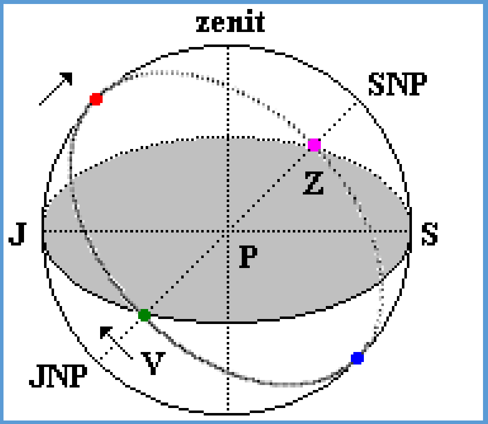


Astronomické souřadnicové soustavy

Kapitola byla převzata z publikace:
Janík, Mikulášek: Obecná astronomie,
verze 1.1, MU Brno 2013

Základní úlohou astronomie je určení okamžité polohy tělesa na základě pozorování, což je ovšem problematické z řady důvodů

a) pozorujeme ze Země, můžeme tak určit jen směr, vzdálenost tělesa obecně neznáme
b) pozorujeme ze Země, která se pohybuje a pozorování jsou většinou získána z jejího povrchu, což přináší zkreslení nejrůznějšího druhu
c) rychlost světla je konečná - informace o směru je zpožděná

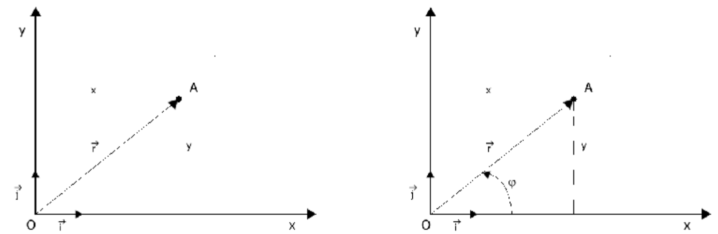
Všechny efekty je třeba dobře pochopit, popsat a správně provést redukce. Poloha bodu se vždy vztahuje k určité souřadnicové (vztažné) soustavě. Můžeme pro jednoduchost předpokládat plochý, euklidovský prostor a v něm nejobvyklejší souřadnicovou soustavu kartézskou. Tato soustava je určena počátkem a polohou tří (v prostoru) navzájem kolmých os. Můžeme v obecnosti uvažovat i jiné souřadnicové systémy např. sférický či válcový.

2.1 Souřadnice bodu v rovině

Pro případ, že se těleso (bod) pohybuje pouze v rovině, s čímž se setkáme např. při řešení Keplerovy rovnice, nám vystačí k popisu polohy tělesa pouze dvě souřadnice. Tyto souřadnice si můžeme zapsat jako uspořádanou dvojici čísel, kterou reprezentuje polohový vektor $\vec{r}$ (viz obr. 8).

Směr os x a y souřadnicové kartézské soustavy je určen dvojicí navzájem kolmých jednotkových vektorů $\vec{i}$ a $\vec{j}$, pro které platí

$$\vec{i}.\vec{i} = 1, \;\; \vec{j}.\vec{j} = 1 \;\text{ a }\; \vec{i}.\vec{j} = 0. \tag{1}$$



Obrázek 8: Poloha bodu A je dána vzhledem k počátku O polohovým vektorem $\vec{r}$, který reprezentují dva průměty x a y (vlevo). V polárních souřadnicích je poloha bodu A dána velikostí polohového vektoru r a úhlem φ (vpravo).

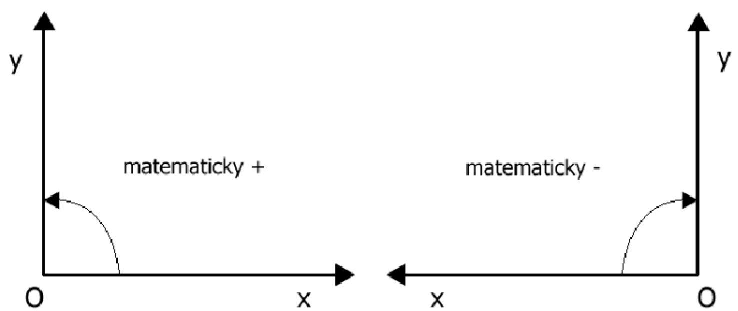
Součin vektorů $\vec{i}$ a $\vec{j}$ je roven nule, protože jsou tyto vektory na sebe kolmé. Hledáme-li průměty vektoru $\vec{r}$ do os x a y, vyjdeme ze vztahů

$$x = \vec{r}.\vec{i}, \;\; y = \vec{r}.\vec{j} \;\text{ a }\; \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{2}$$

Výhodné je užívat pro zápis maticového (vektorového) formalismu

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\text{ a }\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \left(x\vec{i} + y\vec{j} \right). \tag{3}$$

S vektory se dají dělat běžné operace jako sčítání a odčítání, což nám v maticovém zápisu ulehčí práci. Kartézská soustava je určena počátkem, základním směrem a orientací, tj. jde-li o levotočivou či pravotočivou soustavu (viz obr. 9).



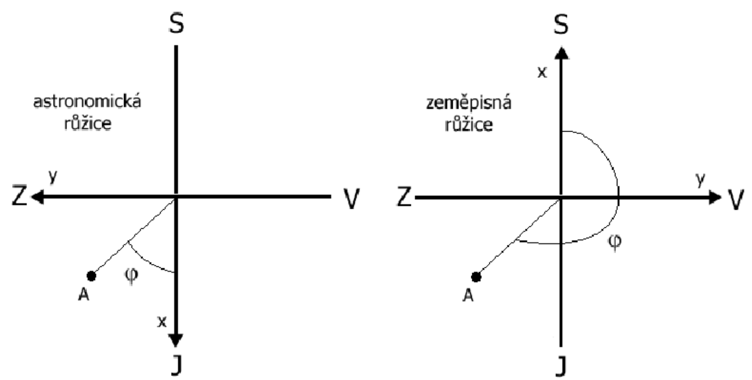
Obrázek 9: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) souřadnicová soustava.

Použijeme-li pro popis polohy bodu v rovině polárních souřadnic, hodnotu souřadnic x a y lze vyjádřit jako

$$x = r\cos(\varphi) \;\text{ a }\; y = r\sin(\varphi), \tag{4}$$

kde r je radius (délka, velikost vektoru $\vec{r}$) a φ je argument, který lze vyjádřit v úhlové míře

a) ve stupních $(0°, 360°)$
b) v radiánech $(0, 2\pi)$
c) či v časových úhlových jednotkách (hodiny).



Obrázek 10: Srovnání astronomické a zeměpisné (navigační) růžice, obě soustavy jsou levotočivé, liší se hlavním směrem, tj. směrem osy x (u astronomické míří na jih).

Jednoduchými přepočty lze přecházet mezi stupni a radiány, radiány a hodinami či stupni a hodinami

$$\begin{array}{rcl} 2\pi \text{ radiánů} = 360° & = & 24^{\mathrm{h}} \\ 15° & = & 1^{\mathrm{h}} \\ 1° & = & 4^{\mathrm{m}} \end{array} . \tag{5}$$

V maticovém zápise pak můžeme složky vektoru $\vec{r}$ napsat jako

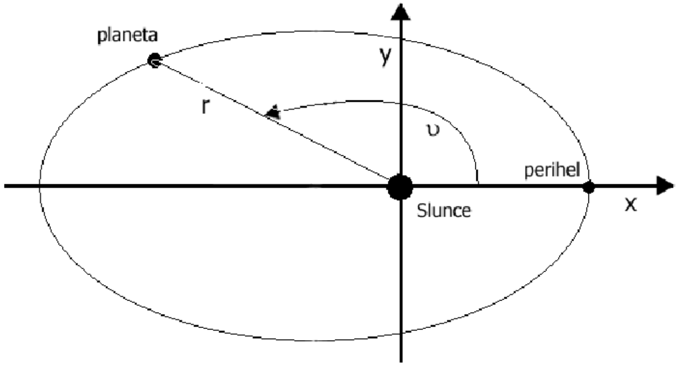
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{6}$$

kde r je $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Úhel φ je pak argumentem x a y $\varphi = \arg(x,y)$, pro který platí

$$\begin{array}{rclc} \varphi & = & \arctan\frac{y}{x} & x > 0 \\ \varphi & = & \pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0 \\ \varphi & = & \pi/2 & x = 0 \text{ a } y > 0 \\ \varphi & = & 3\pi/2 & x = 0 \text{ a } y < 0 \end{array} . \tag{7}$$

Použití souřadnicového systému v rovině lze ukázat na následujících, nejenom astronomických, příkladech:

a) horizontální rovina - větrná růžice (astronomická vs. geometrická, navigační viz obr. 10)
b) rovina dráhy tělesa ve sluneční soustavě (viz obr. 11), která je dána vzdáleností r od Slunce (velikostí polohového vektoru $\vec{r}$) a pravou anomálií υ (úhel mezi polohovým vektorem - průvodičem a Sluncem - perihelem).



Obrázek 11: Rovina dráhy tělesa (planety) ve sluneční soustavě.

