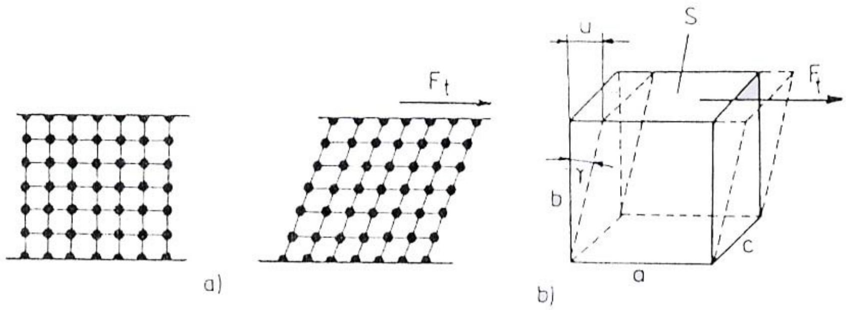
Slezská univerzita v Opavě – Filosoficko-přírodovědecká fakulta			
Fyzikální praktikum I – Mechanika a molekulová fyzika			
Jméno: Katarína Huterová	**Ročník, obor:** První, MMT	**Vyučující:** Mgr. Richard ŠVACHA Mgr. Daniel CHARLUBÁK, Ph. D.	**Datum měření:** 30. 10. 2019
Akademický rok:	**Název úlohy:** **Modul pružnosti ve smyku**		**Datum odevzdání:**
Číslo úlohy: **7**			**Hodnocení:**

1 Pracovní úkoly:

Určete modul pružnosti ve smyku ocelové struny.

2 Teoretický úvod:

Při namáhání materiálu smykem se jeho jednotlivé vrstvy navzájem posouvají (smýkají po sobě). Vzdálenost vrstev však zůstává zachována. Na obrázku 1. je znázorněna taková deformace. Tečná síla F_t, působící v rovině horní stěny malého hranolu o hranách a,b,c, posunula tuto stěnu o vzdálenost u.



Obr. 2.1 Deformace tuhého tělesa při smyku.

Zaveďme veličiny nezávislé na rozměrech zvoleného hranolku: poměrné (relativní) posunutí γ a tečné (smykové) napětí τ :

$$\gamma = \frac{u}{b},$$

$$\tau = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{ac},$$

Hookeův zákon pro smyk má potom tvar:

$$\tau = G\gamma, \text{ nebo } \gamma = \tau\frac{1}{G},$$

kde konstantu úměrnosti G nazveme modulem pružnosti ve smyku. Můžeme tedy modul pružnosti ve smyku definovat vztahem:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \qquad [G] = \mathrm{Nm^{-2}} = \mathrm{Pa} \qquad \textbf{(1)}$$

K namáhání materiálu smykem dochází např. při zkrucování tyče kruhového průřezu, která je na jednom konci upevněna a na jejíž druhý konec působí dvojice sil kroutícím momentem M. Mezi tímto momentem a úhlem zkroucení tyče φ platí vztah

$$M = G\frac{\pi r^4}{2l}\cdot\varphi, \qquad \textbf{(2)}$$

kde r je poloměr a l délka tyče.

Použijeme-li tenkou a dlouhou tyč, je poměrné posunutí γ dostatečně malé i při velkém úhlu zkroucení φ. Usnadní nám to udržet namáhání materiálu v oblasti malých deformací a tedy i v mezích platnosti Hookeova zákona. Tento požadavek snadno splníme, když místo tyče užijeme tenký dlouhý drát o průměru d. Po dosazení $r = d/2$ dostává vztah tvar:

$$M = G\frac{\pi d^4}{32\cdot l}\cdot\varphi. \qquad \textbf{(3)}$$

Zavěsme na dolní konec drátu těleso o momentu setrvačnosti J a působením momentu M drát zkruťme. Protože se pohybujeme v intervalu platnosti Hookeova zákona a tedy pod mezí pružnosti materiálu, bude se drát po skončení působení deformujících sil vracet do původního stavu. Na těleso přitom bude působit moment $-M$. Pohybová rovnice tělesa:

$$J\ddot{\varphi} = -M\ .$$

Přejde po dosazení za M z (3) na

$$\ddot{\varphi} + G\frac{\pi d^4}{32Jl}\cdot\varphi = 0\,.$$

To je ovšem diferenciální rovnice harmonického pohybu, pro jehož úhlovou frekvenci ω platí:

$$\omega^2 = G\frac{\pi d^4}{32Jl}. \qquad \textbf{(4)}$$

Zavěšené těleso tedy vykonává torzní kmity. Při výpočtu jsme nebrali v úvahu odpor prostředí a ztráty v drátu, které způsobují tlumení. Jejich vliv však lze obvykle zanedbat.

