Kinematika

Definice: Známe-li časový průběh polohového vektoru **r**(*t*), potom určíme vektor okamžité rychlosti hmotného bodu časovou derivací vektoru **r**(*t*),

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt} \quad .$$

Naopak, známe-li časový průběh vektoru rychlosti **v**(*t*), pak průběh trajektorie určíme integrací rychlosti **v**(*t*) podle času,

$$\boldsymbol{r}=\int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\,dt \quad .$$

Tabulka 1: Derivace a integrály elementárních funkcí.

Funkce	Derivace	Integrál
konst	0	konst x
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$
sin x	cos x	-cos x
cos c	-sin x	sin x
e^x	e^x	e^x
ln x	$\frac{1}{x}$	-x(1-ln|x|)

Pravidla:

Derivace součtu: (u+v)' = u' + v'

Derivace součinu: (uv)' = u' v + u v'

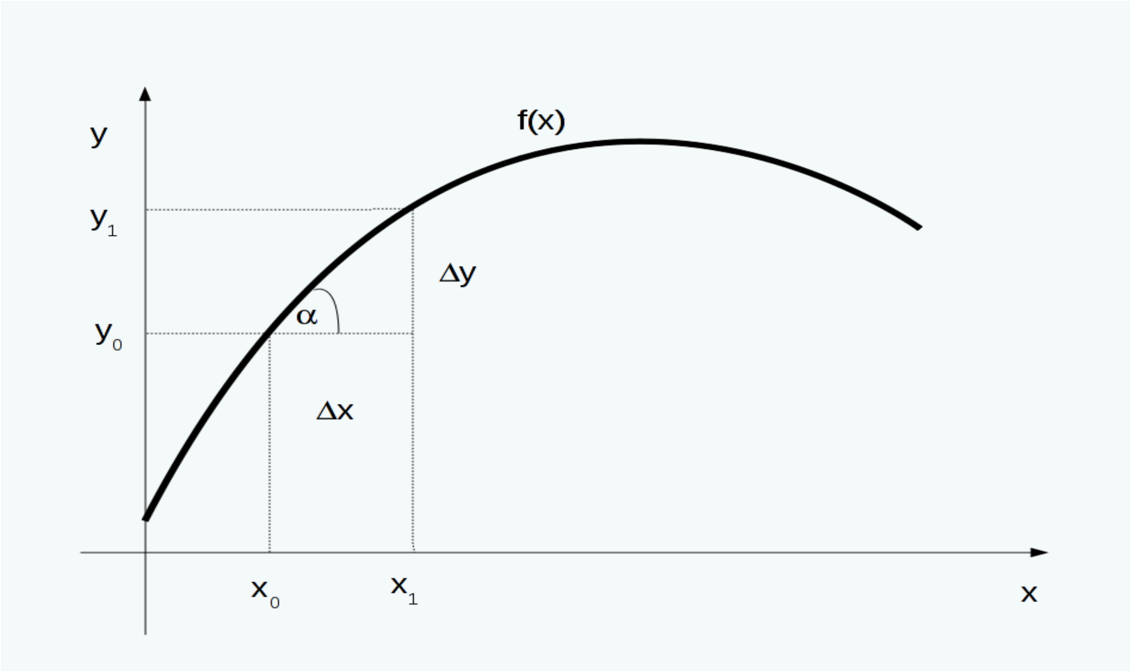
Derivace podílu: (u/v)' = (u' v – u v')/v^2

Derivace složené funkce: (f(u(x)))' = u' df/du

Kratičký úvod do derivací a integrálů funkcí jedné proměnné

Derivace

Mějme spojitou funkci f(x). Derivací této funkce v bodě x0 nazveme funkci f'(x0) která je rovna směrnici tg(α) tečny k funkci f(x) v bodě x0 (Podívejte se na obrázek 1).