2.2 Souřadnice bodu v prostoru

Na rozdíl od popisu polohy bodu v rovině, pro popis polohy bodu v prostoru je potřeba zavést souřadnicovou soustavu s počátkem, základní rovinou, základním směrem a její orientací. Tato souřadnicová soustava je pak popsána trojicí jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$. Polohový vektor $\vec{r}$ je pak dán

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ a } \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Hledáme-li naopak kartézské souřadnice z polohového vektoru $\vec{r}$, můžeme zapsat

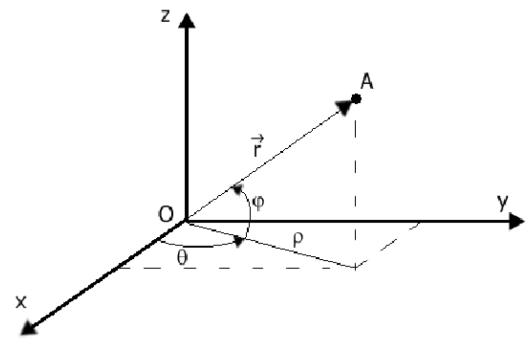
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i}\vec{r} \\ \vec{j}\vec{r} \\ \vec{k}\vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{9}$$

kde vynásobené matice jednotkových vektorů dávají jednotkovou matici řádu 3x3

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

V prostoru můžeme rovněž využít v případě válcové symetrie (diskové modely, Galaxie apod.), která využívá kombinace polární soustavy v rovině xy a kartézské souřadnice z. Poloha bodu je tak dána souřadnicemi (ϱ, θ, z), kde $x = \varrho\cos(\theta)$, $y = \varrho\sin(\theta)$ a $z = z$. V maticovém zápise pak můžeme zapsat

$$\begin{pmatrix} \varrho\cos(\theta) \\ \varrho\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{11}$$



Obrázek 12: Sférická souřadnicová soustava (v astronomii je úhel φ brán od základní roviny, v matematice od osy z).

Velikost polohového vektoru $\vec{r}$ je dána $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$. Velikost $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ a úhel $\theta = \arg(x, y)$. Jak bylo zmíněno výše, v astronomii se válcové soustavy souřadnic používá u naší Galaxie, kde počátek souřadnic je ve Slunci, osa x míří do galaktického středu a osa y je v rovině Galaxie ve směru matematicky kladném. Osa z pak míří do pólu Galaxie.

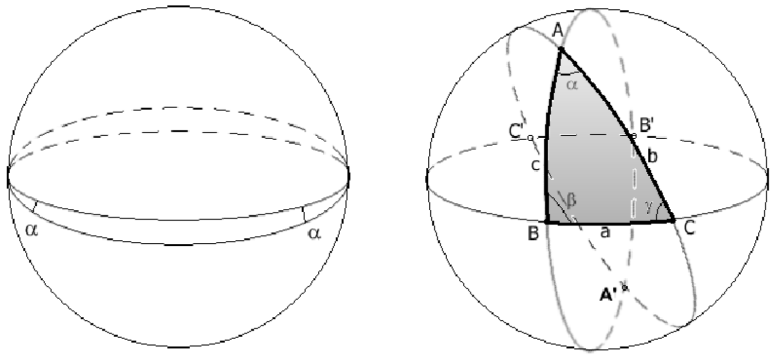
S největším využitím se v obecné astronomii setkáváme u souřadnicové soustavy sférické. Z našich pozorování známe přímo směr k pozorovanému objektu, o vzdálenosti v obecnosti mnoho nevíme. Sférická soustava je opětovně definovaná svým počátkem, základní rovinou xy, základním směrem v ose x a svou orientací případně směrem k pólu (což je ekvivalentní informaci o orientaci soustavy). Bod je popsán pomocí dvou úhlových souřadnic, které udávají směr θ a φ (délka a šířka) a jeho vzdáleností r (velikost polohového vektoru $\vec{r}$ (viz obr. 12).

Stejně jako u válcových souřadnic v rovině je velikost ϱ dána jako $\sqrt{x^2 + y^2}$ nebo též jako $\varrho = r\cos\varphi$. Pro převod do kartézských souřadnic x, y, z lze napsat jednoduché vztahy

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta & \varphi &= \arcsin z/r \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta & \theta &= \arg(x, y) \\ z &= r\sin\varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

2.3 Geometrie na kouli, sférický dvojúhelník a trojúhelník

Hlavním rozdílem mezi geometrií v plochém prostoru a geometrií na kouli je např. ten fakt, že na kouli jsme schopni zkonstruovat trojúhelník na základě znalosti pouze tří úhlů, což v prostoru nelze, protože nám to dává nekonečně mnoho řešení ve tvaru podobných trojúhelníků. Na kouli však můžeme také vytvořit tzv. sférický dvojúhelník (viz obr. 13), což v plochém prostoru nelze, který je omezen dvěma hlavními kružnicemi a dělí sféru na 4 díly o celkové ploše 4π steradiánu. Plocha



Obrázek 13: Znázornění sférického dvojúhelníku (vlevo) a sférického trojúhelníku (vpravo) s důležitými úhly a body.

takového dvojúhelníku je pak dána jako

$$S = 2R^2\alpha, \tag{13}$$

kde je-li R poloměr koule v metrech a α je v radiánech, pak plocha dvojúhelníku vychází v m^2.

Sférický trojúhelník, který je vyobrazen vpravo na obrázku 13, je vymezen třemi hlavními kružnicemi, které vymezují tři roviny řezu, ze kterých tak na povrchu koule vznikne $2^3 = 8$ trojúhelníků. Pro geometrii na kouli platí, že součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180°, neboli

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ. \tag{14}$$

Vyjdeme-li ze vztahu 13, tak pro velikost ploch platí

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{ABC}} + P_{\mathrm{A'BC}} &= 2\alpha R^2 \\ P_{\mathrm{ABC}} + P_{\mathrm{AB'C}} &= 2\beta R^2 \\ P_{\mathrm{ABC}} + P_{\mathrm{ABC'}} &= 2\gamma R^2 \end{aligned} \tag{15}$$

a dále pak také po sečtení těchto rovnic

$$2P_{\mathrm{ABC}} + P_{\mathrm{ABC}} + P_{\mathrm{A'BC}} + P_{\mathrm{AB'C}} + P_{\mathrm{ABC'}} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \tag{16}$$

Vzhledem k symetrii platí, že plochy trojúhelníků $P_{\mathrm{AB'C}} = P_{\mathrm{A'BC'}}$ a $P_{\mathrm{A'B'C}} = P_{\mathrm{ABC'}}$, což po dosazení do rovnice 16 dává

$$2P_{\mathrm{ABC}} + 2\pi R^2 = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \tag{17}$$

Označíme-li rozdíl $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ jako ϵ (sférický exces), pak můžeme pro plochu sférického trojúhelníku psát

$$P_{\mathrm{ABC}} = R^2\epsilon. \tag{18}$$

Např. velikost excesu rovnostranného trojúhelníku o hraně 300 km je 10^{-3} rad (asi 3'), odchylky jsou v tomto případě oproti běžné trigonometrii ještě zanedbatelné. Něco jiného ovšem nastane v případě osminy kole, kde je plocha rovna $P = 0,5\pi R^2$, v tomto případě je exces roven 90° a s klasickou rovinnou trigonometrií již nemůžeme počítat.

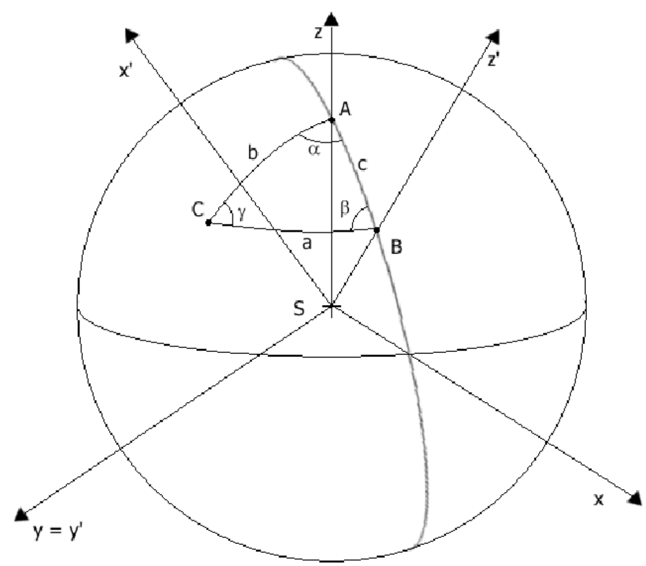
2.4 Sférický trojúhelník a jeho řešení

K řešení většiny úloh, s nimiž se setkáváme ve sférické astronomii, je třeba znalostí sférické trigonometrie, jejíž nejdůležitější rovnice odvodíme v této kapitole.

Tři body A, B a C se mohou nacházet např. na hvězdné obloze či na povrchu Země, jak je znázorněno na obrázku 14. Tyto body jsou spojeny oblouky hlavních kružnic a tvoří obrazec, kterému se říká sférický trojúhelník. Délky stran však nejsou, jak jsme zvyklí z euklidovské geometrie úsečkami, ale oblouky, jejichž střed leží ve středu koule. Ve sférickém trojúhelníku tak rozlišujeme úhly dvojího druhu

a) úhly sevřené stranami: pro kouli jednotkového poloměru $\sphericalangle BSC = a$, $\sphericalangle CSA = b$, $\sphericalangle ASB = c$,

b) úhly sevřené rovinami: $\sphericalangle\,(ASC, ASB) = \alpha$, $\sphericalangle\,(BSA, BSC) = \beta$ a $\sphericalangle\,(CSA, CSB) = \gamma$.



Obrázek 14: Pro odvození vět sférického trojúhelníku využijeme transformací zrcadlení a otočení.

