

4. Aktivní pohyb kosmických těles

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_{PL}, \quad (4.111)$$

kde v souladu s rovnicí (4.79) platí $m_1 = m_{E1} + m_{P1}$ a $m_2 = m_{E2} + m_{P2}$. Tyto vztahy představují pro každý stupeň součet jeho prázdné hmotnosti a hmotnosti pohonných látek v daném stupni.

Pro každý stupeň rakety sestavíme hmotnostní číslo dle vztahu (4.89) s přihlédnutím k rov. (4.90) a (4.93)

$$\mu_1 = \frac{m_{01}}{m_{f1}} = \frac{m_1 + m_{PL1}}{m_{E1} + m_{PL1}} = \frac{m_1 + (m_2 + m_{PL})}{\varepsilon_1 m_1 + (m_2 + m_{PL})}, \quad (4.112)$$

$$\mu_2 = \frac{m_{02}}{m_{f2}} = \frac{m_2 + m_{PL}}{m_{E2} + m_{PL}} = \frac{m_2 + m_{PL}}{\varepsilon_2 m_2 + m_{PL}}. \quad (4.113)$$

Z uvedených vztahů si vyjádříme hmotnosti jednotlivých stupňů. Nejdříve z rov. (4.113) nalezneme hmotnost druhého stupně v závislosti na hmotnosti užitečného zatížení

$$m_2 = \frac{\mu_2 - 1}{1 - \mu_2 \varepsilon_2} m_{PL}. \quad (4.114)$$

Poté z rov. (4.112) stanovíme hmotnost prvního stupně v závislosti na hmotnosti druhého stupně a hmotnosti užitečného zatížení

$$m_1 = \frac{\mu_1 - 1}{1 - \mu_1 \varepsilon_1} (m_2 + m_{PL}). \quad (4.115)$$

Nyní sestavíme výraz pro poměr vzletové hmotnosti dle rov. (4.111) ku hmotnosti platícího zatížení a rozšíříme jej pomocí výrazu $(m_2 + m_{PL})$ na součin dvou zlomků níže uvedeným způsobem

$$\frac{m_0}{m_{PL}} = \frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} \frac{m_2 + m_{PL}}{m_{PL}}. \quad (4.116)$$

V dalším kroku upravíme první zlomek uvedeného součinu v rov. (4.116) následujícím způsobem tak, aby byla zachována identita

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL} + \varepsilon_1 m_1 - \varepsilon_1 m_1} \frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}.$$

Roznásobením jmenovatele obdržíme mezivýsledek

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1)(m_1 + m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL}) - \varepsilon_1 (m_1 + m_2 + m_{PL})}.$$

V posledním kroku dělíme čitatele i jmenovatele výrazem $(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL})$

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1) \frac{(m_1 + m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL})}}{1 - \varepsilon_1 \frac{(m_1 + m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL})}}.$$

S přihlédnutím k rov. (4.112) můžeme uvedený vztah přepsat na jednodušší zápis takto

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1) \mu_1}{1 - \varepsilon_1 \mu_1}. \quad (4.117)$$

Vraťme se opět k rov. (4.116) a upravme její druhý člen součinu obdobným způsobem jako v předchozím případě

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_{PL}, \quad (4.111)$$

kde v souladu s rovnicí (4.79) platí $m_1 = m_{E1} + m_{P1}$ a $m_2 = m_{E2} + m_{P2}$. Tyto vztahy představují pro každý stupeň součet jeho prázdné hmotnosti a hmotnosti pohonných látek v daném stupni.

