DÁLKOVÝ PRŮZKUM VESMÍRU

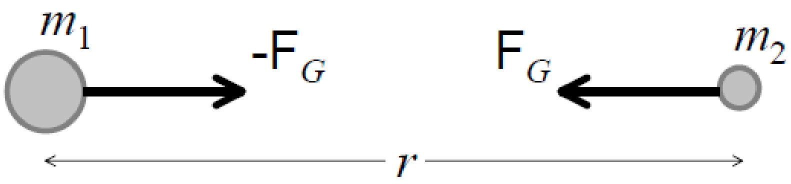
2. Základy mechaniky kosmického letu

8.1.6 Univerzální gravitační zákon

Jakmile se Newton ujistil, že silové působení Slunce na planety, silové působení Země na Měsíc a zemská tíže jsou všechny popsány stejným zákonem, formuloval roku 1684 **univerzální gravitační zákon:**

> Libovolná dvě tělesa se přitahují silou, která je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti.

Newtonův gravitační zákon platí v celém vesmíru a určuje pohyby planet, komet, umělých satelitů, stejně jako hvězd a galaxií. Gravitace způsobuje sférický tvar velkých nebeských těles. Gravitace umožňuje hvězdám dosáhnout dostatečného tlaku a teploty k zapálení termojaderné reakce. Gravitace přidržuje vodu a vzduch k povrchu Země. Proměnná gravitace způsobená pohybem Měsíce a Slunce způsobuje pravidelná dmutí hladiny všech moří, tzv. přílivy a odlivy.



Ilustrace ke gravitačnímu zákonu

Univerzální gravitační zákon vyjádřen vzorcem zní

Univerzální gravitační zákon vyjádřen vzorcem zní

$$F_G = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde konstanta úměrnosti $\varkappa$ se nazývá **gravitační konstanta** a má hodnotu

$$\varkappa \approx 6.6732 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}\,.$$

Velikost gravitační konstanty Newton neznal, poprvé ji naměřil až Henry Cavendish roku 1798 pomocí přesných torzních vah. Podařilo se mu poprvé změřit malé přitažlivé síly, kterými na sebe působí dvě velké a dvě malé olověné koule. Konstanta $\varkappa$ je dodnes jednou z nejméně přesných fyzikálních konstant.

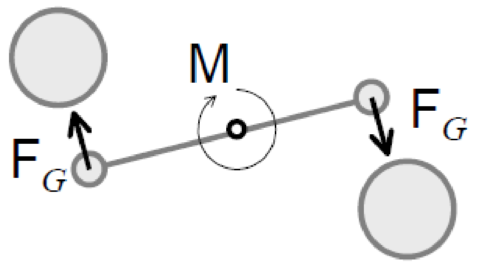


Schéma uspořádání Cavendishova experimentu. Z reakce torzního vlákna na silový moment **M** je možno určit gravitační sílu a odtud gravitační konstantu.

O nepatrné velikosti gravitačních sil svědčí například tato skutečnost. Kdybychom měli ve volném prostoru dvě stejné olověné koule, každou o průměru jeden metr, ve vzdálenosti jeden kilometr od sebe a na počátku v klidu, pak by se obě koule vzájemným gravitačním přitahováním uvedly do pohybu a srazily by se až za 460 dní!

Směr přitažlivé síly je určen spojnicí obou těles, jak to vyžaduje zákon akce a reakce. Proto je možno zapsat gravitační zákon také v obecném vektorovém tvaru

$$\mathbf{F}_G = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \tag{8.5}$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor tělesa m_2 vzhledem k m_1 a $\mathbf{F}_G$ je síla, jakou je hmotný bod m_2 přitahován k m_1.

Až do objevu gravitačního zákona působily všechny známé síly kontaktem těles, tedy na blízko. Gravitace byla první silou, která působí na dálku, *ad distantio*, a to podle Newtona okamžitě. Všechna astronomická pozorování to skutečně potvrzují. Nicméně ani sám Newton silovému působení na dálku nerozuměl a pokud byl dotázán na podstatu své gravitační síly, odpovídal výrokem: *Hypotheses non fingo* (Hypotézy nevymýšlím). Moderní výklad silového působení na dálku spočívá v zavedení hmotného silového pole v prostoru, kde se tělesa nacházejí. Ukazuje se také, že silové působení není okamžité, ale má konečnou rychlost, kterou je rychlost světla. Tato většinou malá zpřesnění popisuje teorie gravitace Alberta Einsteina z roku 1916, která je známá spíše pod názvem *obecná teorie relativity*.

8.2.2 Řešení Keplerovy úlohy

Budeme tedy zkoumat, podobně jako Newton, pohyb planety nebo komety o hmotnosti m v gravitačním poli nehybného Slunce o hmotnosti M_S. Pohyb planety je popsán pohybovou rovnicí

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\varkappa \frac{M_S}{r^3}\mathbf{r}.$$

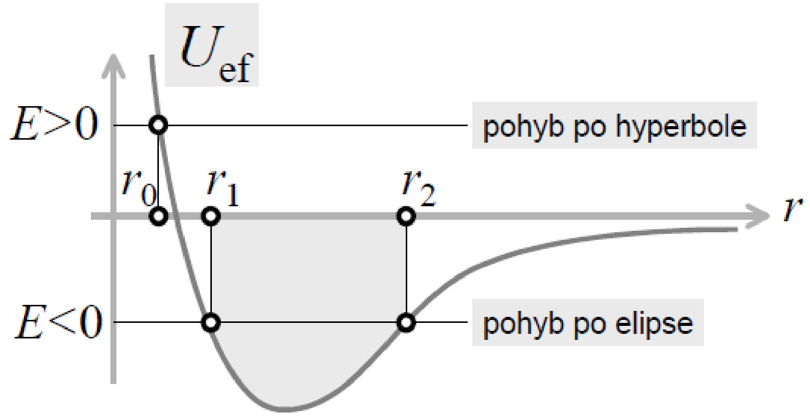
Trajektorii planety můžeme pohodlně najít například pomocí Binetova vzorce, jako jsme to dělali již dříve v dynamice. Nás však zajímá i časový průběh pohybu. Ukážeme si proto jiné řešení, které využívá integrálů pohybu, tj. **zákona zachování energie**

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \varkappa \frac{mM_S}{r}$$

a **zákona zachování momentu hybnosti** planety

$$L = mr^2\dot{\phi}, \tag{8.6}$$

který je jen jiným vyjádřením druhého Keplerova zákona.



Průběh efektivního potenciálu $U_{ef}(r)$ a celková energie E určují, zda bude pohyb planety omezen na interval $r_1 \leq r \leq r_2$ (pohyb po elipse) nebo omezen jen zdola $r_0 \leq r$ (pohyb po hyperbole).

