

Turingův stroj

Turingův stroj

Proč Turingův stroj:

- Nejjednodušší univerzální matematický model počítače.
- Snadno se zkoumají jeho vlastnosti.
- I přes jednoduchost umí spočítat totéž co dnešní počítače.
- Umožňuje zkoumat výpočetní limity:
 - Vyčísitelnost** – co lze a nelze spočítat.
 - Složitost** – jak efektivně to lze spočítat.
- Dominantní model oproti jiným (RAM stroje).

Turingův stroj

Turingův stroj je uspořádaná šestice:

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

- Q – konečná neprázdná množina stavů
- Σ – vstupní abeceda ($\Sigma \subseteq \Gamma$)
- Γ – pásková abeceda (symboly na pásce)
- $q_0 \in Q$ – počáteční stav
- $F \subseteq Q$ – množina koncových stavů
- δ – přechodová funkce
 - $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$
 - $\delta(q_i, a) = (q_{\square}, b, P)$, kde:
 - $q_i, q_{\square} \in Q$ (stav)
 - $a, b \in \Gamma$ (symbol na pásce)
 - $P \in \{-1, 0, 1\}$ (pohyb: doleva, bez posunu, doprava)

Turingův stroj

- Jde o snadno pochopitelný model skutečného počítače s páskovou pamětí
- Lehce programovatelný
- Má nekonečnou pásku, na níž jsou zapsány symboly.
- Hlava dokáže symbol přečíst, přepsat a posunout se doleva nebo doprava.
- Výpočet začíná v počátečním stavu a končí v koncovém stavu.

Alan Turing

- Britský matematik, logik a kryptanalytik
- „Otec moderní informatiky“
- Během 2. světové války se podílel na prolomení šifry Enigma
- Jeho práce položila základy teorie vyčíslitelnosti, složitosti a umělé inteligence

Turingův stroj

Základní vlastnosti Turingova stroje

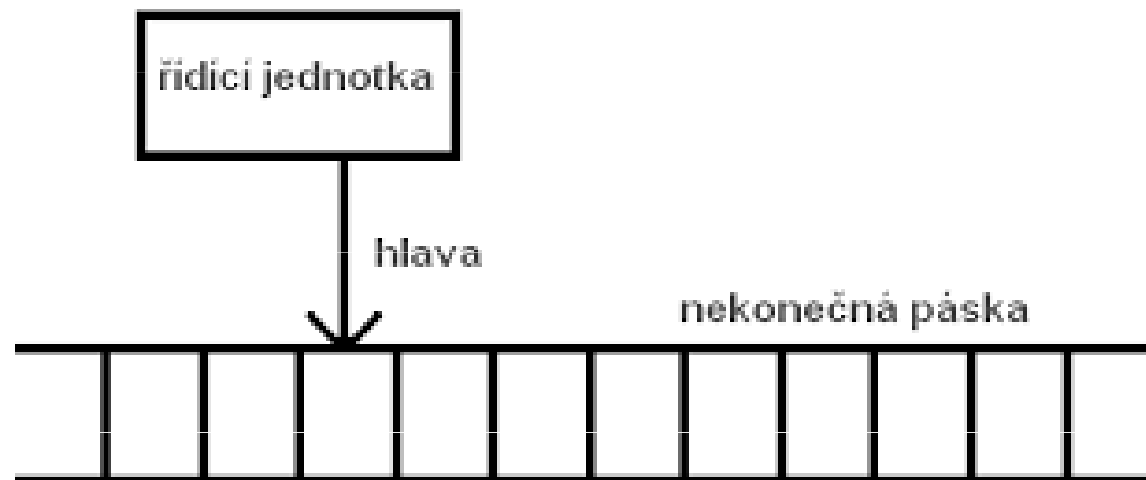
- **Jednoduchost** – má jen pásku, hlavu a sadu stavů
- **Univerzálnost** – dokáže simulovat jakýkoliv algoritmus
- **Determinističnost** – pro daný stav a symbol je vždy určeno, co se má stát
- **Neomezená paměť** – páska je teoreticky nekonečná
- **Zastavení** – výpočet končí, když stroj vstoupí do koncového stavu
- **Základní model výpočtu** – hranice toho, co lze spočítat

Turingův stroj

Základní principy Turingova stroje:

- **Páska:** Nekonečně dlouhá páska rozdělená na jednotlivé buňky, kde každá buňka může obsahovat symbol (např. 0 nebo 1) nebo může být prázdná. Páska slouží jako paměť stroje.
- **Hlava:** Pohyblivá čtecí a zapisovací hlava, která se může pohybovat doleva nebo doprava po pásce. Hlava může číst symboly z pásky, přepisovat je a provádět určité akce na základě stavu stroje.
- **Stavy:** Turingův stroj má konečný počet stavů, ve kterých se může nacházet. Každý stav představuje aktuální konfiguraci stroje.
- **Přechodová funkce:** Určuje, jak se Turingův stroj chová v závislosti na aktuálním stavu a symbolu, který právě čte. Na základě této funkce může stroj provést několik akcí: změnit symbol na pásce, posunout hlavu doleva nebo doprava a přejít do jiného stavu.

