

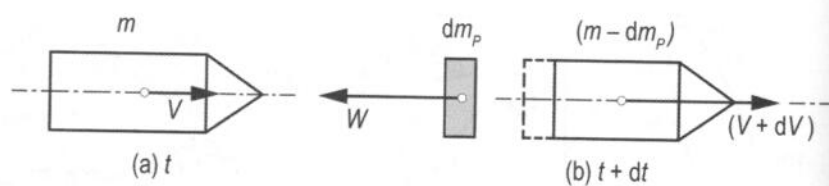
## 4 AKTIVNÍ POHYB KOSMICKÝCH TĚLES. DYNAMIKA POHYBU RAKETY

### 4.1 Pohyb tělesa s proměnlivou hmotností. Vznik reaktivní síly

#### 4.1.1 Meščerského rovnice

Měščerského pohybová rovnice modifikuje druhý Newtonův zákon pro pohyb těles s proměnlivou hmotností. I. V. Meščerskij byl profesorem na Polytechnickém institutu v Petrohradě. Rovnici poprvé publikoval v roce 1897. Naznačme si nyní její odvození.

Uvažujme dva časové okamžiky při pohybu tělesa, které v průběhu pohybu mění svou hmotnost. Tímto tělesem nechť je raketa (obr. 4-1) o hmotnosti  $m$ , z níž proudí spaliny hoření konstantní relativní rychlostí  $W$ .



Obr. 4-1 Pohyb rakety s proměnlivou hmotností.

V čase  $t$  má raketa hybnost

$$H(t) = mV. \quad (4.1)$$

V časovém okamžiku  $(t + dt)$ , po oddělení hmotnosti spálených pohonných látek  $dm_p$  lze hybnost zapsat následovně

$$H(t + dt) = (m - dm_p)(V + dV) + (V - W)dm_p. \quad (4.2)$$

Pak rozdíl hybností za časový přírůstek  $dt$  bude dán výrazem

$$dH = (mV - Vdm_p + mdV - dm_p dV + Vdm_p - Wdm_p) - mV.$$

Jednoduchou úpravou a zanedbáním členu druhého řádu ( $dm_p dV$ ) můžeme změnu hybnosti zapsat takto

$$dH = mdV - Wdm_p. \quad (4.3)$$

Vztáhneme-li uvedený přírůstek hybnosti na uvažovaný časový přírůstek  $dt$ , můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{dH}{dt} = m \frac{dV}{dt} - W \frac{dm_p}{dt}. \quad (4.4)$$

Dle zobecněného druhého Newtonova zákona víme, že časová změna hybnosti je rovná součtu všech vnějších sil působících na dané těleso ve směru vektoru rychlosti  $dH/dt = \sum F_i$ . Zavedeme-li dále skutečnost, že časová změna hmotnosti spalin hoření

se rovná úbytku hmotnosti rakety za stejný čas  $dm_p/dt = -dm/dt$ , můžeme psát konečný tvar Meščerského rovnice ve tvaru

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_i - W \frac{dm}{dt}. \quad (4.5)$$

Rovnici jsme přepsali do tvaru, který koresponduje s druhým Newtonovým zákonem. Z uvedené pohybové rovnice vidíme velmi důležitý poznatek. Nebudou-li na raketu působit žádné vnější síly  $\sum F_i = 0$  (uvažujme bezsilové vzduchoprázdňé pole), bude raketa přesto urychlována reaktivní silou, kterou představuje druhý člen na pravé straně rovnice.

#### 4.1.2 Ciolkovského rovnice. Ideální charakteristická rychlost rakety

K. E. Ciolkovskij se rovněž zabýval pohybem rakety. Uvažoval pohyb v bezsilovém poli za předpokladu konstantní výtokové rychlosti spalin hoření  $W = konst$ , která je rovnoběžná s vektorem rychlosti letu. V bezsilovém poli Ciolkovskij dospěl k pohybové rovnici, která je vlastně zjednodušená Meščerského rovnice. V tomto případě nabývá pohybová rovnice tvar

$$m \frac{dV}{dt} = -W \frac{dm}{dt}. \quad (4.6)$$

##### Ideální charakteristická rychlost jednostupňové rakety

Na základě výše uvedené pohybové rovnice Ciolkovskij jako první řešil úlohu konečné rychlosti dosažitelné raketou s daným množstvím pohonných látek. Tato ideální charakteristická rychlost rakety odpovídá okamžiku, kdy jsou spotřebovány veškeré pohonné látky nesené raketou. Dále budeme tuto rychlost nazývat *finální rychlost*.

Separaci proměnných upravíme rov. (4.6) pro přímou integraci ve zvolených mezích

$$\int_{V_0}^{V_f} dV = -W \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}.$$

Po integraci obdržíme výraz pro finální rychlost ve tvaru

$$V_f = V_0 + W \ln \frac{m_0}{m_f}. \quad (4.7)$$

Respektive, pro nulovou počáteční rychlost ( $V_0 = 0$ ) obdržíme nejčastěji používaný tvar Ciolkovského rovnice pro finální rychlost

$$V_f = W \ln \frac{m_0}{m_f}. \quad (4.8)$$

Tato finální rychlost  $V_f$  se v literatuře často nazývá také jako charakteristická rychlost a označuje se symbolem  $V_{char}$ . V tomto případě se však jedná o ideální charakteristickou rychlost. Zde budeme důsledně rozlišovat mezi touto *ideální charakteristickou rychlostí* dle Ciolkovského rovnice (4.8) a jinou *charakteristickou rychlostí*  $V_{char}$  dle rov. (4.138), respektive dle rov. (4.139), což je rychlost potřebná pro vypuštění kosmického tělesa na kruhovou oběžnou dráhu.

Z výše uvedené Ciolkovského rovnice (4.8) můžeme udělat následující závěry. Dosahovaná finální rychlost závisí přímo úměrně na rychlosti výtokových spalin  $W$  a dále na poměru počáteční a finální hmotnosti. Tento poměr se v některé literatuře

#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

nazývá Ciolkovského číslo. Dosažitelná finální rychlost  $V_f$  nezávisí na spotřebě pohonných látek, ale toliko na množství pohonných látek  $m_p = m_0 - m_f$ . Dále je možno z uvedené rovnice vidět, že pro dosažení vyšší finální rychlosti je mnohem účinnější zvyšovat výtokovou rychlost  $W$ , než poměr hmotností  $m_0/m_f$ .

##### Finální rychlost vícestupňové rakety

Ciolkovskému také přináležejí předpověď výhodnosti vícestupňových raket (Ciolkovskij je nazýval raketovými vlaky). Položme si otázku, jak by bylo možno zvýšit finální rychlost rakety při dané celkové vzletové hmotnosti a daném množství pohonných látek. Tomu můžeme dosáhnout rozdělením původní nosné rakety na několik „jednostupňových raket“, tzv. stupňů. Pro každý z nich platí Ciolkovského rovnice. Pro  $i$ -tý stupeň opět zapíšeme dle Ciolkovského rovnice výraz pro finální rychlost

$$V_{fi} = W_{efi} \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_i. \quad (4.9)$$

Pokud nosná raketa sestává z  $n$  stupňů, pak finální (konečná) rychlost po dohoření veškerých pohonných látek je dána součtem dílčích finálních rychlostí

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} + V_{f3} + \dots + V_{fn} = \sum_{i=1}^n V_{fi}. \quad (4.10)$$

S využitím rov. (4.9), konečnou rychlost vícestupňové nosné rakety zapíšeme

$$V_f = \sum_{i=1}^n W_{efi} \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_i. \quad (4.11)$$

Respektive pro případ, kdy u všech stupňů nosné rakety bude stejná výtoková rychlost spalín ( $W_{ef} = \text{konst.}$ ), zapíšeme rovnici takto

$$V_f = W_{ef} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_i, \quad (4.12)$$

nebo alternativně takto

$$e^{\frac{V_f}{W_{ef}}} = \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_1 \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_2 \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_3 \dots \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_n = \prod_{i=1}^n \left( \frac{m_0}{m_f} \right)_i. \quad (4.13)$$

## 4.2 Síly působící na nosnou raketu

Doposud jsme sledovali pohyb rakety (kosmického tělesa s proměnlivou hmotností) ve zcela bezsilovém poli. Ve skutečnosti však takové pole neexistuje a musíme uvážit účinky vnějších polí.

V obecném případě na kosmické letadlo (nosnou raketu) vzlétající z nějaké planety s centrálním gravitačním polem a s atmosférou (prozatím Země) působí následující hlavní síly:

- Propulzní síla pohonné jednotky - tah  $F$ ,
- Výsledná aerodynamická síla  $R^A$ ,
- Tíhová síla  $G$  (viz 2. kapitola).

### 4.2.1 Propulzní síla - tah

V podkapitole 4.1.1 jsme si objasnili vznik reaktivní síly (tahu) v důsledku časové změny hmotnosti nosné rakety díky vytékajícím spalínům z nějakého propulzního zařízení neseného na palubě. Z Mešcherského rovnice vyplývá, že člen  $(-W dm/dt)$  představuje jen reaktivní složku tahu  $F_R$ . Podívejme se nyní na celkový tah generovaný za přítomnosti atmosféry. Vraťme se opět k Mešcherského rovnici, kterou přepíšeme s uvážením zkráceného zápisu spotřeby pohonných látek  $dm_p/dt = \dot{m}_p$  na tvar

$$m \frac{dV}{dt} = W \dot{m}_p + \sum F_i. \quad (4.14)$$

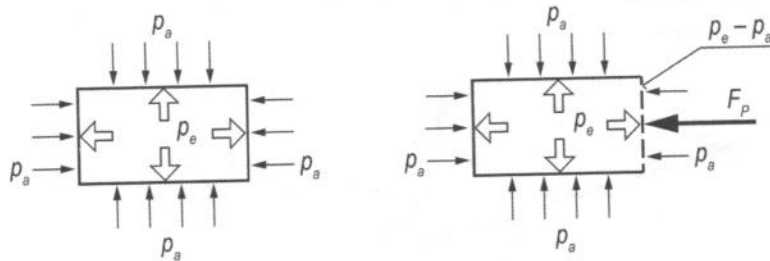
Na pravé straně této pohybové rovnice figurují v podstatě pouze dvě síly. První člen na pravé straně je nám již známý reaktivní tah (dynamická složka tahu)

$$F_R = W \dot{m}_p \quad (4.15)$$

a  $\sum F_i = F_p$ , kde  $F_p$  je tlaková složka tahu (statická složka tahu). Takže pravou stranu rovnice (4.14) tvoří výsledný tah sestávající ze dvou složek

$$F = F_R + F_p. \quad (4.16)$$

Nyní zbývá objasnit tlakovou složku  $F_p$  výsledné tahové síly. Jedná se o projev tlakových účinků atmosféry v rovině ústí výstupní trysky raketového motoru, znázorněných na obr. 4-2.



Obr. 4-2. Objasnění vzniku tlakové složky výsledného tahu raketového motoru.

Tlakovou složku výsledného tahu můžeme vyjádřit jako součin rozdílu tlaků výstupních spalín  $p_e$  a atmosférického tlaku  $p_a$  v řezu výstupní trysky a její plochy  $S_e$

$$F_p = (p_e - p_a) S_e. \quad (4.17)$$

Pak výsledný výraz pro tahovou sílu s vlivem atmosféry je dán následovně

$$F = W \dot{m}_p + (p_e - p_a) S_e. \quad (4.18)$$

Vytkneme-li z uvedené rovnice časovou spotřebu pohonných látek  $\dot{m}_p$  nabude rovnice následující tvar

$$F = \dot{m}_p \left[ W + \frac{(p_e - p_a) S_e}{\dot{m}_p} \right]. \quad (4.19)$$

V této rovnici pak výraz v hranaté závorce představuje tzv. efektivní výtokovou rychlost spalín hoření

$$W_{ef} = W + \frac{(p_e - p_a) S_e}{\dot{m}_p}. \quad (4.20)$$

Zavedením efektivní výtokové rychlosti můžeme výraz pro výsledný tah zapisovat pouze jako součin efektivní výtokové rychlosti a spotřeby pohonných látek

$$F = W_{ef} \dot{m}_p. \quad (4.21)$$

Jak je patrné z rov. (4.18), výsledný tah se díky atmosférickému tlaku  $p_a$  mění s výškou. Proto se často uvádí tah v nulové výšce na startovací rampě (rampový tah) a zavádí se funkční závislost změny tahu s výškou. Zavedeme-li do vztahu pro tah dle rovnice (4.18) statický tlak v nulové výšce  $p_0$ , lze tah zapsat ve tvaru

$$F = W \dot{m}_p + (p_e - p_0) S_e + (p_0 - p_a) S_e. \quad (4.22)$$

Pak můžeme výsledný tah vyjádřit jako součet dvou členů

$$F = F_0 + \Delta F, \quad (4.23)$$

kde první člen odpovídá tahu v nulové výšce

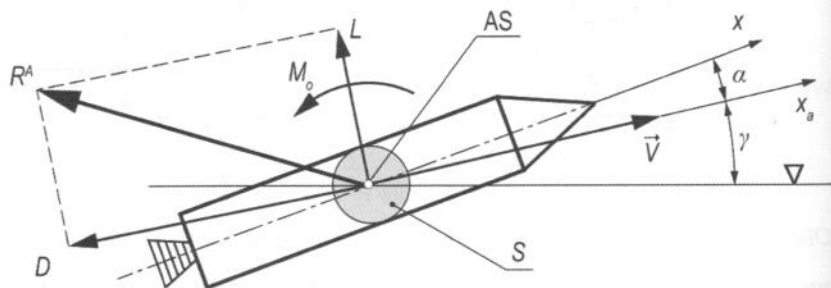
$$F_0 = W \dot{m}_p + (p_e - p_0) S_e, \quad (4.24)$$

a druhý člen je tzv. *barometrický přírůstek tahu*, který roste s výškou letu

$$\Delta F = p_0 S_e \left( 1 - \frac{p_a}{p_0} \right). \quad (4.25)$$

#### 4.2.2 Aerodynamické síly

Aerodynamické síly působící na kosmické letadlo (např. nosnou raketu) vznikají vzájemnou interakcí nosné rakety a vzduchu (obecně plynného prostředí) při jejich relativním pohybu.