V polárních souřadnicích je možno psát mechanickou energii planety ve tvaru

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \varkappa\frac{mM_S}{r}.$$

Vyloučením $\dot{\phi}$ pomocí (8.6) dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \varkappa\frac{mM_S}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}(r),$$

kde $U_{ef}(r)$ představuje **efektivní potenciální energii**. Tato rovnice představuje diferenciální rovnici pro funkci $r(t)$, kterou můžeme upravit do tvaru

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2\varkappa M_S}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}$$

a vyřešit. Hledejme ale nejprve rovnici trajektorie $r(\phi)$. Čas z rovnice vyloučíme opět pomocí druhého Keplerova zákona (8.6). Platí

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = r'\dot{\phi} = r'\frac{L}{mr^2},$$

kde čárkou označujeme derivace podle azimutu ϕ. Substituce

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{dává} \quad \dot{r} = -u'\frac{L}{m},$$

a odtud

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = \pm\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2\varkappa M_S m^2}{L^2}u - u^2}.$$

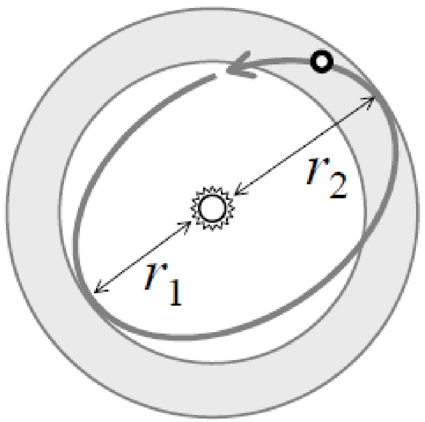
Tuto diferenciální rovnici umíme vyřešit například separací proměnných. Označíme-li kořeny kvadratické funkce pod odmocninou jako u_1 a u_2, pak bude řešení $u(\phi)$ reálné, jen pokud platí $u_1 \geq u \geq u_2$. Pomocí kořenů u_1 a u_2 lze diferenciální rovnici zapsat ve tvaru

$$u' = \pm\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}.$$

Které znaménko u odmocniny skutečně platí, to rozhodnou počáteční podmínky. Pro kořeny u_1 a u_2 platí známé **Viètovy věty**

$$u_1 + u_2 = \frac{2\varkappa M_S m^2}{L^2} \quad \text{a} \quad u_1 u_2 = -\frac{2mE}{L^2}.$$

Oba kořeny jsou tudíž kladné, jen když je $E \leq 0$. Planeta je pak vázána v gravitačním poli Slunce $r_1 \leq r \leq r_2$ a nemůže jej opustit. V případě $E = 0$ vychází $u_2 = 0$, takže planeta se může vzdálit až do nekonečna $r_2 \to \infty$. Konečně v případě, že $E > 0$, bude u_2 i r_2 záporné a pohyb planety je rovněž omezen jedinou podmínkou $r_1 \leq r$.



Keplerova úloha. Planeta obíhá po elipse v prstenci vymezeném dvěma extrémními hodnotami vzdálenosti r_1 a r_2 od Slunce.

Separací proměnných dostaneme nejprve rovnici

$$\pm \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}},$$

a odtud její integrací dostaneme

$$\mp (\phi - \phi_0) = \arccos \frac{u - \frac{u_1+u_2}{2}}{\frac{u_1-u_2}{2}}.$$

Obvykle volíme počátek měření azimutu ϕ v perihéliu, tj. tam, kde je $u = u_1 = u_{\max}$, resp. $r = r_1 = r_{\min}$, proto je $\phi_0 = 0$. Zároveň azimut měříme obvykle na tu stranu, na kterou azimut přirozeným pohybem planety skutečně roste. Proto platí jen znaménko plus. Řešení rovnice má tedy tvar

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \cos \phi, \tag{8.7}$$

což je obecná **rovnice kuželosečky**

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi) . \tag{8.8}$$

Z geometrie kuželoseček je známo, že pro $e = 0$ dostaneme $r = p = a$, tj. **kružnici**, pro $e < 1$ dostaneme **elipsu**, pro $e = 1$ dostaneme **parabolu** a konečně pro $e > 1$ dostaneme jednu větev **hyperboly**. Porovnáním řešení (8.7) s rovnicí elipsy (8.8) dostaneme pro parametr p rovnici

$$\frac{1}{p} = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{\varkappa M_S m^2}{L^2} \tag{8.9}$$

a pro excentricitu e rovnici

$$e = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} = \sqrt{1 - \frac{4u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\varkappa^2 M_S^2 m^3}}. \tag{8.10}$$

Tím jsme dokázali **první Keplerův zákon** pro pohyb planet. Zároveň jsme jej rozšířili o poznatek, že dráha tělesa nemusí být eliptická, pokud má těleso dostatečnou energii. V případě, že je celková energie E tělesa kladná, je jeho dráha hyperbolická, protože pak je $e > 1$. V případě, že energie tělesa je přesně rovna nule, pohybuje se těleso po parabole, neboť je $e = 1$. Speciálně pro elipsu je velká poloosa rovna

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{u_1 + u_2}{2u_1u_2} = -\frac{\varkappa m M_S}{2E} \geq 0.$$

Obráceně platí také

$$E = -\frac{\varkappa m M_S}{2a}, \tag{8.11}$$

takže celková energie planety závisí jen na velké poloose její oběžné dráhy. Podobně z rovnice (8.9) vyjádříme orbitální moment L pomocí dráhových elementů

$$L^2 = \varkappa M_S m^2 p. \tag{8.12}$$

Orbitální moment můžeme vyjádřit také přes plošnou rychlost $w = \pi ab/T$ vztahem $L = 2mw = 2\pi mab/T$. Dosazením do (8.12) odtud dostaneme po malé úpravě **třetí Keplerův zákon** ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa M_S}{4\pi^2}.$$

Pomocí univerzálního gravitačního zákona jsme tak pohodlně dokázali všechny tři Keplerovy zákony.

8.2.4 Keplerova rovnice

Trajektorii planety $r(\phi)$ už známe, musíme ještě najít závislost polohy planety na čase, hledáme tedy dále funkce $\phi(t)$ a $r(t)$. Z (8.6) a (8.12) máme

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{\sqrt{\varkappa M_S p}}{r^2} = \frac{\sqrt{\varkappa M_S p}}{p^2}(1 + e\cos\phi)^2,$$

takže separací proměnných a integrací odtud dostaneme

$$\int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1 + e\cos\phi)^2} = \int_0^t \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{p^3}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{p^3}}t.$$

Integrál vlevo upravíme pomocí vhodné substituce

$$y = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}$$

a spočteme. Tak dostaneme

$$M = 2\left(\mathrm{arctg}\,y - e\frac{y}{1+y^2}\right),$$

kde výraz na levé straně rovnice

$$M = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{a^3}}\,t = nt \tag{8.14}$$

se nazývá **střední anomálie** a $n = \sqrt{\varkappa M_S/a^3}$ **střední pohyb** planety. Pro praktické výpočty v astronomii je tento vzorec nevhodný, protože se jedná o relativně složitou transcendentní rovnici vzhledem k y. Proto se zavádí dále **excentrická anomálie** E vztahem

$$y = \operatorname{tg}\frac{E}{2}, \qquad \text{pak je} \qquad \frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2}\sin E.$$