Dosadíme-li $\omega = 2\pi / T$ do (4), získáme po úpravě:

$$G = \frac{128\pi Jl}{d^4 T^2} \,. \qquad \textbf{(5)}$$

Kde T je doba torzních kmitů tělesa a J jeho moment setrvačnosti.

Těleso (obr.1) vykonávající kmitavý pohyb je složeno z tyče o hmotnosti M a momentu setrvačnosti J_T a dvou stejných symetricky vzhledem k ose rotace umístěných přídavných těles o hmotnostech m_V a momentech setrvačnosti k vlastní ose rotace procházející těžištěm J_V. Jelikož přídavná závaží mají tvar dutých válců nasunutých na tyč, lze pro moment setrvačnosti J celé kmitající sestavy napsat vztah:

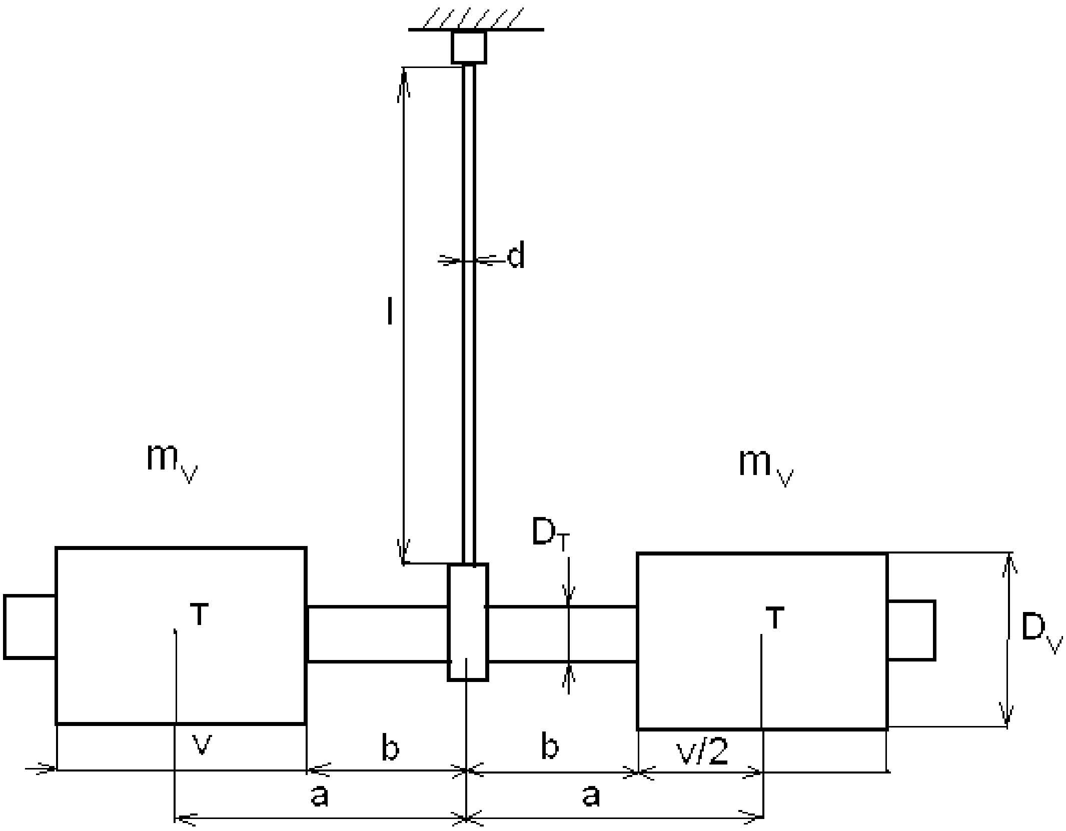
$$J = J_T + 2\left(J_V + m_V a^2\right) \qquad (6)$$

Kde $J_T = \frac{1}{12} \cdot ML^2$ (7)

$$J_V = \frac{m_V}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_T}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_V}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{3}\right] \qquad (8)$$

Po dosazení :

$$J = \frac{1}{12} \cdot ML^2 + 2\left\{\frac{m_V}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_T}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_V}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{3}\right] + m_V a^2\right\} \qquad (10)$$



Obr.1

Vypočteme–li tedy moment setrvačnosti J tělesa podle rovnice (10), můžeme poté vypočítat i hodnotu modulu pružnosti ve smyku ocelové struny podle rovnice (5).

