A náhradami proměnných $p_1, p_2,\ldots,p_n$ formulemi $B_1, B_2,\ldots,B_n$ (po řadě, tj. B_i za p_i). Potom platí: je-li A tautologií výrokové logiky, je A' tautologií predikátové logiky.

Důkaz :

Pravdivostní hodnota formule A nezávisí na pravdivostních hodnotách formulí $p_1, p_2,\ldots,p_n$ a tedy ani pravdivostní hodnota formule A' nezávisí na pravdivostních hodnotách formulí $B_1, B_2,\ldots,B_n$.

VĚTA 8-2

V

Nechť platí: Formule A obsahuje podformule $B_1, B_2,\ldots,B_n$, formule $B_1, B_2,\ldots,B_n$ jsou po řadě ekvivalentní s formulemi $B_1', B_2',\ldots,B_n'$ /tj. $B_i \Leftrightarrow B_i'$/, formule A' vznikne z formule

A náhradami formulí $B_1, B_2,...,B_n$ formulemi $B_1', B_2',...,B_n'$ (po řadě, tj. B_i' za B_i). Potom platí: je-li A tautologií predikátové logiky, je i A' tautologií predikátové logiky.

Důkaz :

Ve formuli A nahrazujeme podformule formulemi se stejným pravdivostním ohodnocením (pro všechny *(I, e)*). Tedy pravdivostní ohodnocení formule A' musí být pro všechny *(I, e)* stejné jako pravdivostní ohodnocení formule A. Je-li tedy A tautologií, je tautologií i A'.

Nyní uvedeme některé důležité tautologie predikátové logiky:

1. $\models \forall x A(x) \rightarrow A(y)$ dictum de omni
   speciálně $\models \forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$
2. $\models A(y) \rightarrow \exists x A(x)$

De Morganovy zákony:

3. $\models \neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
4. $\models \neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

Zákony distribuce kvantifikátorů:

5. $\models \forall x[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)]$
6. $\models \forall x[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)]$
7. $\models \forall x[A(x) \,\&\, B(x)] \leftrightarrow [\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)]$
8. $\models \exists x[A(x) \,\&\, B(x)] \rightarrow [\exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)]$
9. $\models [\forall x A(x) \vee \forall x B(x)] \rightarrow \forall x[A(x) \vee B(x)]$
10. $\models \exists x[A(x) \vee B(x)] \leftrightarrow [\exists x A(x) \vee \exists x B(x)]$

Zákony prenexních operací (předpokládáme, že formule A neobsahuje volnou proměnnou x):

11. $\models \forall x[A \rightarrow B(x)] \leftrightarrow [A \rightarrow \forall x B(x)]$
12. $\models \exists x[A \rightarrow B(x)] \leftrightarrow [A \rightarrow \exists x B(x)]$
13. $\models \forall x[B(x) \rightarrow A] \leftrightarrow [\exists x B(x) \rightarrow A]$
14. $\models \exists x[B(x) \rightarrow A] \leftrightarrow [\forall x B(x) \rightarrow A]$
15. $\models \forall x[A \,\&\, B(x)] \leftrightarrow [A \,\&\, \forall x B(x)]$
16. $\models \exists x[A \,\&\, B(x)] \leftrightarrow [A \,\&\, \exists x B(x)]$
17. $\models \forall x[A \vee B(x)] \leftrightarrow [A \vee \forall x B(x)]$
18. $\models \exists x[A \vee B(x)] \leftrightarrow [A \vee \exists x B(x)]$

Zákony komutace kvantifikátorů:

19. $\models \forall x \forall y A(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$
20. $\models \exists x \exists y A(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$
    $\models \exists x \forall y A(x,y) \rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

Nechť term t je substituovatelný za proměnnou x:

22. $\models \forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$ ***zákon konkretizace***
23. $\models A(x/t) \rightarrow \exists x A(x)$ ***zákon abstrakce***
24. $\models \forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$ ***zákon partikularizace***

DEFINICE 8-4 DUÁLNÍ FORMULE

Df

Nechť formule F je utvořena z elementárních formulí A, B,... pouze pomocí funktorů $\neg$, &, $\vee$, $\forall$, $\exists$. Formuli F', která vznikne z formule F vzájemnými záměnami funktorů & a $\vee$ a vzájemnými záměnami funktorů $\forall$ a $\exists$, nazýváme ***duální formulí*** k formuli F.

Vzhledem k tomu, že $F'' = F$, jsou formule F a F' ***duálními navzájem***.

VĚTA 8-3

V

Nechť L je jazyk predikátové logiky s danou interpretací I, v němž x je proměnná, A je formule. $I \vDash A$, právě když $I \vDash \forall x\, A$.

Důkaz :

Nechť $I \vDash A$, tj. A je pravdivá v I při libovolném ohodnocení, tedy i pro takové ohodnocení e, v němž za x zvolíme libovolné individuum m z universa M. Platí tedy $I \vDash \forall x\, A[e(x/m)]$ pro libovolně zvolené m a proto platí $I \vDash \forall x\, A$.

Dokážeme nepřímo: předpokládejme, že neplatí $I \vDash \forall x\, A$. Potom by muselo existovat ohodnocení e_0 takové, že při němž by neplatilo $I \vDash A[e_0]$, tj. platilo by $I \vDash \neg A[e_0]$. To ale odporuje předpokladu, že $I \vDash A[e]$ pro všechna e.

VĚTA 8-4

V

Nechť A je formule jazyka L a I jeho interpretace. Potom A je nesplnitelná v I, právě když $I \vDash \forall \neg A$.

Důkaz :

Je-li A nesplnitelná, tj. neplatí $I \models A[e]$ pro libovolné e, platí tedy $I \models \neg A[e]$ pro všechna e a proto platí $I \models \neg A$. Podle předcházející věty pak platí $I \models \forall \neg A$.
Dokážeme nepřímo: Kdyby A byla splnitelná v I, existovalo by ohodnocení e takové, že $I \models A[e]$, proto by nemohlo platit $I \models \forall \neg A$.

VĚTA 8-5

Nechť A je formule jazyka L a I jeho interpretace. Potom A je splnitelná v I, právě když $I \models \exists A$.

Důkaz :

Je-li A splnitelná, pak existuje takové ohodnocení e, že platí $I \models A[e]$. Zřejmě pak platí $I \models \exists A[e]$. Podle důsledku předchozího lemmatu je pak ale $I \models \exists A$, neboť $\exists A$ je uzavřená formule.

Dokážeme nepřímo: kdyby A byla nesplnitelná, neexistovalo by ohodnocení e takové, že i $I \models A[e]$, tedy by neplatilo $I \models \exists A[e]$ a proto ani $I \models \exists A$.

KONTROLNÍ OTÁZKA 7

1. Definujte jazyk predikátové logiky.
2. Definujte splnitelnost a pravdivost v predikátové logice.
3. Co nazýváme interpretací?

CVIČENÍ 7

Příklad 1: Převeďte následující věty v přirozeném jazyce do formulí v predikátové logice.

- Někteří studenti nemají hudební nadání.
- Někteří přítomní bydlí v hotelu.
- Někteří studenti nejsou ani nadaní ani pilní.
- Každé číslo dělitelné 8 je dělitelné 4.
- Kdo seje vítr, ten sklízí bouři.
- Psi, kteří hodně štěkají, nekoušou.
- Žádný tyran není spravedlivý.
- Každý člověk má otce, má i matku.
- Každý, kdo má otce, má i matku.
- Každý člověk je mladší než jeho rodiče. (pomocí termů)
- Žádný dobrý učitel nikoho zbytečně nepotrestal.
- Někdo má rád každého.
- Někdo má rád ostatní.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Všichni sourozenci mají stejného otce. (pomocí termů)

Příklad 2: Nechť výraz P(l, e, t) znamená Luboš půjčuje Evě tužku. Zapište symbolicky následující výroky.

- Někdo půjčuje Evě tužku.
- Eva půjčuje někomu tužku.
- Eva někomu něco půjčuje.
- Někdo Evě něco půjčuje.
- Luboš každému něco půjčuje.
- Někdo někomu něco půjčuje.
- Každý někomu něco půjčuje.
- Někdo každému všechno půjčuje.
- Někdo nikomu nic nepůjčuje.
- Žádný každému všechno nepůjčuje.
- Všichni všechno všem půjčují.

Příklad 3: Nechť výraz V(p, t) znamená „vidím předmět p v okamžiku t. „zapište symbolicky věty.

- Vždy něco vidím.
- Někdy nevidím nic.
- Existují předměty, které nikdy nevidím.
- Vidím každou věc v některém časovém okamžiku.

Příklad 4: Najděte negace formulí

- $\exists x\ ((p(x)\ \&\ q(x)) \vee r(x))$
- $\forall\ x(p(x) \rightarrow \forall y\ q(y))$
- $\forall\ x(p(x) \vee \exists y\ q(y))$
- $\forall\ x(p(x) \rightarrow q(x))\ \&\ \exists x(r(x)\ \&\ s(x))$

9 AUTOMATICKÉ DOKAZOVÁNÍ V PREDIKÁTOVÉ LOGICE (OBECNÁ REZOLUČNÍ METODA)

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY AUTOMATICKÉ DOKAZOVÁNÍ V PREDIKÁTOVÉ LOGICE (OBECNÁ REZOLUČNÍ METODA)

Cílem devátého modulu je rezoluční princip v predikátové logice 1. řádu.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY AUTOMATICKÉ DOKAZOVÁNÍ V PREDIKÁTOVÉ LOGICE (OBECNÁ REZOLUČNÍ METODA)

Rezoluční princip, prenexní tvar, Skolemova forma, unifikace.