Obr. 4-3 Aerodynamické síly působící na nosnou raketu při letu v atmosféře.

Pokud uvažujeme symetrický let kosmického letadla (bez vybočení – vektor rychlosti leží v rovině souměrnosti), pak na něj působí aerodynamický vztlak  $L$ , aerodynamický odpor  $D$  a klopivý moment  $M$ , který vztahujeme k těžišti kosmického letadla. Jak je patrné z obr. 4-3, vztlak a odpor jsou složkami výsledné aerodynamické síly  $R^A$ . Výsledná aerodynamická síla působí v bodě, který se nazývá působíště tlaku. Poloha tohoto bodu se mění s režimem letu. Proto v podzvukové oblasti rychlostí uvažujeme, že výslednice aerodynamických sil působí v tzv. aerodynamickém středu nosné rakety (obr. 4-3). Poloha aerodynamického středu závisí jen na vnější geometrii kosmického letadla. Pro konkrétní konfiguraci kosmického letadla je to pevně daný vztahný bod, k němuž je součinitel klopivého momentu konstantní, nezávislý na úhlu náběhu. V oblasti nadzvukových a hypersonických rychlostí se tento bod nazývá neutrálním bodem. Jeho poloha již není konstantní, ale závisí na míře vlivu stlačitelnosti vzduchu.

tedy na Machově čísle. Polohy aerodynamického středu, respektive neutrálního bodu a těžiště se liší, v důsledku čehož vzniká klopivý moment  $M$ , který vztahujeme k těžišti kosmického letadla.  $M_0$  na obr. 4-3 je klopivý moment k AS při nulovém vztaku.

Aerodynamické síly a klopivý moment vyjadřujeme standardně v následující formě

$$R^A = C_R^A \frac{1}{2} \rho V^2 S, \quad (4.26)$$

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S, \quad (4.27)$$

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 S, \quad (4.28)$$

$$M = C_m \frac{1}{2} \rho V^2 S l. \quad (4.29)$$

Jak je vidět z uvedených vztahů, aerodynamické síly a klopivý moment jsou přímo závislé na hustotě vzduchu  $\rho$ , kvadrátu rychlosti letu  $V$ . Velikost tělesa je vyjádřena vztažnou plochou  $S$ . U nosných raket se za vztažnou plochu obvykle bere plocha maximálního příčného průřezu trupu. U raketoplánů je to půdorysná plocha křidel. Ve vztahu pro klopivý moment  $M$  se navíc používá smluvně zvolená vztažná délka  $l$ , kterou u nosných raket může být buď délka rakety, nebo průměr trupu rakety. U kosmických letadel s nosnými plochami (raketoplány) se za vztažnou délku volí tzv. střední aerodynamická tětiva křídla.

Důležitou roli hraje tvar kosmického letadla a jeho poloha vůči směru proudu vzduchu, která je definována úhlem náběhu  $\alpha$ . Úhel náběhu je úhel mezi podélnou osou kosmického letadla a vektorem rychlosti letu (obr. 4-3). Oba zmíněné vlivy jsou ve výše uvedených vztazích vyjádřeny pomocí tzv. bezrozměrových součinitelů příslušných sil  $C_R^A$ ,  $C_L$ ,  $C_D$  a součinitele klopivého momentu  $C_m$ . Kromě závislosti na úhlu náběhu jsou tyto součinitele dále ovlivňovány stlačitelností vzduchu a vazkostí vzduchu. Vliv stlačitelnosti vzduchu je parametricky vyjádřen pomocí Machova čísla, což je poměr skutečné rychlosti letu vůči vzduchu  $V$  a lokální rychlosti zvuku  $a$

$$M = \frac{V}{a}. \quad (4.30)$$

Vliv vazkosti vzduchu je vyjádřen dalším bezrozměrovým číslem, Reynoldsovým číslem

$$Re = \frac{Vl}{\nu}, \quad (4.31)$$

kde  $\nu$  je kinematická vazkost vzduchu. Takže aerodynamické součinitele kosmického letadla jsou obecně funkcí tvaru tělesa, úhlu náběhu a uvedených bezrozměrových podobnostních čísel  $(C_R^A, C_L, C_D, C_m) = f(\text{tvar}, \alpha, M, Re)$ . Nutno však říci, že v různých oblastech rychlostí a výšek se na aerodynamických silách a momentech uvedené vlivy podílí v různé míře. Např. vliv vazkosti je zanedbatelný při vyšších rychlostech a vliv stlačitelnosti vzduchu je zanedbatelný naopak při nízkých podzvukových rychlostech. Nicméně, kosmické letadlo prolétává při svém vzletu i při návratu nejen vrstvami atmosféry o různé hustotě, ale také různými rychlostmi. Zejména druhá zmíněná skutečnost se projevuje na generování aerodynamických sil dle různých zákonů aerodynamiky. Jiné platí pro podzvukovou aerodynamiku a jiné pro supersonickou a

#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

hypersonickou aerodynamiku. Dle rychlosti obtékání těles vyjádřené Machovým číslem můžeme aerodynamiku rozdělit na aerodynamiku:

- a) subsonických (podzvukových) rychlostí - bez vlivu stlačitelnosti  $0 < M < 0,5$ ,  
- s vlivem stlačitelnosti  $0,5 < M < 0,8$ ,
- b) transsonických rychlostí  $0,8 < M < 1,2$ ,
- c) supersonických (nadzvukových) rychlostí  $1,2 < M < 5$ ,
- d) hypersonických rychlostí  $M > 5$ .

Běžně předpokládáme, že proudové pole je spojitě prostředí. Avšak ve vyšších vrstvách atmosféry, kde je již natolik zředěný vzduch nelze uvedený předpoklad akceptovat. Zde je třeba na proudové pole pohlížet jako na nespojitě prostředí. Jedná se již o molekulární proudění, kde se uplatňuje Newtonova teorie obtékání. Tyto problémy patří do aerodynamiky zředěných plynů, tzv. supraaerodynamiky. Pro tuto oblast proudění je charakteristická skutečnost, že střední délka volné dráhy molekul vzduchu  $\lambda_m$  je větší než charakteristická délka obtékaného tělesa  $l$ . Charakter obtékání je dán Knudsenovým číslem, které je definováno právě jako poměr střední délky volné dráhy molekul a charakteristické délky tělesa

$$Kn = \frac{\lambda_m}{l}. \quad (4.32)$$

Na základě poznatků kinetické teorie plynů, střední délku volné dráhy molekul lze dle [50] vyjádřit vztahem

$$\lambda_m = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{\pi k}{2}}.$$

Využitím uvedeného vztahu pro  $\lambda_m$ , výrazu (4.30) pro Machovo číslo a rov. (4.31) pro Reynoldsovo číslo, lze Knudsenovo číslo zapsat následovně

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \frac{M}{Re}. \quad (4.33)$$

Protože analýza proudění a přenosu tepla v mezní vrstvě je zvláště důležitá při řešení návratových problémů a s nimi spojeného aerodynamického ohřevu, volí se obvykle v definici Knudsenova čísla za vztažnou délku právě tloušťka mezní vrstvy  $\delta$  (pozor, u Reynoldsova čísla se používá jiná vztažná délka). Z tohoto důvodu je třeba modifikovat definici Knudsenova čísla (4.33) na následující tvar

$$Kn_\delta = \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \frac{M}{Re} \frac{l}{\delta}. \quad (4.34)$$

Pomocí takto definovaného Knudsenova čísla můžeme proudění vzduchu rozdělit na tři charakteristické oblasti.:

- a) Pokud je Knudsenovo číslo  $Kn_\delta \leq 0,01$ , tj. volná dráha molekul vzduchu je zanedbatelně malá vůči tloušťce mezní vrstvy, pak se jedná o obtékání ve spojitěm prostředí, tak jak jej běžně uvažujeme v aerodynamice. Průběh rychlostí (rychlostní profil) v mezní vrstvě  $u(y)$  je znázorněn na obr. 4-4, křivka (a). Rychlost na stěně je rovna nule a roste se vzdáleností od stěny. Na horní hranici mezní vrstvy rychlost je rovna rychlosti vnějšího proudu  $V_\infty$ .
- b) V případě, že Knudsenovo číslo nabývá hodnot  $0,01 < Kn_\delta \leq 1$ , pak se jedná o tzv. proudění se skluzem částic na povrchu obtékaného tělesa. Rychlost částic vzduchu

é Machovým číslem

- $0 < M < 0,5,$
- $0,5 < M < 0,8,$
- $0,8 < M < 1,2,$
- $1,2 < M < 5,$
- $M > 5.$

ve vyšších vrstvách  
lad akceptovat. Zde  
dí. Jedná se již o  
ní. Tyto problémy  
y. Pro tuto oblast  
y molekul vzduchu  
er obtékání je dán  
í délky volné dráhy

(4.32)

ny molekul lze dle

o a rov. (4.31) pro

(4.33)

důležitá při řešení  
u, volí se obvykle  
vrstvy  $\delta$  (pozor, u  
třeba modifikovat

(4.34)

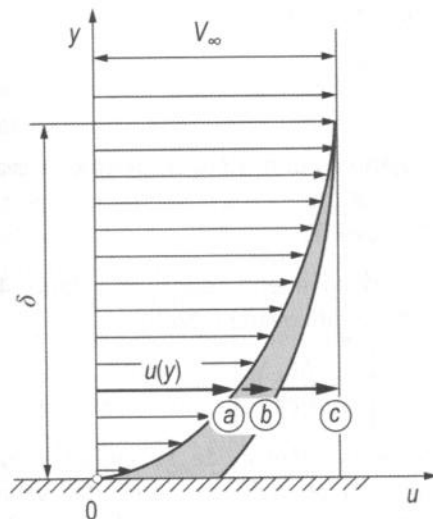
chu rozdělit na tři

lekul vzduchu je  
ékání ve spojitém  
chlostí (rychlostní  
chlost na stěně je  
vrstvy rychlost je

ak se jedná o tzv.  
st částic vzduchu

se na povrchu tělesa neubrzdí na nulovou rychlost, ale mají určitou konečnou rychlost. Rychlostní profil v mezní vrstvě pro tento typ proudění je na obr. 4-4 znázorněn křivkou (b).

- c) Je-li Knudsenovo číslo  $Kn_\delta > 1$  a více, pak to znamená, že volná dráha molekul vzduchu je větší jak tloušťka mezní vrstvy. Jedná se již o molekulární proudění. A při  $Kn_\delta > 10$  nabývá proudové pole charakter proudění již ve značně zředěném nespojitém prostředí. Rychlostní profil nevykazuje žádnou změnu, jak je znázorněno čarou (c) na obr. 4-4. Mezní vrstva v podstatě neexistuje.



Obr. 4-4 Rychlostní profily v různých mezních vrstvách.

#### Aerodynamická polára

Aerodynamické charakteristiky reálného kosmického letadla vyjadřujeme pomocí aerodynamické poláry, což je závislost mezi součinitelem vzlaku a odporu. Zde budeme používat analytickou náhradní aerodynamickou poláru ve tvaru

$$C_D = C_{D0} + C_{Di} = C_{D0} + kC_L^2. \quad (4.35)$$

Celkový součinitel odporu sestává ze dvou částí. První člen je součinitel odporu při nulovém součiniteli vzlaku (nulovém absolutním úhlu náběhu). Druhý člen je součinitel indukovaného odporu, který je funkcí součinitele vzlaku  $C_{Di} = kC_L^2$ . Koeficient  $k$  je faktor indukovaného odporu (u nosných raket vírového odporu), který závisí na tvaru kosmického letadla.