Pro každý stupeň rakety sestavíme hmotnostní číslo dle vztahu (4.89) s přihlédnutím k rov. (4.90) a (4.93)

$$\mu_1 = \frac{m_{01}}{m_{f1}} = \frac{m_1 + m_{PL1}}{m_{E1} + m_{PL1}} = \frac{m_1 + (m_2 + m_{PL})}{\varepsilon_1 m_1 + (m_2 + m_{PL})}, \quad (4.112)$$

$$\mu_2 = \frac{m_{02}}{m_{f2}} = \frac{m_2 + m_{PL}}{m_{E2} + m_{PL}} = \frac{m_2 + m_{PL}}{\varepsilon_2 m_2 + m_{PL}}. \quad (4.113)$$

Z uvedených vztahů si vyjádříme hmotnosti jednotlivých stupňů. Nejdříve z rov. (4.113) nalezneme hmotnost druhého stupně v závislosti na hmotnosti užitečného zatížení

$$m_2 = \frac{\mu_2 - 1}{1 - \mu_2 \varepsilon_2} m_{PL}. \quad (4.114)$$

Poté z rov. (4.112) stanovíme hmotnost prvního stupně v závislosti na hmotnosti druhého stupně a hmotnosti užitečného zatížení

$$m_1 = \frac{\mu_1 - 1}{1 - \mu_1 \varepsilon_1} (m_2 + m_{PL}). \quad (4.115)$$

Nyní sestavíme výraz pro poměr vzletové hmotnosti dle rov. (4.111) ku hmotnosti platícího zatížení a rozšíříme jej pomocí výrazu $(m_2 + m_{PL})$ na součin dvou zlomků níže uvedeným způsobem

$$\frac{m_0}{m_{PL}} = \frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} \frac{m_2 + m_{PL}}{m_{PL}}. \quad (4.116)$$

V dalším kroku upravíme první zlomek uvedeného součinu v rov. (4.116) následujícím způsobem tak, aby byla zachována identita

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL} + \varepsilon_1 m_1 - \varepsilon_1 m_1} \frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}.$$

Roznásobením jmenovatele obdržíme mezivýsledek

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1)(m_1 + m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL}) - \varepsilon_1(m_1 + m_2 + m_{PL})}.$$

V posledním kroku dělíme čitatele i jmenovatele výrazem $(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL})$

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1) \frac{(m_1 + m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL})}}{1 - \varepsilon_1 \frac{(m_1 + m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_1 m_1 + m_2 + m_{PL})}}.$$

S přihlédnutím k rov. (4.112) můžeme uvedený vztah přepsat na jednodušší zápis takto

$$\frac{m_1 + m_2 + m_{PL}}{m_2 + m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1)\mu_1}{1 - \varepsilon_1 \mu_1}. \quad (4.117)$$

Vraťme se opět k rov. (4.116) a upravme její druhý člen součinu obdobným způsobem jako v předchozím případě

(4.111)

$$\frac{m_2 + m_{PL}}{m_{PL}} = \frac{m_2 + m_{PL}}{m_{PL} + \varepsilon_2 m_2 - \varepsilon_2 m_2} \frac{1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} = \frac{(1 - \varepsilon_2)(m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_2 m_2 + m_{PL}) - \varepsilon_2(m_2 + m_{PL})}$$

Čitatele i jmenovatele dělíme výrazem $(\varepsilon_2 m_2 + m_{PL})$

(4.112)

$$\frac{m_2 + m_{PL}}{m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_2) \frac{(m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_2 m_2 + m_{PL})}}{1 - \varepsilon_2 \frac{(m_2 + m_{PL})}{(\varepsilon_2 m_2 + m_{PL})}}$$

Využitím rov. (4.113) obdržíme konečný výraz ve tvaru

(4.113)

$$\frac{m_2 + m_{PL}}{m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_2)\mu_2}{1 - \varepsilon_2\mu_2} \quad (4.118)$$

z rov. (4.113)
o zatížení

Získané výrazy (4.117) a (4.118) dosadíme do vztahu pro poměr vzletové hmotnosti a užitečného zatížení (4.116)