Tak dostaneme mnohem vhodnější vzorec k výpočtu excentrické anomálie známý jako **Keplerova rovnice**

$$M = E - e\sin E. \tag{8.15}$$

Při výpočtu polohy planety se tedy v praxi postupuje takto: Pro dané parametry elipsy a, e spočteme v daný okamžik t nejprve střední anomálii M planety podle (8.14). Odtud pak pomocí Keplerovy rovnice (8.15) najdeme excentrickou anomálii E a z ní pak spočteme **pravou anomálii** (azimut) ϕ pomocí vzorce

$$\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Vzdálenost planety pak spočteme buď již ze známé pravé anomálie ϕ a z rovnice elipsy (8.8) anebo s pomocí excentrické anomálie E ze vztahu

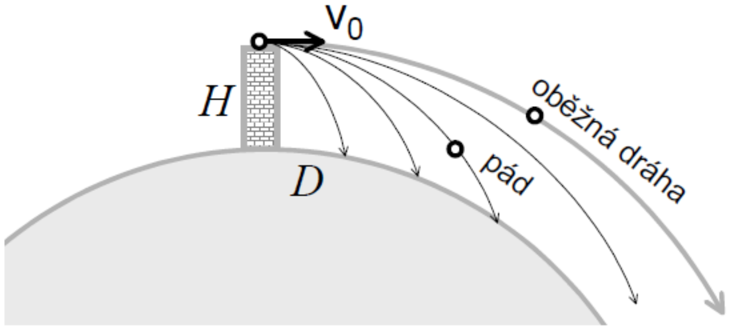
$$r = a\,(1 - e\cos E)\,,$$

který dostaneme úpravou vzorce (8.8), kam dosadíme za výraz

$$\cos\phi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}} = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}.$$

8.3.1 První kosmická rychlost

Již Newton zkoumal, jak by se měnil pád koule vystřelené horizontálně z děla na věži o výšce H nad zemským povrchem, kdybychom zvyšovali počáteční rychlost koule. Galileo ukázal, že pro malé rychlosti v_0 by se koule pohybovala po parabole a na zem by dopadla za čas $t_0 = \sqrt{2H/g}$, přitom by doletěla do vzdálenosti $D = v_0 t_0 = v_0\sqrt{2H/g}$.



Trajektorie dělové koule při zvyšování počáteční rychlosti v_0.

Kdybychom rychlost koule dále zvyšovali, dopadala by koule dál a dál od věže, až by se počalo výrazněji projevovat zakulacení povrchu Země. Při určité rychlosti $v_0 = v_I$ by koule padala k Zemi právě tak rychle, jak rychle by pod ní povrch Země ubíhal. To by nastalo právě v tom okamžiku, kdy by se křivost dráhy koule rovnala křivosti povrchu Země. A protože poloměr křivosti dráhy koule při vodorovném vrhu je $r = v_0^2/g$ a poloměr Země je R_Z, dostaneme z podmínky $r = R_Z$ rychlost

$$v_I = \sqrt{gR_Z} = \sqrt{\varkappa \frac{M_Z}{R_Z}} \approx 7.9\,\mathrm{km}/\mathrm{s}\,. \tag{8.20}$$

Tato rychlost se nazývá **první kosmická rychlost** a je to nejmenší rychlost, kterou musíme satelitu udělit, aby nespadl zpět na povrch Země. Pochopitelně, zde neuvažujeme odpor atmosféry.

První kosmickou rychlost můžeme pohodlně získat také úvahou, že koule bude obíhat kolem Země po kruhové dráze o poloměru R_Z, pokud bude mít takovou rychlost v_I, že jeho dostředivé zrychlení $a = v_I^2/R_Z$ bude právě rovno tíhovému zrychlení g. Odtud opět dostaneme vzorec (8.20).

Oběžná doba satelitu, případně kosmické lodi, obíhajícího kolem Země je tedy rovna

$$T = \frac{2\pi R_Z}{v_I} = 2\pi\sqrt{\frac{R_Z}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_Z^3}{\varkappa M_Z}} \approx 83\,\mathrm{min}\,.$$

Jestliže sem dosadíme za hmotnost Země výraz $M_Z = \frac{4}{3}\pi\rho_Z R_Z^3$, dostaneme pro oběžnou dobu vzorec

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\varkappa\rho_Z}},$$

podle kterého nezávisí perioda oběhu satelitu překvapivě na velikosti planety, ale jen na její střední hustotě ρ_Z. Z oběžné doby T nízkoletících satelitů můžeme naopak spočítat hustotu planety podle vzorce

$$\rho = \frac{3\pi}{\varkappa T^2}.$$

Reálné satelity musí obíhat Zemi nad atmosférou, tedy ve výškách nad 200 km. Má-li satelit obíhat ve výšce H, bude poloměr jeho kruhové dráhy $r_0 = R_Z + H$. Dostředivá síla na kruhové oběžné dráze se musí rovnat přitažlivé síle gravitační, odtud je potřebná **kruhová rychlost** satelitu rovna

$$v_K = \sqrt{\varkappa\frac{M_Z}{r_0}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z + H}} \leq v_I.$$

Kruhová rychlost je tedy vždy menší než první kosmická rychlost.

8.3.2 Obecná dráha satelitu

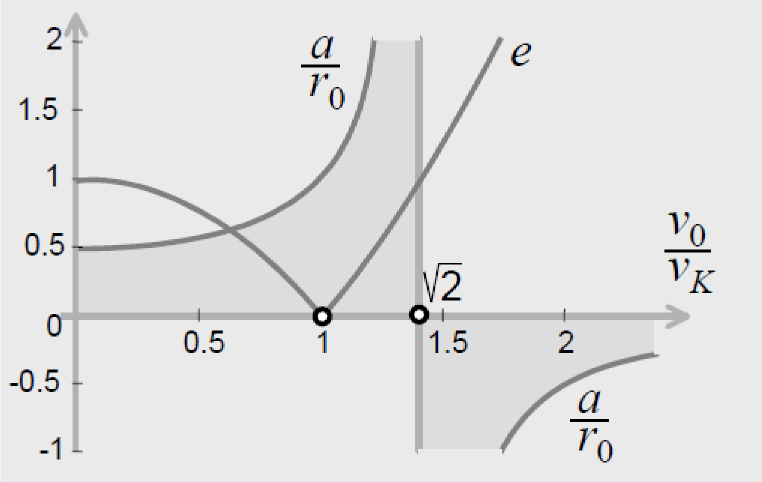
Vraťme se zpátky k Newtonovu dělu. Jestliže vystřelíme dělovou kouli rychlostí v_0 horizontálně ve vzdálenosti $r_0 = R_Z + H$ od středu Země, pak moment hybnosti koule je roven $L = m r_0 v_0$ a energie koule je rovna

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \varkappa \frac{m M_Z}{r_0} = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - 2 v_K^2 \right) .$$

Pro excentricitu její dráhy platí vzorec (8.10), jestliže tam dosadíme za L a E podle posledních dvou vzorců, dostaneme po úpravě výsledek

$$e = \left| 1 - \frac{v_0^2}{v_K^2} \right| , \quad \text{kde} \quad v_K = \sqrt{\varkappa \frac{M_Z}{r_0}} \tag{8.21}$$

je kruhová rychlost příslušná dané vzdálenosti r_0 od středu Země.