Z rov. (4.35) je patrné, že pro daný součinitel vzlaku je analytická aerodynamická polára dána dvěma parametry  $C_{D0}$  a  $k$ . Pro další řešení vyloučíme faktor indukovaného odporu  $k$  a zavedeme aerodynamickou jemnost kosmického letadla, což je poměr součinitele vzlaku a součinitele odporu

$$K = \frac{C_L}{C_D}. \quad (4.36)$$

Aerodynamická jemnost kosmického letadla hraje důležitou roli při řešení pohybu kosmických letadel během letu atmosférou. Aerodynamická jemnost se nazývá také jako klouzavost. Hledejme nyní režim letu, definovaný součinitelem vzlaku  $C_L^*$ , při



#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

němž nabývá aerodynamická jemnost maximální hodnotu. S využitím rov. (4.35) sestavíme výraz pro klouzavost ve tvaru

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + kC_L^2}. \quad (4.37)$$

Derivujeme rov. (4.37) a derivaci položíme rovnu nule

$$\frac{\partial}{\partial C_L} \left( \frac{C_L}{C_D} \right) = \frac{C_{D0} + kC_L^2 - 2kC_L^2}{(C_{D0} + kC_L^2)^2} = 0,$$

odkud součinitel při maximální klouzavosti je dán výrazem

$$C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}, \quad (4.38)$$

respektive faktor indukovaného odporu vyjádřený pomocí  $C_L^*$  zapíšeme ve tvaru

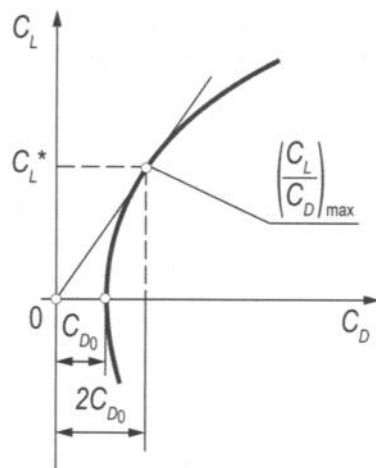
$$k = \frac{C_{D0}}{(C_L^*)^2}. \quad (4.39)$$

Nyní pomocí rov. (4.39) vyloučíme faktor indukovaného odporu ze vztahu (4.35), čímž obdržíme analytickou poláru v následujícím modifikovaném tvaru

$$C_D = C_{D0} \left[ 1 + \left( \frac{C_L}{C_L^*} \right)^2 \right]. \quad (4.40)$$

Pro analytickou poláru je charakteristická skutečnost, že součinitel indukovaného odporu  $C_{Di}$  je právě roven součiniteli odporu při nulovém součiniteli vztlaku  $C_{D0}$  = výsledný součinitel odporu  $C_D^*$  v režimu maximální klouzavosti (při  $C_L = C_L^*$ ) je roven dvojnásobku  $C_{D0}$ , (obr. 4-5). O tom se můžeme přesvědčit dosazením  $C_L^*$  dle rov. (4.38) do vztahu (4.35)

$$C_D^* = C_{D0} + k \frac{C_{D0}}{k} = C_{D0} + C_{D0} = 2C_{D0}. \quad (4.41)$$



Obr. 4-5 Analytická náhradní aerodynamická polára kosmického letadla.

Aerodynamická jemnost kosmického letadla je dána vztahem

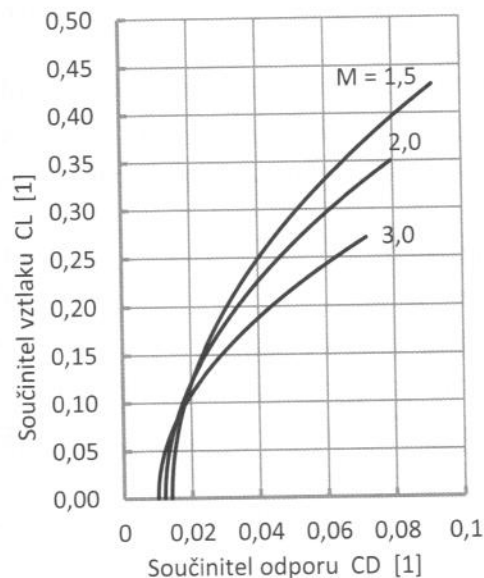
$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} \left[ 1 + \left( \frac{C_L}{C_L^*} \right)^2 \right]} \quad (4.42)$$

Analytický výraz pro maximální aerodynamickou jemnost kosmického letadla získáme buď podílem odpovídajících součinitelů vzlaku a odporu nebo přímým dosazením za součinitele  $C_L = C_L^*$  do rov. (4.42)

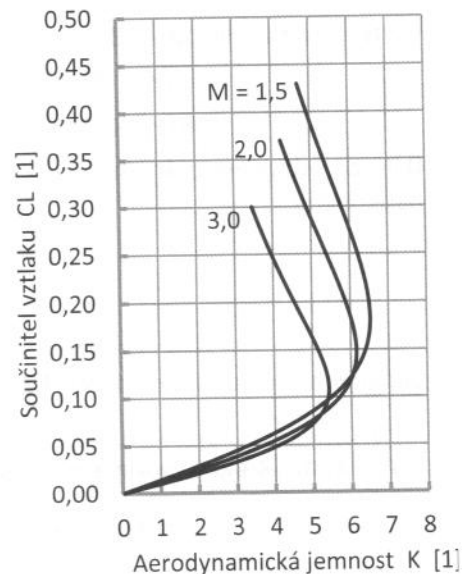
$$\left( \frac{C_L}{C_D} \right)_{max} = \frac{C_L^*}{C_D^*} = \frac{C_L^*}{2C_{D0}} \quad (4.43)$$

Nyní máme modifikované aerodynamické charakteristiky vyjádřené pomocí dvou parametrů ( $C_{D0}$ ,  $C_L^*$ ).

Pro představu je na obr. 4-6 uveden typický tvar aerodynamické poláry hypotetického supersonického letadla. Typický průběh závislosti aerodynamické jemnosti na režimu letu, definovaném součinitelem vzlaku, je uveden pro stejné letadlo na obr. 4-7. Na rozdíl od klasických atmosférických letadel je aerodynamická jemnost kosmických letadel při stejných úhlech náběhu mnohem menší. Nosnou raketu můžeme v podstatě považovat za aerodynamicky nenosné těleso, tím máme na mysli, že ve většině režimů letu převažuje odpor. U raket přistupuje ještě další složka odporu, tzv. dnový odpor. Dnový odpor vzniká tím, že částice vzduchu nejsou sto plynule obtékat zadní část (dno) rakety a dochází k jejich odtrhávání. Vzniká podtlak, který vede k dalšímu nárůstu celkového odporu. Při vysokých rychlostech se v důsledku stlačitelnosti vzduchu objevují v proudovém poli rázové vlny. Jejich přítomnost vede rovněž k růstu odporu. Tuto složku odporu nazýváme *vlnový odpor*.



Obr. 4-6 Typická aerodynamická polára v supersonické oblasti.



Obr. 4-7 Závislost aerodynamické jemnosti na součiniteli vzlaku.

Výše uvedené vztahy pro aerodynamické součinitele jsou platné pro subsonické a supersonické rychlosti. Pro hypersonické rychlosti se používá mírně modifikovaný vztah pro aerodynamickou poláru. Na základě empirických zkušeností [57] se druhý člen pro indukovaný součinitel odporu v rov. (4.35) vyjadřuje ve tvaru  $C_{Di} = kC_L^n$ , kde exponent  $n$  je dán vztahem

$$n = 2,235 - 0,09567(C_L/C_D)_{max}. \quad (4.44)$$

V dalším však budeme pracovat s původně uvedenou polárou dle rov. (4.35). Pro výpočet aerodynamických součinitelů, které závisí na úhlu náběhu, se v hypersonické oblasti používají vztahy přímo vyjadřované v závislosti na úhlu náběhu ve tvaru, [4]

$$C_L = A \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad (4.45)$$

$$C_D = C_{D0} + B \sin^3 \alpha, \quad (4.46)$$

kde konstanty  $A$  a  $B$  jsou obvykle stanoveny empiricky. Při hypersonických rychlostech převyšujících  $M > 7$  některé z aerodynamických charakteristik již poněkud méně závisí na Machově čísle. Například součinitel odporu je prakticky konstantní. Vliv Reynoldsova čísla se projevuje především na aerodynamický odpor, vztlak je ovlivněn zanedbatelně. V hypersonické oblasti rychlostí máme co do činění s dalšími jevy spojenými s konvektivním přenosem tepla v mezní vrstvě a radiačním vlivem rázové vlny. Při podstatně vyšších rychlostech dochází k ionizaci vzduchu a problém komplikují různé chemické procesy.

Podrobnější analýza aerodynamických charakteristik překračuje rámec této knihy, a proto odkazují čtenáře na běžně dostupné učebnice aerodynamiky, [2], [3].

### 4.3 Obecné pohybové rovnice nosné rakety

Zapišme pohybové silové rovnice v polárních souřadnicích  $(r, \theta)$  ve směru radiály  $r$  a transverzály  $x_\theta$  dle obr. 4-8

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \sin(\alpha_F + \gamma) - D \sin \gamma + L \cos \gamma - G, \quad (4.47)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F \cos(\alpha_F + \gamma) - D \cos \gamma - L \sin \gamma. \quad (4.48)$$

Dále potřebujeme znát kinematické vazby, které můžeme v souladu s obr. 4-8 zapsat následovně

$$V \cos \gamma = r\dot{\theta}, \quad (4.49)$$

$$V \sin \gamma = \dot{r}, \quad (4.50)$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2. \quad (4.51)$$

Derivujme nyní rovnici rychlosti (4.51). Po derivaci a drobné úpravě obdržíme výraz

$$V\dot{V} = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}. \quad (4.52)$$

Nyní si z rov. (4.47) vyjádříme výraz pro  $\ddot{r}$

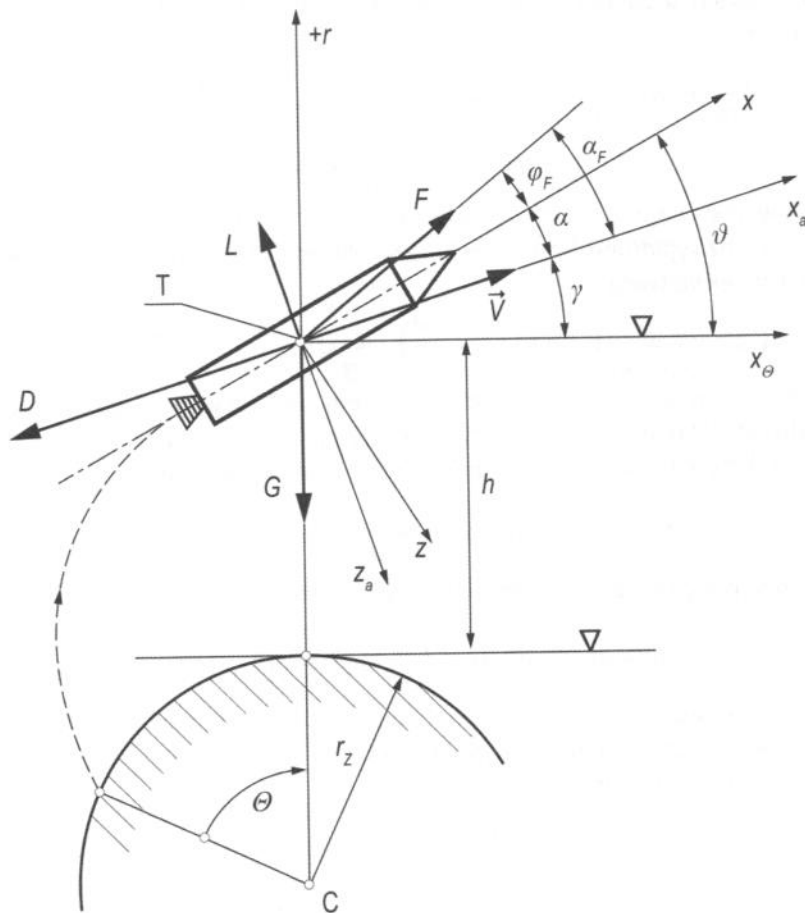
$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{F}{m} \sin(\alpha_F + \gamma) - \frac{D}{m} \sin \gamma + \frac{L}{m} \cos \gamma - g \quad (4.53)$$

a z rov. (4.48) nalezneme vztah pro  $r\ddot{\theta}$

$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} + \frac{F}{m} \cos(\alpha_F + \gamma) - \frac{D}{m} \cos \gamma - \frac{L}{m} \sin \gamma. \quad (4.54)$$

Oba uvedené výrazy dosadíme do rov. (4.52) a po úpravě získáme mezivýsledek ve tvaru

$$V\dot{V} = \dot{r} \left[ r\dot{\theta}^2 + \frac{F}{m} \sin(\alpha_F + \gamma) - \frac{D}{m} \sin \gamma + \frac{L}{m} \cos \gamma - g \right] + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r\dot{\theta} \left[ -2\dot{r}\dot{\theta} + \frac{F}{m} \cos(\alpha_F + \gamma) - \frac{D}{m} \cos \gamma - \frac{L}{m} \sin \gamma \right].$$



Obr. 4-8 Síly působící na nosnou raketu za letu.