(4.114)

$$\frac{m_0}{m_{PL}} = \frac{(1 - \varepsilon_1)\mu_1}{1 - \varepsilon_1\mu_1} \frac{(1 - \varepsilon_2)\mu_2}{1 - \varepsilon_2\mu_2} \quad (4.119)$$

na hmotnosti

Logaritmováním tohoto vztahu obdržíme

(4.115)

$$\ln \frac{m_0}{m_{PL}} = \ln \frac{(1 - \varepsilon_1)\mu_1}{1 - \varepsilon_1\mu_1} + \ln \frac{(1 - \varepsilon_2)\mu_2}{1 - \varepsilon_2\mu_2}$$

ku hmotnosti
u zlomků níže

Následnou úpravou pravé strany rovnice získáváme

(4.116)

$$\ln \frac{m_0}{m_{PL}} = [\ln(1 - \varepsilon_1) + \ln \mu_1 - \ln(1 - \varepsilon_1\mu_1)] + [\ln(1 - \varepsilon_2) + \ln \mu_2 - \ln(1 - \varepsilon_2\mu_2)]. \quad (4.120)$$

) následujícím

Z uvedené rovnice je zřejmé, že pro zadané užitečné zatížení m_{PL} se hodnota $\ln(m_0/m_{PL})$ trvale zvětšuje s rostoucí vzletovou hmotností. Derivace $\ln(m_0/m_{PL})$ podle vzletové hmotnosti je kladná

$$\frac{d}{dm_0} \left(\ln \frac{m_0}{m_{PL}} \right) = \frac{d}{dm_0} (\ln m_0 - \ln m_{PL}) = \frac{1}{m_0} > 0.$$

Vraťme se opět k rovnici (4.11) pro finální rychlost víceúrovňové nosné rakety. Pro náš případ platí

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = W_{ef1} \ln \mu_1 + W_{ef2} \ln \mu_2. \quad (4.121)$$

Pro danou finální rychlost V_f přepíšeme rov. (4.121) na rovnici, která nyní představuje vazební podmínku

$$V_f - W_{ef1} \ln \mu_1 - W_{ef2} \ln \mu_2 = 0. \quad (4.122)$$

Zavedením Lagrangeova multiplikátoru $\hat{\lambda}$ dle metody neurčitých koeficientů dle [58] sestavíme Lagrangeovu funkci kombinací rov. (4.120) a vazební podmínky (4.122)

(4.117)

$$F(\mu, \hat{\lambda}) = [\ln(1 - \varepsilon_1) + \ln \mu_1 - \ln(1 - \varepsilon_1\mu_1)] + [\ln(1 - \varepsilon_2) + \ln \mu_2 - \ln(1 - \varepsilon_2\mu_2)] + \hat{\lambda}(V_f - W_{ef1} \ln \mu_1 - W_{ef2} \ln \mu_2). \quad (4.123)$$

ým způsobem

Extrémní hodnota $\ln(m_0/m_{PL})$ a tím pádem také m_0 při zadané finální rychlosti bude odpovídat takovým hodnotám hmotnostních čísel μ_1 a μ_2 , pro něž platí, že parciální derivace Lagrangeovy funkce jsou nulové

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \mu_1} &= \frac{1}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 \mu_1} - \hat{\lambda} \frac{W_{ef1}}{\mu_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \mu_2} &= \frac{1}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2 \mu_2} - \hat{\lambda} \frac{W_{ef2}}{\mu_2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \hat{\lambda}} &= V_f - W_{ef1} \ln \mu_1 - W_{ef2} \ln \mu_2 = 0.\end{aligned}\quad (4.124)$$

Z uvedených rovnic získáme výrazy pro hmotnostní čísla jednotlivých stupňů rakety

$$\mu_1 = \frac{\hat{\lambda} W_{ef1} - 1}{\hat{\lambda} \varepsilon_1 W_{ef1}}, \quad (4.125)$$

$$\mu_2 = \frac{\hat{\lambda} W_{ef2} - 1}{\hat{\lambda} \varepsilon_2 W_{ef2}}. \quad (4.126)$$

Dosazením získaných výrazů pro hmotnostní čísla μ_1 a μ_2 do výrazu pro finální rychlost dostáváme rovnici pro nalezení Lagrangeova multiplikátoru $\hat{\lambda}$

$$W_{ef1} \ln \left(\frac{\hat{\lambda} W_{ef1} - 1}{\hat{\lambda} \varepsilon_1 W_{ef1}} \right) + W_{ef2} \ln \left(\frac{\hat{\lambda} W_{ef2} - 1}{\hat{\lambda} \varepsilon_2 W_{ef2}} \right) = V_f. \quad (4.127)$$