Hlavní rovina prochází body AB, čárkovaná soustava souřadnic má s nečárkovanou souřadnicovou soustavou společnou osu y. Jednotlivé souřadnice lze pak zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin a \cos \beta \\ r \sin a \sin \beta \\ r \cos a \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin b \cos \alpha \\ r \sin b \sin \alpha \\ r \cos b \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Soustavy jsou opačně orientovány, pro přechod mezi nimi je potřeba provést operaci zrcadlení a následně je ještě nutné rotovat o úhel c kolem společné osy $y = y'$. Toto lze zapsat v maticovém tvaru následovně

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Po dosazení za čárkované a nečárkované kartézské souřadnice z rovnice 19 dostáváme matice

$$\begin{pmatrix} r \sin a \cos \beta \\ r \sin a \sin \beta \\ r \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos c & 0 & \sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin b \cos \alpha \\ r \sin b \sin \alpha \\ r \cos b \end{pmatrix}, \tag{21}$$

což vede na výsledné řešení ve tvaru tří vět o trojúhelníku, které lze pak řešit:

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= -\cos c \sin b \cos \alpha + \sin c \cos b \\ \sin a \sin \beta &= \sin b \sin \alpha \, . \\ \cos a &= \sin c \sin b \cos \alpha + \cos c \cos b \end{aligned} \tag{22}$$

První věta se nazývá *větou sinuskosinovou*, druhá je *věta sinová* a třetí *věta kosinová* (třetí větu lze přirozeně odvodit z prvních dvou). V astronomii se setkáváme často s řešením sférického trojúhelníku, kde bod A je reprezentován severním světovým pólem, bod B zenitem a bod C objektem (např. hvězdou). Takovému sférickému trojúhelníku se pak říká *trojúhelník nautický*. Při řešení sférického trojúhelníku lze cyklicky jednotlivé strany zaměňovat.

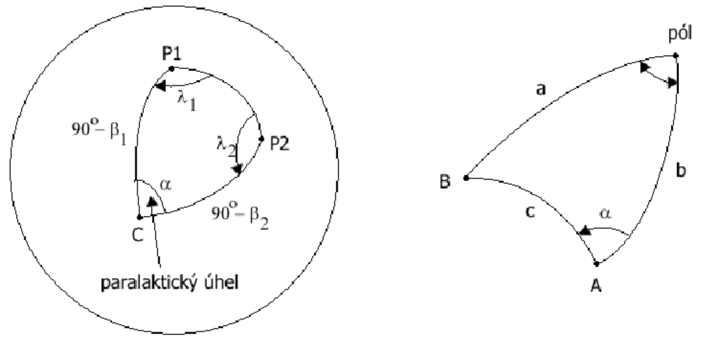
Budou-li všechny strany sférického trojúhelníku velmi malé, bude se blížit trojúhelníku v rovině. Za tohoto předpokladu pak můžeme aproximovat trigonometrické funkce $\sin x \doteq x$ a $\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Kosinová věta pro sférický trojúhelník pak přejde, neuvažujeme-li vyšší než druhé mocniny

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin c \sin b \cos \alpha + \cos c \cos b \\ 1 - \frac{a^2}{2} &= bc \cos \alpha + \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned} \tag{23}$$

do klasicky běžné kosinové věty v prostoru. Obdobně lze velice jednoduše odvodit sinovou větu

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \tag{24}$$



Obrázek 15: Příklady využití sférického trojúhleníku při výpočtu paralaktického úhlu a vzdálenosti hvězd či pozičního úhlu.

a pro sinuskosinovou větu pak při zanedbání všech členů od druhého řádu výše

$$\begin{gathered}\sin a \cos\beta = -\cos c \sin b \cos\alpha + \sin c \cos b \\ a\cos\beta = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) c - b\cos\alpha \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \\ a\cos\beta + b\cos\alpha = c\end{gathered} \tag{25}$$

vychází sinuskosinová věta v rovině.

Příkladem využití sférického trojúhelníku je například zjištění určení paralaktického úhlu, viz obr. 15 vlevo, nebo vzdálenosti dvou hvězd na hvězdné obloze, což je znázorněno na stejném obrázku vpravo. Zde je vzdálenost hvězd dána velikostí strany c, poziční úhel je úhel α. Známe-li např. souřadnice dvou hvězd A a B v rovníkových souřadnicích druhého druhu, pak platí

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - \delta_A \\ b &= 90^\circ - \delta_B \\ \gamma &= \alpha_B - \alpha_A \end{aligned} \tag{26}$$

a řešením tohoto sférického trojúhelníku pomocí kosinové věty dostáváme

$$\begin{gathered}\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos\gamma = \\ \sin\delta_B \sin\delta_A + \cos\delta_B \cos\delta_A \cos(\alpha_B - \alpha_A).\end{gathered} \tag{27}$$

V případě, že jsou hvězdy na obloze úhlově blízko sebe, můžeme psát

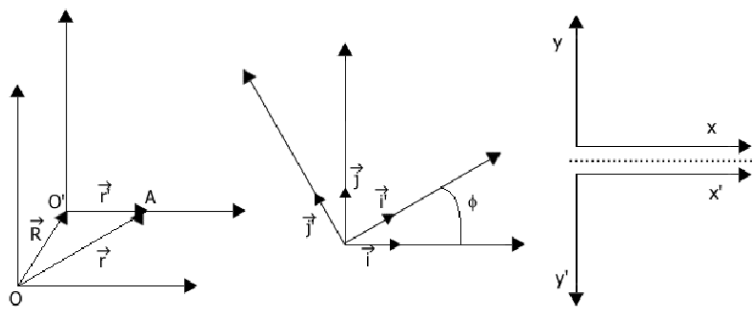
$$c^2 = (\Delta\delta)^2 + \cos^2\left(\frac{\delta_A + \delta_B}{2}\right)(\Delta\alpha)^2. \tag{28}$$

Pro poziční úhel α pak ze sinové věty platí

$$\frac{\sin c}{\sin(\alpha_B - \alpha_A)} = \frac{\sin(90^\circ - \delta_A)}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{\cos\delta_A}{\sin c}\sin(\alpha_B - \alpha_A). \tag{29}$$

2.5 Transformace souřadnic

Vzhledem k velkému množství různých souřadnicových systémů je občas zapotřebí nalézt transformační vztahy mezi nimi. K tomu slouží tzv. transformační rovnice, které můžeme psát ve výhodnějším maticovém tvaru, což nám další výpočty ulehčí.



Obrázek 16: Tři možné transformace souřadnic: posunutí (vlevo), rotace (uprostřed) a zrcadlení (vpravo).

Transformace jsou trojího druhu:

a) posun počátku

b) otočení

c) zrcadlení.

Nejdříve si ukážeme tyto transformace v rovině. Budeme-li mít soustavu čárkovanou, pro kterou je polohový vektor bodu vyjádřen jako $\vec{r}\,'$, která je oproti nečárkované soustavě souřadnic posunuta o vektor $\vec{R}$ (viz obr. 16), pak platí

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}, \tag{30}$$

kde

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{31}$$

a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Pro otočení o úhel ϕ můžeme zapsat transformace

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}\,'\vec{i} & \vec{i}\,'\vec{j} \\ \vec{j}\,'\vec{i} & \vec{j}\,'\vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Matice, ve které se mezi sebou násobí jednotkové vektory čárkované a nečárkované soustavy, se nazývá matice otočení a jejími prvky jsou tzv. směrové kosiny, pro které platí

$$\begin{aligned}
\vec{i}\,'\vec{i} &= \cos\phi \\
\vec{i}\,'\vec{j} &= \cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi \\
\vec{j}\,'\vec{i} &= \cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi \\
\vec{j}\,'\vec{j} &= \cos\phi
\end{aligned} \tag{34}$$

a dosazením do rovnice 33 pak dostáváme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Transformace zrcadlení nám převádí pravotočivou soustavu na levotočivou a naopak. Jak je uvedeno na obr. 16, zrcadlení je dáno $y' = -y$, matice transformace je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

V případě polárních souřadnic v rovině platí pro posunutí počátku stejný vztah jako u kartézských souřadnic, pro otočení o úhel ϕ pak

$$\begin{matrix} \varphi' = \varphi - \phi \\ r' = r \end{matrix} \quad \text{a pro zrcadlení} \quad \begin{matrix} \varphi' = -\varphi \\ r' = r \end{matrix}. \tag{37}$$

Pokud se budeme zajímat o transformace kartézských souřadnic v prostoru, pro posun počátku o vektor $\vec{R} = (X, Y, Z)$ platí

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \tag{38}$$

což lze zkráceně zapsat jako

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}. \tag{39}$$

Pro obecnou transformaci otočení potřebujeme znát matici otočení, kterou získáme z transformace

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{40}$$

kde hledaná matice otočení je

$$O = \begin{pmatrix} \vec{i}\,'\vec{i} & \vec{i}\,'\vec{j} & \vec{i}\,'\vec{k} \\ \vec{j}\,'\vec{i} & \vec{j}\,'\vec{j} & \vec{j}\,'\vec{k} \\ \vec{k}\,'\vec{i} & \vec{k}\,'\vec{j} & \vec{k}\,'\vec{k} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

V této matici nejsou všechny hodnoty nezávislé, ale dají se vyjádřit na základě 3 parametrů, které jsou jako v případě rovinného problému reprezentovány směrovými kosiny, které jsou odpovědny za rotaci kolem tří os. Matice otočení kolem osy z o úhel ϕ (z=z' a $\vec{k} = \vec{k}\,'$)

$$O(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

otočení kolem osy y o úhel θ

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{43}$$

a otočení kolem osy x o úhel ψ

$$O(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\theta & \cos\psi \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Postupným využitím výše uvedených matic otočení, lze každou soustavu libovolně otočit. Operace otočení kolem jednotlivých os nejsou komutativní.

