měření těchto veličin uvedených na str. 46. Při dosazování musíme dbát toho, aby pro každou veličinu pravděpodobná chyba $\bar{\vartheta}$ a sama příslušná veličina byly udány v týchž jednotkách. Provedeme-li ještě patřičná zaokrouhlení, dojdeme k výrazu

$$\bar{\vartheta}(G) = 7{,}93 \;.\; 10^{11} \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{55}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0}{800}\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}03}{55}\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}005}{90}\right)^2 + 16\left(\frac{0{,}002}{0{,}5}\right)^2} =$$

$$= 0{,}13 \;.\; 10^{11}\ \mathrm{dyn\ cm^{-2}}.$$

Celkový výsledek můžeme napsat ve tvaru

$$G = (7{,}93 \pm 0{,}13) \;.\; 10^{11}\ \mathrm{dyn\ cm^{-2}},$$

tj.

$$G = (7{,}93 \pm 0{,}13) \;.\; 10^{10}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

1.4. METODY ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ

1.4.1. POČETNÍ METODY ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ

Vyšetřování závislosti jedné fysikální veličiny na druhé je jedním z hlavních úkolů měrné fysiky. Velmi často jde o závislost některé veličiny na teplotě, tlaku, času apod. Tak např. zjišťujeme hodnotu elektrického odporu různých látek při určitých teplotách, měříme velikost deformace těles za různých tlaků, určujeme rychlost difuse kapalin ze změny koncentrace s časem atd.

Abychom zjistili, jak dvě fysikální veličiny na sobě závisí, měříme hodnoty jedné veličiny při určitých hodnotách veličiny druhé. Jinak řečeno, hledáme hodnoty funkce y pro různé hodnoty argumentu x,

$$y = \mathrm{f}(x)$$

Provedeme-li taková měření, obdržíme soubor hodnot veličin x a y, z nichž hodnoty nezávisle proměnné veličiny $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ volíme a jim odpovídající hodnoty $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ získáme jako výsledek měření.

Volíme-li hodnoty argumentu x tak, aby vytvořily aritmetickou posloupnost, tj. aby intervaly mezi jednotlivými po sobě jdoucími hodnotami $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, byly konstantní, jde o měření, které nazýváme *ekvidistantní*. Ekvidistantní měření jsou snáze počitatelná a mají především tu výhodu, že můžeme jejich výsledky zpracovat týmž způsobem jako výsledky „stejně přesných měření" (viz stať 1.3.4). Neekvidistantní hodnoty argumentu působí naopak početní obtíže a snižují přesnost výsledků. Budeme se proto dále zabývat převážně měřeními s ekvidistantními hodnotami argumentu.

Soubor navzájem si odpovídajících hodnot veličin x a y získaný měřením se snažíme popsat ve tvaru matematického vztahu. Jeho tvar může být různý: v nejjednodušším případě předpokládáme o veličinách x a y, že jsou vázány lineární závislostí, v jiných případech musíme předpokládat závislosti složitější. Pak je často výhodné vyjádřit v určitém oboru nezávisle proměnné veličiny x hledanou závislost mocninným mnohočlenem