Dosadíme-li ještě za  $\dot{r}$  a  $r\dot{\theta}$  dle rov. (4.49) a (4.50) obdržíme po úpravě výraz pro lineární zrychlení ve směru osy  $x_a$  aerodynamické souřadnicové soustavy ve tvaru

$$\dot{V} = \frac{F}{m} [\sin \gamma \sin(\alpha_F + \gamma) + \cos \gamma \cos(\alpha_F + \gamma)] - \frac{D}{m} - g \sin \gamma.$$

Nakonec přenásobením celé rovnice hmotností a uplatněním goniometrických pravidel pro funkci kosinu rozdílů dvou úhlů  $[\sin \gamma \sin(\alpha_F + \gamma) + \cos \gamma \cos(\alpha_F + \gamma) = \cos \alpha_F]$  jsme dospěli k první pohybové rovnici ve tvaru, který bychom v tomto případě mohli

získat uplatněním druhého Newtonova zákona a přímým zápisem složek vnějších sil v aerodynamické souřadnicové soustavě  $(x_a, y_a, z_a)$

$$m\dot{V} = F \cos \alpha_F - D - mg \sin \gamma. \quad (4.55)$$

Pro odvození druhé pohybové rovnice nejprve derivujeme rov. (4.49)

$$\dot{V} \cos \gamma - V \sin \gamma \dot{\gamma} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}.$$

Nyní za lineární zrychlení  $\dot{V}$  na levé straně uvedené rovnice dosadíme dle pohybové rovnice (4.55) a za druhý člen  $r\ddot{\theta}$  na pravé straně dosadíme dle rov. (4.54), čímž obdržíme

$$\begin{aligned} \left( \frac{F}{m} \cos \alpha_F - \frac{D}{m} - g \sin \gamma \right) \cos \gamma - V \sin \gamma \dot{\gamma} \\ = \dot{r}\dot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} + \frac{F}{m} \cos(\alpha_F + \gamma) - \frac{D}{m} \cos \gamma - \frac{L}{m} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Podobně jako v předchozím případě použijeme kinematických vazeb (4.49) a (4.50), pomocí nichž vyjádříme  $\dot{r}$  a  $\dot{\theta}$  a po úpravě přítomných goniometrických členů obdržíme mezivýsledek ve tvaru

$$-V \sin \gamma \dot{\gamma} = -(V \sin \gamma) \left( \frac{V \cos \gamma}{r} \right) - \frac{F}{m} \sin \alpha_F \sin \gamma - \frac{L}{m} \sin \gamma + g \sin \gamma \cos \gamma.$$

Nakonec celou rovnici přenásobíme poměrem  $(m/\sin \gamma)$  a za vzdálenost  $r$  od centra přitažlivosti dosadíme  $r = r_z + h$ . Po poslední úpravě obdržíme druhou pohybovou rovnici rakety v aerodynamické souřadnicové soustavě ve tvaru

$$-mV\dot{\gamma} = -F \sin \alpha_F - L + mg \cos \gamma - \frac{mV^2 \cos \gamma}{(r_z + h)}. \quad (4.56)$$

Uvedenou pohybovou rovnici můžeme zapsat v alternativním tvaru rovněž takto

$$-mV\dot{\gamma} = -F \sin \alpha_F - L + mg \cos \gamma \left[ 1 - \frac{V^2}{g(r_z + h)} \right]. \quad (4.57)$$

V mechanice letu se velmi často používají pohybové rovnice v bezrozměrovém tvaru. Bezrozměrový tvar pohybových rovnic (4.55) a (4.57) získáme dělením obou rovnic tíhovou silou, čímž obdržíme

$$\frac{\dot{V}}{g} = n_{xa} - \sin \gamma, \quad (4.58)$$

$$-\frac{V}{g} \dot{\gamma} = n_{za} + \cos \gamma \left[ 1 - \frac{V^2}{g(r_z + h)} \right], \quad (4.59)$$

kde  $n_{xa}$  je odporový násobek zatížení (kladný v kladném smyslu osy  $x_a$ )

$$n_{xa} = \frac{F \cos \alpha_F - D}{G} \quad (4.60)$$

a  $n_{za}$  je vztakový násobek zatížení (kladný v kladném smyslu osy  $z_a$ )

$$n_{za} = -\frac{F \sin \alpha_F + L}{G}. \quad (4.61)$$

Zde je třeba připomenout, že v běžné praxi se násobek zatížení ve směru vztakové osy ( $z_a$ ) definuje zjednodušeně pouze jako poměr vztlaku a tíhové síly  $n = L/G$ . Přitom se znaménko řídí znaménkem vztlaku  $L$ . Pro malé úhly  $\alpha_F$  tedy platí, že  $n \doteq -n_{za}$ .

## 4.4 Letové výkony nosné rakety

### 4.4.1 Základní pojmy a potřebné vztahy pro řešení letových výkonů nosné rakety

Z Ciolkovského rovnice je zřejmé, že dosažitelná (finální) rychlost letu nosné rakety závisí, kromě poměru ( $m_0/m_f$ ), také na výtokové rychlosti spalin  $W$ , která může být považována za hlavní parametr pro posuzování efektivity reaktivní propulze. V raketové technice se však spíše používají pojmy jako je celkový impuls nebo častěji specifický impuls.

#### Celkový a specifický impuls

Celkový impuls je definován vztahem

$$I = \int_0^t F dt. \quad (4.62)$$

Respektive, pro konstantní tah je celkový impuls dán následujícím výrazem

$$I = F \int_0^t dt = Ft. \quad (4.63)$$

Celkový (totální) impuls  $I$  je úměrný celkové energii uvolněné spálením pohonných látek v propulzní soustavě nosné rakety.

Specifický impuls  $I_{sp}$  je obecně definován jako totální impuls v  $[Ns]$  dělený množstvím pohonných látek v  $[kg]$

$$I_{sp} = \frac{I}{m_p} = \frac{\int_0^t F dt}{\int_0^t \dot{m}_p dt}, \quad (4.64)$$

kde jsme označili spotřebu pohonných látek za jednotku času  $\dot{m}_p = dm_p/dt$ . Pro konstantní tah i spotřebu pohonných látek bude specifický impuls dán vztahem

$$I_{sp} = \frac{F \int_0^t dt}{\dot{m}_p \int_0^t dt} = \frac{Ft}{\dot{m}_p t} = \frac{F}{\dot{m}_p}. \quad (4.65)$$

Takže v tomto případě je specifický impuls definován jako poměr tahu a spotřeby pohonných látek za jednotku času (sekundové spotřeby). Z uvedeného vztahu vyplývá, že v soustavě SI má specifický impuls rozměr  $[Nskg^{-1}] = [ms^{-1}]$ , což znamená, že specifický impuls má rozměr rychlosti. Na tomto místě je nutno říci, že v anglosaské literatuře je specifický impuls definován vztahem  $I_{sp} = F/(g_0 \dot{m}_p)$  a uvádí se v  $[s]$ .

Dosaďme nyní výraz pro tah (4.18) do vztahu pro specifický impuls (4.65) a upravme následovně

$$I_{sp} = \frac{W \dot{m}_p + (p_e - p_a) S_e}{\dot{m}_p} = W + \frac{(p_e - p_a) S_e}{\dot{m}_p}. \quad (4.66)$$

Poslední výraz v rov. (4.66) představuje efektivní výtokovou rychlost spalin, kterou jsme stanovili výše a je dána rovnicí (4.20). Takže ze vztahu (4.66) vyplývá, že specifický impuls se rovná efektivní výtokové rychlosti

$$I_{sp} = W_{ef} [ms^{-1}]. \quad (4.67)$$

#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

Zároveň je z rov. (4.66) patrné, že specifický impuls  $I_{sp}$  je roven skutečné výtoku rychlosti  $W$  pouze v případě rovnosti tlaků v rovině ústí výstupní trysky ( $p_e = p_a$ ).

##### Doba hoření

Uvědomíme-li si, že spotřebou pohonných látek klesá hmotnost nosné rakety, platí, že časová změna množství pohonných látek se rovná záporně vzaté časové změně hmotnosti nosné rakety

$$\frac{dm_p}{dt} = -\frac{dm}{dt}, \quad \text{respektive zkráceně } \dot{m}_p = -\dot{m}.$$

Pak výraz pro tah (4.21) můžeme s přihlédnutím k rov. (4.67) zapsat

$$F = -I_{sp} \frac{dm}{dt}. \quad (4.68)$$

Separací proměnných upravíme rovnici (4.68) k přímé integraci v následujících integračních mezích za předpokladu konstantního tahu i specifického impulsu

$$\int_{t_0}^{t_f} dt = -\frac{I_{sp}}{F} \int_{m_0}^{m_f} dm.$$

Po integraci a dosazení mezí můžeme stanovit dobu, během níž jsou spotřebovány všechny pohonné látky

$$\Delta t = t_f - t_0 = \frac{I_{sp}}{F} (m_0 - m_f) = \frac{I_{sp}}{F} m_0 \left(1 - \frac{m_f}{m_0}\right). \quad (4.69)$$

##### Rychlost letu nosné rakety. Gravitační a aerodynamické ztráty

Vraťme se k pohybové rovnici nosné rakety (4.55), v níž uvážíme, že úhel  $\alpha_F$  je malý tudíž  $\cos \alpha_F \doteq 1$ . V rovnici dosadíme za tah  $F$  dle rov. (4.68) a celou ji dělíme hmotností, tím obdržíme

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I_{sp}}{m} \frac{dm}{dt} - \frac{D}{m} - g \sin \gamma.$$

Separací proměnných upravíme rovnici pro přímou integraci v příslušných integračních mezích

$$\int_{V_0}^V dV = -I_{sp} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} - \int_{t_0}^t \frac{D}{m} dt - \int_{t_0}^t g \sin \gamma dt.$$

Po integraci uvedené rovnice s uvážením  $V_0 = 0$  na levé straně rovnice obdržíme rychlost v čase  $t$  výraz

$$V(t) = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m(t)} - \Delta V_D(t) - \Delta V_G(t), \quad (4.70)$$

kde jsme zavedli označení pro ztráty způsobené aerodynamickým odporem

$$\Delta V_D(t) = \int_{t_0}^t \frac{D}{m(t)} dt \quad (4.71)$$

a gravitační ztráty představuje výraz

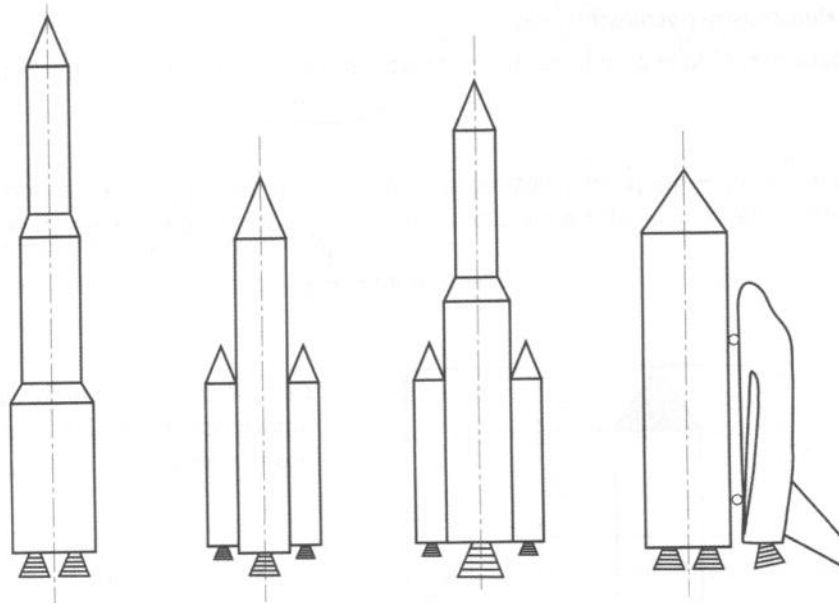
$$\Delta V_G(t) = \int_{t_0}^t g(t) \sin \gamma(t) dt. \quad (4.72)$$

V řadě případů nejsou zanedbatelné ani ztráty způsobené řízením nosných raket během letu. Tudiž výše uvedené ztráty je třeba zvýšit ještě o položku ztrát řízením  $\Delta V_C(t)$ .