Iterační metodou nalezneme z uvedené rovnice Lagrangeův multiplikátor $\hat{\lambda}$, který zpětně dosadíme do rovnic (4.125) a (4.126) odkud obdržíme hodnoty obou hmotnostních čísel μ_1 a μ_2 . Pomocí nich, spolu s uvažovanými konstrukčními čísly ε a specifickými impulsy ($I_{sp} = W_{ef}$) pro požadované užitečné zatížení m_{pL} jsme schopni z rovnic (4.114) a (4.115) konečně určit hmotnosti jednotlivých stupňů nosné rakety m_1 a m_2 .

Zobecnění metody pro vícestupňové nosné rakety

Pro n -stupňovou nosnou raketu přepíšeme Lagrangeovu funkci (4.123) na obecný tvar

$$F(\mu, \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^n [\ln(1 - \varepsilon_i) + \ln \mu_i - \ln(1 - \varepsilon_i \mu_i)] - \hat{\lambda} \left(V_f - \sum_{i=1}^n W_{efi} \ln \mu_i \right). \quad (4.128)$$

Následuje stejná optimalizační procedura jako v předchozím případě pro nalezení výrazů pro hmotnostní čísla všech n stupňů, které dosadíme do rovnice pro finální rychlost a obdržíme

$$\sum_{i=1}^n W_{efi} \ln \left(\frac{\hat{\lambda} W_{efi} - 1}{\hat{\lambda} \varepsilon_i W_{efi}} \right) = V_f, \quad (4.129)$$

respektive po rozepsání logaritmu můžeme rovnici (4.129) přepsat takto

$$\sum_{i=1}^n W_{efi} \ln(\hat{\lambda} W_{efi} - 1) - \ln \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n W_{efi} - \sum_{i=1}^n W_{efi} \ln(\varepsilon_i W_{efi}) = V_f. \quad (4.130)$$

Následuje řešení rov. (4.130) pro nalezení Lagrangeova multiplikátoru $\hat{\lambda}$ běžnou iterační metodou. Poté jej dosadíme spolu se známými hodnotami ε_i a W_{efi} do rovnic, které

odpovídají výše uvedeným rovnicím (4.125), a (4.126), avšak v tomto případě pro všechny stupně, takže nabývají následující obecný tvar

$$(4.124) \quad \mu_i = \frac{\hat{\lambda} W_{efi} - 1}{\hat{\lambda} \varepsilon_i W_{efi}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.131)$$

Z uvedených vztahů získáváme hmotnostní čísla každého stupně. Posledním krokem je výpočet hmotností jednotlivých stupňů z níže uvedených vztahů, které odpovídají rovnicím (4.114) a (4.115) uvedeným v předchozím případě

$$(4.125) \quad m_n = \frac{\mu_n - 1}{1 - \varepsilon_n \mu_n} m_{PL},$$

$$(4.126) \quad m_{n-1} = \frac{\mu_{n-1} - 1}{1 - \varepsilon_{n-1} \mu_{n-1}} (m_n + m_{PL}),$$

$$(4.127) \quad m_{n-2} = \frac{\mu_{n-2} - 1}{1 - \varepsilon_{n-2} \mu_{n-2}} (m_{n-1} + m_n + m_{PL}),$$

$$\vdots$$

$$(4.127) \quad m_1 = \frac{\mu_1 - 1}{1 - \varepsilon_1 \mu_1} (m_2 + m_3 + \dots + m_{PL}).$$

Nyní pokud máme výsledné hmotnosti jednotlivých stupňů, můžeme určit hmotnostní strukturu každého stupně nosné rakety. Prázdnou hmotnost každého stupně stanovíme pomocí odpovídajícího konstrukčního čísla dle vztahu

$$m_{Ei} = \varepsilon_i m_i. \quad (4.133)$$

Hmotnost pohonných látek připadající na každý stupeň určíme ze vztahu

$$m_{Pi} = m_i - m_{Ei}. \quad (4.134)$$

Příklad 4.4

Zadání:

Stanovte optimální rozložení základních hmotnostních položek třístupňové nosné rakety tak, aby dosáhla předepsané finální rychlosti V_f s daným užitečným zatížením m_{PL} . Specifické impulsy a konstrukční čísla jednotlivých stupňů jsou dány.