Turingův stroj



Turingův stroj

Deterministický Turingův stroj (DTM)

- Pro každý stav a symbol existuje právě jedno přechodové pravidlo

Nedeterministický Turingův stroj (NTM)

- Pro stav a symbol může existovat více pravidel → stroj si „vybere cestu“

Vícepáskový

- Máme více pásek, každá má vlastní čtecí a zápisovou hlavu, tyto hlavy se mohou pohybovat navzájem nezávisle.

Turingův stroj

- Navrhněte TS, který sečte dvě čísla v unární soustavě.

Turingův stroj

Řešení:

- $TS = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{1, 0\}$
- $\Gamma = \{1, 0, _ \}$
- Počáteční stav: q_0
- Konečný stav: q_2

Přechodové stavy:

- $\delta(q_0, 1) = (1, R, q_0)$
- $\delta(q_0, 0) = (1, R, q_1)$
- $\delta(q_1, 1) = (1, R, q_1)$
- $\delta(q_1, _) = (_, L, q_1)$
- $\delta(q_1, 1) = (_, S, q_2)$

Turingův stroj

- Turingův stroj pro jazyk $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

Turingův stroj

Řešení:

$TS = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

$Q = \{q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^{acc}, q^{rej}\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Gamma = \{_, a, b, c, x\}$

Počáteční stav: q^0

Konečné stavy: $\{q^{acc}, q^{rej}\}$

Turingův stroj

Stav **q0**

- $\delta(q_0, _) = (q^{acc}, _, S)$
- $\delta(q_0, a) = (q^1, x, R)$
- $\delta(q_0, b) = (q^{rej}, b, S)$
- $\delta(q_0, c) = (q^{rej}, c, S)$
- $\delta(q_0, x) = (q^0, x, R)$

Stav **q1**

- $\delta(q_1, _) = (q^{rej}, _, S)$
- $\delta(q_1, a) = (q^1, a, R)$
- $\delta(q_1, b) = (q^2, x, R)$
- $\delta(q_1, c) = (q^{rej}, c, S)$
- $\delta(q_1, x) = (q^1, x, R)$

Stav **q2**

- $\delta(q^2, _) = (q^{rej}, _, S)$
- $\delta(q^2, a) = (q^{rej}, a, S)$
- $\delta(q^2, b) = (q^2, b, R)$

- $\delta(q^2, c) = (q^3, x, R)$
- $\delta(q^2, x) = (q^2, x, R)$

Stav **q3**

- $\delta(q^3, _) = (q^4, _, L)$
- $\delta(q^3, a) = (q^{rej}, a, S)$
- $\delta(q^3, b) = (q^{rej}, b, S)$
- $\delta(q^3, c) = (q^3, c, R)$
- $\delta(q^3, x) = (q^3, x, R)$

Stav **q4**

- $\delta(q^4, _) = (q^0, _, R)$
- $\delta(q^4, a) = (q^4, a, L)$
- $\delta(q^4, b) = (q^4, b, L)$
- $\delta(q^4, c) = (q^4, c, L)$
- $\delta(q^4, x) = (q^4, x, L)$

Church–Turingova teze

Cokoliv, co lze efektivně vypočítat pomocí algoritmu, lze vypočítat i na Turingově stroji.

- Formulována **Alonzem Churchem** (lambda kalkul) a **Alanem Turingem** (Turingův stroj)
- Jinými slovy: Turingův stroj je univerzální model výpočtu
- Teze není matematická věta (nelze ji dokázat), ale obecně přijímaný princip informatiky.

Church–Turingova teze

Důsledky:

- Teze vymezuje hranici výpočtů:
Pokud něco nejde spočítat na Turingově stroji, pak to nejde spočítat žádným algoritmem.
- Proto je Turingův stroj používán jako standardní model v teorii vyčíslitelnosti.

Úkol

- Navrhněte TS, který přijímá jazyk $L = \{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$.
- Nápoděda: použijte více pásek