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m, \tag{4,1}$$

v němž $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou konstantní koeficienty, které je nutné výpočtem stanovit. O způsobech jejich výpočtu a o stanovení stupně m mocninného mnohočlenu pojednáme dále. Na tomto místě je však třeba připomenout, že při zpracování výsledků měření pracujeme pouze s čísly přibližnými. Kdyby z měření plynuly hodnoty zcela přesné, bylo by určení mnohočlenu (4,1) spojeno s menšími potížemi a postačilo by k němu provést $m + 1$ měření poskytujících dvojice hodnot x a y. Při skutečných měřeních vznikají však vlivem nahodilých chyb fluktuace měřených hodnot, které zabraňují nebo aspoň znesnadňují rozpoznání skutečných změn vyplývajících z fysikální podstaty studované závislosti. Proto je třeba vykonat větší počet měření, aby bylo možno se opřít o výsledky teorie nahodilých chyb, podle níž pouze při dostatečně velkém počtu měření může konečný výsledek v mezích přesnosti odpovídat správné hodnotě měřené veličiny. Je-li počet n měření větší než číslo $m + 1$, vznikají sice jisté obtíže se zpracováním naměřených hodnot, neboť i rovnic, do nichž se tyto hodnoty dosazují a z nichž se počítají koeficienty mnohočlenu (4,1), je více než $m + 1$. Volbou vhodné metody výpočtu však lze zaručit rovnoměrné a co nejlepší využití všech jednotlivých měření. Takto zpracovaná měření umožňují dosáhnout nejpravděpodobnějšího konečného výsledku a kromě toho dovolují odhadnout chybu, jakou byla měření zatížena.

1.4.1.1. *Metoda postupná.* Uvedeme nejprve způsob zpracování výsledků měření, která byla provedena metodou postupných měření nebo stručněji metodou postupnou (viz stať 1.2.4). Tuto metodu a způsob zpracování získaných výsledků osvětlíme na příkladu měření Youngova modulu pružnosti (o měření Youngova modulu neboli modulu pružnosti v tahu viz čl. 2.3.1.1). Youngův modul pružnosti E se určuje z Hookova zákona

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\Delta F}{S},$$

v němž Δl je absolutní prodloužení (změna délky) zkoumaného vzorku, vyvolané změnou působící síly (zatížení) ΔF, l_0 délka nezatíženého vzorku a S jeho průřez. Jde tedy v tomto případě, pokud nejsou zatížení příliš velká, o lineární závislost mezi velikostí deformace a silou, která ji vyvolává.

Měření uspořádáme tak, že postupně zvyšujeme zatížení F a odečítáme příslušné hodnoty délky l vzorku. Tím získáme řadu hodnot $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$, které odpovídají hodnotám $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$. Volíme-li přitom hodnoty zatížení F tak, aby vytvořily aritmetickou posloupnost, jde o měření s ekvidistantními hodnotami argumentu*). To znamená, že intervaly mezi po sobě jdoucími hodnotami F jsou konstantní a rozdíly

$$F_2 - F_1 = F_3 - F_2 = F_4 - F_3 = \ldots = F_n - F_{n-1}$$

stejné. Kdyby měření probíhala bez chyb, byly by i rozdíly

$$l_2 - l_1,\; l_3 - l_2,\; l_4 - l_3,\; \ldots,\; l_n - l_{n-1}$$

stejné. Ve skutečnosti tyto rozdíly si nejsou rovny a úkolem výpočtů je právě nalézt jejich nejpravděpodobnější hodnotu. Na první pohled by se zdálo nejvhodnější brát za tuto hodnotu aritmetický průměr $\overline{\Delta l}'$ těchto rozdílů čili součet rozdílů dělený jejich počtem, tj. výraz

$$\overline{\Delta l}' = \frac{1}{n-1}\,[(l_2 - l_1) + (l_3 - l_2) + (l_4 - l_3) + \ldots + (l_n - l_{n-1})] \tag{4,2}$$