#### 4.4.2 Koncepční uspořádání a hmotnostní charakteristiky nosných raket

V průběhu vývoje kosmické dopravní techniky se koncepce nosných raket ustálila na několika typických uspořádáních. Mimo jednostupňového provedení se častěji používají vícestupňové nosné rakety, jejichž koncepční uspořádání se posuzuje podle řazení stupňů. Běžně se používá následující řazení uvedené na obr. 4-9: sériové řazení, paralelní řazení a jejich kombinace, včetně kombinace nosné rakety a raketoplánu.

Další podrobnosti o kosmické raketové technice však zde nebudeme rozebírat, neboť tyto problémy jdou mimo vytčený rámec této knihy. Zmíníme se jen o určitých hmotnostních parametrech nosných raket, které úzce souvisí s řešením jejich pohybu a letovými výkony. Podívejme se nejprve na hmotnostní charakteristiky jednostupňové nosné rakety.



Obr. 4-9 Nejužívanější koncepční uspořádání nosných raket.

#### Hmotnostní struktura a charakteristická čísla jednostupňových nosných raket

Skutečná hmotnostní struktura nosné rakety je velmi komplexní, sestává z mnoha hmotnostních položek. Detaily ponecháme stranou a pro účely dalších rozborů letových výkonů si celkovou vzletovou hmotnost nosné rakety  $m_0$  zjednodušeně rozdělíme pouze na následující tři položky (obr. 4-10)

$$m_0 = m_E + m_p + m_{PL}, \quad (4.73)$$

kde uvedené hmotnosti představují:

- $m_E$  je prázdná hmotnost nosné rakety, zahrnuje vše kromě pohonných látek a užitečného zatížení,



#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

- $m_p$  je hmotnost pohonných látek (palivo a okysličovadlo),
- $m_{pL}$  je užitečné, často nazývané jako „platící“ zatížení.

Pozn.: Indexy jsou odvozeny od anglických názvů tak, aby byly kompatibilní s běžným označováním v praxi a v odborné literatuře.

Bezrozměrovou variantu rovnice (4.73) získáme jejím dělením vzletovou hmotností, tím získáme tzv. rovnici existence nosné rakety

$$\hat{m}_E + \hat{m}_p + \hat{m}_{pL} = 1. \quad (4.74)$$

Rovnice existence nosné rakety obsahuje tytéž položky, jako je tomu v rov. (4.73) s tím, že tyto položky jsou bezrozměrové a jejich součet je roven jedné. Jednotlivé položky jsou dány následujícími podíly

$$\hat{m}_E = \frac{m_E}{m_0}, \quad \hat{m}_p = \frac{m_p}{m_0}, \quad \hat{m}_{pL} = \frac{m_{pL}}{m_0}. \quad (4.75)$$

Dále zavedeme následující charakteristická čísla nosné rakety, což jsou vhodně zvolené poměry mezi výše uvedenými hmotnostními položkami:

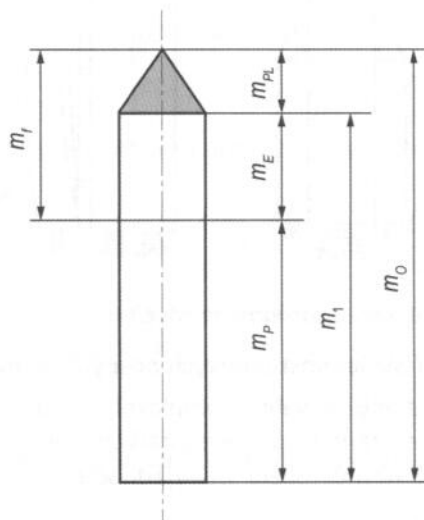
##### a) Hmotnostní (rychlostní) číslo

Hmotnostní číslo je poměr počáteční hmotnosti rakety  $m_0$  k finální hmotnosti  $m_f$

$$\mu = \frac{m_0}{m_f} = \frac{m_0}{m_0 - m_p}, \quad (4.76)$$

kde  $m_f = m_0 - m_p$  je hmotnost nosné rakety po dohoření veškerých pohonných látek. Alternativně lze  $\mu$  vyjádřit pomocí bezrozměrové hmotnosti pohonných látek  $\hat{m}_p$

$$\mu = \frac{1}{1 - \hat{m}_p}. \quad (4.77)$$



Obr. 4-10 Schematické znázornění hmotnostních položek jednostupňové nosné rakety.

Hmotnostní číslo patří k velmi důležitým charakteristikám. V podobě dle rov. (4.76) jsme se s ním již setkali u Ciolkovského rovnice (4.8). Často je toto číslo nazýváno jako Ciolkovského číslo. V současné době se charakteristická hmotnostní čísla u jednostupňových nosných raket pohybují zhruba do  $\mu = 20$  a u vícestupňových v závislosti na počtu stupňů až do  $\mu = 200$ .

b) *Dopravní číslo* (koeficient užitečného zatížení) je definováno jako poměr

$$\lambda = \frac{m_{PL}}{m_1}. \quad (4.78)$$

Zavedeme-li pomocný součet dvou hmotnostních položek (obr. 4-10)

$$m_1 = m_E + m_P, \quad (4.79)$$

můžeme dopravní číslo s přihlédnutím ke vztahu (4.73) vyjádřit alternativními vztahy

$$\lambda = \frac{m_{PL}}{m_E + m_P} = \frac{m_{PL}}{m_0 - m_{PL}}, \quad (4.80)$$

respektive pomocí bezrozměrové hmotnostní položky  $\hat{m}_{PL}$  dle rov. (4.75)

$$\lambda = \frac{\hat{m}_{PL}}{1 - \hat{m}_{PL}}. \quad (4.81)$$

c) *Konstrukční (strukturální) číslo* je definováno jako poměr

$$\varepsilon = \frac{m_E}{m_1} = \frac{m_E}{m_E + m_P} = \frac{m_E}{m_0 - m_{PL}}, \quad (4.82)$$

respektive pomocí bezrozměrových hmotnostních položek dle rov. (4.75)

$$\varepsilon = \frac{\hat{m}_E}{1 - \hat{m}_{PL}}. \quad (4.83)$$

Výše uvedené definice platí pro jednostupňové nosné rakety. Zcela analogicky se charakteristická čísla definují také u vícestupňových nosných raket.

#### Relace mezi charakteristickými čísly

Nyní budeme hledat vzájemnou relaci mezi charakteristickými čísly. Vydeme ze vztahu pro konstrukční číslo (4.82)

$$\varepsilon = \frac{m_E}{m_E + m_P},$$

ze kterého nalezneme vztah mezi hmotnostmi pohonných látek a prázdnou hmotností nosné rakety

$$m_E = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} m_P. \quad (4.84)$$

Ze vztahu pro dopravní číslo (4.80) vyjádříme výraz pro hmotnost užitečného zatížení

$$m_{PL} = \lambda(m_E + m_P),$$

do něhož dosadíme dle rov. (4.84) a upravíme takto

$$m_{PL} = \lambda \left[ \left( \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + 1 \right) m_P \right].$$

Odtud již přímo určíme, jak souvisí hmotnost pohonných látek s hmotností užitečného zatížení

$$m_{PL} = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon} m_P. \quad (4.85)$$

Nakonec použijeme vztah pro hmotnostní číslo (4.76), který s přihlédnutím k rov. (4.73) zapíšeme následovně

$$\mu = \frac{m_0}{m_f} = \frac{m_E + m_P + m_{PL}}{m_E + m_{PL}} = 1 + \frac{m_P}{m_E + m_{PL}}.$$

#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

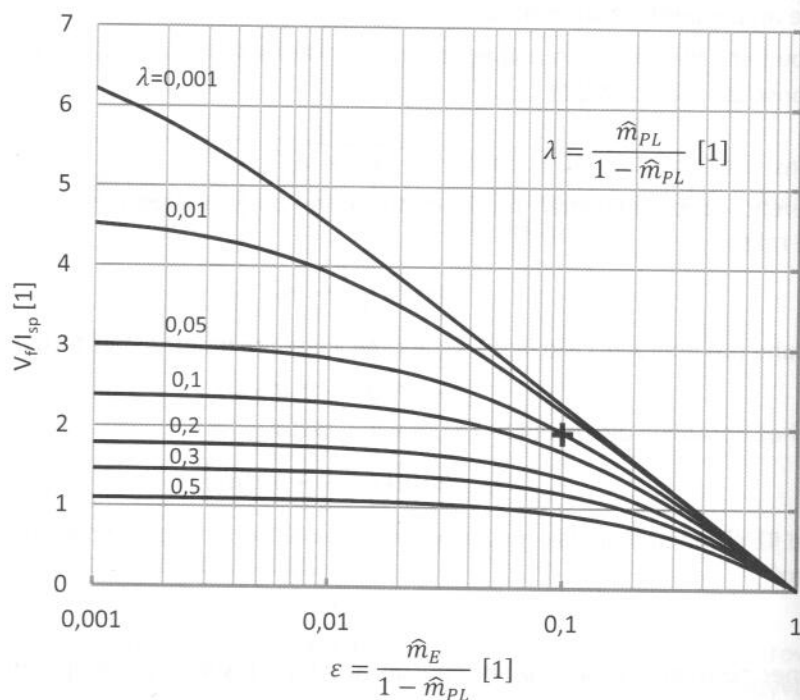
Po dosažení odvozených relací pro  $m_E$  dle rov. (4.84) a  $m_{PL}$  dle rov. (4.85) a úpravě obdržíme konečnou závislost mezi používanými charakteristickými čísly nosné rakety ve tvaru

$$\mu = \frac{1 + \lambda}{\varepsilon + \lambda}. \quad (4.86)$$

Vraťme se ještě k Ciolkovského rovnici (4.8) pro finální rychlost po dohoření paliva u jednostupňové rakety. Nahradíme-li v ní hmotnostní číslo  $\mu$  výrazem (4.86) a uvážíme  $W = I_{sp}$  obdržíme důležitou vazbu mezi finální rychlostí, dopravním a konstrukčním číslem

$$V_f = I_{sp} \ln \mu = I_{sp} \ln \frac{1 + \lambda}{\varepsilon + \lambda}. \quad (4.87)$$

Obecná závislost finální rychlosti připadající na jednotku specifického impulsu je znázorněna na obr. 4-11. Z uvedeného diagramu můžeme pro dané dopravní a konstrukční číslo nosné rakety a známý specifický impuls odhadnout dosažitelnou konečnou rychlost. Pokud uvážíme, že současná úroveň kosmické techniky nabízí nejmenší možné konstrukční číslo nosné rakety cca  $\varepsilon = 0,1$  a specifický impuls kolem  $I_{sp} = 3000 \text{ [Nskg}^{-1}\text{]}$ , pak lze při dopravním čísle  $\lambda = 0,05$  dosáhnout finální rychlosti zhruba  $V_f = 5,8 \text{ [kms}^{-1}\text{]}$ . Na obr. 4-11 této situaci odpovídá bod vyznačený křížkem. Z toho vyplývá, že jednostupňovou nosnou raketou nelze jednoduše dosáhnout kruhové rychlosti  $V_I = 7,9 \text{ [kms}^{-1}\text{]}$ . Proto se pro vynášení užitečného zatížení na vyšší oběžnou dráhu používají vícestupňové nosné rakety, nejčastěji třístupňové.



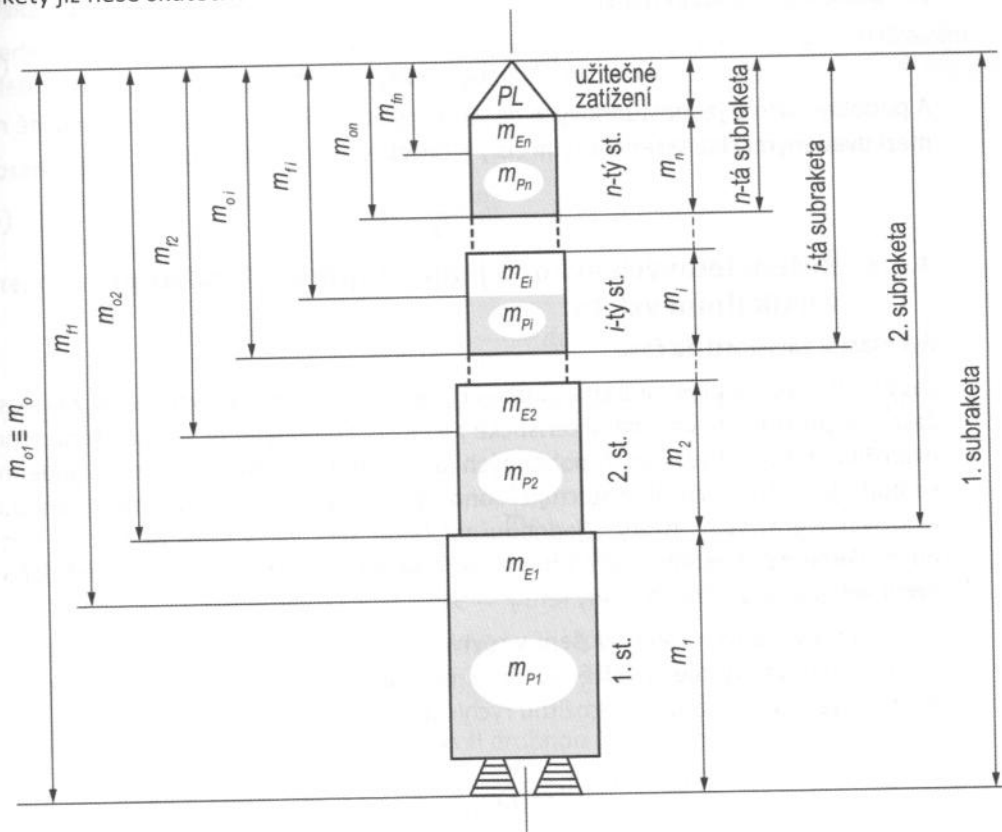
Obr. 4-11 Finální rychlost připadající na jednotku specifického impulsu v závislosti na dopravním a konstrukčním čísle nosné rakety.