Potřebná data:

Užitečné zatížení	$m_{PL} = 2500 \text{ [kg]},$
Finální rychlost	$V_f = 9000 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$
Specifický impuls 1. stupně	$I_{sp1} = W_{ef1} = 4000 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$
Specifický impuls 2. stupně	$I_{sp2} = W_{ef2} = 3500 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$
Specifický impuls 3. stupně	$I_{sp3} = W_{ef3} = 3000 \text{ [ms}^{-1}\text{]},$
Konstrukční čísla	$\varepsilon_1 = 0,10, \quad \varepsilon_2 = 0,15, \quad \varepsilon_3 = 0,15 \text{ [1]}.$

Řešení:

a) Nejprve vypočteme potřebné položky rovnice (4.130). Po dosazení máme rovnici připravenou k řešení ve tvaru

4. Aktivní pohyb kosmických těles

$$4 \ln(4\hat{\lambda} - 1) - 3,5 \ln(3,5\hat{\lambda} - 1) - 3 \ln(3\hat{\lambda} - 1) - 10,5 \ln \hat{\lambda} + 8,3159 = 9.$$

- b) Řešením uvedené rovnice pomocí iterační metody je stanovena hodnota Lagrangeova multiplikátoru (přesnost iterace 10^{-8})

$$\hat{\lambda} = 0,416714 \text{ [km}^{-1}\text{s]}.$$

- c) Dosazením stanovené hodnoty Lagrangeova multiplikátoru do obecné rovnice (4.131) získáme hmotnostní čísla jednotlivých stupňů

$$\mu_1 = 4,0, \quad \mu_2 = 2,0958, \quad \mu_3 = 1,3339 \text{ [1]}.$$

- d) Z hmotnostních čísel dopočteme dle rovnic (4.132) hmotnosti jednotlivých stupňů

$$m_1 = 46052, \quad m_2 = 5663, \quad m_3 = 1044 \text{ [kg]}.$$

- e) Konečně můžeme z vypočtených hmotností jednotlivých stupňů a užitečného zatížení stanovit hmotnost celé nosné rakety, tj. vzletovou hmotnost

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_{PL} = 46052 + 5663 + 1044 + 2500 = 55259 \text{ [kg]}.$$

- f) Výpočet prázdných hmotností jednotlivých stupňů stanovíme pomocí zadaných konstrukčních čísel a vypočtených hmotností dle vztahu (4.133)

$$m_{E1} = 0,10(46052) = 4605 \text{ [kg]},$$

$$m_{E2} = 0,15(5663) = 850 \text{ [kg]},$$

$$m_{E3} = 0,15(1044) = 157 \text{ [kg]}.$$

- g) Celková prázdná hmotnost nosné rakety pak činí

$$m_E = m_{E1} + m_{E2} + m_{E3} = 4605 + 850 + 157 = 5612 \text{ [kg]}.$$

- h) Výpočet potřebných pohonných látek v každém stupni stanovíme dle rovnice (4.134)