Obrázek č.1

Nyní vezměme konkrétní funkci $f(x)=x^2$. Hledejme její derivaci v bodě $x_0=2$. Udělejme to nejprve numericky. Z obrázku č.1 je ihned vidět, že platí

$$tg\,\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\quad ,$$

v našem konkrétním příkladu tedy dostaneme výraz

$$tg\,\alpha=\frac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0}=\frac{x_1^2-2^2}{x_1-2}\quad .$$

Teď budeme hodnotu x_1 postupně snižovat až k hodnotě $x_0=2$. Aby byl příklad dostatečně ilustrativní začneme s hodnotou x_1 =3 a dostaneme tabulku

x1	tg(α)
3	5
2.5	4.5
2.1	4.1
2.01	4.01
2.0001	4.0001

Analytická derivace funkce $f(x)=x^2$ je f'(x)=2x a tedy v bodě $x_0=2$ bude f'(x0)=4, jak předpovídá naše tabulka.

Obecně takovýmto limitním procesem je definována derivace, tj.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad .$$

My budeme v řešení našich příkladů využívat už nalezené derivace elementárních funkcí uvedených v tabulce 1.

Určitý integrál

Ukažme si na následujícím příkladu co myslím pod pojmem integrál. Najděme délku dráhy, kterou urazí auto pohybující se rychlostí $v(t)=3t$ m/s v časovém intervalu od t_1=2s do okamčiku t_2=3s. Uvažujme, že počáteční dráha s_0=0. Postupujme, opět, nejprve numericky. Rozdělíme si celkovou dráhu na 6 úseků Δs_i tak, že v každém úseku se bude auto pohybovat vždy po stejnou dobu

$\Delta t= (t_1 - t_2)/6 = 1/6$ s rychlostí $v_i(t_1+i\Delta t)$, kde i je index číslující jednotlivé úseky počínaje 0. Dostaneme následující tabulku délek jednotlivých úseků

i	$\Delta s_i = v_i(t_1+i\Delta t)\Delta t$
0	1m
1	13/12 m
2	14/12 m
3	15/12 m
4	16/12 m
5	17/12 m

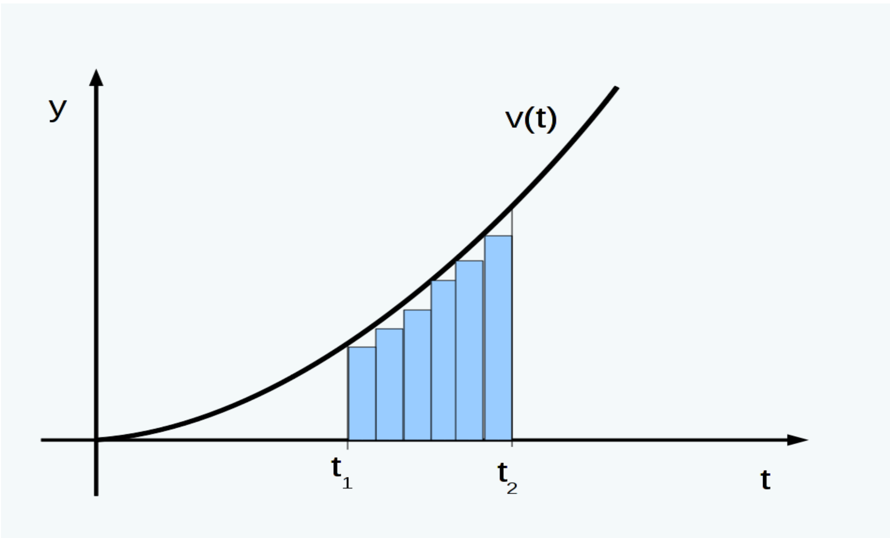
Celková dráha je pak dána součtem délek jednotlivých úseků, tj

$$s=\Delta s_0+\Delta s_1+\Delta s_2+\Delta s_3+\Delta s_4+\Delta s_5=\frac{1}{12}(12+13+14+15+16+17)=\frac{29}{4}m \quad .$$

Pokud budeme počet úseků tímto způsobem dosteneme přecházíme, v limitním případě $N\rightarrow\infty$, od *součtu* k ***integrálu***

$$s=\int_2^3 3\mathrm{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_2^3=\frac{3}{2}3^2-\frac{3}{2}2^2=\frac{15}{2}=\frac{30}{4}\,\mathrm{m} \quad .$$

Náš numerický odhad je dost blízko přesné hodnotě dráhy. Matematicky má integrál význam plochy pod křivkou, která je daná funkcí f(x) (podívejte se na obrázek č.2).