Klíčová slova

Důkaz logické pravdivosti, a tedy i logického vyplývání apod., zkoumáním všech možných interpretací, je v predikátové logice často obtížný. Jednou z efektivních metod je však rezoluční metoda, která je pro PL1 zobecněním základní rezoluční metody výrokové logiky.

Obecná rezoluční metoda se stala základem pro logické programování, zejména programovací jazyk PROLOG (Programming in Logic).

Rezoluční metoda je jedna z procedur (algoritmů), které parciálně rozhodují, zda daná formule PL1 je nesplnitelná.

Pro předloženou formuli A, která nesplnitelná je, tedy procedura v konečném čase tuto skutečnost zjistí a zastaví se. V případě, že A je splnitelná, algoritmus nemusí nikdy skončit svou činnost.

Chceme-li tedy rozhodnout, zda daná formule A je logicky pravdivá, použijeme rezoluční metodu na formuli $\neg A$ a zjišťujeme, zda je nesplnitelná. Je-li tomu tak, procedura to zjistí a vydá kladnou odpověď. V opačném případě proces nemusí nikdy skončit.

Chceme-li zjistit, zda-li B vyplývá z předpokladů $A_1,\ldots,A_n$, formálně zapsáno: $\{A_1,\ldots,A_n\} \models B$ aplikujeme rezoluční metodu na formuli $A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; A_n \;\&\; \neg B$, neboť pokud je tato formule nesplnitelná, pak je formule $(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \rightarrow B$ tautologie a vztah vyplývání platí.

Rezoluční metodu lze aplikovat pouze na formule speciálního tvaru, v tzv. **klauzulární (Skolemově) formě**. Nejprve proto ukážeme, že každou formuli je možno převést do klauzulární formy tak, že výsledná formule je splnitelná, právě když výchozí formule je splnitelná. Potom uvedeme Herbrandovu větu, o niž se opírají první známé rozhodovací procedury pro dokazování nesplnitelnosti v predikátové logice 1. řádu. Uplatnění rezolučního pravidla výrokové logiky je totiž v PL1 komplikováno tím, že v literálech se vyskytují termy obecně různého „tvaru", které je nutno nějak „unifikovat". Popíšeme základní rezoluční metodu pro PL1, která je značně neefektivní. Průlomem v těchto metodách se však stal Robinsonův objev unifikačního algoritmu, který umožnil zobecnění základní rezoluční metody na mnohem účinnější rezoluční metodu, která se pak stala základem logického programování.

Automatické dokazování v predikátové logice zobecňuje postupy automatického dokazování výrokové logiky. Oproti situaci ve výrokové logice je situace v predikátové logice složitější a to z těchto důvodů. Komplikovanější je procedura převedení formule na klauzulární tvar. Oproti výrokové logice obsahuje navíc: převod formule na prenexní tvar, eliminaci kvantifikátorů z formule. Složitější je tvar rezolučního odvozovacího pravidla. Jeho použití vyžaduje úpravu literálů - unifikaci.

DEFINICE 9-1 PRENEXNÍ TVAR FORMULE

Df

Formule A predikátové logiky je v ***prenexním tvaru***, má-li podobu $Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\, B$, kde

- $n \geq 0$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je Q_i buď všeobecný kvantifikátor $\forall$ nebo existenční $\exists$,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou navzájem různé individuové proměnné,
- B je formule utvořená z elementárních formulí pouze užitím výrokových funktorů $\neg$, $\&$, $\vee$.

Výraz $Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ se nazývá ***prefix (charakteristika)*** a B ***otevřeným jádrem (maticí)*** formule A v prenexním tvaru.

VĚTA 9-1

V

Každou formuli lze přepsat do prenexního tvaru, tj. ke každé formuli predikátové logiky A existuje formule A^* v prenexním tvaru, která je s formulí A ekvivalentní (tj. $A \Leftrightarrow A^*$).

Důkaz :

Algoritmus převodu formule do prenexního tvaru má tyto kroky:

1. Eliminace funktorů $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$. Toho lze dosáhnout užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$
$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \,\&\, (\neg B \vee A).$$

2. Převedení formule na tvar s čistými proměnnými.

- Použijeme následující ekvivalence (náhrady levé strany pravou): $(\forall xA \,\&\, \forall xB) \Leftrightarrow \forall x\, (A \,\&\, B)$ $\quad (\exists xA \vee \exists xB) \Leftrightarrow \exists x\, (A \vee B)$
- Přejmenování vázaných proměnných tak, aby žádná proměnná nebyla ve formuli současně volná i vázaná a tak, aby všechny vázané proměnné byly navzájem různé. To platí nejenom pro celou formuli, ale i pro každou její podformuli.

3. Vypuštění nadbytečných kvantifikátorů, tj. Kvantifikátorů jejichž oblast působnosti neobsahuje žádný výskyt kvantifikované proměnné.
4. Přenesení všech výskytů funktoru negace bezprostředně před elementární formule. Toho lze dosáhnout opakovaným užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A,$$
$$\neg(A \,\&\, B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \,\&\, \neg B,$$
$$\neg \forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x),$$
$$\neg \exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x).$$

5. Přenesení všech kvantifikátorů na začátek formule. Toho lze dosáhnout opakovaným užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$\forall xA \,\&\, B \Leftrightarrow \forall x\, (A \,\&\, B)$ $\qquad \exists xA \vee B \Leftrightarrow \exists x\, (A \vee B)$
B neobsahuje volnou x
$A \,\&\, \forall xB \Leftrightarrow \forall x\, (A \,\&\, B)$ $\qquad A \vee \exists xB \Leftrightarrow \exists x\, (A \vee B)$
A neobsahuje volnou x
$\exists xA \,\&\, B \Leftrightarrow \exists x\, (A \,\&\, B)$ $\qquad \forall xA \vee B \Leftrightarrow \forall x\, (A \vee B)$
B neobsahuje volnou x
$A \,\&\, \exists xB \Leftrightarrow \exists x\, (A \,\&\, B)$ $\qquad A \vee \forall xB \Leftrightarrow \forall x\, (A \vee B)$
A neobsahuje volnou x

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-1

Určete prenexní formu formule: $\forall x\, [p(x) \,\&\, \forall y \exists x\, (\neg q(x,y) \rightarrow \forall z\, r(a,x,y))]$.

Řešení příkladu

$\forall x\, [p(x) \,\&\, \forall y \exists x\, (q(x,y) \vee \forall z\, r(a,x,y))]$ *eliminace* $\rightarrow$
$\forall x\, [p(x) \,\&\, \forall y \exists t\, (q(t,y) \vee \forall z\, r(a,t,y))]$ *přejmenování proměnné*
$\forall x\, [p(x) \,\&\, \forall y \exists t\, (q(t,y) \vee r(a,t,y))]$ *vypuštění nadbytečného kvantifikátoru*

$\forall x \forall y\, [p(x)\, \&\, \exists t\, (q(t,y) \vee r(a,t,y))]$ *přesun kvantifikátoru doleva*
$\forall x \forall y \exists t\, [p(x)\, \&\, (q(t,y) \vee r(a,t,y))]$ *přesun kvantifikátoru dolev.*

*

Prenexní tvar formule není určen jednoznačně. Konečná podoba prenexní formule závisí na pořadí provádění úprav a na způsobu přejmenování vázaných proměnných. Všechny prenexní tvary jsou však ekvivalentní.

DEFINICE 9-2 SKOLEMOVA FORMA FORMULE

Df

Skolemova forma uzavřené formule je prenexní tvar této formule, která neobsahuje žádné existenční kvantifikátory. Skolemova forma vznikne z prenexní formy opakovaným použitím následujících dvou operací (***skolemizací***):

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y\, A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\, A(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, kde f je nový (v jazyce dosud nepoužitý) n-ární funkční symbol, tzv. ***Skolemova funkce***, $\exists x \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\, A(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\, A(c, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, kde c je nová (v jazyce dosud nepoužitá) individuová konstanta, tzv. ***Skolemova konstanta***

Každému eliminovanému existenčnímu kvantifikátoru odpovídá jiná Skolemova funkce nebo konstanta.
Skolemovu formu formule A označíme zápisem A^S.

Konjunktivní normální tvar formule predikátové logiky je prenexní tvar formule, jejíž matice je konjunkce disjunkcí literálů (tj. konjunkce klauzulí).

Disjunktivní normální tvar formule predikátové logiky je prenexní tvar formule, jejíž matice je disjunkce konjunkcí literálů.

Klauzulární forma formule je Skolemova forma, jejíž matice je v klauzulárním tvaru, tj. je konjunkcí klausulí.

Skolemovy konstanty a funkce představují předměty (reprezentanty předmětů), o jejichž existenci vypovídají původní formule.

Například: $\exists x \forall y\, \mathrm{A}(x,y) \rightarrow \forall y\, \mathrm{A}(\mathrm{c}, y)$
Je-li univerzem množina všech nezáporných celých čísel a realizací (interpretací) predikátu A je relace < (tedy $A(x,y)$ „chápeme jako“ x < y), pak c interpretujeme jako 0. V tomto modelu je konstanta c jediná, ale v jiných modelech tomu tak být nemusí.

$$\forall x \exists y\, A(x,y) \rightarrow \forall x\, A(x, f(x))$$

Je-li univerzem množina reálných čísel a oborem pravdivosti predikátu A je relace <, pak interpretací funkčního symbolu f může být např. funkce f', která je zadaná předpisem: $f'(x) = x + \sqrt{3}$.