Závislost excentricity e a velké poloosy a dráhy koule na její počáteční rychlosti v_0. Všimněte si dvou významných bodů $v_0 = v_K$, kde je trajektorií kružnice a $v_0 = v_K\sqrt{2}$, kde je trajektorií parabola.

Velká poloosa dráhy se najde ze vzorce (8.11)

$$a = \frac{r_0}{2 - v_0^2/v_K^2}. \tag{8.22}$$

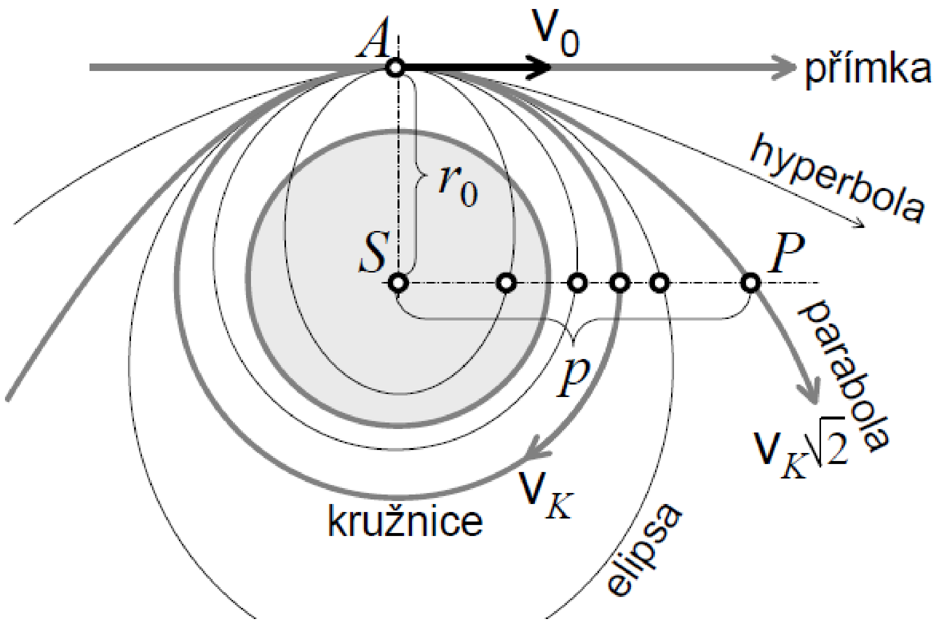
Pro $v_0 > v_K\sqrt{2}$ vychází poloosa a záporná, elipsa tedy přechází v hyperbolu. Parametr p však zůstává kladný a stále monotónně roste s počáteční rychlostí koule. Parametr p se spočte pohodlně ze vzorce (8.9), odtud po dosazení za orbitální moment L najdeme

$$p = r_0 \frac{v_0^2}{v_K^2}.$$

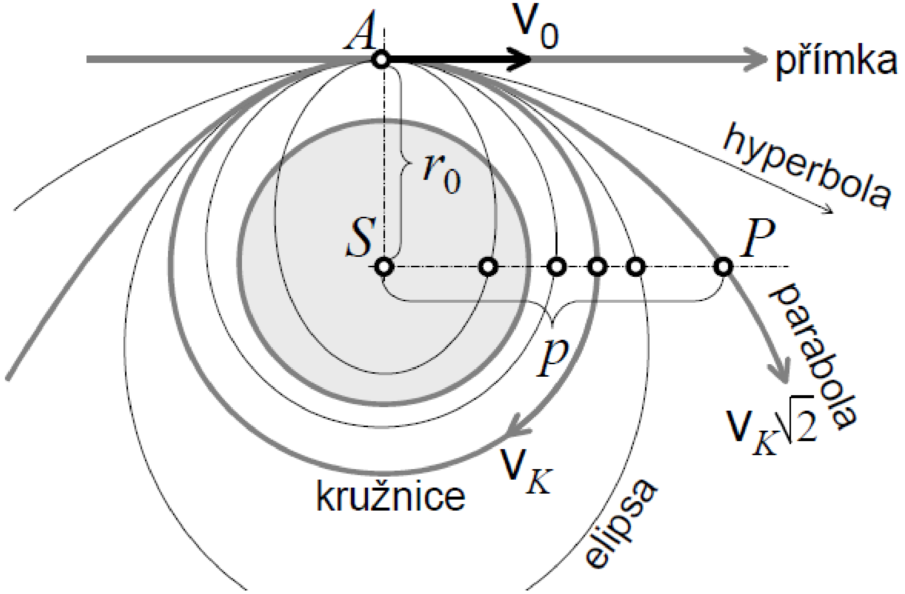
Parametr p je na obrázku zobrazen pro každou trajektorii kvadraturou, tj. úsečkou SP, která je kolmá na vertikálu AS. Vzorec je možno přepsat také do tvaru

$$\frac{v_0^2}{p} = \frac{v_K^2}{r_0} = \varkappa \frac{M_Z}{r_0^2} = g,$$

z něhož je zřejmé, že parametr p má význam poloměru křivosti trajektorie koule ve vrcholu A dráhy.



Trajektorie koule v závislosti na počáteční rychlosti v_0.



Trajektorie koule v závislosti na počáteční rychlosti v_0.

Nyní provedeme stručnou diskuzi těchto výsledků. Pro malé rychlosti bude $e \to 1$ a $a \to r_0/2$. Dráhou koule bude velmi výstředná elipsa, téměř parabola AS, jak věděl již Galileo. Pro $v_0 < v_K$ bude $e < 1$ a $a < r_0$. Dráhou koule bude elipsa se středem uprostřed Země. Pro $v_0 = v_K$ bude $e = 0$ a $a = r_0$. Dráhou koule tedy bude kružnice a koule se stane umělou družicí Země, pohybující se první kosmickou rychlostí. Pro $v_0 = v_K\sqrt{2}$ bude $e = 1$ a velká poloosa trajektorie diverguje $a \to \infty$. Dráhou koule bude parabola a jde o pohyb druhou kosmickou rychlostí. Konečně pro $v_0 > v_K\sqrt{2}$ bude excentricita větší než jedna $e > 1$ a velká poloosa bude záporná $a < 0$. Dráhou koule tedy bude hyperbola a koule unikne navždy z oblasti zemské přitažlivosti.

8.3.4 Druhá kosmická rychlost, úniková rychlost

Pokud budeme chtít vyslat kosmickou sondu mimo dosah gravitačního působení Země, musíme jí dodat rychlost, kterou nazýváme **druhou kosmickou rychlostí**. Je to nejmenší možná rychlost, která umožní tělesu odletět nekonečně daleko od Země. Příslušnou dráhou je zřejmě parabola. Minimální rychlost sondy najdeme z podmínky, že její celková energie je rovna nule

$$E = \frac{1}{2} m v_{II}^2 - \varkappa \frac{m M_Z}{R_Z} = 0.$$

Odtud máme druhou kosmickou rychlost

$$v_{II} = \sqrt{2\varkappa \frac{M_Z}{R_Z}} = v_I \sqrt{2} \approx 11.2\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}\,.$$

Tato rychlost se běžně nazývá také **únikovou rychlostí**.