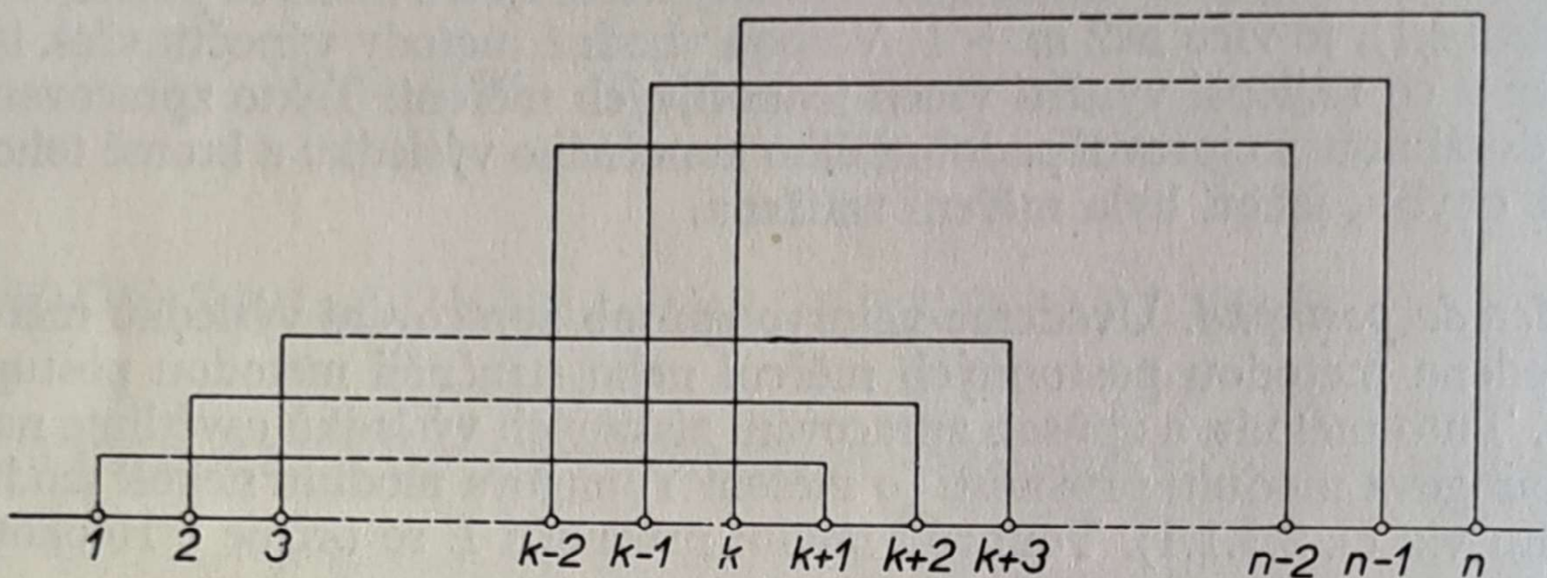
---

*) Řekli jsme, že má-li být měření ekvidistantní, je třeba hodnoty argumentu vhodným způsobem volit. Existují však měření, která jsou ve všech případech ekvidistantní. Mezi ně patří např. kalibrace pipety, při níž množství vážené vody z několikanásobného vyprázdnění pipety je vždy celistvým násobkem hmoty vody v ní obsažené.

Tento výraz však vede k jednoduchému výsledku

$$\overline{\Delta l}' = \frac{l_n - l_1}{n - 1}\,, \tag{4,3}$$

ke kterému bychom dospěli, kdybychom přímo vzali rozdíl mezi hodnotou délky z posledního a prvního měření. Tím by však hodnoty všech ostatních měření zůstaly nevyužity a přesnost měření jakožto celku by závisela jen na přesnosti, s níž byly získány hodnoty prvého a posledního měření.



Obr. 4,1. Schéma stanovení rozdílů měřených hodnot při metodě postupných měření

Proto postupujeme při zpracování výsledků získaných metodou postupných měření takto: provedená měření rozdělíme do dvou početně stejných skupin, takže každá skupina obsahuje $n/2 = k$ měření. Je-li celkový počet měření n číslo liché, jedno měření (zpravidla první) vynecháme. Rozdíly měřených hodnot l bereme mezi hodnotami téhož pořadí obou skupin, tj. mezi první hodnotou prvé skupiny a první hodnotou druhé skupiny, mezi druhou hodnotou prvé skupiny a druhou hodnotou druhé skupiny atd. Schéma na obr. 4,1 ukazuje, jakým způsobem se rozdíly stanoví; jednotlivá měření jsou označena čísly $1, 2, 3, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots, n-1, n$. Celkový počet takto vytvořených rozdílů

$$l_{k+1} - l_1,\ l_{k+2} - l_2,\ l_{k+3} - l_3,\ \ldots,\ l_n - l_k$$

je k a každý z nich představuje k-násobnou hodnotu rozdílu dvou po sobě jdoucích hodnot. Nejpravděpodobnější hodnota tohoto rozdílu bude