### Hmotnostní struktura a charakteristická čísla vícestupňových nosných raket

Na obr. 4-12 je uvedeno členění nosné rakety na stupně a alternativní členění na tzv. subrakety. Na rozdíl od definice stupňů, subrakety zahrnují také i vynášené užitečné zatížení („platící zatížení“). Charakteristická čísla vícestupňové rakety jsou v zásadě definována podobně jako v předchozím případě. Nicméně je třeba uvážit, že vynášené užitečné zatížení  $m_{PL}$  následuje až za posledním stupněm nosné rakety. Z toho vyplývá, že pro  $i$ -tý stupeň je „užitečným“ zatížením nejen  $m_{PL}$ , ale také sumární hmotnost všech následujících stupňů nosné rakety. Jinými slovy hmotnost  $(i+1)$  subrakety. Pak „užitečné“ zatížení  $i$ -tého stupně  $n$ -stupňové nosné rakety je dáno vztahem

$$m_{PLi} = m_{PL} + \sum_{k=i+1}^{k=n} m_k. \quad (4.88)$$

Uvedený vztah platí pouze pro stupně  $i = 1, 2, 3, \dots (n-1)$ . Poslední,  $n$ -tý stupeň nosné rakety již nese skutečné užitečné zatížení, takže pro poslední stupeň platí  $m_{PLn} = m_{PL}$ .



Obr. 4-12 Schéma hmotnostní struktury vícestupňové nosné rakety.

Charakteristická čísla vícestupňové nosné rakety jsou definována pro jednotlivé stupně následovně:

a) Hmotnostní číslo  $i$ -tého stupně

$$\mu_i = \frac{m_{oi}}{m_{fi}} = \frac{m_i + m_{PLi}}{m_{Ei} + m_{PLi}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots (n-1). \quad (4.89)$$

Pro poslední,  $n$ -tý stupeň platí

$$\mu_n = \frac{m_{0n}}{m_{fn}} = \frac{m_n + m_{PL}}{m_{En} + m_{PL}}. \quad (4.90)$$

b) Dopravní číslo (koeficient užitečného zatížení)  $i$ -tého stupně

$$\lambda_i = \frac{m_{PLi}}{m_{Ei} + m_{Pi}} = \frac{m_{PLi}}{m_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots (n-1). \quad (4.91)$$

Pro poslední,  $n$ -tý stupeň platí

$$\lambda_n = \frac{m_{PL}}{m_{En} + m_{Pn}} = \frac{m_{PL}}{m_n}. \quad (4.92)$$

c) Konstrukční (strukturální) číslo  $i$ -tého stupně

$$\varepsilon_i = \frac{m_{Ei}}{m_{Ei} + m_{Pi}} = \frac{m_{Ei}}{m_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots (n-1). \quad (4.93)$$

Pro poslední,  $n$ -tý stupeň platí

$$\varepsilon_n = \frac{m_{En}}{m_{En} + m_{Pn}} = \frac{m_{En}}{m_n}. \quad (4.94)$$

A podobně jako u jednostupňových nosných raket platí i pro vícestupňové nosné rakety mezi uvedenými charakteristickými čísly jednotlivých stupňů relace

$$\mu_i = \frac{1 + \lambda_i}{\varepsilon_i + \lambda_i}. \quad (4.95)$$

#### 4.4.3 Řešení letových výkonů jednostupňových raket při vertikálním vzletu

##### Rychlost v závislosti na čase

Zaobíráme se nejprve otázkou stanovení průběhu okamžité rychlosti v závislosti na čase a výpočtem ideální charakteristické rychlosti, tzv. finální rychlosti, která odpovídá okamžiku dohoření veškerých pohonných látek nesených raketou. Předpokládáme, že se bude jednat o vertikálně startující sondážní raketu s tím, že budeme zjednodušeně uvažovat i gravitační ztráty. Zjednodušení bude spočívat v tom, že tíhové zrychlení považujeme za konstantní  $g(h) = g_0$ . Aerodynamické ztráty zatím neuvažujeme. Při vertikálním vzletu je sklon dráhy letu  $\gamma = 90^\circ$ .

Uvážením uvedených zjednodušení v rovnici (4.70) pro výpočet rychlosti a dosazením za gravitační ztráty dle rovnice (4.72), v níž uvážíme počáteční čas  $t_0 = 0$ , obdržíme modifikovanou rovnici pro okamžitou rychlost ve tvaru

$$V(t) = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m(t)} - g_0 \int_0^t dt = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m(t)} - g_0 t. \quad (4.96)$$

Uvažujme dále, že časová spotřeba pohonných látek  $\dot{m}_p$  je konstantní. Pak závislost hmotnosti nosné rakety na čase bude dána výrazem

$$m(t) = m_0 - \dot{m}_p t. \quad (4.97)$$

Po dohoření pohonných látek v čase  $t = t_f$  se hmotnost nosné rakety  $m(t_f)$  rovná finální hmotnosti  $m_f$ . Zapišeme-li tuto skutečnost dle rov. (4.97)

$$m(t_f) \equiv m_f = m_0 - \dot{m}_P t_f, \quad (4.98)$$

(4.90) odkud můžeme stanovit čas hoření pohonných látek

$$t_f = \frac{m_0 - m_f}{\dot{m}_P} = \frac{m_P}{\dot{m}_P}. \quad (4.99)$$

(4.91) Po dosazení do rov. (4.96) obdržíme mezivýsledek pro finální rychlost

$$V(t_f) \equiv V_f = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_f} - g_0 \frac{m_0 - m_f}{\dot{m}_P}. \quad (4.92)$$

(4.92) Po úpravě a zavedení hmotnostního čísla lze konečný výraz pro výpočet finální rychlosti při dohoření veškerých pohonných látek zapsat takto

$$V_f = I_{sp} \ln \mu - g_0 \frac{m_f}{\dot{m}_P} (\mu - 1). \quad (4.100)$$

#### Výška v závislosti na čase

(4.94) Hledejme nyní závislost okamžité dosažené výšky v závislosti na čase při vertikálním vzletu rakety (aktivní část letu). Vyjdeme z jednoduché relace

$$dh = V(t) dt.$$

Dosadíme za rychlost  $V(t)$  dle rov. (4.96)

$$(4.95) \quad dh = \left[ I_{sp} \ln \frac{m_0}{m(t)} - g_0 t \right] dt.$$

Integrujeme v následujících mezích

$$\int_{h_0}^h dh = I_{sp} \int_0^t \ln \frac{m_0}{m(t)} dt - g_0 \int_0^t t dt. \quad (4.101)$$

Nyní zavedeme do prvního integrálu na pravé straně rovnice (4.101) časovou spotřebu pohonných látek pomocí vztahu

$$dt = -\frac{dm}{\dot{m}_P}.$$

Po dosazení za  $dt$  do zmíněného integrandu převedeme první integrál na pravé straně na novou integrační proměnnou  $m(t)$ . Zvolme ještě  $h_0 = 0$ . Pak lze rov. (4.101) zapsat

$$h(t) = \frac{I_{sp}}{\dot{m}_P} \int_{m_0}^{m(t)} \ln \frac{m_0}{m} dm - \frac{1}{2} g_0 t^2.$$

Před vlastní integrací zjednodušíme integrál drobnou úpravou na tvar

$$(4.96) \quad h(t) = \frac{I_{sp}}{\dot{m}_P} \left[ \int_{m_0}^{m(t)} \ln m(t) dm - \ln m_0 \int_{m_0}^{m(t)} dm \right] - \frac{1}{2} g_0 t^2.$$

Po integraci dostáváme výraz pro výpočet okamžité dosažené výšky  $h$  v čase  $t$

$$(4.97) \quad h(t) = \frac{I_{sp}}{\dot{m}_P} \left[ m(t) \ln \frac{m(t)}{m_0} + m_0 - m(t) \right] - \frac{1}{2} g_0 t^2, \quad (4.102)$$

nebo dosadíme-li ještě za okamžitou hmotnost  $m(t)$  dle rovnice (4.97), obdržíme konečný výraz pro výpočet výšky v závislosti na čase

#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

$$h(t) = \frac{I_{sp}}{\dot{m}_p} \left[ (m_0 - \dot{m}_p t) \ln \frac{m_0 - \dot{m}_p t}{m_0} + \dot{m}_p t \right] - \frac{1}{2} g_0 t^2. \quad (4.103)$$

A výšku dosaženou v okamžiku dohoření pohonných látek nalezneme dosazením doby hoření  $t_f = m_p / \dot{m}_p$  dle rov. (4.99) a zavedením označení pro hmotnostní číslo  $\mu$  ve tvaru

$$h(t_f) \equiv h_f = I_{sp} \frac{m_f}{\dot{m}_p} (\mu - 1 - \ln \mu) - \frac{1}{2} g_0 \left( \frac{m_f}{\dot{m}_p} \right)^2 (\mu - 1)^2. \quad (4.104)$$

#### Absolutní dostup při vertikálním vzletu jednostupňové rakety

V předchozí části jsme se zabývali časovými průběhy rychlosti a výšky během aktivního vertikálního vzletu rakety. Nyní uvážíme tu skutečnost, že po dohoření pohonných látek bude nosná raketa setrvačností pokračovat v bezmotorovém vertikálním přímočarém letu (pasivní část letu). V tomto případě se jedná o zpomalený pohyb se záporným zrychlením (bez odporu atmosféry)

$$\frac{dV}{dt} = -g_0.$$

Separací proměnných a integrací následujícího vztahu v uvedených mezích

$$\int_{V_f}^V dV = -g_0 \int_{t_f}^t dt$$

obdržíme obecný výraz pro rychlost v pokračujícím vertikálním letu pro  $t > t_f$

$$V(t) = V_f - g_0(t - t_f). \quad (4.105)$$

Obdobně stanovíme obecný výraz pro okamžitou výšku v pokračujícím vertikálním pohybu vycházejíce ze vztahu

$$dh = V(t)dt,$$

do něhož dosadíme za  $V(t)$  dle rov. (4.105). Po níže naznačené integraci rovnice ve zvolených mezích

$$\int_{h_f}^h dh = \int_{t_f}^t [V_f - g_0(t - t_f)] dt$$

obdržíme obecný výraz pro výšku v pokračujícím vertikálním letu pro  $t > t_f$  ve tvaru

$$h(t) = h_f + V_f(t - t_f) - \frac{1}{2} g_0(t - t_f)^2. \quad (4.106)$$

Jelikož výrazy pro  $h_f$ ,  $V_f$  i  $t_f$  již máme k dispozici, dosadíme odpovídající rov. (4.104), (4.100) a (4.99) do výrazu (4.106) a upravíme na výsledný vztah platný pro  $t > t_f$

$$h(t) = I_{sp} \left( \frac{m_f}{\dot{m}_p} \right) (\mu - 1 - \mu \ln \mu) + (I_{sp} \ln \mu) t - \frac{1}{2} g_0 t^2. \quad (4.107)$$

Maximální dosaženou výšku  $h_{max}$  určíme z podmínky, kdy rychlost rakety klesla na nulovou hodnotu. Položíme tuto podmínku do rov. (4.105), odkud získáme čas  $t_{max}$

$$(4.103) \quad V_f - g_0(t_{max} - t_f) = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{V_f}{g_0} + t_f.$$

Po dosazení za  $V_f$ , např. dle rov. (4.96) pro  $t = t_f$ , získáme výsledný výraz pro čas  $t_{max}$

$$t_{max} = \frac{1}{g_0}(I_{sp} \ln \mu - g_0 t_f) + t_f = \frac{I_{sp}}{g_0} \ln \mu. \quad (4.108)$$

Nyní dosadíme výraz pro  $t_{max}$  do rovnice (4.107) a po malé úpravě obdržíme konečný výraz pro přímý výpočet maximální dosažené výšky (absolutního dostupu) při vertikálním vzletu rakety se zjednodušeným uvážením gravitačních ztrát ve tvaru

$$h_{max} = I_{sp} \left( \frac{m_f}{\dot{m}_p} \right) (\mu - 1 - \mu \ln \mu) + \frac{1}{2g_0} (I_{sp} \ln \mu)^2. \quad (4.109)$$

Doplňme ještě energetickou metodu stanovení dostupu. Ze známé výšky  $h_f$  a rychlosti letu  $V_f$  v okamžiku dohoření pohonných látek můžeme s uvážením podmínky pro rychlost na dostupu ( $V = 0$ ) stanovit maximální dosažitelnou výšku rakety z rovnosti celkových energií na počátku a na konci letu. Na dostupu je kinetická energie nulová a to znamená, že potenciální energie na dostupu se rovná součtu kinetické a potenciální energie na počátku letu (pravá strana rovnice)

$$mg_0 h_{max} = \frac{1}{2} m V_f^2 + mg_0 h_f.$$

Z uvedené energetické bilance vyplývá vztah pro dostup (maximální výšku) vztah ve tvaru

$$h_{max} = \frac{V_f^2}{2g_0} + h_f. \quad (4.110)$$

#### Příklad 4.1

Zadání:

Vypočtete časový průběh rychlosti a výšky aktivní i pasivní části vertikálního letu jednostupňové sondážní rakety a stanovte absolutní dostup. Aerodynamické ztráty neuvažujte. Gravitační ztráty uvažujte zjednodušeně za předpokladu konstantního tíhového zrychlení.