8.3.6 Třetí kosmická rychlost

Země obíhá kolem Slunce přibližně po kruhové dráze. Její rychlost najdeme jako příslušnou kruhovou rychlost podle vzorce

$$v_{IS} = \sqrt{\varkappa \frac{M_S}{r_S}} \approx 29.8\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}\,.$$

Tuto rychlost najdeme také tak, že využijeme znalosti o délce oběžné dráhy a délce oběžné doby Země kolem Slunce. Zřejmě je $v_{IS} = 2\pi r_S/T \approx 29.8\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$, kde $r_S \approx 1\,\mathrm{AU} \approx 149.6$ miliónů kilometrů je vzdálenost Země od Slunce a $T \approx 365.25$ dne je siderická oběžná doba. Pokud bychom chtěli, aby Země opustila sluneční soustavu, museli bychom ji udělit rychlost v_{IIS} takovou, aby se mohla vzdálit do nekonečna po parabolické dráze, tedy jakousi druhou kosmickou sluneční rychlost. Zřejmě platí

$$v_{IIS} = v_{IS}\sqrt{2} \approx 42.1\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}\,.$$

Pokud budeme Zemi urychlovat ve směru její nynější obvodové rychlosti v_{IS}, stačí jí udělit jen dodatečnou rychlost

$$v_{IIS} - v_{IS} \approx 12.3\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}\,.$$

Totéž platí pro kosmické sondy, které chceme vyslat pryč ze sluneční soustavy. Nejmenší rychlost v_{III}, která kosmické sondě dovolí opustit sluneční soustavu, se nazývá **třetí kosmická rychlost**. Předpokládejme, že sonda je po startu urychlena na rychlost v_{III} ve směru orbitální rychlosti Země kolem Slunce. Část této rychlosti však sonda ztratí na překonání gravitačního pole Země, v dostatečné vzdálenosti od povrchu Země musí mít sonda rychlost $v_\infty = v_{IIS} - v_{IS} \approx 12\,\mathrm{km/s}$, kterou najdeme ze zákona zachování energie sondy

$$\frac{v_\infty^2}{2} \approx \frac{v_{III}^2}{2} - \frac{\varkappa M_Z}{R_Z} = \frac{v_{III}^2}{2} - \frac{v_{II}^2}{2}.$$

Symbol $\approx$ jsme zde použili vzhledem ke skutečnosti, že změnu gravitační energie Země a sondy vzhledem ke Slunci v této aproximaci zanedbáváme. Odtud již dostaneme pro třetí kosmickou rychlost známý vztah

$$v_{III} \approx \sqrt{v_\infty^2 + v_{II}^2} = \sqrt{(v_{IIS} - v_{IS})^2 + v_{II}^2} \approx 16.6\,\mathrm{km/s}\,.$$

8.3.7 Čtvrtá kosmická rychlost

Někdy se používá ještě pojem **čtvrté kosmické rychlosti** jako nejmenší počáteční rychlosti nezbytné k tomu, aby kosmická sonda dopadla na povrch Slunce. K tomu dojde, když sondu tentokrát urychlíme ve směru opačném ke směru orbitální rychlosti Země a ta po překonání gravitačního pole Země získá rychlost $v_\infty = -v_{IS}$ vzhledem k Zemi nebo $v'_\infty \approx 0$ vzhledem ke Slunci, takže pak sonda dopadne volným pádem na povrch Slunce. Pomocí zákona zachování energie opět najdeme přibližný vztah mezi v_{IV} a v_∞, platí

$$\frac{v_\infty^2}{2} \approx \frac{v_{IV}^2}{2} - \frac{\varkappa M_Z}{R_Z} = \frac{v_{IV}^2}{2} - \frac{v_{II}^2}{2},$$

odtud je potřebná rychlost sondy rovna

$$v_{IV} \approx \sqrt{v_\infty^2 + v_{II}^2} = \sqrt{v_{IS}^2 + v_{II}^2} \approx 31.8\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}\,.$$

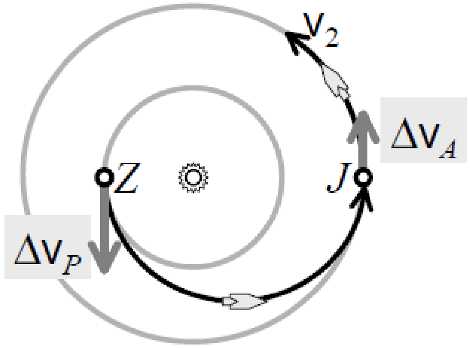
Pokud bychom tedy chtěli poslat umělou kosmickou sondu ke Slunci, museli bychom ji dodat rychlost $31.8\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$, tj. rychlost dvakrát vyšší než je rychlost postačující k opuštění sluneční soustavy. Dostat se ke Slunci je tedy energeticky mnohem obtížnější než uniknout z jeho přitažlivosti pryč.

8.3.8 Orbitální manévry

Základním problémem kosmonautiky je přesunout kosmickou sondu z orbity jedné planety na orbitu jiné planety kolem Slunce. Pro jednoznačnost v dalším předpokládejme, že druhá planeta se nachází dále od Slunce než planeta první, v opačném případě by byl postup analogický, jen místo urychlování by se sonda musela zpomalovat. V základní formulaci problému se dále předpokládá, že orbity planet jsou kruhové a že mají poloměry r_1 a r_2 a rychlosti v_1 a v_2. Nejjednodušší variantou orbitálního manévru je udělit sondě pomocí raketových motorů krátký impulz, čímž vzroste rychlost sondy o Δv_P a sonda přejde na elipticku dráhu, která se v aféliu dotýká dráhy druhé planety. Protože vzdálenost perihélia je rovna vzdálenosti r_1 první planety od Slunce a vzdálenost afélia vzdálenosti r_2 druhé planety od Slunce, rovná se velká poloosa eliptické dráhy sondy hodnotě

$$a = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right).$$

V aféliu dostane sonda druhý rychlostní impulz Δv_A, čímž získá rychlost v_2 a přejde na kruhovou dráhu shodnou s orbitou druhé planety. Toto je současně nejekonomičtější mechanismus orbitálního manévru pro přesun mezi planetami a popsal jej již roku 1920 Walter Hohmann.



Orbitální manévr, sonda odstartovala ze Země Z, kde dostala impuls Δv_P a letí k dráze Jupitera J, na kterou přejde po obdržení impulzu Δv_P. Konečná rychlost sondy je v_2.