$$m_{P1} = m_1 - m_{E1} = 46052 - 4605 = 41447 \text{ [kg]},$$

$$m_{P2} = m_2 - m_{E2} = 5663 - 850 = 4813 \text{ [kg]},$$

$$m_{P3} = m_3 - m_{E3} = 1044 - 157 = 887 \text{ [kg]}.$$

- i) Celkové potřebné množství pohonných látek představuje hmotnost

$$m_P = m_{P1} + m_{P2} + m_{P3} = 41447 + 4813 + 887 = 47147 \text{ [kg]}.$$

- j) Pro úplnost stanovíme poměrné hmotnosti jednotlivých částí nosné rakety

- poměrná prázdná hmotnost nosné rakety

$$\hat{m}_E = \frac{m_E}{m_0} = \frac{5612}{55259} = 0,102$$

- poměrné kilogramové množství pohonných látek

$$\hat{m}_P = \frac{m_P}{m_0} = \frac{47147}{55259} = 0,853$$

- poměrná hmotnost užitečného zatížení

$$\hat{m}_{PL} = \frac{m_{PL}}{m_0} = \frac{2500}{55259} = 0,045.$$

- k) Pro kontrolu ještě sestavíme rovnici existence nosné rakety, abychom ověřili správnost výpočtu jednotlivých hmotnostních položek

$$\hat{m}_E + \hat{m}_P + \hat{m}_{PL} = 0,102 + 0,853 + 0,045 = 1.$$

Rovnice existence nosné rakety je splněna.

4.5 Vypuštění kosmického tělesa na oběžnou dráhu

Vyvedení umělé družice Země, resp. jakéhokoliv jiného kosmického tělesa na oběžnou dráhu patří mezi důležité úlohy mechaniky kosmického letu. Při volbě a přípravě způsobu vypuštění umělé družice je třeba zohlednit řadu faktorů, mezi něž patří:

- Energetická náročnost, výška oběžné dráhy, spotřeba pohonných látek, doba letu
- Hmotnostní charakteristiky nosných raket
- Způsoby řízení tahu a sklonu dráhy letu
- Možnosti sledování v průběhu vypuštění a dalších přeletech umělé družice
- Místo a azimut vypuštění, volnost území ve směru vzletu
- Míra zatížení - násobky zatížení s ohledem na posádku, užitečný náklad a pevnost konstrukce kosmického letadla (nosné rakety) apod.

Energetickou náročnost vypuštění umělé družice Země budeme vyjadřovat pomocí charakteristické rychlosti, která zahrnuje jak ekvivalent energie potřebné pro vyzvednutí umělé družice do zvolené výšky, tak část energie potřebné pro udělení rychlosti odpovídající kruhové oběžné dráze v dané výšce.

4.5.1 Charakteristická rychlost vypuštění umělé družice

Charakteristická rychlost V_{char} je definována pomocí celkové mechanické energie potřebné pro vypuštění umělé družice o jednotkové hmotnosti na kruhovou oběžnou dráhu v dané výšce. Zavedeme specifickou mechanickou energii jako mechanickou energii vztahovanou na jednotku hmotnosti

$$E' = \frac{E}{m}.$$

Pak celková specifická mechanická energie je dána součtem specifické potenciální a specifické kinetické energie

$$E' = E'_p + E'_k.$$

Specifická potenciální energie je v tomto případě část specifické energie potřebné k vyzvednutí umělé družice z povrchu Země na oběžnou dráhu ve výšce h , tj. do vzdálenosti $r = r_z + h$ od středu centrálního gravitačního pole. Specifickou potenciální energii stanovíme z práce vnější síly ($F = -F_g = \mu/r^2$)

$$E'_p = \int_{r_z}^r \frac{\mu}{r^2} dr = \mu \left(\frac{1}{r_z} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu}{r} \left(\frac{r}{r_z} - 1 \right) = V_I^2 \frac{h}{r_z}. \quad (4.135)$$

Specifická kinetická energie je část celkové specifické energie, která je potřebná k udělení první (kruhové) kosmické rychlosti $V = V_I = \sqrt{\mu/r}$

$$E'_k = \frac{1}{2} V_I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu}{r}. \quad (4.136)$$

A celková specifická energie je dána součtem obou výše stanovených specifických energií

$$E' = V_I^2 \frac{h}{r_z} + \frac{1}{2} V_I^2 = \frac{1}{2} V_I^2 \left(1 + \frac{2h}{r_z} \right). \quad (4.137)$$