Obrázek č.2

Příklad č.1: Pohyb hmotného bodu na přímce je popsán rovnicí

$$s(t)=12+4t-7t^2 \quad ,$$

kde je-li čas zadán v sekundách pak je dráha *s* v metrech. Určete:

a) rovnici pro jeho rychlost $v(t)$, b) rovnici pro jeho zrychlení $a(t)$, c) rychlost v čase t=2s, d) zrychlení v čase t=2s.

Řešení: a) $v(t)$=4-14t, b) $a(t)$=-14, c) $v(t$=2s)=-24 m/s, d) $a(t$=2s)=-14m/s^2.

Příklad č.2: Hmotný bod se pohybuje po přímce se zrychlením

$$a(t)=2+3t-t^2 \quad .$$

Zadáme-li čas v sekundách, zrychlení bude v m/s^2. Určete rovnici dráhy $s(t)$ a rychlosti v(t), je-li na začátku pohybu s_0=1m a v_0=2m/s. Dále určete, ve kterém časovém okamžiku bude zrychlení maximální a jaká je v tomto okamžiku jeho hodnota..

Řešení:

$$v(t)=2+2t+\frac{3}{t^2}-\frac{t^3}{3} \quad ,$$

$$s(t)=1+2t+t^2+\frac{t^3}{2}-\frac{t^4}{12} \quad ,$$

$$a_{max}(t_{max}=3/2s)=17/4\,m/s^2 \quad .$$

Příklad č.3: Částice se pohybuje podél trajektorie, která je určena polohovým vektorem **r**(t)=**a**t+**b**t^3, kde je **a**=2**i**-**j**+**k** a **b**=4**i**+2**j**. Určete vektor okamžité rychlosti a zrychlení tého částice na počátku a v čase t=1s.

Řešení: **v**(t)=**a**+3**b**t^2, **a**(t)=6**b**t, **v**(0)=2**i**-**j**+**k** , **a**(0)=**0**, **v**(1)=14**i**+5**j**+**k**, **a**(1)=24**i**+12**j.**

Příklad č. 4: Hmotný bod se pohybuje se zrychlením **a**(t)=2 **i** – 3t^3 **j** – t^2 **k**. Nechť je v čase t=0 jeho poloha $\mathbf{r}_0$=2**k** a jeho počáteční rychlost rovna $\mathbf{v}_0$=4**j**. Určete vektor okamžité rychlosti a polohy v libovolném čase t.

Řešení: $\boldsymbol{r}(t)=t^2\boldsymbol{i}+\left(\frac{80-3t^4}{20}\right)t\,\boldsymbol{j}+\frac{24-t^3}{12}\boldsymbol{k} \quad , \quad \boldsymbol{v}(t)=2t\boldsymbol{i}+\frac{16-3t^4}{4}\boldsymbol{j}-\frac{t^3}{3}\boldsymbol{k} \quad .$

Příklad č.5: Letec upustil láhev šampaňského z koše svého balónu, který stoupá rovnoměrně rychlostí 3m/s. Láhvi šampaňského trvá 8s než dorazí na zem. Určete výšku h_1 ve které se balón nacházel v okamžiku, kdy letec upustil láhev, výšku h_2 ve které se balón nacházel v okamžiku kdy láhev narazila na zem a její rychlost *w* v okmžiku její srážky se zemí.

Řešení: h_1=296m, h_1=320m, w=77m/s .

Příklad č. 6: Parašutista padající s konstantní rychlostí 2m/s upustí kouřící kanistrve výšce 300 m. Určete dobu T za kterou kanystr dospěje k zemi a jeho rychlost w když do ní narazí. Určete výsku h parašutisty v okamžiku kdy kanystr narazí do země. Určete závislost vzdálenosti Δh mezi kanystrem a parašutistou na čase t.

Řešení: T=7.55s, w=77.5 m/s, h=284.5m, $\Delta h = 5\ t^2$. Bereme g=10m/s^2.