Po provedené skolemizaci zůstávají v prefixu formule pouze obecné kvantifikátory. Důležitá pro nás je ***klausulární forma*** formule:

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n [C_1 \& C_2 \& \ldots C_k],$$

kde C_i jsou klausule (disjunkce literálů). Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze uzavřené formule, není nutné tyto kvantifikátory explicitně uvádět.

Skolemova forma A^S uzavřené formule A není ekvivalentní s formulí A, ale platí: $\models A^S \rightarrow A$, neboli $A^S \models A$.

VĚTA 9-2

V

Každá formule A může být převedena na formuli A^S v *klauzulární* (Skolemově) *formě* takovou, že A je splnitelná, právě když A^S je splnitelná.

Důkaz :

Uvedeme algoritmus převodu $A \rightarrow A^S$.

1. *Utvoření existenčního uzávěru formule* A. (Zachovává splnitelnost.)
2. *Eliminace nadbytečných kvantifikátorů.* (Ekvivalentní krok.)
   Z formule A vypustíme všechny kvantifikátory $\forall x_i$, $\exists x_i$, v jejichž rozsahu se nevyskytuje proměnná x_i.
3. *Přejmenování proměnných.* (Ekvivalentní rok.)
   Přejmenujeme všechny proměnné, které jsou v A kvantifikovány více než jednou tak, aby všechny kvantifikátory měly navzájem různé proměnné.
4. *Eliminace spojek* $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ podle těchto vztahů (Ekvivalentní krok.):
   $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A)$
5. *Přesun spojek* $\neg$ *dovnitř.* (Ekvivalentní krok.)
6. *Přesun kvantifikátorů doprava.* (Ekvivalentní krok.)
   Provádíme náhrady podle těchto ekvivalencí (Q je kvantifikátor $\forall$ nebo $\exists$; © je symbol $\&$ nebo $\vee$; A, B neobsahují volnou proměnnou x):
   $Qx\ (A © B(x)) \Leftrightarrow A © Qx\ B(x)$, $Qx\ (A(x) © B) \Leftrightarrow Qx\ A(x) © B$
7. *Eliminace existenčních kvantifikátorů* (Zachovává splnitelnost.)
   Provádíme postupně Skolemizaci.
8. *Přesun všeobecných kvantifikátorů doleva.* (Ekvivalentní krok, neboť jsme již provedli krok 3. a platí ekvivalence dle 6.)
9. *Použití distributivních zákonů.* (Ekvivalentní krok.)
   Provedeme postupné náhrady podformulí vlevo formulemi vpravo:
   $(A \& B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \& (B \vee C)$, $A \vee (B \& C) \Leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$.

Z praktických důvodů se snažíme minimalizovat počet argumentů zaváděných Skolemových funkcí. Krok 6 slouží tomuto účelu. Výslednou formuli můžeme ještě zjednodušit použitím úprav, které zachovávají splnitelnost.

Uvažujme formuli

$$A = \forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists v\ [p(z,y) \wedge q(x,v)].$$

Pokud bychom aplikovali Skolemizaci bez kroku 6, dostali bychom formuli:

$$A^{S\,'} = \forall x\ \forall z\ [p(z, f(x))\ \&\ q(x, h(x,z)],$$

kde *f*, *h* jsou zavedené Skolemovy funkce.

Použijeme-li však nejprve krok 6, dostaneme

$$A' = \exists y\ \forall z\ p(z,y)\ \&\ \forall x\ \exists v\ q(x,v)$$

a z ní eliminací existenčních kvantifikátorů

$$A'' = \forall z\ p(z, a)\ \&\ \forall x\ q(x, h(x)).$$

Odtud pak přesunem kvantifikátorů doleva:

$$A^S = \forall z\ \forall x\ [p(z, a)\ \&\ q(x, h(x))],$$

v níž zavedené Skolemovy funkce *a*, *h* jsou jednodušší.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-2

Nalezněte Skolemovu formu uzavřené prenexní formy
$\exists u\, \forall v \exists w\, \forall x\, \forall y \exists z\ A(u, v, w, x, y, z)$.

Řešení příkladu

1. $\exists u \forall v \exists w \forall x \forall y \exists z\ A(u, v, w, x, y, z)$ — výchozí forma
2. $\forall v \exists w\, \forall x\, \forall y \exists z\ A(a, v, w, x, y, z)$ — po eliminaci $\exists u$
3. $\forall v\, \forall x\, \forall y \exists z\ A(a, v, f(v), x, y, z)$ — po eliminaci $\exists w$
4. $\forall v\, \forall x\, \forall y\ A(a, v, f(v), x, y, g(v,x,y))$ — po eliminaci $\exists z$
5. $A(a, v, f(v), x, y, g(v,x,y))$ — bez explicitní obecné kvantifikace.

Převedeme formuli *A* na formuli v klausulární (Skolemově) formě A^S:
$A = \forall x\{p(x) \rightarrow \exists z\{\neg \forall y[q(x,y) \rightarrow p(f(x_1))]\ \&\ \forall y[q(x,y) \rightarrow p(x)]\}\}$.

1.,2. Utvoření existenčního uzávěru a eliminace $\exists z$:

$$A_2 = \exists x1\ \forall x\{p(x) \rightarrow \{\neg \forall y[q(x,y) \rightarrow p(f(x1))]\ \&\ \forall y[q(x,y) \rightarrow p(x)]\}\}.$$

3. Přejmenování proměnné *y*:

$$A_3 = \exists x1\ \forall x\{p(x) \rightarrow \{\neg \forall y[q(x,y) \rightarrow p(f(x1))]\ \&\ \forall z[q(x,z) \rightarrow p(x)]\}\}.$$

4. Eliminace $\rightarrow$:

$$A_4 = \exists x1\ \forall x\{\neg p(x) \vee \{\neg \forall y[\neg q(x,y) \vee p(f(x1))]\ \&\ \forall z[\neg q(x,z) \vee p(x)]\}\}.$$

5. Přesun negace dovnitř:

$$A_5 = \exists x1\ \forall x\{\neg p(x) \vee \{\exists y[q(x,y)\ \&\ \neg p(f(x1))]\ \&\ \forall z[\neg q(x,z) \vee p(x)]\}$$

6. Přesun kvantifikátorů $\exists y$ a $\forall z$ doprava:

$$A_6 = \exists x1 \forall x\{\neg p(x) \vee \{[\exists y\ q(x,y)\ \&\ \neg p(f(x1))]\ \&\ [\forall z\ \neg q(x,z) \vee p(x)]\}\}.$$

7. Eliminace existenčních kvantifikátorů:

$A_7 = \forall x\{\neg p(x) \vee \{[q(x,h(x)) \;\&\; \neg p(f(a))] \;\&\; [\forall z\, \neg q(x,z) \vee p(x)]\}\}.$

8. Přesun $\forall z$ doleva:

$A_8 = \forall x\, \forall z\{\neg p(x) \vee \{[q(x,h(x)) \;\&\; \neg p(f(a))] \;\&\; [\neg q(x,z) \vee p(x)]\}\}.$

9. Použití distributivního zákona:

$A_9 = \forall x\, \forall z\{[\neg p(x) \vee q(x,h(x))] \;\&\; [\neg p(x) \vee \neg p(f(a))] \;\&\; [\neg p(x) \vee \neg q(x,z) \vee p(x)]\}.$

10. Provedeme zjednodušení:

i) Vypustíme třetí klausuli (je to tautologie)

ii) Odstraníme kvantifikátor $\forall z$ (stal se zbytečným)

iii) Ve druhé klausuli odstraníme $\neg p(x)$, neovlivníme tím splnitelnost

$$A^S = \forall x\{\, [\neg p(x) \vee q(x,h(x))] \;\&\; \neg p(f(a))\, \}.$$

*

Herbrandova procedura.

Chceme-li dokázat logickou pravdivost formule A v PL1, pak budeme postupovat obdobně jako ve VL:

- Formuli A znegujeme
- Formuli $\neg A$ převedeme do klauzulární formy $(\neg A)^S$
- Na formuli $(\neg A)^S$ budeme postupně uplatňovat rezoluční pravidlo. Pokud získáme prázdnou klausuli, je důkaz úspěšně ukončen.
  - Tento třetí bod však v PL1 nelze provést tak jednoduše jako ve výrokové logice. Problémem je to, že literály s opačným znaménkem, které bychom mohli při uplatňování rezoluce „vyškrtávat“, mohou obsahovat různé termy.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-3

Uvažujme formuli A v klauzulární formě:

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall v\ [p(x, f(x)) \;\&\; q(y, h(y)) \;\&\; (\neg p(a, z) \vee \neg q(z, v))].$

Dokažte, že tato formule je nesplnitelná.

Řešení příkladu

Vypišme jednotlivé klausule pod sebe a pokusme se uplatňovat pravidlo rezoluce:

1. $p(x, f(x))$
2. $q(y, h(y))$
3. $\neg p(a, z) \vee \neg q(z, v)$

Klausule 1. a 3. obsahují literály s opačným znaménkem, avšak uplatnění rezoluce brání to, že $p(x, f(x)) \neq p(a, z)$.

Je-li term t substituovatelný za x ve formuli $A(x)$, pak $\forall x\, A(x) \models A(x/t)$, „co platí pro všechny, platí i pro t“), můžeme se pokusit najít vhodnou substituci termů za proměnné tak, abychom dostali shodné „*unifikované*“ literály.