2.6 Zeměpisné souřadnice

Na tělesech kulového tvaru, jakým je např. v prvním přiblížení Země, je výhodné zavést pro popis polohy na jejich povrchu sférickou soustavu, která má počátek ve středu koule. Budeme-li dále uvažovat Zemi, pak její základní rovina je totožná s rovinou rovníku, která je navíc kolmá k rotační ose procházející rovněž počátkem souřadnic. Rotační osa protíná na idealizované zemské kouli dva body, kterým se říká severní a jižní pól. Zemský rovník pak tuto sféru dělí na dvě stejné polokoule, severní a jižní.

Obrázek 17: Fotografie nultého poledníku na Greenwichské observatoři [E6].

Zeměpisné souřadnice jsou velice důležité i z hlediska astronomie, protože se stále většina pozorování provádí z povrchu Země a znalost místa pozorování je proto důležitá. Na sféře definujeme tzv. *hlavní kružnice*, což jsou průsečnice koule s rovinou jdoucí středem (počátkem souřadnicového systému) a tzv. *vedlejší kružnice*, které jsou dány průsečnicemi koule s rovinami, které neprocházejí počátkem. Na Zemi je hlavní kružnice reprezentována rovinou rovníku, vedlejší kružnice jsou pak rovnoběžné s rovníkem a jejich délky se směrem k pólům zmenšují. Těmto kružnicím se říká *rovnoběžky*, jejich poloha je dána zeměpisnou šířkou $\varphi \in (-90°, 90°)$. Zvláštní postavení, nejenom z astronomického hlediska, mají polární kruhy $\varphi = \pm 66°33'$ (severní a jižní) a obratníky raka $\varphi = 23°27'$ a kozoroha $\varphi = -23°27'$, které na Zemi vyčleňují tři klimatické oblasti - polární, mírnou a tropickou.

Hlavní kružnice (půlkružnice), které procházejí póly, nám definují tzv. *poledníky*. Význačný poledník (hlavní, nultý, základní, Greenwichský na obr. 17) nám definuje hlavní směr, který je dán průsečnicí roviny nulového poledníku s rovinou rovníku. Zeměpisné souřadnice jsou pak dány jako souřadnice sférické soustavy, která se počítá kladně na západ, osa y je v matematicky záporném směru, jde tedy o levotočivou soustavu.

Pro konkrétní místo na povrchu, kterým prochází tzv. *místní poledník* (půlkružnice spojující póly), jsou souřadnice dány trojicí čísel: zeměpisná délka λ, šířka φ a nadmořská výška h, která odpovídá vzdálenosti bodu od středu koule. Zeměpisná délka je v rozmezí $\lambda \in (-180°, 180°)$, kde $\lambda < 0°$ je také označována jako západní a $\lambda > 0°$ je pak označována jako východní délka. Délka se může kromě stupňů, minut a vteřin vyjadřovat také v hodinách, minutách a sekundách (úhlově), jejichž význam souvisí s časovým rozdílem právě vrcholícího Slunce oproti Greenwichskému poledníku. Např. observatoř Masarykovy univerzity na Kraví hoře (MUO-IAU Station 616) má zeměpisné souřadnice

$$\lambda = \begin{array}{c} 16°35'0,5228'' \\ 1^{\mathrm{h}}6^{\mathrm{m}}20,03^{\mathrm{s}} \end{array} \quad , \quad \varphi = 49°12'15.8906'' \quad \text{a} \quad 306\,\mathrm{m.n.m.} \tag{45}$$

Zeměkouli si idealizujeme koulí, která má objem stejný jako Země, což představuje poloměr $R = 6371\,\mathrm{km}$. Jeden stupeň na hlavní kružnici pak představuje $1° \sim 6371\frac{2\pi}{360°} = 111\,\mathrm{km}$, $1' \sim 1,85\,\mathrm{km}$ a $1'' \sim 30,9\,\mathrm{m}$. Délka rovnoběžky o zeměpisné šířce φ je pak dána jako $2\pi R\cos\varphi$, což pro brněnskou rovnoběžku znamená, že jeden délkový stupeň je roven přibližně 73 km, jedna úhlová minuta 1,2 km a jedna úhlová vteřina 20,2 metrům.

Vzdálenost dvou bodů na zeměkouli je dána délkou tzv. *ortodromy*. Jde vlastně o část délky hlavní kružnice, která je vymezena těmito body, mezi kterými a středem Země je úhel γ. Tento úhel pak udává délku ortodromy $l = R\gamma$, resp. ve stupních $R\frac{360°\gamma}{2\pi}$. Úhel γ lze vypočítat jako úhel mezi vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$

$$\vec{a}\,\vec{b} = R^2\cos\gamma, \tag{46}$$

kde vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou dány vztahy

$$\begin{array}{c} \vec{a} = R(\vec{i}\cos\varphi_A\cos\lambda_A + \vec{j}\cos\varphi_A\sin\lambda_A + \vec{k}\sin\varphi_A) \\ \vec{b} = R(\vec{i}\cos\varphi_B\cos\lambda_B + \vec{j}\cos\varphi_B\sin\lambda_B + \vec{k}\sin\varphi_B) \\ \Downarrow \\ \cos\gamma = \cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_A - \lambda_B) + \sin\varphi_A\sin\varphi_B. \end{array} \tag{47}$$

Jde-li o relativně dva blízké body, tj. $\vec{a} \doteq \vec{b}$, můžeme si najít průměrnou zeměpisnou šířku a délku jako

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_A = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} & \varphi_B = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2} \\ \lambda_A = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} & \lambda_B = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{po členy} \\ \text{2.řádu} \end{array} \tag{48}$$

$$1-\frac{\gamma^2}{2}=\cos\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\Delta\lambda+\sin\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin\left(\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=$$
$$1-2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2-\cos^2\varphi\frac{(\Delta\lambda)^2}{2}\quad\Rightarrow \tag{49}$$
$$\gamma=\sqrt{(\Delta\varphi)^2+\cos^2\varphi\,(\Delta\lambda)^2}.$$

2.7 Astronomické souřadnicové soustavy

Astronomické souřadnicové soustavy jsou zpravidla soustavami sférickými nebo kartézskými a lze je dělit dle dvou kritérií

a) podle počátku soustavy

1. topocentrická soustava - střed v místě pozorování
2. geocentrická soustava - střed v těžišti Země
3. heliocentrická soustava - střed v těžišti Slunce
4. barycentrická soustava - střed v těžišti sluneční soustavy
5. planetocentrická soustava - střed v těžišti planety apod.

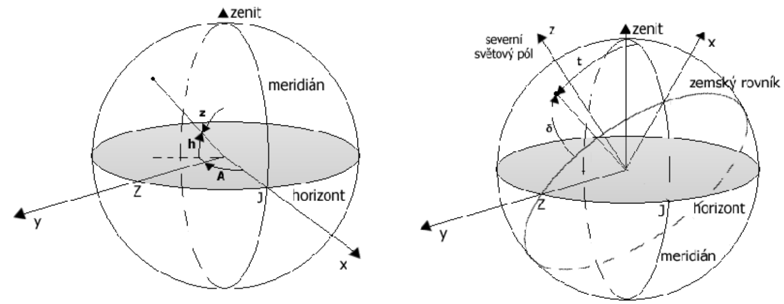
b) podle základní roviny a základního směru

1. obzorníková (horizontální) soustava - horizont a místní poledník, levotočivá
2. 1. rovníková soustava - zemský rovník a místní poledník, levotočivá
3. 2. rovníková soustava - zemský rovník a jarní bod, pravotočivá
4. ekliptikální soustava - ekliptika a jarní bod, pravotočivá
5. galaktická soustava - rovina Galaxie a centrum Galaxie, pravotočivá
6. orbitální soustava - rovina dráhy a výstupní uzel, pravotočivá
7. mezinárodní nebeský referenční systém (ICRS - International Celestial Reference System) - rovníkové souřadnice druhého druhu vybraných kvazarů a mimogalaktických objektů

2.7.1 Obzorníková (horizontální) soustava

Základní rovinou je tečná rovina s místem pozorování, která protíná s nebeskou sférou kružnici, které se říká místní horizont. Základní směr (směr osy x) je dán průsečnicí místního horizontu a roviny místního poledníku, tzv. *meridiánu*, v jižním směru. Osa y směřuje k západnímu bodu obzoru, soustava je tudíž levotočivá. Souřadnice délková je tzv. *azimut* A, který se měří od základního směru směrem na západ (90°), šířková souřadnice je tzv. *výška nad obzorem* h, což je úhel mezi pozorovaným bodem a tečnou rovinou v místě pozorování. Někdy je výhodné místo výšky nad obzorem zavést tzv. *zenitovou vzdálenost* z, která je rovna $z=90^\circ-h$. Osa z této soustavy míří do zenitu (viz obr. 18). Vedlejším kružnicím, které jsou rovnoběžné s rovinou horizontu se říká *almukantaráty*. Polohový vektor $\vec{r}$ můžeme zapsat

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} r\cos h\cos A\\ r\cos h\sin A\\ r\sin h\end{pmatrix}\quad\text{a pro souřadnice}\quad \begin{array}{l} A\in\langle 0^\circ,360^\circ)\\ h\in\langle -90^\circ,90^\circ\rangle\\ z\in\langle 0^\circ,180^\circ\rangle\end{array}. \tag{50}$$



Obrázek 18: Vlevo: obzorníková (horizontální) soustava souřadnic s vyznačením azimutu A, výšky nad obzorem h a zenitové vzdálenosti z. Vpravo: rovníková (ekvatoreální) soustava souřadnic 1. druhu s vyznačením hodinového úhlu t, deklinace δ a polohy severního světového pólu ve směru osy z.