Příklad č.7: Josef jede v obci rovnoměnou rychlostí 50 km/h. Ve vzdálenosti 50m od něj vstoupí do vozovky důchodkyně Marie. Josef má ve svém autě účinné brzdy, které ve svém maximu dokáží vyvolat zpomalení a=3 m/s^2 . Jeho reakční doba od okamžiku spatření Marie je 1.2 s. Stačí Josef zastavit před strnulou stařenkou? Jakou dráhu od spatření stařenky do úplného zastavení urazí?

Řešení: stačí, s=48.9 m < 50m.

Příklad č.8: Vlak jede rychlostí 60 km/h. Ve vzdálenosti 300m uvidí strojvůdce na přejezu porouchaný automobil. Jak velké musí být zpomalení aby stačilo zabránit srážce a jakou dobu bude vlak zpomalovat? Reakční doba strojvůdce je 1s.

Řešení: a=0.49m/s^2, t=33.9s.

Příklad č.9: Určete o jaký druh trajektorie se jedná, je-li její radiální průvodič dán rovnicí

$$\boldsymbol{r}(t)=2\sin(\omega t)\boldsymbol{i}+3\cos(\omega t)\boldsymbol{j} \quad .$$

kde ω je konstanta. Dále určete rychlost a zrychlení hmotného bodu pohybujícího se podél této trajektorie v libovolném čase t.

Řešení: Trajektorií je elipsa $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\boldsymbol{v}(t)=2\omega\cos(\omega t)\boldsymbol{i}-3\omega\cos(\omega t)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}(t)=-\omega^2\boldsymbol{r}(t)$.

Příklad č.10: Určete druh trajektorie, která je zadaná rovnicemi

$$x(t)=\sin(\Omega t)$$

$$y(t)=\frac{1}{2}(3-4\sin\Omega t-\cos 2\Omega t)$$

kde Ω je konstanta. Dále určete zrychlení tělesa pohybujícího se podél této trajektorie v libovolném časovém okamžiku.

Řešení: Trajektorie je parabola y=(x-1)^2, zrychlení je

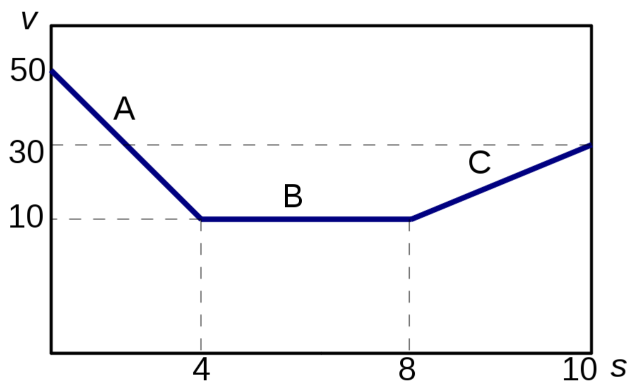
$$\boldsymbol{a}(t)=\Omega^2\sin(\Omega t)(-\boldsymbol{i}+2(1+\cos(\Omega t)\tan(\Omega t)-\sin(\Omega t))) \quad .$$

Příklad č. 11: Určete rovnici trajektorie, která je posána rovnicemi

$x=2\mathrm{t}$, $y=4\mathrm{t}^2$, $z=0$. Dále určete velikost rychlosti v tělesa pohybujícího se podél této trajektorie v libovolném čase t.

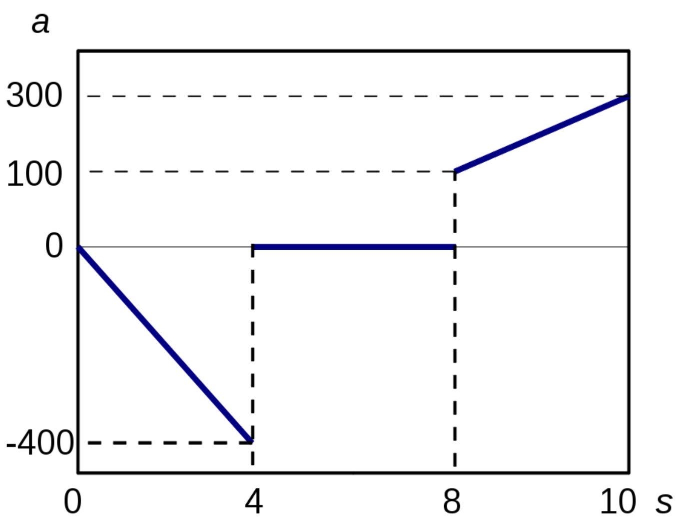
Řešení: $y=x^2$, $v(t)=2\sqrt{1+16\mathrm{t}^2}$.