Potřebná data:

Vzletová hmotnost	$m_0 = 4\,000 \text{ [kg]},$
Užitečné zatížení	$m_{pL} = 100 \text{ [kg]},$
Konstrukční číslo	$\varepsilon = 0,2 \text{ [1]},$
Specifický impuls	$I_{sp} = 1200 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$
Spotřeba pohonných látek	$\dot{m}_p = 40 \text{ [kgs}^{-1}\text{]},$
Tíhové zrychlení	$g(h) = g_0 = 9,80665 \text{ [ms}^{-2}\text{]}.$

Řešení:

a) Výpočet množství pohonných látek stanovíme kombinací rov. (4.82) a (4.73) dle vztahu

$$m_p = (1 - \varepsilon)(m_0 - m_{pL}) = (1 - 0,2)(4000 - 100) = 3120 \text{ [kg]}.$$



#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

- b) Výpočet doby hoření pohonných látek provedeme dle vztahu (4.99)

$$t_f = \frac{m_p}{\dot{m}_p} = \frac{3120}{40} = 78 \text{ [s]}.$$

- c) Aktivní část letu je ukončena při finální rychlosti

$$V(t_f) \equiv V_f = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}_p t_f} - 9,80665 t_f,$$

$$V_f = 1200 \ln \frac{4000}{4000 - 40(78)} - 9,80665(78) = 1052,035 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

- d) Výpočet finální hmotnosti rakety

$$m_f = m_0 - m_p = 4000 - 3120 = 880 \text{ [kg]}.$$

- e) Výpočet hmotnostního čísla rakety

$$\mu = \frac{m_0}{m_f} = \frac{4000}{880} = 4,54546 \text{ [1]}.$$

- f) Výpočet finální výšky na konci aktivní části letu provedeme dle výše odvozeného vztahu (4.104)

$$h_f = I_{sp} \frac{m_f}{\dot{m}_p} (\mu - 1 - \ln \mu) - \frac{1}{2} g_0 \left( \frac{m_f}{\dot{m}_p} \right)^2 (\mu - 1)^2,$$

$$h_f = 1200 \frac{880}{40} (4,54546 - 1 - \ln 4,54546) - \frac{1}{2} 9,80665 \left( \frac{880}{40} \right)^2 (4,54546 - 1)^2,$$

$$h_f = 23795,2 \text{ [m]}.$$

- g) Výpočet rychlosti v závislosti na čase v aktivní části letu provedeme dle vztahu (4.95) s uvažováním lineárního průběhu změny hmotnosti sondážní rakety  $m(t)$  v důsledku spotřebovávání pohonných látek dle rov. (4.97)

$$V(t) = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}_p t} - g_0 t,$$

$$V(t) = 1200 \ln \frac{4000}{4000 - 40t} - 9,80665 t.$$

- h) Pro výpočet výšky v závislosti na čase v aktivní části letu použijeme vztah (4.103)

$$h(t) = \frac{I_{sp}}{\dot{m}_p} \left[ (m_0 - \dot{m}_p t) \ln \frac{m_0 - \dot{m}_p t}{m_0} + \dot{m}_p t \right] - \frac{1}{2} g_0 t^2,$$

$$h(t) = \frac{1200}{40} \left[ (4000 - 40t) \ln \frac{4000 - 40t}{4000} + 40t \right] - \frac{1}{2} 9,80665 t^2.$$

- i) Výpočet rychlosti v závislosti na čase v pasivní části letu rakety (zpomalený vertikální pohyb) provedeme dle vztahu (4.105)

$$V(t) = V_f - g_0(t - t_f) = 1052,035 - 9,80665(t - 78).$$

- j) Výpočet výšky v závislosti na čase v pasivní části letu rakety (zpomalený vertikální pohyb) provedeme dle vztahu (4.106)

$$h(t) = h_f + V_f(t - t_f) - \frac{1}{2} g_0(t - t_f)^2,$$

$$h(t) = 23795,2 + 1052,035(t - 78) - \frac{1}{2}9,80665(t - 78)^2.$$

Výpočet dle vztahů uvedených v bodech g) až j) je proveden v tabulkovém procesoru Excel. Výsledky jsou uvedeny v grafické podobě na obr. 4-13.

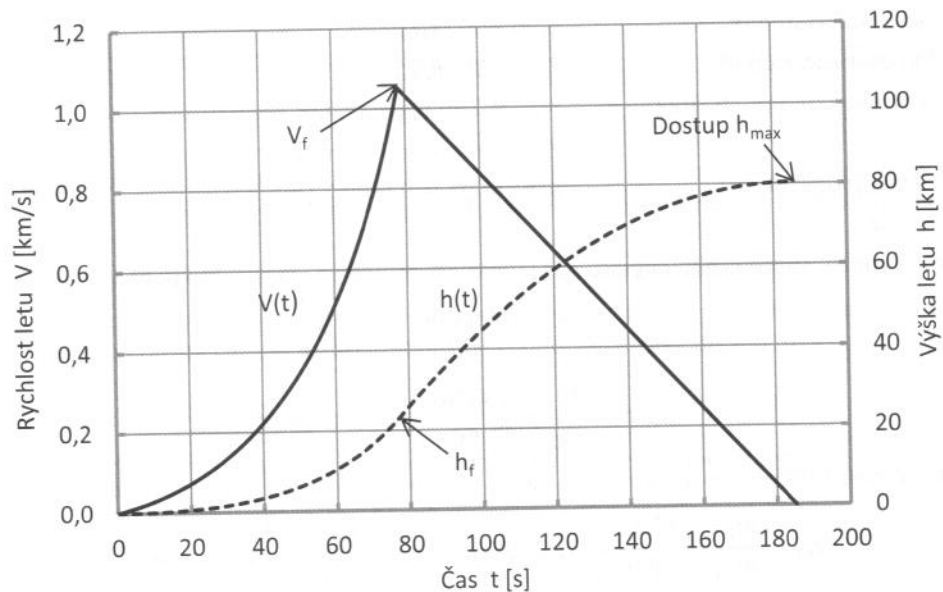
k) Výpočet absolutního dostupu sondážní rakety můžeme provést podle rov. (4.109)

$$h_{max} = I_{sp} \left( \frac{m_f}{\dot{m}_p} \right) (\mu - 1 - \mu \ln \mu) + \frac{1}{2g_0} (I_{sp} \ln \mu)^2,$$

$$h_{max} = 1200 \left( \frac{880}{40} \right) (4,54546 - 1 - 4,54546 \ln 4,54546) + \frac{1}{2(9,80665)} (1200 \ln 4,54546)^2 = 80225 \text{ [m]}.$$

Pro kontrolu provedeme ještě výpočet dostupu energetickou metodou dle rov. (4.110)

$$h_{max} = \frac{V_f^2}{2g_0} + h_f = \frac{1052,035^2}{2(9,80665)} + 23795,2 = 80255 \text{ [m]}.$$



Obr. 4-13 Závislost rychlosti a výšky v průběhu stoupání. Dostup sondážní rakety bez uvážení vlivu odporu atmosféry.

#### 4.4.4 Řešení letových výkonů vícestupňových raket při vertikálním vzletu

Většinu potřebných základních vztahů pro řešení pohybu a letových výkonů nosných raket jsme již odvodili v předchozí části, proto si v další části představíme postup řešení letových výkonů vícestupňových raket přímo na praktických příkladech.

**Příklad 4.2****Zadáni:**

Pro vertikálně vzlétající dvoustupňovou sondážní raketu vypočtete a nakreslete závislosti rychlosti a výšky na čase. Aerodynamické ztráty neuvažujte. Gravitační ztráty uvažujte zjednodušeně pro konstantní tíhové zrychlení. Tah a spotřebu pohonných látek uvažujte konstantní. Zanedbejte časovou prodlevu mezi dohořením prvního stupně a zapálením druhého stupně.

**Potřebná data:**

Vzletová hmotnost rakety	$m_0 = 10\,000$ [kg],
Užitečné zatížení	$m_{PL} = 200$ [kg],
Hmotnost 1.stupně	$m_1 = m_{E1} + m_{P1} = 7840$ [kg],
Hmotnost 2.stupně	$m_2 = m_{E2} + m_{P2} = 1960$ [kg],
Hmotnost pohonných látek	$m_{P1} = 6272$ [kg] pro první stupeň, $m_{P2} = 1568$ [kg] pro druhý stupeň,
Tah prvního stupně	$F_1 = 600$ [kN],
Tah druhého stupně	$F_2 = 138$ [kN],
Spotřeba pohonných látek	$\dot{m}_{P1} = 200$ [kg s <sup>-1</sup> ] pro první stupeň, $\dot{m}_{P2} = 60$ [kg s <sup>-1</sup> ] pro druhý stupeň,
Tíhové zrychlení	$g(h) = g_0 = 9,80665$ [ms <sup>-2</sup> ].

**Řešení:**a) Výpočet specifického impulsu pro jednotlivé stupně  $I_{spi}$  dle vztahu (4.65)

$$I_{sp1} = \frac{F_1}{\dot{m}_{P1}} = \frac{600\,000}{200} = 3000 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$$

$$I_{sp2} = \frac{F_2}{\dot{m}_{P2}} = \frac{138\,000}{60} = 2300 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

b) Výpočet doby hoření pohonných látek jednotlivých stupňů  $t_{fi}$  dle rov. (4.99) a  $t_f$ 

$$t_{f1} = \frac{m_{P1}}{\dot{m}_{P1}} = \frac{6272}{200} = 31,3600 \text{ [s]}, \quad t_{f2} = \frac{m_{P2}}{\dot{m}_{P2}} = \frac{1568}{60} = 26,1333 \text{ [s]},$$

$$t_f = t_{f1} + t_{f2} = 31,3600 + 26,1333 = 57,4933 \text{ [s]}.$$

c) Výpočet užitečných zatížení jednotlivých stupňů dle vztahu (4.88)

$$m_{PL1} = m_{PL} + m_2 = 200 + 1960 = 2160 \text{ [kg]},$$

$$m_{PL2} = m_{PL} = 200 \text{ [kg]}.$$

d) Stanovení počátečních hmotností jednotlivých stupňů rakety dle obr. 4-12

$$m_{01} = m_0 = 10000 \text{ [kg]},$$

$$m_{02} = m_{PL} + m_2 = 200 + 1960 = 2160 \text{ [kg]}.$$

e) Výpočet závislosti rychlosti na čase během aktivní fáze letu prvního stupně

Pro výpočet použijeme výše odvozený vztah (4.96) s uvažováním lineární změny hmotnosti sondážní rakety v důsledku spotřebovávání pohonných látek dle rov. (4.97)

$$V_1(t) = I_{sp1} \ln \frac{m_{01}}{m_{01} - \dot{m}_{p1}t} - g_0 t.$$

- f) Finální rychlost rakety v okamžiku dohoření pohonných látek v prvním stupni

$$V_{f1} = I_{sp1} \ln \frac{m_{01}}{m_{01} - \dot{m}_{p1}t_{f1}} - g_0 t_{f1},$$

$$V_{f1} = 3000 \ln \frac{10000}{10000 - 200(31,36)} - 9,80665(31,36) = 2653 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

- g) Výpočet závislosti rychlosti na čase během aktivní fáze letu druhého stupně pro  $t > t_{f1}$

Pro výpočet použijeme modifikovaný vztah (4.96) s uvážením lineárního průběhu změny hmotnost sondážní rakety v důsledku spotřebovávání pohonných látek dle rov. (4.97)

$$V_2(t) = V_{f1} + I_{sp2} \ln \frac{m_{02}}{m_{02} - \dot{m}_{p2}(t - t_{f1})} - g_0(t - t_{f1}).$$

- h) Finální rychlost rakety v okamžiku dohoření pohonných látek ve 2. stupni pro  $t = t_f$

$$V_{f2} = V_{f1} + I_{sp2} \ln \frac{m_{02}}{m_{02} - \dot{m}_{p2}(t_f - t_{f1})} - g_0(t_f - t_{f1}).$$

$$V_{f2} = 2653 + 2300 \ln \frac{2160}{2160 - 60(26,1333)} - 9,80665(26,1333),$$

$$V_{f2} = 5374 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

- i) Výpočet funkční závislosti  $V_1(t)$  a  $V_2(t)$  dle vztahů uvedených v bodech e) a g) je proveden v tabulkovém procesoru Excel. Výsledky jsou uvedeny v grafické podobě na obr. 4-14.