V našem příkladě taková substituce existuje:
x / a, z / f(a).
Po provedení této substituce dostaneme klausule:

1'. *p(a, f(a))*
2. *q(y, h(y))*
3'. *¬p(a, f(a)) ∨ ¬q(f(a), v)*

kde na 1' a 3' již lze uplatnit pravidlo rezoluce:

4. *¬q(f(a), v)*

Abychom nyní mohli rezolvovat klausule 2. a 4., zvolíme opět substituci:
y / f(a), v / h(f(a)).
Dostaneme

2'. *q(f(a), h(f(a)))*
4'. *¬ q(f(a), h(f(a)))*

a jejich rezolucí již obdržíme prázdnou klausuli.

Tedy formule *A* je nesplnitelná.

*

Problémem ovšem je to, že příslušné substituce jsme hledali ”zkusmo”, intuitivně. Aby mohl být celý proces automatizován (a mohl tak sloužit jako základ pro logické programování), musíme najít nějaký *algoritmus,* jak provádět příslušné *unifikace.*

Uvedeme zde dva:

- ***Herbrandova procedura***
- ***Robinsonův unifikační algoritmus***

Podle definice je daná formule A nesplnitelná, právě když nabývá hodnoty *nepravda* ve *všech* interpretacích nad *všemi* možnými obory interpretace. Důkaz toho, že *A* je nesplnitelná, by samozřejmě usnadnilo, kdybychom našli jistý pevný obor interpretace *D* takový, že *A* je nesplnitelná, právě když nabývá hodnoty nepravda ve všech interpretacích nad tímto pevným oborem *D*. Takový obor ke každé formuli *A* existuje a nazývá se ***Herbrandovo universum*** $\boldsymbol{H_A}$**.**

DEFINICE 9-3 HERBRANDOVO UNIVERSUM

Df

Herbrandovo universum H_A je tvořeno množinou všech termů, které mohou být sestrojeny z individuových konstant a_i a funkčních konstant f_i, které se vyskytují v *A*. (Pokud v *A* není žádná individuová konstanta, použijeme libovolnou, např. a.)

V dalším výkladu budeme vyznačovat prvky Herbrandova universa kurzívou a tučně, abychom je odlišili od funkčních symbolů formule.

Příklad:

Pro formuli $A = \forall x\, [p(a) \vee q(b) \rightarrow p(f(x))]$
je $H_A = \{a, b, \mathbf{f(a)}, \mathbf{f(b)}, \mathbf{f(f(a))}, \mathbf{f(f(b))}, \ldots\}$
Pro formuli $B = \forall x\, \forall y\, p(\, (f(x), y, q(x,y))$
je $H_A = \{a, \mathbf{f(a)}, \mathbf{q(a,a)}, \mathbf{f(f(a))}, \mathbf{q(a,f(a))}, \mathbf{q(f(a),a)}, \ldots\}$.

DEFINICE 9-4

Buď A formule v klausulární formě: $\forall x_1\ \forall x_2 \ldots\ \forall x_n\ [C_1\ \&\ \ldots\ \&\ C_k]$. ***Základní instancí*** klausule $C_i\ (1 \leq i \leq k)$ rozumíme klausuli, která vznikne z C_i tím, že *všechny* individuové proměnné v C_i nahradíme nějakými prvky z H_A.

VĚTA 9-3 HERBRAND

Formule A v klausulární formě je nesplnitelná, právě když existuje konečná konjunkce základních instancí jejích klausulí, která je nesplnitelná.

Herbrandova procedura parciálně rozhoduje, zda je daná formule A nesplnitelná. K dané formuli postupně generujeme základní instance jejích klausulí a resoluční metodou vždy testujeme, zda je jejich konjunkce nesplnitelná. Jestliže tomu tak je, pak A je nesplnitelná a tato procedura to po konečném počtu kroků zjistí. V případě splnitelnosti A může procedura generovat donekonečna nové a nové základní instance a testovat jejich konjunkce.

Podstatným problémem této metody je skutečnost, že generování základních klausulí je neefektivní. Počet základních instancí, které musí být generovány, dokud nenarazíme na ”protipříklad” – nesplnitelnou konjunkci, může být často tak velký, že nám přeplní paměť počítače, nehledě na časovou složitost takového algoritmu. **J.A. Robinson** navrhl v r. 1965 metodu, která na rozdíl od Herbrandovy procedury nevyžaduje generování základních instancí, ale rozhodne přímo, zda k *libovolné* konjunkci klausulí existuje substituce taková, která unifikuje některé literály a umožní dokázat nesplnitelnost (pokud tato konjunkce nesplnitelná je).

DEFINICE 9-5 SIMULTÁNNÍ SUBSTITUCE TERMŮ

Nechť A je formule obsahující individuové proměnné x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, a to buď přímo (jako bezprostřední argumenty) nebo zprostředkovaně (jako argumenty funkcí). Označme $\sigma = \{x_1/t_1,\ x_2/t_2,\ \ldots, x_n/t_n\}$ ***simultánní substituci*** termů t_i za *(všechny výskyty)* předmětové proměnné x_i pro $i = 1,2, \ldots,n$. Potom zápisem $\boldsymbol{A\sigma}$ označíme formuli, která vznikne z formule A *provedením substituce* σ.

Poznamenejme, že substituce se může týkat všech, nebo jen některých, nebo dokonce žádné individuové proměnné obsažené v A (v tomto případě pro některá nebo všechna i substituujeme x_i/x_i).

Formule B je ***instancí*** formule A, jestliže existuje substituce σ taková, že $B = A\sigma$.

DEFINICE 9-6 UNIFIKACE

Df

Unifikace (unifikační substituce, unifikátor) formulí A, B je substituce σ taková, že $A\sigma = B\sigma$.

DEFINICE 9-7 NEJOBECNĚJŠÍ UNIFIKACE

Df

Nejobecnější unifikace formulí A, B je unifikace σ taková, že pro každou jinou unifikaci ρ formulí A, B platí $\rho = \sigma\tau$, kde $\tau \neq \varepsilon$, tj. každá unifikace vznikne z nejobecnější unifikace provedením další dodatečné substituce.

VĚTA 9-4 ROBINSON: ZOBECNĚNÉ REZOLUČNÍ ODVOZOVACÍ PRAVIDLO

V

Nechť A_i, B_i, L_i jsou atomické formule predikátové logiky. Potom platí následující odvozovací pravidlo: $A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee L_1,\ B_1 \vee \ldots \vee B_n \vee \neg L_2 \mid\!- \ A_1\sigma \vee \ldots \vee A_m\sigma \vee B_1\sigma \vee \ldots \vee B_n\sigma$, kde σ je unifikace formulí L_1, L_2, tj. $L_1\sigma = L_2\sigma$.

Klauzule na levé straně odvozovacího pravidla nazýváme ***rodičovskými klauzulemi*** a klauzuli na pravé straně ***rezolventou***.

Formule A^S v klausulární formě je nesplnitelná, právě když z ní lze opakovaným použitím obecného pravidla rezoluce odvodit prázdnou klausuli.

Speciální případy rezolučního odvozovacího pravidla (předpokládáme $L_1\sigma = L_2\sigma$):

- $m = 0,\ n = 0$: $L_1, \neg L_2 \mid\!-$ odvození sporu
- $m = 0,\ n = 1$: $L_1, \neg L_2 \vee B \mid\!- B\sigma$ pravidlo MP
- $m = 1,\ n = 1$: $L_1 \vee A, \neg L_2 \vee B \mid\!- A\sigma \vee B\sigma$ základní tvar rez. pravidla

Unifikace σ formulí L_1, L_2 může být jakákoliv, chceme-li však vyvodit z předpokladů (rodičovských klauzulí) nejobecnější závěr (rezolventu) je třeba použít nejobecnější unifikaci.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-4

Dokážeme správnost úsudku (analytickou pravdivost věty): Jistý filosof odporuje všem filosofům, tedy odporuje sám sobě.

Řešení příkladu

Větu analyzujeme jako („zamýšlená” interpretace je nad množinou individuí, $p \rightarrow$ podmnožina filosofů, $q \rightarrow$ relace, ve které budou ty dvojice, kde první odporuje druhému)

$$\exists x \, \{[p(x) \,\&\, \forall y \, (p(y) \rightarrow q(x,y))] \rightarrow q(x,x)\}$$

Formuli znegujeme a převedeme na klausulární tvar:

$$\forall x \; \forall y \, \{p(x) \,\&\, [\neg p(y) \vee q(x,y)] \,\&\, \neg q(x,x)\}.$$

K jednotlivým klausulím

1. $p(x)$
2. $\neg p(y) \vee q(x,y)$
3. $\neg q(x,x)$

je nejobecnějším unifikátorem substituce $\{y/x\}$:

4. $q(x,x)$ z 1. a 2.
5. z 3. a 4.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-5

Dokažme správnost úsudku:
Kdo zná Pavla a Marii, ten Marii lituje.
Někteří nelitují Marii, ačkoli ji znají.

Někdo zná Marii, ale ne Pavla.