Příklad č. 12: Na obrázku je znázorněn graf v-s závislosti rychlosti tělesa na ujeté dráze. Nakreslete příslušný graf a-s závislosti zrychlení tělesa na ujeté dráze.



V části A je rychlost pohybu , $v(s)=50-10s$ v části B je rychlost pohybu daná výrazem $v=10$ a v části C je rychlost $v=10+10(s-8)$.

Řešení:



První část: $a(s)=-100s$, druhá část: $a(s)=0$, třetí část: $a(s)=100(s-7)$.

Příklad č.13: Určete, jakou dráhu urazí hmotný bod pohybující se rychlostí:

a) $v(t)=3+4t$ m/s

b) $v(t)=4\ln(t)$ m/s

c) $v(t)=2+1/t$ m/s

d) $v(t)=14\,e^{2t}$ m/s

e) $v(t)=22$ km/h

v časovém intervalu od 2s do 4s Předpokládejte, že počáteční dráha je 0m..

Řešení: a) s=30m, b) s=4(Ln(64)-2)≅8.64m, c) s=4+Ln(2)≅4.7m, d) s=7e^4(e^2-1) = 20484.5 m, e) s=44m.

Příklad č.14: Určete, jaká bude rychlost a zrychlení hmotného bodu pohybující se po dráze, která je zadaná funkcí:

a) $s(t)=3\mathrm{t}+4t^2$ m

b) $s(t)=4\ln(\sqrt{t+1})$ m

c) $s(t)=2+\sqrt{3\mathrm{t}+2}$ m

d) $s(t)=14\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}$ m

e) $s(t)=2\mathrm{t}$ km

v čase t=2s .

Řešení:a) v(t=2s)=19m/s, a(t=2s)=8m/s^2, b) v(t=2s)=2/3 m/s, a(t=2s)=-2/9m/s^2 , c) v(t=2s)=0.53m/s, a(t=2s)=-0.1 m/s^2, d) v(t=2s)=1528.75 m/s, a(t=2s)=3057.5m/s^2 , e)v(t=2s)=2 m/s, a(t=2s)=0 m/s^2 .

Příklad č.15: Určete jaký bude výkon motoru *P* , který vykonává práci *W* zadanou rovnicí

a) $W(t)=4(t^2+3)^3$ J,

b) $W(t)=4\mathrm{t}+2\ln|1/t|$ J,

c) $W(t)=2\mathrm{t}-5(4+t)^{1/4}$ J,

v čase t=2s. Jaká je jednotka výkonu? (pozn. *P* = d*W* / dt)

Řešení: a) $P(t)=24\mathrm{t}(t^2+3)^2$ W, *P*(*t*=2s)=2.352 kW, b) $P(t)=2(2-1/t)$,*P*(*t*=2s)=3W,

c) $P(t)=2-\dfrac{5}{4(t+4)^{3/4}}$ W, *P*(*t*=2s)=1.67W.

Úhlové veličiny

Definice:

úhlová vzdálenost: $\phi = \frac{l}{R}$

úhlová rychlost: $\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$

úhlové zrychlení: $\epsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

tečné zrychlení: $a_t = R\epsilon$

normálové zrychlení: $a_n = \frac{v^2}{R}$

celkvé zrychlení: $\boldsymbol{a} = a_t \boldsymbol{\tau} + a_n \boldsymbol{n}$

Příklad č.1: Automobil se pohybuje rychlostí 100 km/h po kruhové dráze o poloměru 250m. V okamžiku t=0 začne brzdit. Po ujetí jednoho kola má rychlost 10m/s. Určete celkovou dobu, kterou potřebuje na dosažení rychlosti 10m/s. Dále určete celkové zrychlení na začátku brždění a v okamžiku kdy dosáhne rychlosti 10m/s.

Řešení: a_c=5.6 m/s^2, t=2.4min.