Najdeme ještě příslušné rychlostní impulzy. Orbitální rychlosti první a druhé planety jsou

$$v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{r_1}} \quad \text{a} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{r_2}}.$$

Rychlosti sondy v perihéliu, kdy je $r = r_1$ a aféliu eliptické dráhy, kdy je $r = r_2$ jsou podle vzorce (8.13) rovny

$$v_P = v_1\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \quad \text{a} \quad v_A = v_2\sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}.$$

Pro rychlostní impulzy $\Delta v_P = v_P - v_1$ a $\Delta v_A = v_2 - v_A$ tak máme výsledné vzorce

$$\Delta v_P = v_1\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) \quad \text{a} \quad \Delta v_A = v_2\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right).$$

Jako příklad si vezměme sondu vyslanou ze Země na Jupiter. V tom případě je $r_1 \approx 1\,\mathrm{AU}$ a $r_2 \approx 5.2\,\mathrm{AU}$, $v_1 \approx 29.8\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ a $v_2 \approx 13.1\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$, rychlost sondy v perihéliu a aféliu je $v_P \approx 38.6\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ a $v_A \approx 7.4\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ a tedy potřebné rychlostní impulzy mají velikost $\Delta v_P \approx 8.8\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ a $\Delta v_A \approx 5.7\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$. Celková doba manévru přitom trvá $\Delta t \approx 2.7$ roku.

S popsaným manévrem bezprostředně souvisí také **randezvous problem**, tj. problém, jak zajistit, aby se na konci manévru nacházela vedle sondy i druhá planeta. Toho se dosáhne jednoduše tak, že celý orbitální manévr správně načasujeme, tj. zahájíme ve správný okamžik. Celková doba letu sondy je zřejmě rovna polovině periody T příslušné eliptické orbity, platí tedy

$$\Delta t = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{2\varkappa M_S}} = \frac{T_1}{2}\left(\frac{r_1+r_2}{2r_1}\right)^{3/2}.$$

Označíme-li délky planet l_1 a l_2 na počátku t_1 a na konci $t_2 = t_1 + \Delta t$ manévru, pak za předpokladu kruhových drah platí $l_1 = L_1 + n_1 t_1$ a $l_2 = L_2 + n_2 t_2$, kde

$$n_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{r_1^3}} \quad \text{a} \quad n_2 = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{r_2^3}}$$

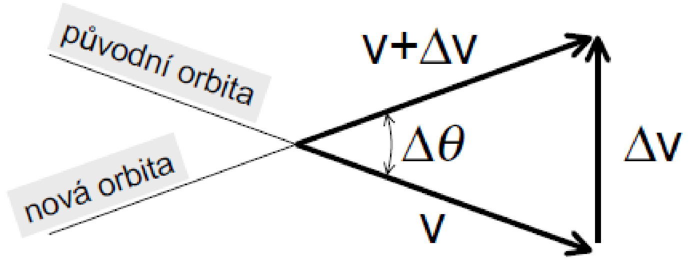
jsou střední pohyby planet a L_1 a L_2 délky planet v okamžiku $t = 0$. Aby sonda na konci manévru, tj. v čase t_2 potkala druhou planetu a mohla přejít na parkovací dráhu, musí zřejmě vyjít $l_2 = l_1 + \pi$, odtud již dostaneme pro okamžik počátku a konce orbitálního manévru jednoduché vzorce

$$t_1 = \frac{L_2 - L_1 - \pi + n_2 \Delta t}{n_1 - n_2}, \qquad t_2 = \frac{L_2 - L_1 - \pi + n_1 \Delta t}{n_1 - n_2}.$$

Startovní okno t_1 souvisí s okamžikem t_O opozice druhé planety vzhledem ke Slunci jednoduchým vztahem

$$t_1 = t_O + \frac{n_2 \Delta t - \pi}{n_1 - n_2}.$$

Následující startovní okno se dostane jednoduše přičtením synodické periody $T' = 2\pi/\left(n_1 - n_2\right)$.



Změna $\Delta\theta$ sklonu orbity se dosáhne příčným impulzem Δv.

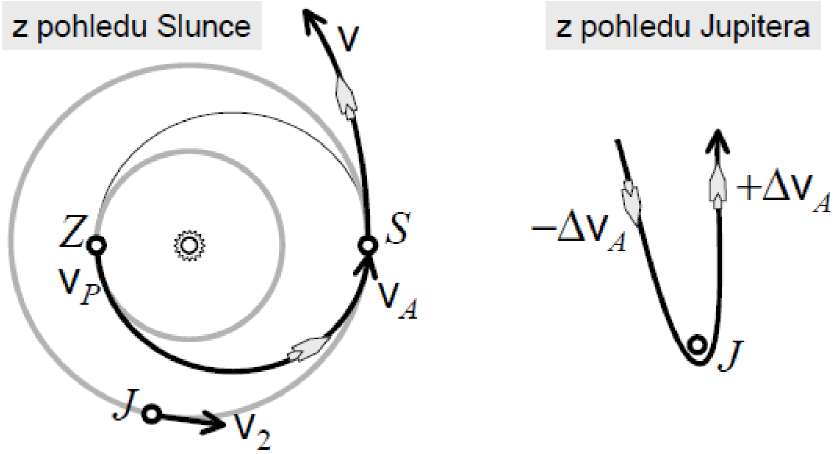
Dalším významným manévrem je změna sklonu orbity. Toho se dosáhne nejsnáze příčným impulzem Δv v okamžiku, kdy je sonda v uzlu své dráhy. Tím se sklon dráhy θ změní o hodnotu $\Delta\theta$, pro kterou ze vzorce pro skládání rychlostí platí

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta v}{2v},$$

kde v je aktuální rychlost sondy v uzlu.

8.3.9 Gravitační manévr

Kosmonautika je velmi drahá, k urychlení každého jednoho užitečného kilogramu sondy až na třetí kosmickou rychlost spotřebujeme zhruba tunu toho nejkvalitnějšího raketového paliva. Pokud by existovala možnost, jak sondu urychlit levněji, mohlo by to kosmautiku výrazně zlevnit. Jedna taková možnost skutečně existuje a nazývá se **gravitační manévr,** také gravitační asistence nebo metoda gravitačního praku. Spočívá v tom, že sondu urychlí gravitační pole pomocné planety.



Sonda odstartovala ze Země Z, po urychlení získala rychlost $v_P \approx 38.6\,\mathrm{km/s}$ a pokud se potká v místě S s Jupiterem, dojde k jejímu urychlení o $2\Delta v_A \approx 11.4\,\mathrm{km/s}$ z rychlosti $v_A \approx 7.4\,\mathrm{km/s}$ na konečnou rychlost $v \approx 18.8\,\mathrm{km/s}$.