Řešení příkladu

Kdo zná Pavla a Marii, ten Marii lituje.	$\forall x\, ([Z(x, P)\ \&\ Z(x, M)] \rightarrow L(x, M))$
Někteří nelitují Marii, ačkoli ji znají.	$\exists x\, [\neg L(x, M)\ \&\ Z(x, M)]$
Někdo zná Marii, ale ne Pavla.	$\exists x\, [Z(x, M)\ \&\ \neg Z(x, P)]$

$\forall x\, [\neg Z(x, P) \vee \neg Z(x, M) \vee L(x, M)]$	odstranění implikace (1. předpoklad)
$\neg L(a, M)\ \&\ Z(a, M)$	Skolemizace (2. předpoklad)
$\forall y\, [\neg Z(y, M) \vee Z(y, P)]$	negovaný závěr (přejmenování x)

Klausule:

1.	$\neg Z(x, P) \vee \neg Z(x, M) \vee L(x, M)$	
2.	$\neg L(a, M)$	
3.	$Z(a, M)$	
4.	$\neg Z(y, M) \vee Z(y, P)$	
5.	$\neg Z(a, P) \vee \neg Z(a, M)$	rezoluce 1., 2., substituce x/a
6.	$\neg Z(a, P)$	rezoluce 3., 5.
7.	$\neg Z(a, M)$	rezoluce 4., 6., substituce y/a
8.		rezoluce 3., 7.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-6

Dokažme správnost úsudku:
Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.
Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.
Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.

Žádný majitel obligací není akcionář.

Řešení příkladu

$\forall x\, [v(x) \rightarrow (o(x) \vee a(x))]$
$\forall x\, [v(x) \rightarrow \neg(o(x)\ \&\ a(x))]$
$\forall x\, [o(x) \rightarrow v(x)]$

$\forall x\, [o(x) \rightarrow \neg a(x)]$

Klausule:

1.	$\neg v(x) \vee o(x) \vee a(x)$	1. Předpoklad
2.	$\neg v(x) \vee \neg o(x) \vee \neg a(x)$	2. Předpoklad
3.	$\neg o(x) \vee v(x)$	3. Předpoklad
4.	$o(k)$	negovaný závěr
5.	$a(k)$	(po Skolemizaci)

6.	$\neg o(x) \vee \neg a(x)$	rezoluce 2., 3.
7.	$\neg a(k)$	rezoluce 4., 6., substituce *x*/k
8.		rezoluce 5., 7.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-7

Dokažme správnost úsudku:
Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.
Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.
Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.

Žádný majitel obligací není akcionář.

Řešení příkladu

$\forall x\ [v(x) \rightarrow (o(x) \vee a(x))]$
$\forall x\ [v(x) \rightarrow \neg(o(x)\ \&\ a(x))]$
$\forall x\ [o(x) \rightarrow v(x)]$

$\forall x\ [o(x) \rightarrow \neg a(x)]$

Klausule:

1.	$\neg v(x) \vee o(x) \vee a(x)$	1. Předpoklad
2.	$\neg v(x) \vee \neg o(x) \vee \neg a(x)$	2. Předpoklad
3.	$\neg o(x) \vee v(x)$	3. Předpoklad
4.	$o(k)$	negovaný závěr
5.	$a(k)$	(po Skolemizaci)
6.	$\neg o(x) \vee \neg a(x)$	rezoluce 2., 3.
7.	$\neg a(k)$	rezoluce 4., 6., substituce *x*/k
8.		rezoluce 5., 7.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-8

Dokažme správnost úsudku:
Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.
Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.
Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.

Jestliže Karel kamarádí s Láďou, pak Petr nemá rád Jiřího.

Řešení příkladu

$\forall x\, [R(x, J) \rightarrow S(x, M)]$
$\forall x\, [K(x, L) \rightarrow \neg K(M, x)]$
$\forall x\, [S(P, x) \rightarrow K(x, Kr)]$

$K(Kr, L) \rightarrow \neg R(P, J)$
Klausule:

1.	$\neg R(x, J) \vee S(x, M)$	1. předpoklad
2.	$\neg K(y, L) \vee \neg K(M, y)$	2. předpoklad
3.	$\neg S(P, z) \vee K(z, Kr)$	3. předpoklad
4.	$K(Kr, L)$	negovaný
5.	$R(P, J)$	závěr
6.	$\neg K(M, Kr)$	rezoluce 4., 2., substituce y/Kr
7.	$\neg S(P, M)$	rezoluce 3., 6., substituce z/M
8.	$\neg R(P, J)$	rezoluce 1., 7., substituce x/P
9.		rezoluce 5., 8.

*

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 9-9

Dokažme správnost úsudku:
Každý muž má rád fotbal a pivo.
Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.
Někteří milovníci fotbalu nemají rádi pivo.

Některé ženy nemá Xaver rád.

Řešení příkladu

$\forall x\, [M(x) \rightarrow (R(x,f) \wedge R(x,p))]$	1. předpoklad
$\forall x\, [R(Xa,x) \rightarrow (R(x,f) \wedge R(x,p))]$	2. předpoklad
$\exists x\, [R(x,f) \wedge \neg R(x,p)]$	3. předpoklad

$\forall x\, [M(x) \vee R(Xa,x)]$ negovaný závěr: $\exists x\, [\neg M(x) \wedge \neg R(Xa,x)]$, (žena = není muž)

Klausule:

1. $\neg M(x) \vee (R(x,f)$
2. $\neg M(x) \vee (R(x,p)$
3. $\neg R(Xa,y) \vee (R(y,f)$
4. $\neg R(Xa,y) \vee (R(y,p)$
5. $R(k,f)$
6. $\neg R(k,p)$
7. $M(z) \vee R(Xa,z)$

---

8. $\neg R(Xa,k)$	rezoluce 4., 6. (y/k)
9. $M(k)$	rezoluce 7., 8. (z/k)
10. $R(k,p)$	rezoluce 2., 9. (x/k)
11.	rezoluce 6., 10.

*

KONTROLNÍ OTÁZKA 8

1. Srovnejte rezoluční princip ve výrokové logice a v predikátové logice.
2. Popište použití rezolučního principu v predikátové logice.

CVIČENÍ 8

Příklad 1: Pomocí rezoluční metody ověřte platnost úsudků

- Nikdo, kdo trpí klaustrofobií nemůže pracovat jako liftboy.
  Všichni horolezci trpí klaustrofobií.

  Proto žádný horolezec nemůže pracovat jako liftboy.

- Všechny dřevěné stoly jsou stoly.
  Všechny dřevěné stoly jsou ze dřeva.

  Některé stoly jsou ze dřeva.

- Všechny muchomůrky zelené jsou jedovaté.
  Tato tužka je muchomůrka zelená.

  Tato tužka je jedovatá.

- Každý, kdo miluje jachting a moře, cítí k moři respekt.
  Někteří respekt k moři necítí, ačkoli ho milují.

  Zřejmě existují takoví, kteří milují moře, ale nikoliv jachting.

- Každý někomu pije krev.
  Komu pije krev Drákula, ten brzo zemře.

  Někdo brzo zemře.

10 SÉMANTICKÉ TABLO, AXIOMATICKÝ SYSTÉM PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY SÉMANTICKÉ TABLO, AXIOMATICKÝ SYSTÉM PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

Cílem desátého modulu je možnost využití sémantické tabla při rozhodování splnitelnosti v predikátové logice a zavedení axiomatický systémů predikátové logiky a to Hilbertovského a Gentzenovského.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY SÉMANTICKÉ TABLO, AXIOMATICKÝ SYSTÉM PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

Sémantické tablo, Hilbertovský axiomatický systém, Gentzenovský axiomatický systém.

Klíčová slova

10.1 Rozhodování splnitelnosti formulí sémantickými tably

Sémantické tablo formule A jazyka L predikátové logiky je konečný ohodnocený binární strom, jehož všechny uzly jsou označeny návěštími – sekvencemi formulí A, tak, že platí: Listy jsou označeny sekvencemi literálů proměnných vyskytujících se ve formuli A.

Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \dots, \alpha, \dots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu alfa, pak jediný uzel bezprostředně následující je označen sekvencí $X_1, X_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, X_n$ obsahující formule α_1, α_2.

α-pravidla:

α	α_1	α_2
$\neg\neg A$	A	
$A_1 \& A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftarrow A_2)$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \ldots, \beta, \ldots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu β, pak dvojice uzlů bezprostředně následujících je označena sekvencemi $X_1, X_2, \ldots, \beta_1, \ldots, X_n$ a $X_1, X_2, \ldots, \beta_2, \ldots, X_n$ obsahujícími po řadě formule β_1, β_2.

β - pravidla:

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \& B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftarrow B_2$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \ldots, \gamma, \ldots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu γ pak jediný uzel bezprostředně následující je označen sekvencí $X_1, X_2, \ldots, \gamma, \gamma(a) \ldots, X_n$ obsahující původní formuli γ a její instanci $\gamma(a)$ přičemž a je konstanta vyskytující se již v jazyce.

γ - pravidla pro univerzální formule:

γ	$\gamma(a)$
$\forall x A(x)$	$\forall x A(x), A(a)$
$\neg\exists x A(x)$	$\neg\exists x A(x), \neg A(a)$

Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \ldots, \delta, \ldots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu δ, pak jediný uzel bezprostředně následující je označen sekvencí $X_1, X_2, \ldots, \delta, \delta(a) \ldots, X_n$ obsahující instanci $\delta(a)$ formule δ přičemž a je nová konstanta nevyskytující se dosud v jazyce.