Příklad č.2: Vyšetřete pohyb hmotného bodu, jehož polohový vektor $\boldsymbol{r}$ závisí na čase podle rovnice

$$\boldsymbol{r}(t) = A\cos(bt)\boldsymbol{i} + A\sin(bt)\boldsymbol{j}$$

kde je A=4m a b=π/3 s^{-1}.

Určete

1.vektor rychlosti **v**, jeho velikost a směr pomocí jednotkového vektoru,

2.vektor zrychlení **a**, jeho velikost a dále tečné a normálové zrychlení,

3.tvar trajektorie pohybu a poloměr křivosti trajektorie R,

4.dokažte, že vektor rychlosti **v** a polohový vektor **r** jsou na sebe kolmé,

5.vektor úhlové rychlosti **ω** a dokažte, že **ω** je kolmé na rovinu, ve které se pohyb děje, tj. $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$.

Řešení:

1. $\boldsymbol{v} = \frac{4}{3}\pi\left[-\sin\frac{\pi}{3}t\,\boldsymbol{i} + \cos\frac{\pi}{3}t\,\boldsymbol{j}\right]$, $|\boldsymbol{v}| = \frac{4}{3}\pi$ m/s, $\boldsymbol{t} = -\sin\frac{\pi}{3}t\,\boldsymbol{i} + \cos\frac{\pi}{3}t\,\boldsymbol{j}$,

2. $\boldsymbol{a} = \frac{-4}{9}\pi^2\left[\cos\frac{\pi}{3}t\,\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{3}t\,\boldsymbol{j}\right]$, $|\boldsymbol{a}| = \frac{4}{9}\pi^2$ m/s^2, $a_n = \frac{4}{9}\pi^2$ m/s^2, $a_t = 0$,

3.Trajektorií je kružnice. Poloměr křivosti je tedy R=4m.

4. $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} = 0$,

5. $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$.

Příklad č.3: Otáčky rotoru jsou 4000 s^{-1}. Rotor začne zpomalovat rovnoměrně s úhlovým zpomalením $\varepsilon=20\ s^{-2}$. Kolik celých otáček rotor udělá než se úplně zastaví?

Řešení: N=63661 ot.

Příklad č. 4: Kulička zanedbatelných rozměrů se pohybuje po kruhové dráze o poloměru *R*. Velikost její rychlosti závisí na dráze *s* podle vztahu $v=kl^2$, kde k je kladná konstanta. Určete vztah pro úhel α svíraný vektory rychlosti a zrychlení kuličky.

Řešení: $\tan\alpha = l/(2R)$.

Příklad č.5: Hmotný bod se pohybuje po kruhové dráze o poloměru *R*=0.2m tak, že úhlová souřadnice se mění s časem podle výrazu $\phi=1+2t^4$. Jaké je tečné a normálové zrychlení hmotného bodu v čase *t*=3 s.? Pro které ϕ bude vektor celkového zrychlení svírat s radiálním vektorem úhel $\alpha=30°$?

Řešení: $a_t=43.2\ m/s^2$, $a_n=345.6\ m/s^2$, $t=0.9$s, $\phi=2.31$rad.

Příklad č. 6: Otáčky motoru se zvýšily ze 650 s^{-1} na 4500 s^{-1} za 20 s. Jak velké je úhlové zrychlení ε, pokud se otáčky motoru zvyšovaly rovnoměrně?

Řešení: $\varepsilon=192.5\ s^{-2}$.

Příklad č.7: Hmotný bod se pohybuje po kruhové dráze o poloměru *R*=0.1m tak, že se jeho úhlová rychlost mění s časem podle výrazu $\omega=2+3t^2$. Jaké je tečné a normálové zrychlení hmotného bodu v čase *t* =1 s.? Jaký úhel α bude vektor celkového zrychlení svírat s vektorem rychlosti v čase *t*=2 s? Jakou úhlovou dráhu hmotný bod urazí za tuto dobu, pokud v čase t=0 byla $\phi_0=0.5$ rad?
Řešení: $\mathbf{a}=(0.6\,\boldsymbol{\tau} + 2.5\,\mathbf{n})\ m/s^2$, $\alpha = 86.5°$, $\phi=12.5$ rad.