- j) Výpočet závislosti výšky na čase během aktivní činnosti prvního stupně

Pro výpočet použijeme vztah (4.103) s uvážením lineárního průběhu změny hmotnost sondážní rakety v důsledku spotřebovávání pohonných látek dle rov. (4.97)

$$h_1(t) = \frac{I_{sp1}}{\dot{m}_{p1}} \left[ (m_{01} - \dot{m}_{p1}t) \ln \frac{m_{01} - \dot{m}_{p1}t}{m_{01}} + \dot{m}_{p1}t \right] - \frac{1}{2} g_0 t^2.$$

- k) Výška dosažená v okamžiku dohoření pohonných látek v prvním stupni

$$h_{f1} = \frac{I_{sp1}}{\dot{m}_{p1}} \left[ (m_{01} - \dot{m}_{p1}t_{f1}) \ln \frac{m_{01} - \dot{m}_{p1}t_{f1}}{m_{01}} + \dot{m}_{p1}t_{f1} \right] - \frac{1}{2} g_0 t_{f1}^2,$$

$$h_{f1} = \frac{3000}{200} \left[ (10^4 - 200(31,36)) \ln \frac{10^4 - 200(31,36)}{10^4} + 200(31,36) \right] - \frac{1}{2} 9,80665(31,36)^2 = 34081 \text{ [m]}.$$

- l) Výpočet závislosti výšky na čase během aktivní činnosti druhého stupně pro  $t > t_{f1}$

Pro výpočet použijeme modifikovaný vztah (4.103) s uvážením lineárního průběhu změny hmotnosti rakety v důsledku spotřebovávání pohonných látek dle rov. (4.97)

$$h_2(t) = h_{f1} + \frac{I_{sp2}}{\dot{m}_{p2}} \left[ (m_{02} - \dot{m}_{p2}(t - t_{f1})) \ln \frac{m_{02} - \dot{m}_{p2}(t - t_{f1})}{m_{02}} + \dot{m}_{p2}(t - t_{f1}) \right] - \frac{1}{2} g_0(t - t_{f1})^2.$$

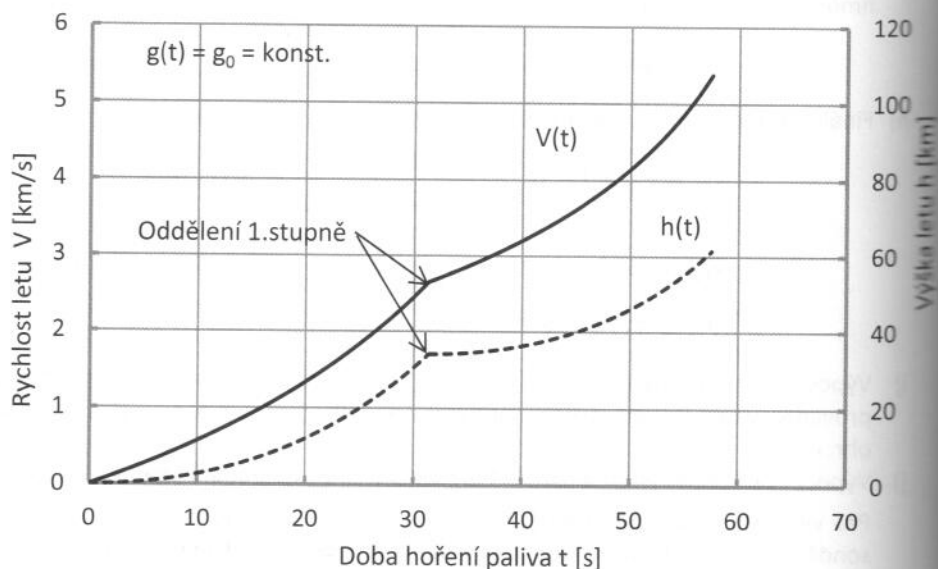
#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

m) Výška dosažená v okamžiku dohoření pohonných látek ve 2. stupni pro  $t = t_f$

$$h_{f2} = h_{f1} + \frac{I_{sp2}}{\dot{m}_{P2}} \left[ (m_{02} - \dot{m}_{P2} t_{f2}) \ln \frac{m_{02} - \dot{m}_{P2} t_{f2} + \dot{m}_{P2} t_{f2}}{m_{02}} \right] - \frac{1}{2} g_0 t_{f2}^2,$$

$$h_{f2} = 34081 + \frac{2300}{60} \left[ (2160 - 60(26,1333)) \ln \frac{2160 - 60(26,1333) + 60(26,1333)}{2160} \right] - \frac{1}{2} 9,80665(26,1333)^2 = 61465 \text{ [m]}.$$

n) Výpočet funkční závislosti  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$  dle vztahů uvedených v bodech j) a l) je proveden v tabulkovém procesoru Excel. Výsledky jsou uvedeny v grafické podobě rovněž na obr. 4-14.



Obr. 4-14 Průběh rychlosti a výšky letu dvoustupňové nosné rakety v závislosti na čase.

#### Porovnání finálních rychlostí jednostupňové a vícestupňové rakety při vertikálním vzletu

Abychom prokázali výhodnost používání vícestupňových raket, ukážeme si na následujícím jednoduchém příkladu porovnání finálních rychlostí jednostupňové a dvoustupňové rakety.

#### Příklad 4.3

Zadání:

Stanovte finální rychlost jednostupňové a dvoustupňové nosné rakety při vertikálním vzletu dosaženou v okamžiku dohoření pohonných látek. Neuvažujte gravitační ani aerodynamické ztráty. Pro obě nosné rakety uvažujte stejnou celkovou vzletovou hmotnost, užitečné zatížení, množství paliva i konstrukční číslo. Porovnejte letové výkony obou nosných raket dle dosažené finální rychlosti.

Potřebná data:

Užitečné zatížení	$m_{PL} = 200 \text{ [kg]}$ ,
Bezrozměrové užitečné zatížení	$\hat{m}_{PL} = 0,02 \text{ [1]}$ ,
Konstrukční číslo	$\varepsilon = 0,2 \text{ [1]}$ ,
Specifický impuls	$I_{sp} = 3000 \text{ [ms}^{-1}\text{]}$ .

Řešení:

1. Jednostupňová nosná raketa

Pro výpočet finální rychlosti jednostupňové rakety použijeme základní vztah, který byl odvozen ve tvaru, viz rov. (4.87)

$$V_f = I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_f} = I_{sp} \ln \mu.$$

a) Úprava výtvaru pro hmotnostní číslo  $\mu$ 

Vzhledem k zadání použijeme pro hmotnostní číslo vztah (4.86)

$$\mu = \frac{1 + \lambda}{\varepsilon + \lambda}.$$

Pro výpočet je třeba ještě znát dopravní číslo  $\lambda$ . To určíme dle vztahu (4.81)

$$\lambda = \frac{\hat{m}_{PL}}{1 - \hat{m}_{PL}}.$$

Dosaďme nejprve výraz pro  $\lambda$  do vztahu pro hmotnostní číslo  $\mu$ . Následující úpravou obdržíme pro hmotnostní číslo výraz

$$\mu = \frac{1 + \frac{\hat{m}_{PL}}{1 - \hat{m}_{PL}}}{\varepsilon + \frac{\hat{m}_{PL}}{1 - \hat{m}_{PL}}} = \frac{1}{\varepsilon(1 - \hat{m}_{PL}) + \hat{m}_{PL}} = \frac{1}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)\hat{m}_{PL}}.$$

b) Konečná úprava vztahu pro finální rychlost  $V_f$ 

Stanovený výraz pro  $\mu$  dosadíme do základního vztahu (4.87) pro finální rychlost a provedeme drobnou úpravu

$$V_f = I_{sp} \ln \left[ \frac{1}{\varepsilon + (1 - \varepsilon)\hat{m}_{PL}} \right].$$

Změnou znaménka u logaritmu můžeme výraz pro výpočet finální rychlosti přepsat na konečný tvar

$$V_f = -I_{sp} \ln[\varepsilon + (1 - \varepsilon)\hat{m}_{PL}].$$

c) Výpočet finální rychlosti  $V_f$ 

Dosažením zadaných parametrů stanovíme finální rychlost jednostupňové nosné rakety po dohoření veškerých pohonných látek

$$V_f = -3000 \ln[0,2 + (1 - 0,2)0,02] = 4597 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

d) Výpočet vzletové hmotnosti nosné rakety  $m_0$ 

Z definičního vztahu pro užitečné zatížení (4.75)  $\hat{m}_{PL} = m_{PL}/m_0$  určíme vzletovou hmotnost nosné rakety

$$m_0 = \frac{m_{PL}}{\hat{m}_{PL}} = \frac{200}{0,02} = 10\,000 \text{ [kg]}.$$

#### 4. Aktivní pohyb kosmických těles

- e) Výpočet prázdné hmotnosti a bezrozměrové prázdné hmotnosti nosné rakety

Nejprve z definičního vztahu (4.82) určíme prázdnou hmotnost

$$m_E = \varepsilon(m_0 - m_{PL}) = 0,2(10\,000 - 200) = 1960 \text{ [kg]}.$$

A bezrozměrovou prázdnou hmotnost nosné rakety určíme z definičního vztahu (4.75)

$$\hat{m}_E = \frac{m_E}{m_0} = \frac{1960}{10\,000} = 0,196 \text{ [1]}.$$

- f) Výpočet potřebného množství pohonných látek  $m_P$  a bezrozměrové hmotnosti pohonných látek  $\hat{m}_P$

Z rovnice (4.73) pro množství pohonných látek vyplývá

$$m_P = m_0 - m_E - m_{PL} = 10\,000 - 1960 - 200 = 7840 \text{ [kg]}.$$

A bezrozměrové množství pohonných látek je dáno definičním vztahem (4.75)

$$\hat{m}_P = \frac{m_P}{m_0} = \frac{7840}{10\,000} = 0,784.$$

- g) Rovnice existence (4.74) nám poslouží jako kontrola správnosti hmotnostních položek

$$\hat{m}_E + \hat{m}_P + \hat{m}_{PL} = 1,$$

$$0,196 + 0,784 + 0,02 = 1.$$

Rovnice existence nosné rakety je splněna.

#### 2. Dvoustupňová nosná raketa

Abychom mohli porovnat letové výkony mezi jednostupňovou a dvoustupňovou nosnou raketou, rozdělíme původní jednostupňovou nosnou raketu na dva stupně při zachování celkové vzletové hmotnosti, množství pohonných látek a užitečného zatížení.

- a) Rozdělení celkové vzletové hmotnosti na dva stupně.

Hmotnost obou stupňů při vzletu (hmotnost bez užitečného zatížení) činí

$$(m_0 - m_{PL}) = 10\,000 - 200 = 9800 \text{ [kg]}.$$

Tuto rozdělíme na dva stupně o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , tj.

$$m_1 + m_2 = 9800 \text{ [kg]}.$$

Rovnice obsahuje dvě neznámé, proto je třeba jednu hmotnost zvolit. Volíme hmotnost druhého stupně  $m_2 = 3300 \text{ [kg]}$ . Pak hmotnost prvního stupně bude

$$m_1 = (m_1 + m_2) - m_2 = 9800 - 3300 = 6500 \text{ [kg]}.$$

- b) Stanovení počátečních hmotností jednotlivých stupňů nosné rakety

$$m_{01} \equiv m_0 = 10\,000 \text{ [kg]},$$

$$m_{02} = m_{01} - m_1 = 10\,000 - 6500 = 3500 \text{ [kg]}.$$

- c) Stanovení užitečných zatížení připadajících na jednotlivé stupně

$$m_{PL1} = m_{PL} + m_2 = 200 + 3300 = 3500 \text{ [kg]} \equiv m_{02},$$

$$m_{PL2} = m_{PL} = 200 \text{ [kg]}.$$

- d) Stanovení prázdných hmotností jednotlivých stupňů.

Dle zadání jsou konstrukční čísla u obou stupňů stejná  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,2$