δ - pravidla pro existenční formule:

δ	$\delta(a)$
$\exists x A(x)$	$A(a)$
$\neg\forall x A(x)$	$\neg A(a)$

Návěštím kořene sémantického tabla je formule A. Pravidla pro rozhodnutí zda větev stromu je uzavřená a otevřená jsou stejná jako u sémantického tabla ve výrokové logice. Stejný princip použijeme i při rozhodování zdali formule je splnitelná, tautologie či kontradikce. Nesmíme opět zapomenout, že pro důkaz, že formule je tautologií, musíme pracovat s negovanou formulí a dokazujeme nesplnitelnost negované formule a tím pádem původní formule je tautologií.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10-1

Rozhodněte o splnitelnosti formule pomocí sémantického tabla
$\neg(\forall x(p(x) \to q(x)) \to (\exists x\, p(x) \to \exists x\, q(x)))$

Řešení příkladu

$\neg(\forall x(p(x) \to q(x)) \to (\exists x\ p(x) \to \exists\ x\ q(x)))$

2x aplikujeme alfa pravidlo pro negaci implikace

$$\forall x(p(x) \to q((x)),\ \neg(\exists x p(x) \to \exists x\ q(x))$$

$$\forall x(p(x) \to q(x)),\ \exists x p(x),\ \neg\exists x q(x)$$

$$\forall x(p(x) \to q(x)),\ p(a) \to q(a),\ p(a),\ \neg\exists x q(x),\ \neg q(a)$$

$$\forall x(p(x) \to q(x)),\ \neg\exists x q(x),\ \neg p(a),\ p(a),\ \neg q(a) \qquad \forall x(p(x) \to q(x)),\ \neg\exists xq(x),\ q(a),\ p(a),\ \neg q(a)$$

Obě větve jsou uzavřeny, z čehož lze učinit závěr, že formule je nesplnitelná.

*

10.2 Formální systém (logický kalkul) Hilbertova typu

DEFINICE 10-1 AXIOMATICKÝ SYSTÉM HILBERTOVA TYPU

definice axiomatického systému Hilbertova typu

- ***Jazyk*:** Viz definice dříve s jedinou výjimkou: množina funktorů je omezena na funktory $\neg$, $\to$, $\forall$.
- ***Axiómová schémata***:
  $A1$: $A \to (B \to A)$
  $A2$: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  $A3$: $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
  $A4$: axióm specifikace $\forall x A(x) \to A(x/t)$, term t je substituovatelný za x v A
  $A5$: axióm kvantifikace implikace $(\forall x[A \to B(x)]) \to (A \to \forall x B(x))$, x není volná v A
- ***Odvozovací pravidla***:
  MP: $A,\ A \supset B \mid\!- B$ (pravidlo odloučení, *modus ponens*)
  (Z dokazatelných formulí A, $A \to B$ odvoď formuli B.
  G: $A \mid\!- \forall x A$ (pravidlo generalizace)
  (Pro libovolnou volně se vyskytující proměnnou x ve formuli odvoď z formule A formuli $\forall x A$)

Důkaz je konečná posloupnost kroků – dobře utvořených formulí (DUF) dle gramatiky jazyka, z nichž každá je buď axióm nebo vznikne z předchozích DUF pomocí odvozovacího pravidla. Posledním krokem je dokazovaná formule – ***teorém***.

Volba axiómů není pochopitelně zcela libovolná; aby byl systém "rozumný", tedy korektní, podléhá dvěma kritériím:

- Každý **axióm je *tautologie***
- Množina axiómů musí umožňovat, aby se z nich daly odvodit všechny logicky platné formule a přitom je rozumné, aby tato množina byla minimální, tedy žádný axióm není dokazatelný z jiných axiómů – ***nezávislá množina axiómů***.

Rovněž **volba odvozovacích pravidel** není libovolná. Aby byl systém korektní, musí pravidla 'zachovávat pravdivost' v tom smyslu, že formule, kterou podle pravidla obdržíme, je pravdivá alespoň ve všech modelech předpokladů pravidla, tedy z těchto předpokladů vyplývá.

Tedy pro každé pravidlo $A_1,\ldots,A_n \vdash B$ by mělo platit, že $A_1,\ldots,A_n \models B$. Pravidlo generalizace $A(x) \vdash \forall x A(x)$ však zjevně tento požadavek obecně nesplňuje, formule $A(x) \to \forall x A(x)$ není tautologie. Přesto je Hilbertův kalkul korektní systém a formuli $A(x) \to \forall x A(x)$ v něm *nedokážeme*.

Jak je to možné? Intuitivní zdůvodnění tohoto pravidla je : Máme-li dokázat nějakou vlastnost pro všechny objekty, je možno ji dokázat na jednom *libovolně* vybraném (při důkazu však nesmíme používat žádných dalších specifických vlastností tohoto objektu). Vzpomeňme si, jak jsme prováděli ve škole např. důkazy v geometrii. Nakreslíme *libovolný* trojúhelník a pro tento trojúhelník provedeme nějakou konstrukci, jejíž pomocí dokážeme zkoumanou vlastnost (tohoto) trojúhelníka, a protože to byl trojúhelník libovolný, prohlásíme, že tuto vlastnost mají všechny trojúhelníky. Musíme si však dát pozor, aby zvolený trojúhelník byl skutečně libovolný, tedy aby neměl nějakou další vlastnost, třeba rovnoramenný, protože takovéto specifické vlastnosti nesmíme – ani podvědomě – v důkazu využít. Jinak bychom naše tvrzení dokázali pouze pro všechny *rovnoramenné* trojúhelníky.

VĚTA 10-1 O DEDUKCI

V

Pro *uzavřenou* formuli A a libovolnou formuli B platí:
$\vdash A \to B$ právě tehdy, když $A \vdash B$.

VĚTA 10-2 O KOKEKTNOSTI

V

Každá dokazatelná formule predikátové logiky (tj. teorém kalkulu Hilbertova typu) je také tautologií predikátové logiky. Formálně: Jestliže $|\!- A$, pak $|\!= A$.

Důkaz /nástin/: ¨

Všechny formule, které obdržíme z axiómových schémat *A1–A5* jsou tautologiemi, tedy jsou pravdivé v každé interpretační struktuře *I* (při libovolné valuaci e volných proměnných). Korektnost pravidla *MP* (*modus ponens*) byla demonstrována v důkazu Postovy věty.

Korektnost pravidla generalizace $A(x) \,|\!-\, \forall x A(x)$ je zaručena definicí splňování formule $\forall x A$ ve struktuře *I*. Předpokládejme, že jsme v důkazové posloupnosti dosud pravidlo generalizace nepoužili. Tedy formule *A(x)* musí být tautologií (neboť mohla vzniknout z axiómů – tautologií pouze použitím pravidla *MP*, které zachovává pravdivost). To znamená, že v libovolné struktuře *I* platí, že $|\!=_I A(x)[e]$ – formule *A(x)* je pravdivá v *I* pro libovolné ohodnocení *e* proměnné x. Tedy platí pro *libovolné* individuum $i \in M$, kde *M* je universum zvolené v interpretační struktuře *I*, že formule *A* je pravdivá v *I* pro valuaci, která přiřazuje individuum *i* proměnné x, tedy $|\!=_I A[e(x/i)]$, kde *e(x/i)* je valuace stejná jako *e* až na to, že přiřazuje proměnné *x* individuum *i*. Tedy formule $\forall x A(x)$ je pravdivá v *I*, $|\!=_I \forall x A(x)$. Pravidlo generalizace je korektní v tom smyslu, že zachovává **pravdivost formule v interpretaci.**

VĚTA 10-3 O SÉMANTICKÉ ÚPLNOSTI AXIOMATICKÉHO SYSTÉMU - K. GÖDEL

V

Každá tautologie predikátové logiky je dokazatelná (v logickém kalkulu Hilbertova typu). Formálně, je-li $|\!= A$ pak $|\!- A$.

VĚTA 10-4

V

Nechť *A*, *B* jsou formule predikátové logiky. Je-li $|\text{-}\ A \rightarrow B$ a proměnná x nemá žádný volný výskyt ve formuli *A*, pak $|\text{-}\ A \rightarrow \forall x\, B$.

Důkaz :

1. $A \rightarrow B \,|\text{-}\, A \rightarrow B$	předpoklad
2. $A \rightarrow B \,|\text{-}\, \forall x(A \rightarrow B)$	generalizace na 1.
3. $|\text{-}\ \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$	schéma kvantifikace implikace
4. $A \rightarrow B \,|\text{-}\, A \rightarrow \forall x B$	modus ponens na 2. a 3.

10.3 Gentzenovský axiomatický systém

DEFINICE 10-2 LOGICKÝ AXIOM

Logickým axiómem gentzenovského axiómatického systému G1 predikátové logiky je množina (sekvence) $\boldsymbol{U}$ formulí obsahující komplementární pár literálů $\{\boldsymbol{p}(x_1, x_2, \ldots x_n), \neg\boldsymbol{p}(x_1, x_2, \ldots x_n), \} \rightarrow \boldsymbol{U}$ některé atomické formule $\boldsymbol{p}(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Odvozovací pravidla jsou rovněž téměř beze změn přenesena z *G* do základu gentzenovského formálního systému *G1* predikátové logiky. Odvozovací pravidla α a β systému *G1* jsou zde rovněž definována metajazykově, a to příslušnými schématy a tabulkami. Navíc jsou zde pravidla γ a δ pro formule s kvantifikátory určená metajazykovými schématy.

DEFINICE 10-3

Odvozovacími pravidly gentzenovského axiómatického systému *G1* jsou :

a) α - *pravidla* daná schématem

$$\frac{U \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{U \cup \{\alpha\}}.$$

b) β - *pravidla* daná schématem

$$\frac{U_1 \cup \{\beta_1\} \quad U2 \cup \{\beta_2\}}{U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

c) γ - *pravidla* daná schématy

$$\frac{U \cup \{\exists x\, A(x), A(a)\}}{U \cup \{\exists x\, A(x)\}}$$

$$\frac{U \cup \{\neg \forall x\, A(x), \neg A(a)\}}{U \cup \{\neg \forall x\, A(x)\}}$$

d) δ - *pravidla* daná schématy

$$\frac{U \cup \{A(a)\}}{U \cup \{\forall x\, A(x)\}}$$

$$\frac{U \cup \{\neg A(a)\}}{U \cup \{\neg \exists x\, A(x)\}},$$

kde A(x) *je* formule.

