Vektory

Definice: Nechť jsou $\mathbf{a}=a_X\,\mathbf{i}+a_Y\,\mathbf{j}+a_Z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_X\,\mathbf{i}+b_Y\,\mathbf{j}+b_Z\,\mathbf{k}$ vektory a r je reálné číslo, pak platí, že

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_X+b_X)\mathbf{i}+(a_Y+b_Y)\mathbf{j}+(a_Z+b_Z)\mathbf{k}, \quad \textbf{(součet)}$$

$$r\mathbf{a}=(r\,a_X)\mathbf{i}+(r\,a_Y)\mathbf{j}+(r\,a_Z)\mathbf{k}, \quad \textbf{(násobení reálným číslem)}$$

$$|\mathbf{a}|=[(a_X)^2+(a_Y)^2+(a_Z)^2]^{1/2}, \quad \textbf{(velikost vektoru)}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_X\,b_X+a_Y\,b_Y+a_Z\,b_Z=|a|\,|b|\cos(\alpha), \quad \textbf{(skalární součin)}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_Y\,b_Z-a_Z\,b_Y)\mathbf{i}+(a_Z\,b_X-a_X\,b_Z)\mathbf{j}+(a_X\,b_Y-a_Y\,b_X)\mathbf{k}, \quad \textbf{(vektorový součin)}.$$

Příklad č.1: Určete komponenty vektoru **v**, který je dán počátečním bodem A=(1,3,-1) a koncovým bodem B=(-1,-2,1). Určete komponenty vektoru **w**=3**v** . Dále určete jeho velikost *w*.

Řešení: **v**=(-2, -5,2), **w**=(-6, -15, 6), *w*= 17.23.

Příklad č.2: Jsou dány jednotkové vektory **i**=(1,0,0), **j**=(0,1,0) a **k**=(0,0,1). Určete průměty w_x,w_y, w_z, vektoru **w** z předchozího příkladu do těchto jednotkových vektorů a vyjádřete jej jak součet vektorů **i**, **j**, **k.**

Řešení: $w_x=-6$, $w_y=-15$, $w_z=6$. **w**=-6**i** -15**j** +6**k**.

Příklad č.3: Jsou dány vektory **a**=-2**i** + 3**j** -**k** a **b**=3**i** - **j** + 3**k** .

Určete:

a) **c**=**a**+**b**, b) **d** = **a**-**b**, c) **e** = 3**a**, d) e = |**e**|, e) **g**=**d**× **e** .

Řešení:

a) **c= i** + 2**j** + 2**k**, b) **d=** -5**i** + 4**j** - 4**k**, c) **e =** -6**i** + 9**j** – 3**k**, d) **e =** $3(14)^{1/2}$, e) **g**= 24**i** + 9**j** – 21**k .**

Příklad č.4: Dokažte, že vektory **u= -i** + 2**j** - 4**k** a **v=** 2**i** - 3**j** - 2**k** jsou na sebe kolmé.

Řešení: -

Příklad č.5 : Určete plochu S čtyřúhelníku zadaného body A=(1 m ,1.5 m ,0), B=(2 m,0.5 m,0), C=(-1m,1m,0), D=(-0.5m,-1m,0).

Řešení: S = 4.125 m^2.

Příklad č.6: Dokažte, že plocha rovnoběžníku daného vektory **u** a **v** je S=|**u**| |**v**| sin(α), kde úhel α je úhel sevřený vektory **u** a **v**.

Řešení:-

Příklad č.7: Dokažte přímým výpočtem, že plocha rovnoběžníku daného vektory **u** a **v** je S=|**u**× **v**|.

Řešení: Ukažte, že |**u**× **v**|=|**u**| |**v**| sin(α) .

Příklad č.8: Letadlo letí vůči vzduchu rychlostí 900 km/h. Vítr fouká od východu rychlostí 20 m/s. Kterým směrem musí letadlo mířit, aby si udrželo směr na Sever?

Řešení: Letadlo musí letět sverovýchodním směrem pod úhlem 4.6° vůči spojnici Sever-Jih.

Příklad č.9: Jsou dány vektory **a**=3**i**-2**j**+4**k** a **b**=2**i**-3**j**+*p***k** určete hodnotu parametru p tak aby byly oba vektory na sebe kolmé.

Řešení: *p*=-3

Příklad č.10: Jsou dány vektory **a**=-2**i**+**j**+5**k** a **b**=2**i**-3**j**+8**k** . Určete průmět b_a vektoru **b** do směru vektoru **a** a jednotkový vektor **n** ve směru vektoru **a**.

Řešení: $b_a = 11\sqrt{\frac{3}{10}}$, $\boldsymbol{n} = -\sqrt{\frac{2}{15}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{30}}\boldsymbol{j} + \sqrt{\frac{5}{6}}\boldsymbol{k}$.

Příklad č.11: Pavel se chystá překonat řeku. Chce se dostat do místa B přesně naproti místu A odkud vyráží. Může to provést dvěmi způsoby:

a) Plavat pod takovým úhlem vůči břehu aby Pavlova výsledná rychlost mířila přímo do bodu B.

b) Může plavat kolmo vůči břehu a nechat se unášet proudem do bodu X a odtud dojít do bodu B.

Pavel plave vůči řece rychlostí *v*=2.5 km/h a chodí rychlostí *u*=4 km/h. Rychlost proudu řeky je *w*=2 km/h. Kterým z těchto způsobů překoná řeku rychleji?

Řešení: $\frac{t_a}{t_b} = \frac{v\,u}{(u+w)\sqrt{v^2 - w^2}} = 1.11$.

Příklad č.12: Určete objem *V* nádoby (rovnoběžnostěnu), která je určena vektory **a**=4**i**-**j**+3**k** , **b**=3**i**-2**j**-6**k** a **c**=-2**i**+3**j**+2**k** , kde složky vektoru jsou v jednotkách cm.

Řešení: *V*=65cm^3.

Příklad č. 13: Stojíte na lodi která míří na východ rychlostí 15 uzlů. Všimnete si druhé lodi na jihu od vás, vzdálené 6mil a pohybující se stálou rychlostí 26 uzlů. Za určitou dobu vás míjí přesně na zádi v minimální vzdálenosti 3mil. Určete tento časový okamžik a směr jejího pohybu. (1uzel=1.852 mil/h, 1mile=1852 m)

Řešení: α ≅ 0.02°(druhá loď míří téměř na sever), t_{min}≅35min .

Příklad č. 14:“Částice“ o hmotnosti m_1=2kg pohybující se rychlostí $\mathbf{v}_1$=3**i**+2**j**-**k** km/s se dokonale nepružně srazí s jinou částicí o hmotnosti m_2=3 kg a rychlosti $\mathbf{v}_2$=-2**i**+2**j** +4**k** km/s. Najděte rychlost **v** takto vzniklé složené částice.

Řešení: **v**= 2 **j** +2 **k** .