2.7.2 Rovníková (ekvatoreální) soustava 1. druhu

Základní rovinou je rovina zemského rovníku, která s průsečnicí s rovinou místního poledníku (meridiánu) udává základní směr (v jižním směru). Osa y směřuje k průsečnici roviny zemského rovníku a místního horizontu směrem na západ, soustava je tudíž levotočivá. Souřadnice délková je tzv. *hodinový úhel* t, který se měří od základního směru směrem na západ, šířková souřadnice je tzv. *deklinace* δ, což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou zemského rovníku. Někdy je výhodné místo deklinace zavést tzv. *pólovou distanci*, která je rovna $\delta' = (90^\circ - \delta)$. Osa z této soustavy míří do severního světového pólu (viz obr. 18 vpravo), který se v současné době nachází v souhvězdí Malé medvědice poblíž její nejjasnější hvězdy Polárky (α UMi). Polohový vektor $\vec{r}$ můžeme zapsat

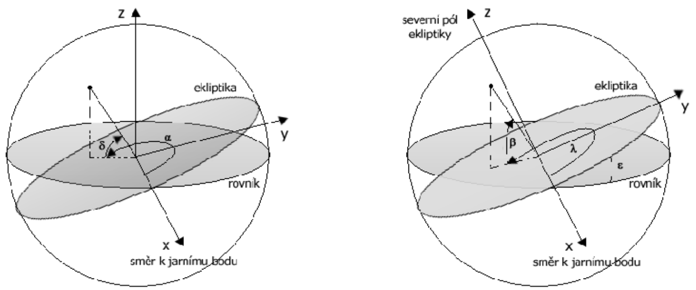
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\delta\cos t \\ r\cos\delta\sin t \\ r\sin\delta \end{pmatrix} \quad \text{a pro souřadnice} \quad \begin{array}{l} t \in (0^\mathrm{h}, 24^\mathrm{h}) \\ \delta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ \delta' \in (0^\circ, 180^\circ) \end{array} . \qquad (51)$$

2.7.3 Rovníková (ekvatoreální) soustava 2. druhu

Základní rovinou je rovina zemského rovníku, která s průsečnicí s rovinou ekliptiky udává základní směr osy x k *jarnímu bodu*. Osa y směřuje v základní rovině je otočena o 90° proti směru otáčení oblohy (směrem na východ), soustava je tudíž pravotočivá. Souřadnice délková je tzv. *rektascenze* α, která se měří od základního směru směrem na východ, šířková souřadnice je tzv. *deklinace* δ, což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou zemského rovníku. I v této soustavě je někdy výhodné použít místo deklinace *pólovou distanci*. Osa z této soustavy míří do severního světového pólu (viz obr. 19 vlevo). Polohový vektor $\vec{r}$ můžeme zapsat

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\delta\cos\alpha \\ r\cos\delta\sin\alpha \\ r\sin\delta \end{pmatrix} \quad \text{a pro souřadnice} \quad \begin{array}{l} \alpha \in (0^\mathrm{h}, 24^\mathrm{h}) \\ \delta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ \delta' \in (0^\circ, 180^\circ) \end{array} . \qquad (52)$$

Rozdíl oproti soustavě rovníkových souřadnic 1. druhu je v tom, že tato soustava je opačně orientovaná a rotuje s hvězdami.



Obrázek 19: Vlevo: rovníková (ekvatoreální) soustava souřadnic 2. druhu s vyznačením rektascenze α, deklinace δ a polohy severního světového pólu ve směru osy z. Vpravo: ekliptikální soustava souřadnic s vyznačením ekliptikální délky λ, ekliptikální šířky β, severním pólem ekliptiky ve směru osy z a úhlem ε, který svírají rovina ekliptiky a zemský rovník.

2.7.4 Ekliptikální soustava

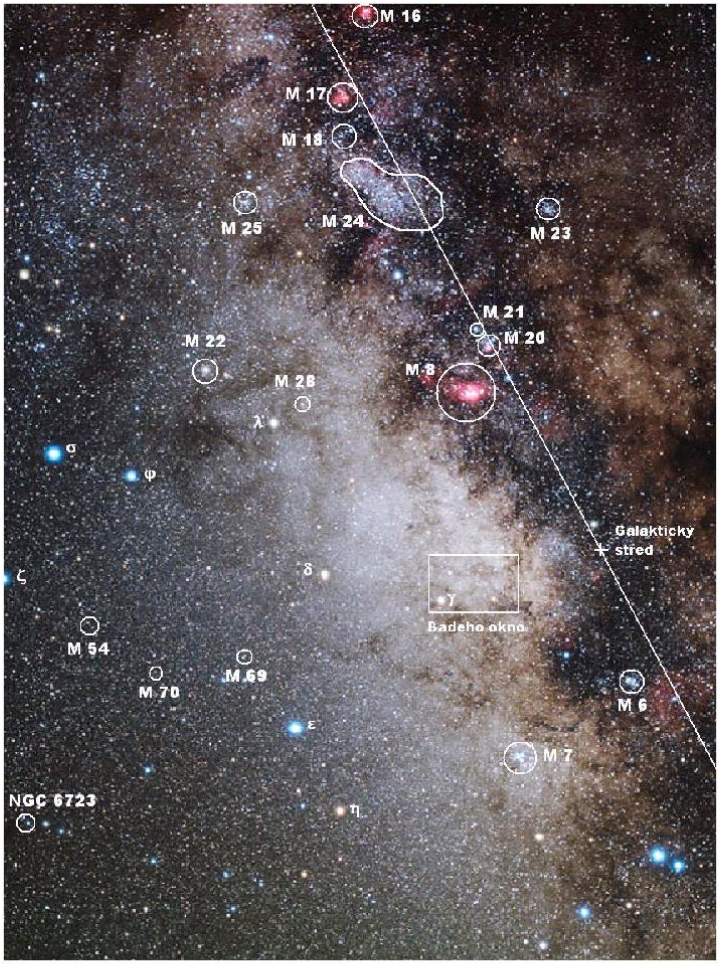
Základní rovinou je rovina ekliptiky, která je reprezentována trajektorií Země při oběhu kolem Slunce. Základním směrem (osa x) je směr k *jarnímu bodu*, který je na průsečíku roviny ekliptiky a roviny zemského rovníku (výstupní uzel - Slunce se dostává nad rovinu zemského rovníku). Osa y směřuje v rovině ekliptiky proti směru otáčení oblohy (směrem na východ), soustava je tudíž pravotočivá. Souřadnice délková je tzv. *ekliptikální délka* λ, která se měří od základního směru směrem na východ, šířková souřadnice je tzv. *ekliptikální šířka* β, což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou ekliptiky. Osa z ekliptikální soustavy míří do severního pólu ekliptiky (viz obr. 19 vpravo), který se nachází v souhvězdí Draka. Rovina zemského rovníku a rovina ekliptiky spolu svírají úhel $\varepsilon = 23°27'$. Polohový vektor $\vec{r}$ můžeme zapsat

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\beta\cos\lambda \\ r\cos\beta\sin\lambda \\ r\sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{a pro souřadnice} \quad \begin{array}{l} \lambda \in \langle 0°, 360°) \\ \delta \in \langle -90°, 90°\rangle \\ \varepsilon = 23°27' \end{array} . \tag{53}$$

2.7.5 Galaktická soustava

Základní rovinou je rovina Galaxie (Mléčné dráhy), která svírá s rovinou zemského rovníku úhel $i = 62,6°$. Základním směrem (osa x) je směr ke *galaktickému centru* (viz obr. 20), který je dán definitoricky jako $\alpha = 17^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}}$ a $\delta = -28°56'10''$ pro equinokcium 2000 (časový okamžik). Osa y směřuje v rovině Galaxie proti směru otáčení oblohy (směrem na východ), soustava je tudíž pravotočivá. Souřadnice délková je tzv. *galaktická délka* l, která se měří od základního směru směrem na východ, šířková souřadnice je tzv. *galaktická šířka* b, což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou Galaxie. Osa z galaktické soustavy míří do severního galaktického pólu, který se nachází v souhvězdí Vlasů Bereniky a jeho souřadnice jsou $\alpha = 12^{\mathrm{h}}51^{\mathrm{m}}26^{\mathrm{s}}$ a $\delta = 27°07'42''$, rovněž pro equinokcium 2000. Polohový vektor $\vec{r}$ můžeme zapsat

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos b\cos l \\ r\cos b\sin l \\ r\sin b \end{pmatrix} \quad \text{a pro souřadnice} \quad \begin{array}{l} l \in \langle 0°, 360°) \\ b \in \langle -90°, 90°\rangle \ . \\ i = 62,6° \end{array} \tag{54}$$



Obrázek 20: Pohled ve směru středu Galaxie [E7].

2.7.6 ICRS a ICRS2

Vznik tohoto systému souvisí se stále se zvyšujícími nároky na přesnost určení polohy, která by nebyla vázána se souřadnicovým systémem na Zemi. Tento systém je tvořen souřadnicemi objektů na nebeské sféře (souřadnicemi vybraných kvazarů a dalších mimogalaktických objektů, zpravidla jejich rektascenzemi a deklinacemi v epoše J2000). Tento systém je vázán na nebeskou sféru a je ideální realizací inerciálního systému. V současné době existují dvě realizace tohoto systému ICRS (International Celestial Reference System) a ICRS2, které se od sebe liší větším počtem pozorování a větším počtem zaměřených objektů. Přesnost souřadnic v tomto systému je $0,0002''$ a není již ovlivněna např. posunem jarního bodu.