α	α_1	α_2
A	$\neg\neg A$	
$A_1 \vee A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \& A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftarrow A_2$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftrightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \leftarrow A_2)$

β	β_1	β_2
$B_1 \& B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \vee B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftarrow B_2)$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftrightarrow B_2$	$B_1 \rightarrow B_2$	$B_2 \rightarrow B_1$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10-2

a) Dokažte pomocí sémantického tabla logickou platnost formule
$(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$

b) Proveďte gentzenovský důkaz této formule.

Řešení příkladu

$$\neg(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)) \rightarrow \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

$$(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)),\ \neg\forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg\forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg\forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \exists x\, \neg(\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \exists x\, \neg(\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg(\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg(\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \mathbf{q}(a),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$

Vytvoříme důkazový strom dané formule jako duální strom k sémantickému stromu, formule konstruovaný v obráceném pořadí jeho uzlů. Protože v případě duálního stromu čárky mezi podformulemi představují jejich disjunkci a větvení konjunkci, stačí při konstrukci duálního stromu zdola nahoru negovat všechny podformule obsažené v návěštích jeho uzlů.

$\neg\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a)$ $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg\mathbf{q}(a),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a)$

$\neg\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a)$ $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a)$

$\neg\forall x\, \mathbf{p}(x),\ (\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$ $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\, \mathbf{q}(x),\ (\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$

$\neg\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$ $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$

Ø$(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)),\ \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$

$(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)) \rightarrow \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$

Důkaz formule :

1.	$\neg\forall x\, p(x),\ \neg p(a),\ p(a),\ q(a)$	axióm
2.	$\neg\forall x\, p(x),\ p(a),\ q(a)$	γ - pravidlo na 1.
3.	$\neg\forall x\, p(x),\ (p(a) \vee q(a))$	$\alpha \vee$ na 2.
4.	$\neg\forall x\, p(x),\ \forall x\, (p(x) \vee q(x))$	δ - pravidlo na 3.
5.	$\neg\forall x\, q(x),\ \neg q(a),\ p(a),\ q(a)$	axióm
6.	$\neg\forall x\, q(x),\ p(a),\ q(a)$	γ - pravidlo na 5.
7.	$\neg\forall x\, q(x),\ (p(a) \vee q(a))$	$\alpha \vee$ na 6.
8.	$\neg\forall x\, q(x),\ \forall x\, (p(x) \vee q(x))$	δ - pravidlo na 7.
9.	$\neg(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)),\ \forall x\, (p(x) \vee q(x))$	$\beta \vee$ na 4. a 8.
10.	$(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$	$\alpha \rightarrow$ na 9.

*

Způsob, jakým byl důkaz formule sestrojen (využitím duality) ukazuje, že gentzenovské důkazy logicky platných predikátových formulí nebývají tak obtížné, jako tomu bylo v případě hilbertovských důkazů.

Ze způsobu řešení uvedeného příkladu lze též usoudit, že zde zavedený gentzenovský axiómatický systém predikátové logiky je sémanticky korektní a úplný, neboť platí následující.

VĚTA 10-5

Gentzenovský důkaz formule A predikátové logiky existuje, právě když se sémantické tablo formule $\neg A$ uzavře.

DEFINICE 10-4 DŮKAZ FORMULE V G1

Df

Důkaz formule A z množiny speciálních axiómů U v gentzenovském axiómatickém systému *G1* predikátové logiky je posloupnost sekvencí formulí taková, že každá sekvence je buď logickým axiómem v *G1* nebo speciálním axiómem nebo je odvozena z jednoho nebo dvou předcházejících členů posloupnosti pomocí některého z odvozovacích pravidel α, β, γ, δ systému *G1*.
Je-li formule *A* posledním prvkem posloupnosti, nazývá se posloupnost **důkazem formule A** a samotná formule *A* **větou větou teorie *T(U)*** dokazatelnou z ***U*** v systému *G1*.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 10-3

Dokažte ze speciálních axiómů $\mathbf{p}(x) \rightarrow \mathbf{q}(x)$, $\mathbf{p}(x)$ větu $\mathbf{q}(x)$ (pravidlo modus ponens systému *H1*).

Řešení příkladu

1. $p(x) \rightarrow q(x) \mid\!- p(x) \rightarrow q(x)$	první předpoklad
2. $p(x) \rightarrow q(x) \mid\!- \neg p(x), q(x)$	přepis prvního předpokladu
3. $p(x) \mid\!- p(x)$	druhý předpokla
4. $p(x) \rightarrow q(x), p(x) \mid\!- p(x) \,\&\, \neg p(x), q(x)$	β & na 3.
5. $p(x) \rightarrow q(x), p(x) \mid\!- q(x)$	vynechání nesplnitelné konjunkce

*

VĚTA 10-6

V

Formule dokazatelné v gentzenovském axiomatickém systému predikátové logiky jsou právě logicky platné formule.

Důkaz /nástin/:

Důkaz korektnosti axiomatického gentzenovského axiomatického systému predikátové logiky, tzn., že jestliže formule je dokazatelná, pak je logicky platná dokážeme indukcí:

Důkaz obsahující jeden axióm systému, je v podstatě logicky platnou disjunkcí

Nechť indukční předpoklad platí až do délky důkazu *n*. Potom *n+1*-ní člen důkazové posloupnosti seznamů formulí může vzniknout tak, že na jeden důkazový řádek je aplikováno pravidlo α, γ nebo δ nebo je na dva řádky aplikováno pravidlo β. Ve všech těchto případech jsou tak vygenerovány seznamy, jimž odpovídají logicky platné formule nebo jde o logické důsledky, které zachovávají jejich modely.

Důkaz úplnosti gentzenovského axiomatického systému: Je-li formule A logicky platná, je její negace nesplnitelná, z čehož vyplývá existence uzavřeného sémantická tabla negované formule. Existuje pak důkaz formule v gentzenovském systému.

KONTROLNÍ OTÁZKA 9

1. Popište postup při použití sémantického tabla při dokazování splnitelnosti v predikátové logice.
2. Definujte Hilbertovský axiomatický systém predikátové logiky.
3. Definujte Gentzenovský axiomatický systém predikátové logiky.

11 TRADIČNÍ ARISTOTELOVA LOGIKA

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

Celkový doporučený čas k prostudování KAPITOLY je 90 minut.

RYCHLÝ NÁHLED DO PROBLEMATIKY KAPITOLY TRADIČNÍ ARISTOTELOVA LOGIKA

Cílem jedenáctého modulu je popsání tradiční logiky od Aristotela.

Rychlý náhled

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY TRADIČNÍ ARISTOTELOVA LOGIKA

Tradiční Aristotelova logika, sylogismus.

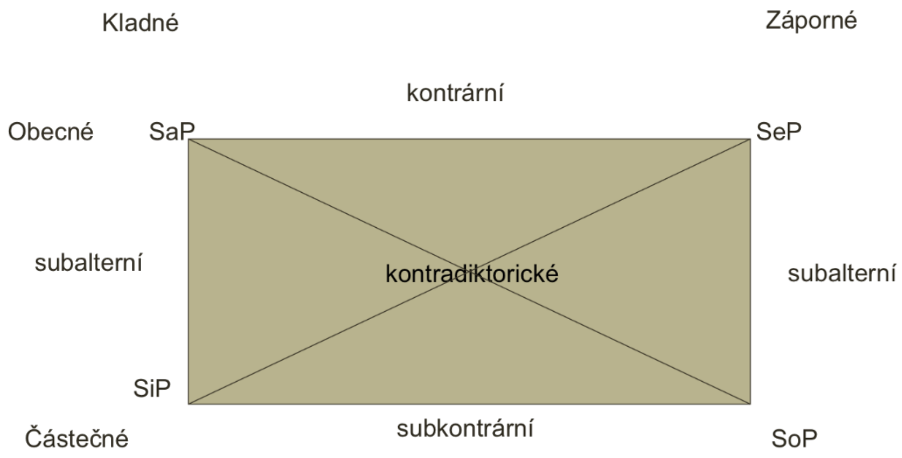
Klíčová slova

Tradiční Aristotelova logika je fragment predikátové logiky 1. řádu, který je omezen pouze na jednomístné predikáty. Tato logika byla (v podstatě jako jediná) vyučována ještě v 19. století.

Umožňuje kontrolovat správnost zvláštního typu jednoduchého úsudku, který se nazývá **kategorický sylogismus**. Tyto úsudky zkoumal před více než 2000 lety řecký filosof a zakladatel logiky Aristoteles. Aristotelova logika vznikla kupodivu dříve než výroková logika, kterou zkoumali *stoici.* Stoici byli v jisté opozici vůči Aristotelovi a z jejich díla se zachovaly jen fragmenty, ze kterých je však zjevné, že používali rozvinutý systém výrokové logiky a v podstatě (i když poněkud v jiné formě) i systém predikátové logiky 1. řádu.