$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{k}\left(\frac{l_{k+1} - l_1}{k} + \frac{l_{k+2} - l_2}{k} + \frac{l_{k+3} - l_3}{k} + \ldots + \frac{l_n - l_k}{k}\right), \tag{4,4}$$

což lze psát

$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{k^2}\,[(l_{k+1} + l_{k+2} + l_{k+3} + \ldots + l_n) - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_k)] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} l_i\right) \tag{4,5}$$

nebo

$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i - 2\sum_{i=1}^{k} l_i\right) \tag{4,6}$$

Po výpočtu nejpravděpodobnější hodnoty $\overline{\Delta l}$, známe-li ΔF a je-li změřeno l_0 a S, snadno stanovíme hodnotu Youngova modulu E.

Proti předchozímu způsobu, při němž bychom využili jen prvního a posledního měření, využíváme takto všech měření, aniž se hodnoty z jednotlivých měření při výpočtu opakují. Tím získáme také větší počet hodnot, které můžeme početně zpracovat a určit vedle nejpravděpodobnější hodnoty výsledku i pravděpodobnou chybu měření.

Uvedený postup doplníme příkladem zpracování skutečného měření. Pro stanovení Youngova modulu pružnosti oceli na vzorku ve tvaru drátu s kruhovým průřezem byla změřena jednak délka l_0 a průřez d nezatíženého drátu, jednak závislost délky drátu l na působící síle F. Měření dala tyto výsledky:

$$l_0 = (46{,}7 \pm 0{,}1)\ \mathrm{cm}$$
$$d = (0{,}350 \pm 0{,}001)\ \mathrm{mm}$$

Dvojice hodnot plynoucích z měření závislosti $l = \mathrm{f}(F)$ provedeného metodou postupných měření jsou uvedeny v tabulce 4,1.

Tabulka 4,1

Závislost délky l drátu na působící síle F

Pořadové číslo měření	*F* (kp)	*l* (mm)
1	0,5	0,128
2	1,0	0,241
3	1,5	0,350
4	2,0	0,468
5	2,5	0,584
6	3,0	0,696
7	3,5	0,812
8	4,0	0,927
9	4,5	1,045
10	5,0	1,156

Nepotřebujeme-li posuzovat přesnost měření, můžeme ke stanovení nejpravděpodobnější hodnoty $\overline{\Delta l}$ použít přímo výrazu (4,6) a vypočítat hledanou hodnotu Youngova modulu pružnosti. Vzhledem k tomu, že počet měření $n = 10$, je podle předešlého $k = 5$. Utvoříme-li z tabelovaných hodnot součty $\sum_{i=6}^{10} l_i = 4{,}636$ a $\sum_{i=1}^{5} l_i = 1{,}771$ a dosadíme-li je do vzorce (4,5), dostaneme

$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{5^2}(4{,}636 - 1{,}771)\ \mathrm{mm} = 0{,}1146\ \mathrm{mm}$$

a z toho, položíme-li za ΔF hodnotu 0,5 kp, vyjde

$$E = 2{,}12 \cdot 10^6\ \mathrm{kp\ cm^{-2}},$$

což je

$$E = 2{,}08 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Nm^{-2}}$$

Chceme-li zhodnotit přesnost, s jakou bylo celé měření provedeno, utvoříme nejprve rozdíly $l_{k+1} - l_1, l_{k+2} - l_2, \ldots, l_n - l_k$ a vypočteme jejich pravděpodobnou chybu stejným způsobem, jakoby šlo o řadu jednotlivých k přímých měření. V našem případě budou to rozdíly $l_6 - l_1, l_7 - l_2, \ldots, l_{10} - l_5$, jejichž hodnoty jsou po řadě 0,568;

0,571; 0,577; 0,577; 0,572. Zatížení $\Delta F = 0{,}5$ kp odpovídají rozdíly k-krát čili 5krát menší, tj.

