

Vyčíslitelnost a složitost výpočtů

Asymptotiky

Asymptotiky

- V informatice se asymptotika používá k odhadu časové a prostorové složitosti algoritmů.
- Porovnání efektivity algoritmů a výběr toho nejlepšího pro konkrétní problém.
- Zajištění škálovatelnosti systémů při růstu dat.

Asymptotiky

- **Nejhorší případ (worst-case)**
- **Průměrný případ (average-case)**
- **Nejlepší případ (best-case)**
- **Bubble Sort:**
 - Nejhorší případ: prvky jsou seřazeny v opačném pořadí.
 - Průměrný případ: je třeba provést mnoho porovnání.
 - Nejlepší případ: prvky jsou již seřazené.

Asymptotiky

Základní principy asymptotik:

Ignorování konstant a menších členů

- Při porovnávání růstu funkcí asymptoticky nehrají roli aditivní ani multiplikativní konstanty.
- Např. $f(x)=x+100$, $g(x) = x$ // $f(x)=5x$, $g(x)=x$

Důraz na chování funkcí pro velké hodnoty argumentu

- Asymptotika se zaměřuje na růst funkcí pro velké vstupy. Chování funkcí pro malé hodnoty argumentu je ignorováno.
- Například funkce $2x/10$ roste pro malé x (mezi 1 a 10) pomaleji než x^2 , ale pro velká x ji x^2 předčí.

Asymptotiky

- **$f(x)=O(g(x))$** : Funkce $f(x)$ roste nejvýše tak rychle jako $g(x)$. (Horní odhad růstu.)
- **$f(x)=\Omega(g(x))$** : Funkce $f(x)$ roste nejméně tak rychle jako $g(x)$. (Dolní odhad růstu.)
- **$f(x)=\Theta(g(x))$** : Funkce $f(x)$ a $g(x)$ rostou stejně rychle. (Funkce mají stejnou asymptotickou rychlost růstu.)
- **$f(x)=o(g(x))$** : Funkce $f(x)$ roste pomaleji než $g(x)$. (Rychlost růstu $g(x)$ je větší než u $f(x)$.)

Asymptotiky

Pořadí rychlosti růstu funkcí:

- Různé typy funkcí mají různé asymptotické rychlosti růstu. Nejčastěji používané funkce v analýze algoritmů seřazujeme podle jejich rychlosti růstu:
- **Logaritmické funkce:** $\log(x)$, $\log_2(x)$, $\log_3(x)$, ...
Tyto funkce rostou velmi pomalu.
- **Polynomy:** x , x^2 , x^3 , ...
Polynomy rostou rychleji než logaritmické funkce.
- **Exponenciální funkce:** 2^x , 3^x , 4^x , ...
Exponenciální funkce rostou rychleji než polynomy.
- **Funkce vyššího řádu:** $2^{(x^2)}$, $2^{(x^3)}$, ...
Tyto funkce rostou extrémně rychle.

Asymptotiky

Odečtení pomaleji rostoucí funkce od rychleji rostoucí:

- Pokud od rychleji rostoucí funkce odečteme pomaleji rostoucí funkci, výsledná funkce stále roste stejně rychle jako ta původní, rychleji rostoucí funkce.

Příklad:

- Mějme funkce $f(x)=x^2$ a $g(x)=x$.
- Když odečteme $g(x)$ od $f(x)$, tedy $f(x)-g(x)=x^2$, výsledek stále roste asymptoticky stejně rychle jako x^2 , protože x^2 roste mnohem rychleji než x pro velká x .
- Funkci x můžeme tedy ignorovat při odhadu asymptotického růstu.

Asymptotiky

Násobení dvou rostoucích funkcí:

- Pokud vynásobíme dvě rostoucí funkce, výsledná funkce poroste rychleji než kterákoliv z původních funkcí.

Příklad:

- Mějme funkce $f(x)=x$ a $g(x)=\log x$.
- Pokud je vynásobíme, výsledná funkce bude $f(x) \cdot g(x) = x \log x$.
- Funkce $x \log x$ roste rychleji než x a také rychleji než $\log x$. Rychlost růstu této nové funkce je tedy vyšší než rychlost růstu každé z původních funkcí.

Asymptotiky

Sčítání funkcí:

- Při sčítání dvou nebo více funkcí se při asymptotické analýze soustředíme na funkci, která roste nejrychleji, protože ta určuje celkovou asymptotickou rychlost růstu výsledné funkce.

Základní pravidlo sčítání funkcí:

- **Rychlost růstu výsledné funkce odpovídá nejrychleji rostoucí funkci.** Ostatní pomaleji rostoucí funkce můžeme asymptoticky ignorovat, protože nemají významný vliv na rychlost růstu pro velké x .