Abychom se vyhnuli použití teoretického vztahu pro J_V a J_T, vyloučíme je z měření následovně. Válce umístíme postupně do vzdálenosti *a1* , *a2* .Odpovídající časy T_1, T_2

Platí

$$J_{a1} = J_T + 2\left(J_V + m_V a_1^{\ 2}\right) \qquad (11)$$

$$J_{a2} = J_T + 2\left(J_V + m_V a_2^{\ 2}\right) \qquad (12)$$

Rovnice odečteme

$$J_{a2} - J_{a1} = 2m_V\left(a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}\right) \qquad (13)$$

Z rovnice (5) vyjádříme J a pro dvě různé vzdálenosti a a příslušné časy T platí

$$J_{a2} - J_{a1} = \frac{Gd^4}{128\pi l}\left(T_2^{\ 2} - T_1^{\ 2}\right) \qquad (14)$$

Porovnáním pravých stran rovnic (13) a (14) dostaneme

$$G = \frac{128\pi l 2 m_V \left(a_2^2 - a_1^2\right)}{d^4 \left(T_2^2 - T_1^2\right)} \qquad (15)$$

3 Použité měřící přístroje a pomůcky

- Mikrometrické měřítko
- Pravítko
- Stolní váhy
- Posuvné měřítko
- Stopky
- Svinovací metr

4 Postup měření - metoda A

1) Nejprve jsem proměřil průřez drátu *d* mikrometrickým měřítkem a jeho délku *l* svinovacím metrem.
2) Potom jsem změřil délku tyče *L* pravítkem, její hmotnost *M* na stolních vahách a její průřez D_T posuvným měřítkem.
3) Dále jsem změřil průměr závaží D_V, jejich výšku v a jejich hmotnost m_V a tím jsem měl připraveny všechny hodnoty pro výpočet jednotlivých momentů setrvačnosti.
4) Provedl jsem měření 10ti kmitů torzního kyvadla bez závaží, pouze s upevněnou tyčí.
5) Provedl jsem měření 10ti kmitů torzního kyvadla se závažími vzdálenými o délku *a* od středu tyče. Celkem pro tři různé délky *a*.
6) Podle vztahu (10) vypočetl J a dosadil do vztahu (5).

5 Postup měření - metoda B

1) Nejprve jsem proměřil průřez drátu *d* mikrometrickým měřítkem a jeho délku *l* svinovacím metrem.
2) Dále jsem změřil hmotnost závaží m_V .
3) Provedl jsem měření 10ti kmitů torzního kyvadla se závažími vzdálenými o délku *a* od středu tyče. Celkem pro tři různé délky *a*.
4) Podle vztahu (15) vypočetl G

6 Naměřené a vypočtené hodnoty

Délka drátu	l = (684,0±0,5)mm	l = 684 (1±0,0007)mm
Hmotnost závaží	m_v = (367,6±2)g	m_v = 367,6 (1±0,005)g

Tab. 1 – průměr ocelové struny

Počet měření	d [mm]	d - d_P [mm]	(d - d_P)^2 [mm]
1	1,39	-0,008	0,000064
2	1,40	0,002	0,000004
3	1,41	0,012	0,000144

4	1,39	-0,008	0,000064
5	1,40	0,002	0,000004
Součet	6,99	-	0,00028
d_{P1}	1,398	-	-

$$u'_{Ad} = \sqrt{\frac{1}{5*(5-1)}} * 0{,}00028 = 0{,}004 => počet\ měření\ byl\ 5 =>$$

$$u_{Ad} = \sqrt{2}\,0{,}004 = 0{,}006mm$$

$u_{Bd} = 0{,}05$

$u_d = \sqrt{u_{Ad}^2 + u_{Bd}^2}$

$u_d = \sqrt{0{,}006^2 + 0{,}05^2} = 0{,}05mm$

$d = (1{,}398 \pm 0{,}05)mm$ $\qquad d = 1{,}398\,(1 \pm 0{,}04)mm$

Tab. 2 – Měření doby 10 kmitů T_1 se závažím ve vzdálenosti a_1 = 0,18m

Počet měření	T_1 (s)	T_1 - Tp_1 [s]	$(T_1 - T_{p1})^2$ [s]
1	56,33	-0,178	0,031684
2	56,85	0,342	0,116964
3	56,22	-0,288	0,082944
4	56,97	0,462	0,213444
5	56,17	-0,338	0,114244
Součet		-	0,55928
T_{P1}		-	-

$$T_{p1} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} T_1 = 56{,}508\,s$$