Tuto celkovou potřebnou specifickou energii vyjádříme pomocí ekvivalentní specifické kinetické energie odpovídající hledané charakteristické rychlosti

4. Aktivní pohyb kosmických těles

$$E'_{K,ekv} = \frac{1}{2} V_{char}^2 = E'$$

Po dosažení za celkovou specifickou energii dle rov. (4.137) platí

$$\frac{1}{2} V_{char}^2 = \frac{1}{2} V_I^2 \left(1 + \frac{2h}{r_Z} \right),$$

odkud hledaná charakteristická rychlost je dána výrazem

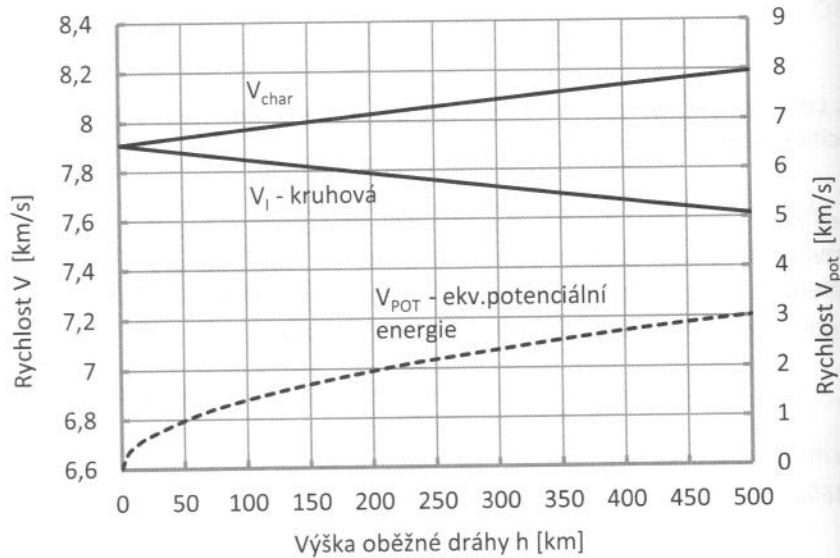
$$V_{char} = V_I \sqrt{1 + \frac{2h}{r_Z}}. \quad (4.138)$$

Dosadíme-li ještě za první (kruhovou) kosmickou rychlost $V_I = \sqrt{\mu/r}$, můžeme vztah zapsat takto

$$V_{char} = \sqrt{\frac{\mu}{r} \left(1 + \frac{2h}{r_Z} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r} \frac{r_Z + 2(r - r_Z)}{r_Z}}.$$

Vyloučením gravitačního parametru dle vztahu $\mu = g_0 r_Z^2$ obdržíme alternativní výraz pro charakteristickou rychlost ve tvaru

$$V_{char} = \sqrt{\frac{g_0 r_Z^2}{r} \frac{r_Z + 2(r - r_Z)}{r_Z}} = \sqrt{g_0 r_Z \frac{2r - r_Z}{r}}.$$



Obr. 4-15 Závislost charakteristické a kruhové rychlosti na výšce oběžné dráhy. Rychlost V_{POT} vyjadřuje část charakteristické rychlosti odpovídající potenciální energii družice ve výšce h .

A po dosažení za $r = r_Z + h$ obdržíme konečný výraz, který vyjadřuje charakteristickou rychlost potřebnou pro vyvedení umělé družice na kruhovou dráhu v závislosti na zadané výšce oběžné dráhy, ve tvaru

$$V_{char} = \sqrt{g_0 r_z \left(2 - \frac{r_z}{r_z + h} \right)}. \quad (4.139)$$

Pozn.: Charakteristická rychlost se v některé literatuře alternativně nazývá také jako *energetická charakteristická rychlost* a označuje se symbolem V_E , aby se zdůraznilo, že je založena na energetickém principu a odlišila se tak od Ciolkovského *ideální charakteristické rychlosti* dle rovnice (4.8). Závislost potřebné charakteristické rychlosti na výšce oběžné dráhy je znázorněna na obr. 4-15 ve srovnání s kruhovou rychlostí v téže výšce. Z obr. 4-15 je patrné, že přestože kruhová rychlost s výškou klesá, charakteristická rychlost úměrně roste. To je dáno růstem rychlostního ekvivalentu specifické potenciální energie, vyjádřeného rychlostí V_{POT} , který je úměrný výšce, do níž je kosmické těleso vyvedeno.