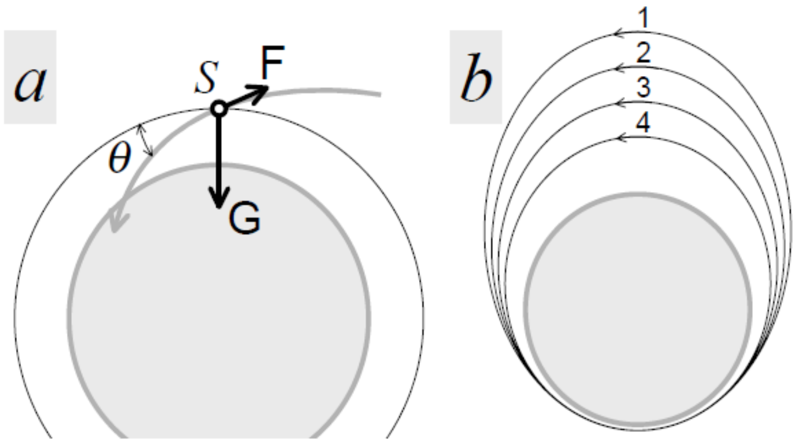
Uvažujme sondu, která se blíží ke druhé planetě po první fázi Hohmannova orbitálním manévru. Vzhledem k planetě se sonda pohybuje zhruba po hyperbolické dráze a má relativní rychlost $\Delta v_A = v_2 - v_A$. Obletem planety může směr svého letu změnit až o $180\,^\circ$, takže změna rychlosti sondy může dosáhnout až $2\Delta v_A$. Vzhledem ke Slunci pak bude mít sonda konečnou rychlost

$$v = v_A + 2\Delta v_A = 2v_2 - v_A = v_2 \left(2 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right).$$

Gravitační asistence se využívá například k urychlení sond směřujících do vzdálených oblastí sluneční soustavy. Sonda, která ztrácí rychlost tím, jak se vzdaluje od Slunce, získá přesným navedením své dráhy ke vhodné planetě až dvojnásobek rozdílu Δv_A její orbitální rychlosti a rychlosti sondy. Například Jupiter může urychlit pozemskou sondu až o $2\Delta v_A \approx 11.4\,\mathrm{km\,/\,s}$. Urychlená sonda pak může pokračovat dál rychlostí $v \approx 18.8\,\mathrm{km\,/\,s}$. Tato rychlost je větší než úniková rychlost $v_2\sqrt{2} \approx 18.5\,\mathrm{km\,/\,s}$ ze sluneční soustavy z oběžné dráhy Jupitera, takže popsaný mechanismus skutečně umožňuje vystřelovat sondy do mezihvězdného prostoru.

8.3.10 Vliv atmosféry na pohyb satelitu

Umělé družice Země obíhají typicky ve výšce 200 km a výše rychlostí kolem 8 km / s, takže jeden oběh se uskuteční zhruba za 90 minut. I když je v těchto výškách střední hustota atmosféry malá, je asi 10^{10} krát menší než u hladiny moře, přesto má odpor vzduchu na pohyb a životnost satelitu velmi významný vliv. Trvalé tření o řídký vzduch způsobuje postupnou ztrátu energie satelitu a jeho nezadržitelný pokles na nižší orbitu. Současně dochází ke zrychlování satelitu a zkracování jeho oběžné doby.



(a) Odporová síla **F** a gravitační síla **G** působící na satelit S. (b) Pokles výstřednosti orbity způsobený odporem vzduchu.

Pohybové rovnice satelitu můžeme vyjádřit v přirozených složkách síly a zrychlení

$$m\dot{v} = -F + G\sin\theta \quad \text{a} \quad \frac{mv^2}{\rho} = G\cos\theta,$$

kde $G = \varkappa m M_Z/r^2$ je tíha satelitu, F odpor vzduchu, ρ poloměr křivosti dráhy a θ sklon dráhy. Z geometrie dále platí $\sin\theta = -\dot{r}/v$. Pro přibližně kruhovou orbitu je sklon θ malý, pak platí aproximace $\theta \approx -\dot{r}/v$, $\rho \approx r$ a pohybové rovnice mají tvar

$$m\dot{v} \approx -F + \varkappa m M_Z \theta/r^2, \qquad mv^2 \approx \varkappa m M_Z/r.$$

Derivací normálové složky pohybové rovnice dostaneme $2\dot{v}/v \approx -\dot{r}/r$, odtud je $\theta \approx -\dot{r}/v \approx 2\dot{v}r/v^2$. Po dosazení do tečné složky pohybové rovnice dostaneme $m\dot{v} \approx F$, neboť $G\theta \approx 2m\dot{v}$. Rychlost tedy skutečně roste úměrně velikosti odporové síly F. To však znamená, že platí také vzorec $\theta \approx 2F/G$. S rostoucím odporem F se úhel poklesu θ zvětšuje a pád satelitu se zrychluje. Při stálém θ platí pro výšku satelitu

$$h \approx h_0 + \dot{r}t \approx h_0 - v\theta t,$$

odtud je doba pádu zhruba

$$t_0 \approx h_0/v\theta. \tag{8.23}$$

V první aproximaci můžeme počítat hustotu atmosféry podle barometrické fomule

$$\rho \approx \rho_0 \mathrm{e}^{-h/H},$$

kde $H \approx 8\,\mathrm{km}$ je charakteristická výška atmosféry. Skutečná hustota atmosféry závisí ovšem výrazně na teplotě, která je dána především denní dobou. Například ve výšce 300 km je ve dne hustota vzduchu asi dvakrát a ve výšce 1000 km až třicetkrát vyšší než v noci. Také proto mohou být naše další výpočty jen hrubé a orientační. Pro satelit o rozměru a a hmotnosti m je podle Newtonova vzorce odporová síla $F \approx \frac{1}{2}\rho v^2 a^2$. Úhel klesání je tedy přibližně dán vzorcem

$$\theta \approx \frac{2F}{G} \approx \frac{\rho v^2 a^2}{m v^2 / r} \approx \frac{\rho_0 a^2 r}{m} \mathrm{e}^{-h/H}.$$

Numericky pro satelit o rozměru $a \approx 1\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m \approx 100\,\mathrm{kg}$ vychází pro $h_1 \approx 100\,\mathrm{km}$ sklon $\theta_1 \approx 0.2$, pro $h_2 \approx 200\,\mathrm{km}$ je sklon $\theta_2 \approx 9 \times 10^{-7}$ a pro $h_3 \approx 300\,\mathrm{km}$ je sklon $\theta_3 \approx 3 \times 10^{-12}$. Příslušná doba života satelitu na oběžné dráze je dána vzorcem (8.23), odtud dostaneme $t_1 \approx 50$ sekund, $t_2 \approx 320$ dní a $t_3 \approx 350\,000$ let. Z těchto hrubých odhadů je zřejmé, proč musí být výška satelitu alespoň dvě stě kilometrů nad povrchem Země. Podobný problém však odpadá například u Měsíce, který žádnou atmosféru nemá.

Je-li oběžná dráha eliptická, projeví se odpor vzduchu především v oblasti perigea. Pokles rychlosti má za následek pokles excentricity, takže dráha satelitu se postupně stává kruhovou.

Přesný popis vlivu odporu atmosféry je obtížný pro neznalost přesné hustoty vzduchu. Odhad zbývající doby života satelitu se proto provádí z měření oběžné doby satelitu. Pokud se oběžná doba satelitu zkrátí o ΔT, pak tomu odpovídá podle třetího Keplerova zákona pokles výšky o $\Delta h = 2r\Delta T/3T$. Satelit proto spadne na zem za čas

$$t_0 \approx \frac{h_0 T}{\Delta h} \approx \frac{3h_0 T^2}{2r\Delta T}.$$

Pokud například naměříme u satelitu ve výšce $h_0 \approx 200\,\mathrm{km}$ nepatrné zkrácení oběžné doby o $\Delta T \approx 1\,\mathrm{s}$, pak to znamená, že satelit klesne při každém oběhu o výšku $\Delta h \approx 800\,\mathrm{m}$. Zbývající doba života satelitu činí už jen $t_0 \approx 15$ dní, tj. asi 250 obletů.