$u'_{AT1} = \sqrt{\frac{1}{20}} * 0{,}55928 = 0{,}17 => počet\ měření\ byl\ 5 => \ u_{AT1} = \sqrt{2} * 0{,}17 = 0{,}2$s

$u_{BT1} = 0{,}1s$

$u_{T1} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}1^2} = 0{,}22s$ (chyba měření 5 T_1, pro jednu periodu 0,22/5=0,04)

Pro jeden kmit $T_1 = (5{,}66 \pm 0{,}04)$s $\qquad T_1 = 5{,}66\,(1 \pm 0{,}007)s$ (tj. relativní chyba $u_{r,T1}$ veličiny T_1 je $u_{r,T1} = 0{,}007$, toto použijete pro výpočet přenášené chyby, viz níže)

Tab. 3 – Měření kmitů T_2 se závažím, a_2 = 0,20m

Počet měření	T_2 (s)	T_2 - T_{P2} [s]	$(T_2 - T_{P2})^2$ [s]
1	61,02		
2	zde si vymyslete		
3	přibližně stejné		
4	hodnoty		
5	61,23		
Součet		-	
T_{P2}		-	-

$$T_{p2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} T_2 =$$

$u_{AT2} = \cdots$s

$u_{BT2} = 0{,}1s$
$u_{T2} = \cdots s$
Pro jeden kmit T_2 =s $\qquad T_2 = \cdots\ (1 \pm \cdots)s$

Tab. 4 – Měření kmitů T_3 se závažím, a_3 = 0,22m

Počet měření	T_3 (s)	T_3 - T_{P3} [s]	$(T_3 - T_{P3})^2$ [s]
1	65,73		
2	zde si vymyslete		
3	přibližně stejné		
4	hodnoty		
5	65,70		
Součet	328,16	-	
T_{P3}	65,632	-	-

$$T_{p3} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} T_3 =$$

$$u'_{AT3} = \cdots => počet\ měření\ byl\ 5 => \ u_{AT3} = \sqrt{2} \ldots =$$

$u_{BT} = 0{,}1s$
$u_{T3} =$
Pro jeden kmit $T_3 =$ $\qquad T_3 =$

G podle vztahu (15) pro tři kombinace $a_x, a_y,, T_x, T_y$, x,y=1,2,3

$$G = \frac{128 * \pi * l * 2m_v * (a_x^2 - a_y^2)}{d^4 * (T_x^2 - T_y^2)}$$

$G_1 = \cdots\ Pa$ (pro kombinaci 2, 3)

$G_2 = \cdots Pa$ (pro kombinaci 1, 3)

$G_3 = \cdots\ Pa$ (pro kombinaci 1, 2)

$$G_p = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{3} = \cdots Pa$$

Výsledná relativní chyba: $u_{r,G} = \sqrt{u_{r,G1}^2 + u_{r,G2}^2 + u_{r,G3}^2}$
$u_{r,G} = \cdots$

Konečný výsledek: $G = G_p\ (1 \pm u_{r,G})$
$u_{r,G} = \cdots$

(Příklad výpočtu G_1 podle vzorce (15) a relativní chyby G_1 vypočtené podle vzorce pro tzv. přenášenou chybu)

l = 684 (1±0,0007) mm
m_v = 367,6 (1±0,005) g
d = 1,398 (1±0,004) mm
a_2 =200 (1± 0,003) mm
a_3 = 220 (1± 0,002) mm
T_2 =6,11 (1± 0,002) s
T_3 = 6,56 (1± 0,003) s

$$G_1 = \frac{128 * \pi * 0{,}684 * 2 * 0{,}368 * (0{,}22^2 - 0{,}20^2)}{0{,}0014^4 * (6{,}56^2 - 6{,}11^2)} = 7{,}76 * 10^{10}\ Pa$$

$$u_{r,G1} = \sqrt{u_{r,l}^2 + u_{r,m}^2 + (2u_{r,a2})^2 + (2u_{r,a3})^2 + (4u_{r,d})^2 + (2u_{r,T2})^2 + (2u_{r,T3})^2}$$

$$u_{r,G1} = \sqrt{0{,}0007^2 + 0{,}005^2 + 0{,}006^2 + 0{,}004^2 + 0{,}016^2 + 0{,}004^2 + 0{,}006^2} = 0{,}01963 = 0{,}020$$

$$G_1 = 7{,}76(1 \pm 0{,}020) \cdot 10^{10} Pa$$

Měřením nám vyšlo, že modul pružnosti ve smyku ocelové struny je G =…, což je oproti tabulkové hodnotě … odchylka o ..%.