2.8 Vzájemný převod rovníkových souřadnic 1. a 2. druhu

Souřadnicové systémy rovníkových souřadnic 1. a 2. druhu mají shodnou základní rovinu, která je dána zemským rovníkem a jedna ze souřadnic, deklinace δ, je rovněž shodná pro obě soustavy. Transformace mezi soustavou 1. a 2. druhu je dána velice jednoduchým vztahem, kterým můžeme přejít od hodinového úhlu k rektascenzi

$$\alpha = S - t, \tag{55}$$

kde S je tzv. *hvězdný čas,* který je roven hodinovému úhlu jarního bodu. Hvězdný čas je rovnoměrně narůstající veličina, která je odrazem rotace Země vzhledem ke hvězdám. Perioda této rotace je rovna siderické době rotace, což je jeden hvězdný den.

$$1 \text{ hvězdný den} \sim \frac{365,244}{366,244}\,\text{dne} = 0,99727\,\text{stř. slun. dne} = 23\,\text{h}\ 56\,\text{min}\ 4\,\text{s} \tag{56}$$

Výpočet hvězdného času pro daný okamžik lze provést na základě znalosti hvězdného času pro půlnoc předcházející noci, kterou lze nalézt např. v hvězdářské ročence, a nadcházející půlnoci, mezi kterými provedeme jednoduchou interpolaci

$$S = 1,002738\,T + S_1, \tag{57}$$

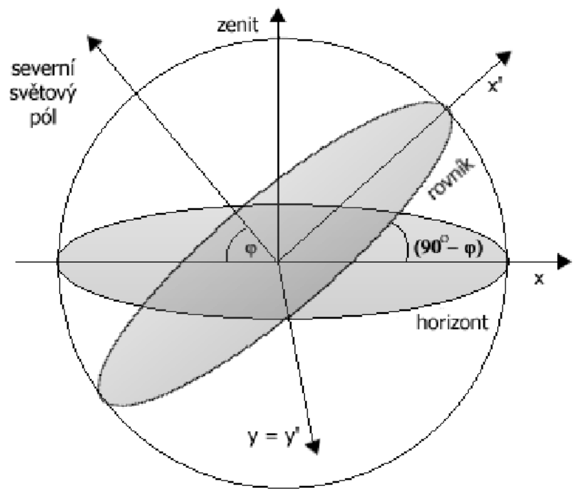
kde T je čas ve středním slunečním čase (občanský čas). Hvězdný den je tak o 3 minuty a 56 sekund kratší než den sluneční, do roka tak Země učiní vůči hvězdám o jednu otočku navíc (hvězdných dní je v roce o jeden více). Můžeme si položit otázku, kdy se běžné (občanské) a hvězdné hodiny srovnají. Uvážíme-li, že mezi hvězdným časem a hodinovým úhlem platí jednoduchý vztah 55, pak v době podzimní rovnodennosti má Slunce rektascenzi $\alpha_\odot = 12^\mathrm{h}$ a pro dolní kulminaci Slunce platí, že hodinový úhel Slunce je v té době roven $t_\odot = 180° = 12^\mathrm{h}$, což odpovídá hvězdnému času $S = 0\,\mathrm{h}$ a je tím pádem shodný s časem slunečním. V době jarní rovnodennosti jsou hvězdný a sluneční čas posunuty o 12 hodin.

2.9 Převod obzorníkových a rovníkových souřadnic 1. druhu

Tyto dvě soustavy mají shodnou osu y, která míří západním směrem, hlavní roviny jsou mezi sebou skloněny o úhel $\Theta = 90° - \varphi$, kde φ odpovídá zeměpisné šířce místa pozorování (viz obr. 21).

Uvážíme-li, že jde pouze o transformaci otočení kolem osy y, můžeme použít vztah 43 a přechod od obzorníkové soustavy do rovníkové soustavy 1. druhu pak můžeme zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta \cos t \\ \cos\delta \sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix}. \tag{58}$$



Obrázek 21: Transformace obzorníkových a rovníkových souřadnic 1. druhu.

Řešením soustavy rovnic dostáváme následující tři transformační vztahy

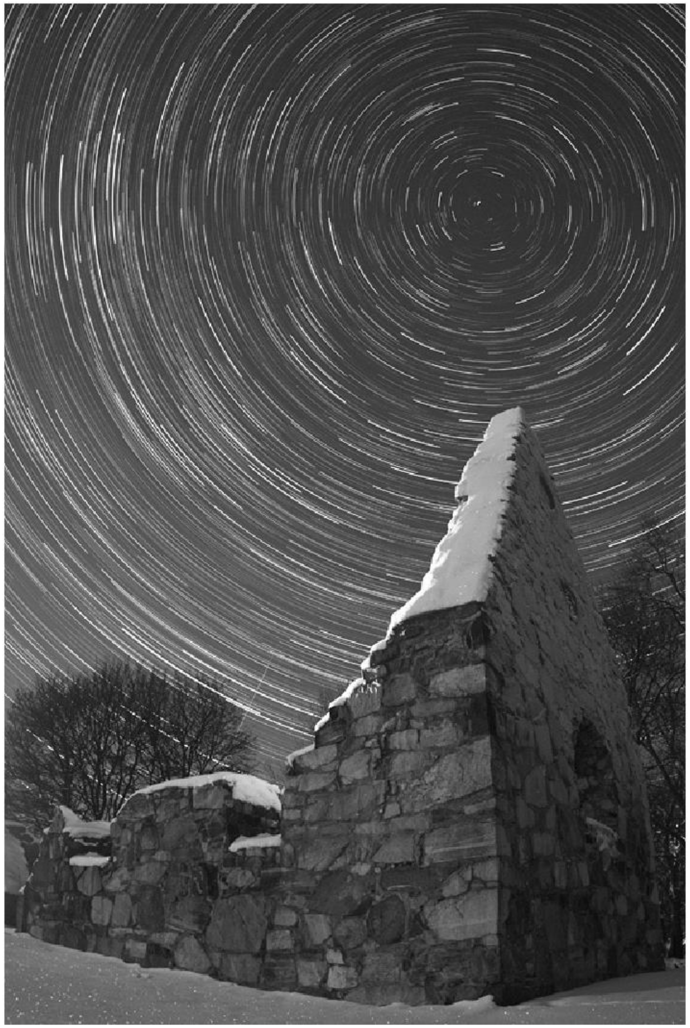
$$\begin{array}{rcrcl} \sin\varphi\cos h\cos A & + & \cos\varphi\sin h & = & \cos\delta\cos t \\ & & \cos h\sin A & = & \cos\delta\sin t \;, \\ -\cos\varphi\cos h\cos A & + & \sin\varphi\sin h & = & \sin\delta \end{array} \tag{59}$$

provedeme-li přechod od rovníkové soustavy 1. druhu k soustavě obzorníkové, půjde o otočení kolem osy y o úhel $-\Theta$. Můžeme tedy napsat

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta \cos t \\ \cos\delta \sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{60}$$

a opět získáme tři transformační rovnice

$$\begin{array}{rcrcl} \sin\varphi\cos\delta\cos t & - & \cos\varphi\sin\delta & = & \cos h\cos A \\ & & \cos\delta\sin t & = & \cos h\sin A \;. \\ \cos\varphi\cos\delta\cos t & + & \sin\varphi\sin\delta & = & \sin h \end{array} \tag{61}$$



Obrázek 22: Dráhy hvězd na obloze v okolí severního světového pólu [E8].

Důsledkem těchto transformačních vztahů je závislost viditelnosti objektů nebeské sféry na zeměpisné šířce. Hvězdy, pro které na severní polokouli platí

$$\delta_{\mathrm{cirk}} > 90^\circ - \varphi, \tag{62}$$

jsou hvězdami *cirkumpolárními*, nikdy nezajdou pod horizont, naproti tomu hvězdy s deklinacemi

$$\delta_{\mathrm{nev}} < -90^\circ + \varphi, \tag{63}$$

nejsou ze zeměpisné šířky φ pozorovatelné. Ostatní objekty vycházejí a zapadají a nad horizontem opíší tzv. *denní oblouk*, jehož délka je dvojnásobkem maximální velikosti hodinového úhlu, který lze vypočítat dosazením za $h = 0$ do rovnice 61

$$\cos\varphi\cos\delta\cos t_{\max} + \sin\varphi\sin\delta = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos t_{\max} = -\tan\varphi\tan\delta\ . \tag{64}$$

Maximální denní oblouk 180° mají objekty s deklinací rovnou nule. Pro cirkumpolární hvězdy není kosinus definován, hvězdy nad obzorem opíší za siderický den celé kružnice (viz obr. 22).

Můžeme najít na základě výše uvedených transformačních vztahů i závislost azimutu západu tělesa A o deklinaci δ na zeměpisné šířce φ, kdy získáme dosazením do třetí rovnice za $h =$ v soustavě rovnic 59

$$\sin\delta = -\cos\varphi\cos A \quad\Rightarrow\quad \cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\ . \tag{65}$$

Z tohoto vztahu je ihned patrno, že objekty o deklinaci nula stupňů vždy zapadají přesně na západě a vycházejí na východě, pro póly pak vychází, že objekty ani nevycházejí, ani nezapadají, jejich pohyb je rovnoběžný s rovinou horizontu.