Aristotelova logika zkoumá tzv. **subjekt – predikátové výroky** (S-P výroky), kde S i P jsou nějaké vlastnosti (formalizované jako predikáty).
Tyto výroky dělíme na obecné a částečné, kladné a záporné.
Všechny možnosti a jejich vzájemný vztah jsou znázorněny **logickým čtvercem,** kde význam zkratek je odvozen z latinského ***affirmo*** (tvrdím) a ***nego*** (popírám):

- SaP – Všechna S jsou P
- SeP – Žádné S není P
- SiP – Některá S jsou P
- SoP – Některá S nejsou P



Obrázek 4 Logický čtverec

Logický čtverec znázorňuje jednoduché úsudky platné mezi těmito výroky.

1. Kontradiktorické (protikladné, jeden je vždy ekvivalentní negaci druhého):
   SaP ≡ ¬SoP SeP ≡ ¬SiP
2. Kontrární (z jednoho vyplývá negace druhého):
   SaP |= ¬SeP SeP |= ¬SaP
   Může však být zároveň nepravda jak SaP tak SeP (tedy ani Sap ani Sep není pravda): Všechny houby jsou jedlé, všechny houby jsou nejedlé.
3. Subkontrární (podprotivné):
   ¬SiP |= SoP ¬SoP |= SiP
   Může však být SiP i SoP pravdivé:
   Některé labutě jsou černé, některé labutě nejsou černé
4. Subalterní (podřízený):
   SaP |= SiP SeP |= Sop ¬SiP |= ¬SaP ¬SoP |= ¬SeP
5. Dále platí tzv. obraty:
   SiP |= PiS SeP |= PeS
   Někteří studenti jsou ženatí |= Někteří ženatí jsou studenti
   Žádný člověk není strom |= Žádný strom není člověk
   SaP |= PiS SeP |= PoS
   Všichni učitelé jsou státní zaměstnanci |= Někteří státní zaměstnanci jsou učitelé
   Žádné jedovaté houby nejsou jedlé |= Některé jedlé houby nejsou jedovaté

Sylogismy jsou úsudky, které sestávají ze tří S-P výroků tvaru (4 figury):

I.	II.	III.	IV.
M P	P M	M P	P M
S M	S M	M S	M S
——	——	——	——
S P	S P	S P	S P

Kombinací a, e, i, o lze nyní vytvořit 64 tzv. modů, z nichž jen některé jsou platné. Platné módy se pochopitelně neučíme nazpaměť (jako to kdysi dělali naši otcové), neboť jejich platnost můžeme snadno ověřit i sémanticky, na základě množinových úvah, které můžeme znázornit geometricky (např. metodou známých Vénových kroužků).

Obory pravdivosti predikátů S, P, M zakreslíme jako (vzájemně se protínající) kroužky. Poté znázorníme situaci, kdy jsou premisy pravdivé, tj. vyšrafujeme plochy, které odpovídají prázdným třídám objektů. Označíme křížkem plochy, které jsou jistě neprázdné (křížek přitom klademe jen tehdy, když neexistuje jiná plocha, "kam by mohl přijít"). Nakonec ověříme, zda vzniklá situace znázorňuje pravdivost závěru.

Příklad správného úsudku:

Všechny velryby jsou savci.
Někteří vodní živočichové jsou velryby.
U1 ――――――――――――――――――
Někteří vodní živočichové jsou savci.

Příklad nesprávného úsudku:

Žádný učený z nebe nespadl
Všechno co spadlo z nebe je voda
U2 ――――――――――――――――――
Žádná voda není učená.

KONTROLNÍ OTÁZKA 10

Popište Aristotelovu logiku.

DALŠÍ ZDROJE

1. BAADER, F., CALVANESE, D., MCGUINNESS, D. L., NARDI, D., PATEL-SCHNEIDER, P. F. The Description Logic Handbook – Theory, implimentation, and applications, Cambridge university press 2010, ISBN 978-0-521-150011-8
2. CHURCH, A. Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press, 1956.
3. IRVING M. COPI, CARL COHEN, KENNETH MCMAHON Introduction to Logic. 14 th Editon, Published by Routledge Taylor & Francis (2017), ISBN 10: 9332539618 ISBN 13: 9789332539617
4. JIRKŮ, P., VEJNAROVÁ, J. *Logika-Neformální výklad základů formální logiky (2. přepracované a doplněné vydání).* Praha: Univerzita Karlova, 2000.
5. JONES, A. *Logic and Knowledge Reprentation and introduction for systems analysts*. Pitman Publishing 1991. ISBN 0 273 03150 3
6. LUKASOVÁ, A. Formální logika v umělé inteligenci. Computer Press, Brno, 2003. ISBN 80-251-0023-5
7. LUKASOVÁ, A. *Logické základy umělé inteligence 1*. Výroková a predikátová logika (2. přepracované vydání). Ostrava: Ostravská univerzita, 1999.
8. SOCHOR, A. *Klasická matematická logika.* Praha: Univerzita Karlova, 2001.
9. ŠTĚPÁNEK, P. *Matematická logika.* Praha: Univerzita Karlova, 2000.
10. ŠVEJDAR, V. Logika*: neúplnost, složitost a nutnost.* Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-1005-X.

ONLINE ZDROJE

1. ŠTĚPÁNEK, P: Predikátová logika, Praha, 2000. http://ktiml.mff.cuni.cz/ktiml/teaching/files/materials/StepanekPetr_Predikatova-Logika.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
2. DUŽÍ, M.: Logika pro informatiky (a příbuzné obory), VŠB-TU Ostrava 2012. http://www.cs.vsb.cz/duzi/Matlogika_ESF_Definite.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
3. DUŽÍ, M.: Matematická logika, VŠB-TU Ostrava, 2003. http://www.cs.vsb.cz/duzi/Matlogika_Vyber.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
4. ŠVEJDAR, V.: Logika: neúplnost, složitost a nutnost, Praha: Academia, 2002. http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
5. JIRKŮ, P., VEJNAROVÁ, J.: Logika-*Neformální výklad základů formální logiky (2. přepracované a doplněné vydání).* Praha: Univerzita Karlova, 2000. https://peter.smolinsky.sk/cms/files/52/jirku-logika2.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
6. STARÝ, J.: Úvod do matematické logiky. FIT ČVUT, 2017. https://users.fit.cvut.cz/~staryja2/BIMLO/matematicka-logika.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
7. HROMEK, P. : Logika v příkladech. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2002. https://users.fit.cvut.cz/~staryja2/BIMLO/matematicka-logika.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
8. PEREGRIN, J.: Logika a logiky – Systém klasické výrokové logiky, jeho rozšíření a alternativy, 2004. http://jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/455.pdf Ověřeno: 15. 9. 2017

9. KVASNIČKA, V., POSPÍCHAL, J.: Matematická logika, Slovenská technická univerzita v Bratislave 2006. http://www2.fiit.stuba.sk/~kvasnicka/Free%20books/Matematicka%20Logika_all.pdf ověřeno: 15. 9. 2017

12 KLASIFIKACE ZDROJŮ

Doporučená literatura:

1. CIENCIALA, L.: Opory k předmětům: Úvod do logiky/Logika, 2017.
2. LUKASOVÁ, A. Formální logika v umělé inteligenci. Computer Press, Brno, 2003. ISBN 80-251-0023-5
3. LUKASOVÁ, A. *Logické základy umělé inteligence 1*. Výroková a predikátová logika (2. přepracované vydání). Ostrava: Ostravská univerzita, 1999.
4. JIRKŮ, P., VEJNAROVÁ, J. *Logika-Neformální výklad základů formální logiky (2. přepracované a doplněné vydání).* Praha: Univerzita Karlova, 2000.
5. ŠVEJDAR, V. Logika*: neúplnost, složitost a nutnost.* Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-1005-X. http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
6. DUŽÍ, M.: Logika pro informatiky (a příbuzné obory), VŠB-TU Ostrava 2012. http://www.cs.vsb.cz/duzi/Matlogika_ESF_Definite.pdf ověřeno: 15. 9. 2017

Rozšiřující literatura:

1. DUŽÍ, M.: Matematická logika, VŠB-TU Ostrava, 2003. http://www.cs.vsb.cz/duzi/Matlogika_Vyber.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
2. STARÝ, J.: Úvod do matematické logiky. FIT ČVUT, 2017. https://users.fit.cvut.cz/~staryja2/BIMLO/matematicka-logika.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
3. HROMEK, P. : Logika v příkladech. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2002.
4. PEREGRIN, J.: Logika a logiky – Systém klasické výrokové logiky, jeho rozšíření a alternativy, 2004. http://jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/455.pdf Ověřeno: 15. 9. 2017
5. KVASNIČKA, V., POSPÍCHAL, J.: Matematická logika, Slovenská technická univerzita v Bratislave 2006. http://www2.fiit.stuba.sk/~kvasnicka/Free%20books/Matematicka%20Logika_all.pdf ověřeno: 15. 9. 2017
6. ŠTĚPÁNEK, Petr: Predikátová logika, Praha, 2000. http://ktiml.mff.cuni.cz/ktiml/teaching/files/materials/StepanekPetr_PredikatovaLogika.pdf ověřeno: 15. 9. 2017

SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČEK, SYMBOLŮ A ZKRATEK

INFORMATIVNÍ, NAVIGAČNÍ, ORIENTAČNÍ

Čas potřebný k prostudování

Průvodce textem, podnět, otázka, úkol

Nezapomeň na odměnu a odpočinek

KE SPLNĚNÍ, KONTROLNÍ, PRACOVNÍ

Kontrolní otázka

Samostatný úkol

Test a otázka

VÝKLADOVÉ

Řešený příklad

Definice

Věta

NÁMĚTY K ZAMYŠLENÍ, MYŠLENKOVÉ, PRO DALŠÍ STUDIUM

Úkol k zamyšlení

Část pro zájemce

Další zdroje