0,1136	+0,0010
0,1142	+0,0004
0,1154	−0,0008
0,1154	−0,0008
0,1144	+0,0002

K těmto rozdílům jsme připsali odchylky od jejich aritmetického průměru $\overline{\Delta l} = 0{,}1146$. Součet kladných odchylek je 0,0016 a pravděpodobná chyba, s jakou byla hodnota Δl stanovena, je podle vzorce (3,39)

$$\bar{\vartheta}(\Delta l) = \frac{5}{3} \cdot \frac{0{,}0016}{5 \cdot 2} = 0{,}000\,27 \text{ mm}$$

Poněvadž pravděpodobné chyby v určení veličin l_0 a d známe, můžeme podle vztahu (3,57) udat pravděpodobnou chybu konečného výsledku měření Youngova modulu pružnosti výrazem

$$\bar{\vartheta}(E) = E \sqrt{\frac{\bar{\vartheta}^2(l_0)}{l_0^2} + 4\,\frac{\bar{\vartheta}^2(d)}{d^2} + \frac{\bar{\vartheta}^2(\Delta l)}{(\Delta l)^2}}$$

Po dosazení máme

$$\bar{\vartheta}(E) = 2{,}12 \cdot 10^6 \sqrt{4{,}6 \cdot 10^{-6} + 32{,}7 \cdot 10^{-6} + 5{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}014 \cdot 10^6 \text{ kp cm}^{-2},$$

tj.

$$\bar{\vartheta}(E) = 0{,}014 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

1.4.1.2. *Metoda skupinová.* Při studiu různých fysikálních dějů často potřebujeme vyřešit tvar závislosti dvou fysikálních veličin. Označme je x a y a předpokládejme, že y je funkcí veličiny x a je dáno mnohočlenem (4,1). Tento mnohočlen sestavený podle rostoucích mocnin nezávisle proměnné veličiny je empirickým vzorcem vyšetřované závislosti a představuje konečný výsledek, jestliže se podaří zjistit jeho stupeň m a určit hodnoty koeficientů $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Předpokládejme ještě, že bylo provedeno n měření, která poskytla n dvojic hodnot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$, a že hodnoty nezávisle proměnné x jsou ekvidistantní. Za předpokladu ekvidistantních hodnot x určíme stupeň m mnohočlenu na základě diferencí z hodnot y a ke stanovení koeficientů mnohočlenu použijeme buď metody, kterou obvykle nazýváme skupinovou, nebo jiné vhodné metody.

Pojem diferencí nejlépe osvětlíme, sestavíme-li z nich tabulku, kterou doplníme hodnotami x a y plynoucími z měření. Z tabulky 4,2 je patrné, že diference prvního řádu,

x	y	$\Delta^{(1)}y$	$\Delta^{(2)}y$	$\Delta^{(3)}y$	$\Delta^{(4)}y$
x_1	y_1				
		$\Delta^{(1)}y_1$			
x_2	y_2		$\Delta^{(2)}y_1$		
		$\Delta^{(1)}y_2$		$\Delta^{(3)}y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^{(2)}y_2$		$\Delta^{(4)}y_1$
		$\Delta^{(1)}y_3$		$\Delta^{(3)}y_2$	
x_4	y_4		$\Delta^{(2)}y_3$		
		$\Delta^{(1)}y_4$			
x_5	y_5				

Tabulka 4,2
Stanovení diferencí prvního a vyšších řádů