Pro denní pohyb Slunce na obloze $\delta_\odot \in (-23°27', 23°27')$, pak platí, že na severním pólu se pohybuje rovnoběžně s rovinou horizontu a v době, kdy má deklinaci větší než nula stupňů, vůbec nezapadá, nastává polární den. V té samé době je na jižním pólu polární noc. Od pólu až k polárním kruhům ($\pm 66°33'$) tak mohou nastat situace, kdy Slunce některé dny v roce nezapadne, nebo naopak vůbec nevyjde nad obzor. Pro ostatní zeměpisné šířky již Slunce vždy vychází i zapadá a mění se jen délka dne a noci v závislosti na deklinaci Slunce. Pro Brno tak platí, že v době letního slunovratu je maximální výška Slunce nad obzorem $64°15'$ (délka dne je o něco málo větší než 16 hodin) a v době zimního slunovratu pak $17°21'$ (den trvá necelých 8 hodin).

2.10 Převod ekliptikálních a rovníkových souřadnic

Již starověcí astronomové na základě svých pozorování zjistili, že se během roku deklinace Slunce mění v rozmezí $\pm 23°27'$ a že rektascenze Slunce monotonně narůstá od 0^{h} do 24^{h}. V pravou místní půlnoc kulminují hvězdy, pro které platí

$$\alpha = \alpha_\odot \pm 12^{\mathrm{h}}. \tag{66}$$

Postupně tak během roku kulminují o půlnoci hvězdy se stále vyšší rektascenzí, což má za důsledek, že se Slunce pohybuje na hvězdné obloze mezi hvězdami po hlavní kružnici, která je k rovině světového rovníku skloněná o úhel $\varepsilon = 23°\,27'$. Tato hlavní kružnice se nazývá ekliptika, tento název souvisí se zákryty (eclipse) Měsíce a Slunce. Dráhu Slunce na hvězdné obloze bylo možné vysledovat v okamžicích slunečních zatmění, v případě zatmění Měsíce pak bylo možné říci, že Slunce se nachází právě na opačné straně (ekliptikální délka Slunce je o 180° větší než Měsíce). Tento pohled je ale pohledem geocentrickým. Podíváme-li se na to z hlediska obíhající Země kolem Slunce, pak právě rovina dráhy Země je totožná s rovinou ekliptiky a průsečnice roviny této dráhy s nebeskou sférou je ekliptika. Rotační osa Země svírá s rovinou eklipiky (zemské dráhy) úhel $\varepsilon = 23^\circ\,27'$. Pól ekliptiky leží v současné době v souhvězdí Draka, Slunce se pohybuje po ekliptice proti otáčení oblohy denně zhruba o $360^\circ/365,25 = 0,986^\circ$, což je méně než jeden stupeň, protože sluneční den je o 3 minuty a 56 sekund delší než den hvězdný.

Slunce se nachází ve výstupném uzlu své dráhy v době jarní rovnodennosti, tento bod se nazývá jarním bodem, v sestupném uzlu je pak v době podzimní rovnodennosti. Maximální deklinaci má Slunce v čase letního slunovratu, minimální deklinace Slunce je v době zimního slunovratu.

Transformace mezi rovníkovými souřadnicemi 2. druhu a ekliptikálními souřadnicemi je dána pouhým otočením o úhel $\varepsilon = 23^\circ\,27'$ kolem osy x, která je u obou souřadnicových systémů shodná (viz obr. 19). Transformační vztahy jsou pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \tag{67}$$

čímž získáme následující soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} & & \cos\delta\cos\alpha & = & \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha & + & \sin\varepsilon\sin\delta & = & \cos\beta\sin\lambda \\ -\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha & + & \cos\varepsilon\sin\delta & = & \sin\beta \end{array}. \tag{68}$$

Pro Slunce stále platí, že $\beta_\odot = 0^\circ$, můžeme vztahy zjednodušit, ale je lépe vyjít z opačné transformace

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}, \tag{69}$$

což dává

$$\begin{array}{rcrcl} & & \cos\beta\cos\lambda & = & \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda & - & \sin\varepsilon\sin\beta & = & \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda & + & \cos\varepsilon\sin\beta & = & \sin\delta \end{array}. \tag{70}$$

Dosazení ekliptikální šířky Slunce $\beta_\odot = 0^\circ$ do těchto rovnic dostaneme

$$\begin{array}{rcl} \cos\lambda_\odot & = & \cos\delta_\odot\cos\alpha_\odot \\ \cos\varepsilon\sin\lambda_\odot & = & \cos\delta_\odot\sin\alpha_\odot \\ \sin\varepsilon\sin\lambda_\odot & = & \sin\delta_\odot \end{array}, \tag{71}$$

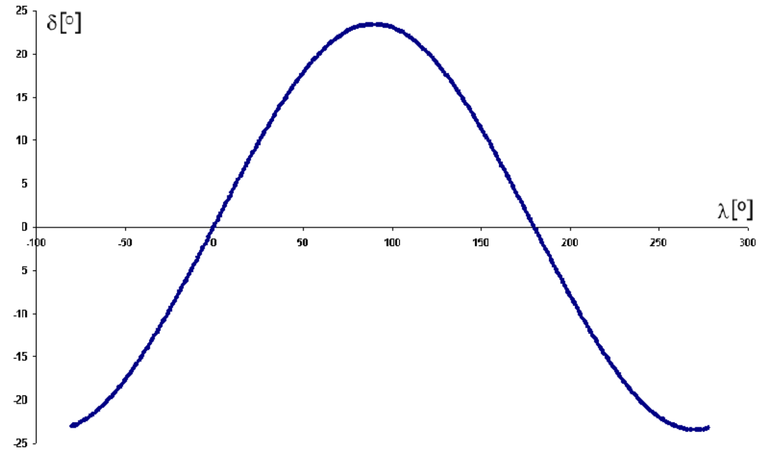
z čehož nám vyplývá vztah mezi ekliptikální délkou Slunce a jeho deklinací, který je dán třetí rovnicí.

Hledáme-li závislost změny rektascenze Slunce na ekliptikální délce, vyjdeme naopak z prvních dvou rovnic, které podělíme a dostaneme tak

$$\tan\alpha_\odot = \tan\lambda_\odot\cos\varepsilon. \tag{72}$$

Zajímáme-li se o rychlost změny rektascenze, pak tuto rovnici zderivujeme podle času

$$\dot{\alpha}_\odot = \frac{d\alpha_\odot}{dt} \text{ a } \dot{\lambda}_\odot = \frac{d\lambda_\odot}{dt} \;\Rightarrow\; \dot{\alpha}_\odot\frac{1}{\cos^2\alpha_\odot} = \dot{\lambda}_\odot\frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\lambda_\odot} \tag{73}$$



Obrázek 23: Změna deklinace Slunce v závislosti na jeho ekliptikální délce.

ekliptikální délka	změna v rektascenzi
$\lambda_\odot = 0°$	$\dot{\alpha}_\odot = 0,917\,\dot{\lambda}_\odot$
$\lambda_\odot = 45°$	$\dot{\alpha}_\odot = 0,996\,\dot{\lambda}_\odot$
$\lambda_\odot = 90°$	$\dot{\alpha}_\odot = 1,090\,\dot{\lambda}_\odot$
$\lambda_\odot = 135°$	$\dot{\alpha}_\odot = 0,996\,\dot{\lambda}_\odot$
$\lambda_\odot = 180°$	$\dot{\alpha}_\odot = 0,917\,\dot{\lambda}_\odot$

Tabulka 1: Změna rektascenze Slunce v závislosti na jeho ekliptikální délce.

a dále ji můžeme po pár úpravách přepsat jako

$$\dot{\alpha}_\odot = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\lambda_\odot + \sin^2\lambda_\odot\cos^2\varepsilon}\dot{\lambda}_\odot. \tag{74}$$

Z této rovnice je patrno, že i v případě kruhového pohybu Země kolem Slunce, tj. že by platilo $d\lambda_\odot/dt = \text{konst}$, bude vycházet pro různé ekliptikální délky různá změna v rektascenzi (nerovnoměrný pohyb). K celkovému nerovnoměrnému pohybu Slunce během roku v rektascenzi přispívá kromě eliptické dráhy také sklon roviny ekliptiky a rovníku, který se při vzájemné transformaci podílí na tomto nerovnoměrném pohybu více než elipticita zemské trajektorie.