PŘÍKLADY

Příklad 8.2 Popište parametry letu sondy ze Země na Venuši. Poloměr dráhy Venuše je $r_V = 0.723\,\mathrm{AU}$ a Země $r_Z = 1.000\,\mathrm{AU}$.

Řešení: Energeticky nejvýhodnější je dráha, která se v perihéliu dotýká oběžné dráhy Venuše a v aféliu oběžné dráhy Země. Odtud je velká poloosa

$$a = \frac{1}{2}\left(r_Z + r_V\right) \approx \left(0.723 + 1\right)/2 = 0.862\,\mathrm{AU}$$

a excentricita dráhy

$$e = \frac{r_Z - r_V}{r_Z + r_V} \approx 0.161.$$

Pokud jde o impulzy při orbitálním manévru, pak platí

$$\Delta v_P = v_Z\left(\sqrt{\frac{2r_V}{r_Z + r_V}} - 1\right) \approx -2.5\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$$

a

$$\Delta v_A = v_Z\sqrt{\frac{r_Z}{r_V}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_Z}{r_Z + r_V}}\right) \approx -2.7\,\mathrm{km}/\mathrm{s}\,.$$

Znaménka mínus zde znamenají, že je třeba sondu zpomalit a že je třeba také zaměnit význam označení P a A, tj. P značí ve skutečnosti afélium a A perihélium. Aby se tedy sonda dostala k Venuši, musí nejprve zpomalit z $v_Z \approx 29.8\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$, což je orbitální rychlost Země kolem Slunce, na $v_P \approx 27.3\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$, a po době letu odpovídající polovině oběžné periody T

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}T_Z\left(\frac{r_Z + r_V}{2r_Z}\right)^{3/2} \approx 0.400\ \text{roku} \approx 146\ \text{dní}$$

musí znova zpomalit svoji rychlost z $v_A \approx 27.3\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ na $v_V \approx 24.6\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$, což je orbitální rychlost Venuše kolem Slunce.

Příklad 8.3 Za předpokladu, že planeta obíhá po eliptické dráze s velkou poloosou a a excentricitou e, spočtěte jen za pomoci zákonů zachování energii E a moment hybnosti L planety, rychlost planety v perihéliu v_1 a v aféliu v_2 a rychlost planety v ve vzdálenosti r od Slunce.
Řešení: Protože se planeta pohybuje po elipse, je vzdálenost planety od Slunce v perihéliu rovna $r_1 = a\,(1-e)$ a v aféliu $r_2 = a\,(1+e)$. Ze zákona zachování momentu hybnosti

$$L = mr_1v_1 = mr_2v_2$$

vyjádříme rychlost v aféliu

$$v_2 = v_1\frac{1-e}{1+e}.$$

Nyní dosadíme do zákona zachování energie

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\varkappa mM_S}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\varkappa mM_S}{r_2}$$

za r_1, r_2 a v_2, po úpravě odtud dostaneme vzorec pro rychlost planety v perihéliu a aféliu

$$v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{a}\frac{1+e}{1-e}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{a}\frac{1-e}{1+e}}.$$

Jestliže nyní dosadíme do vzorce pro mechanickou energii například $r = r_1$ a $v = v_1$, dostaneme po úpravě výsledek

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa mM_S}{r} = -\frac{\varkappa mM_S}{2a}.$$

Pro orbitální moment podobně dostaneme výsledek

$$L = mr_1v_1 = m\sqrt{\varkappa M_S a\,(1-e^2)} = m\sqrt{\varkappa M_S p}.$$

Příklad 8.6 Jestliže světelné paprsky dopadají na povrch tělesa, působí na něj jistým malým tlakem. Světelný tlak slunečních paprsků je možno v principu využít k pohonu kosmické sondy. Uvažujte sondu, která obíhá kolem Slunce po kruhové dráze o poloměru r_0. V jistém okamžiku sonda rozprostře velkou plachtu o ploše S a automatika zajistí, aby byla plachta po celou dobu orientována kolmo ke slunečním paprskům. Popište pohyb sondy. Úloha je známá jako sluneční plachetnice, F. A. CANDER 1924.

Řešení: Sonda se až do okamžiku rozevření plachty pohybuje rychlostí $v_0 = \sqrt{\varkappa M/r_0}$. Po rozevření plachty působí na sondu vedle přitažlivé gravitační síly $G = \varkappa mM/r^2$ také odpudivý světelný tlak p, který klesá se vzdáleností stejně jako gravitace. Tlaková síla je tedy rovna

$$T = pS = p_0 S r_0^2/r^2,$$

kde p_0 je tlak slunečního záření ve vzdálenosti r_0 od Slunce a S plocha plachty. Celková síla působící na sondu je tedy rovna

$$F = G - T = \varkappa mM/r^2 - p_0 S r_0^2/r^2 = \varkappa mM'/r^2.$$

Síla má nadále charakter coulombovské síly, takže trajektorií sondy bude kuželosečka. Vliv světelného tlaku můžeme chápat jako oslabení gravitační síly Slunce, jako zmenšení hmotnosti Slunce z M na

$$M' = M - p_0 S r_0^2/\varkappa m < M.$$

Když dosadíme za $v_K = \sqrt{\varkappa M'/r_0}$ do vzorců (8.21) a (8.22), dostaneme pro excentricitu a velkou poloosu dráhy kosmické sondy

$$e = \left|1 - \frac{M}{M'}\right| \quad \text{a} \quad a = \frac{r_0}{2 - M/M'}.$$

Odtud je zřejmé, že pro $M/2 < M' < M$ bude trajektorií sondy elipsa, pro $M' = M/2$ bude trajektorií parabola a pro $0 < M' < M/2$ bude trajektorií hyperbola. Pro $M' = 0$ nebude na sondu působit žádná síla a její trajektorií bude proto přímka. Konečně pro $M' < 0$ bude převažovat tlak záření nad gravitací a sonda se bude pohybovat po obrácené hyperbole. Ve všech případech bude perihélium ležet ve vzdálenosti r_0 od Slunce a bude odpovídat místu, kde byla rozevřena plachta.

Tlak světla je sice slabý, ale zvětšením plachty je možno dosáhnout libovolné tlakové síly. Například pro úplné vyrovnání gravitace Slunce je nutno použít plachtu o rozměru asi $36\,\mathrm{m} \times 36\,\mathrm{m}$ na každý kilogram váhy sondy, což je technicky dosažitelné.

Družice Magion a Mgr. Antonín Vítek, CSc.

… KONEC :::….

V prezentaci byla použita část kapitoly 8 z učebnice **Mechanika 2**,
autor: Jiří Bajer , 2008 ISBN 978-80-903958-1-7