2.10.1 Denní pohyb Slunce v různých zeměpisných šířkách

Začneme-li zkoumat denní pohyb Slunce v závislosti na naší poloze na Zemi, bude našim prvním místem severního pól, který má zeměpisnou šířku $\varphi = 90°$. Slunce se zde pohybuje rovnoběžně s rovinou horizontu, je-li jeho deklinace větší než $0°$, pak

	$\lambda_\odot$	$\odot$ vstupuje do znamení	$\odot$ vstupuje do souhvězdí (2012-13)	
♈ Beran	0°	20.03.2012 05:14	18.04.12 09:57:36	18.04.13 15:47:36
♉ Býk	30°	19.04.2012 15:11	13.05.12 21:19:57	14.05.13 03:11:19
♊ Blíženci	60°	20.05.2012 14:15	21.06.12 04:41:06	21.06.13 10:36:22
♋ Rak	90°	20.06.2012 22:09	20.07.12 09:28:45	20.07.13 15:22:01
♌ Lev	120°	22.07.2012 09:01	10.08.12 08:36:34	10.08.13 14:24:35
♍ Panna	150°	22.08.2012 16:06	16.09.12 09:48:16	16.09.13 15:37:26
Ω Váhy	180°	22.09.2012 13:48	30.10.12 21:08:30	31.10.13 03:01:37
♏ Štír	210°	22.10.2012 23:13	23.11.12 00:04:40	23.11.13 06:04:31
Hadonoš	—	—	29.11.12 12:04:31	29.11.13 17:57:37
♐ Střelec	240°	21.11.2012 21:49	17.12.12 19:31:29	18.12.13 01:28:50
♑ Kozoroh	270°	21.12.2012 11:11	20.01.12 09:05:11	19.01.13 14:47:05
♒ Vodnář	300°	20.01.2012 16:09	16.02.12 19:35:33	16.02.13 01:18:48
♓ Ryby	330°	19.02.2012 06:17	11.03.12 21:00:38	12.03.13 01:18:36

Tabulka 2: Časy vstupů Slunce do znamení a souhvězdí v UT (vypočítáno dle [E9]).

je nad obzorem a hovoříme o polárním dni, je-li menší, není vidět a nastává polární noc. Vzhledem k tomu, že na severní polokouli trvá léto déle než na polokouli jižní, délka polárního dne je zde větší než polární noci. Maximální výška Slunce nad obzorem je v době letního slunovratu a činí $h_{\max} = 23°27'$.

Půjdeme-li ze severního pólu směrem k rovníku, dostaneme se na rovnoběžku se zeměpisnou šířkou $\varphi = 66°33'$, které se říká severní polární kruh. Slunce na této rovnoběžce vychází a zapadá po celý rok s dvěma výjimkami. V době letního slunovratu Slunce nezapadne a jeho maximální výška nad obzorem bude $h_{\max} = 46°54'$ zatímco minimální bude rovna nule. V době zimního slunovratu naopak maximální výška Slunce bude rovna nule a minimální pak $h_{\min} = -46°54'$.

V Brně vychází i zapadá Slunce po celý rok, a protože je sklon roviny rovníku a brněnského horizontu $40°48'$, vychází tak maximální výška Slunce nad obzorem $h_{\max} = 64°15'$ pro letní slunovrat a $h_{\min} = 17°21'$ pro slunovrat zimní.

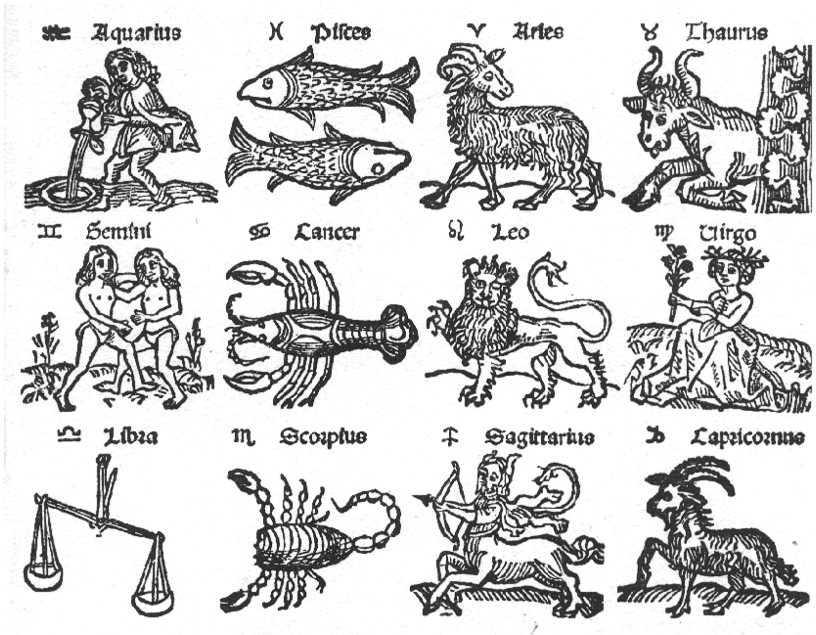
Půjdeme-li dále k jihu, dostaneme se na obratník Raka ($\varphi = 23°27'$), kde nám v době letního slunovratu Slunce vrcholí v zenitu a jeho výška je tak 90°, pro zimní slunovrat je pak výška Slunce rovna $h_{\min} = 43°06'$.

Nakonec přijdeme až na rovník. Zde trvá den i noc po celý rok stejnou dobu a to 12 hodin. Slunce prochází zenitem v dobách rovnodenností, v čase zimního slunovratu vrcholí ve výšce $66°33'$ nad jihem, o letním slunovratu ve stejné výšce, ale nad severem.

2.10.2 Poloha planet na zemské obloze

Planety se nacházejí rovněž jako Měsíc a Slunce poblíž roviny ekliptiky. Největší sklon dráhy k této rovině má planeta Merkur $i = 7°0$ a Venuše $i = 3°23'$.

Vnější planety se většinou pohybují ve směru proti otáčení hvězdné oblohy (jako Slunce), vnitřní planety se mohou vzdálit od Slunce jen o maximální úhlovou vzdálenost, která se nazývá *elongace*. Návrat na totéž místo na hvězdné obloze souvisí se *synodickou periodou*, která je nejdelší pro Mars 780 dní a pro Venuši 583 dní. Se synodickými periodami souvisí i možnost pozorování planet a jejich viditelnost. (Podrobněji budou pohyby planet popsány v kapitole Dynamika sluneční soustavy).



Obrázek 24: Znamení zvěrokruhu ze 16. století [E10].

2.10.3 Zvířetníková (zodiakální) souhvězdí

V rovině ekliptiky se nachází celkem třináct souhvězdí, dvanáct z nich je tzv. zvířetníkových. Tato souhvězdí hrají roli pro astrologii a tvorbu horoskopů. V dobách, kdy astronomie a astrologie nebyly ještě odlišeny, tato souhvězdí přímo souvisela i se znameními a polohou Slunce na hvězdné obloze. Vlivem precesního pohybu však došlo k posunu a v dnešní době o jarní rovnodennosti se Slunce nachází v souhvězdí Ryb a ne v Beranovi, jak by podle horoskopu mělo být. Posun o jedno znamení nastává přibližně za 2000 let. Rozdíl mezi znamením a skutečnou polohou Slunce v souhvězdí je uveden v tabulce 1.

2.11 Převod galaktických souřadnic na rovníkové

Mléčnou dráhou, která obepíná celou oblohu, můžeme vést hlavní kružnici, která je průsečnicí nebeské sféry s rovinou Galaxie (Mléčné dráhy). Sklon zemského rovníku k rovině Galaxie je $62,6°$. Pól Galaxie leží v souhvězdí Vlasů Bereniky a má souřadnice $\alpha = 12^{\mathrm{h}}51^{\mathrm{m}}26^{\mathrm{s}}$ a $\delta = 27°7'42''$ (pro epochu 2000).

Chceme-li tak během roku vidět celou Mléčnou dráhu, musíme pozorovat ze zeměpisných šířek mezi -27,4°< φ <27,4°. I z tohoto důvodu byla vystavěna novější část Evropské jižní observatoře (ESO) - Paranal observatory (24°37′38″j.š. a 70°24′15″ z.d.) v nehostinné poušti v nadmořské výšce 2635 m blíže rovníku než starší observatoř na La Silla (29°15′40″j.š. a 70°43′52″ z.d., 2400 m n.m.).

Obrázek 25: Hlavní dalekohledy na observatoři La Silla (zleva doprava): MPG/EOS 2,2m, Schmidt 1m, NTT 3,5m a ESO 3,6m (foto J. Janík, 1.8.2011).

Nulový bod galaktické šířky a délky má v rovníkových souřadnicích druhého druhu souřadnice $\alpha_0 = 17^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}}$ a $\delta = -28°56'10''$ (pro epochu 2000). Poloha uzlu je $\alpha = 18^{\mathrm{h}}51^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}}$ a $\delta = 00°00'00''$ (pro epochu 2000), což odpovídá $l_0 = 33°$ a $b = 0°$.

Při transformaci od rovníkových souřadnice druhého druhu k souřadnicím galaktickým musíme provést celkem tři otočení. První je otočení okolo osy z o úhel α_0, druhé otočení je kolem osy x o úhel mezi rovinou Galaxie a rovinou zemského rovníku i a poslední je rotace kolem nově definované osy z' o úhel $-l_0$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos l_0 & -\sin l_0 & 0 \\ \sin l_0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (75)$$

Můžeme si ale také přespat tyto transformace jako

$$\begin{pmatrix} \cos b \cos(l - l_0) \\ \cos b \sin(l - l_0) \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_0) \\ \sin\delta \end{pmatrix}, \tag{76}$$

z čehož získáme

$$\begin{aligned} \cos b \cos(l - l_0) &= \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ \cos b \sin(l - l_0) &= \cos i \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_0) + \sin i \sin\delta \\ \sin b &= -\sin i \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_0) + \cos i \sin\delta \end{aligned} \quad . \tag{77}$$

Opačný převod nám dá

$$\begin{pmatrix} \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_0) \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b \cos(l - l_0) \\ \cos b \sin(l - l_0) \\ \sin b \end{pmatrix}, \tag{78}$$

z čehož získáme

$$\begin{aligned} \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0) &= \cos b \cos(l - l_0) \\ \cos\delta \cos(\alpha - \alpha_0) &= \cos i \cos b \sin(l - l_0) + \sin i \sin b \\ \sin\delta &= -\sin i \cos b \sin(l - l_0) + \cos i \sin b \end{aligned} \quad . \tag{79}$$

konec …