4.5.2 Trajektorie vyvedení kosmického tělesa na oběžnou dráhu

Doposud jsme rozebírali pouze vertikální vzlet i pokračující bezmotorový vertikální let rakety. To může postačit pro řešení letových výkonů toliko v omezených případech, mezi něž patří například vypouštění sondážních raket. Ve skutečnosti se nosné rakety s užitečným zatížením při vypouštění na oběžnou dráhu pohybují po křivočaré trajektorii. Zde se omezíme na trajektorie ležící ve vertikální rovině. Trajektorii pohybu nosné rakety během letu na oběžnou dráhu je možno rozdělit na atmosférickou část a na část trajektorie mimo vliv atmosféry. V každém případě je třeba nějakým vhodným způsobem řídit pohyb nosné rakety po křivočaré dráze.

Principiálně můžeme trajektorii pohybu nosné rakety po vzletu řídit dvěma způsoby:

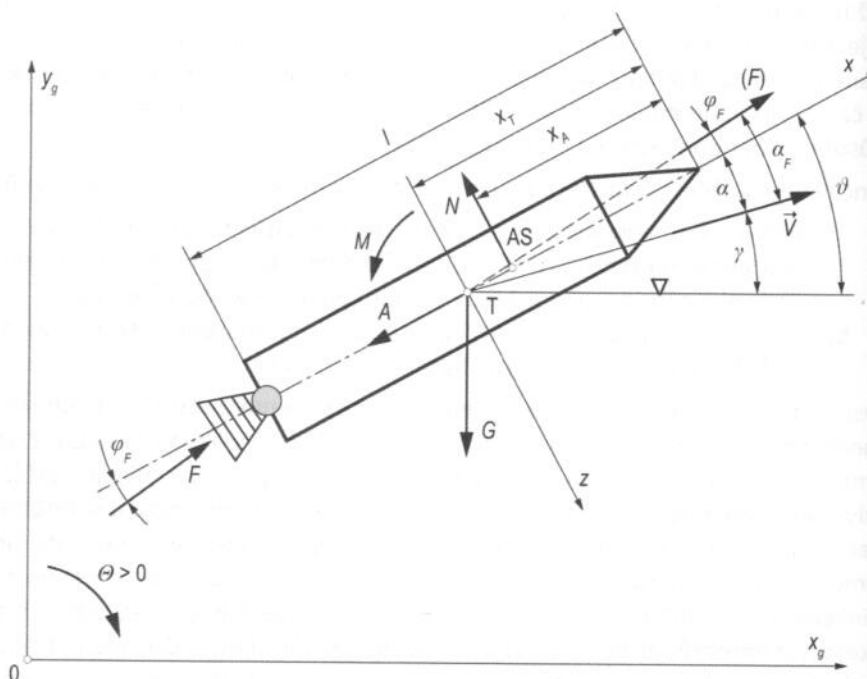
- Aktivním řízením vektoru tahu (tzv. vektorováním tahu) s dodatečným využitím aerodynamických sil. Avšak bohužel, v mimoatmosférické části trajektorie letu již není možno nosnou raketu řídit aerodynamickými orgány řízení.
- Balisticky s využitím gravitačního klopení (pootáčením nosné rakety kolem bočné osy y působením gravitačního zrychlení).

Nosné rakety určené k vyvedení kosmického tělesa (umělé družice) na oběžnou dráhu standardně vzletají kolmo (sklon dráhy letu $\gamma = 90^\circ$). Výjimečně vzletají z odpalovací rampy s určitým počátečním odklonem od vertikály ($\gamma < 90^\circ$). Byť je vertikální vzlet vždy doprovázen velkými gravitačními ztrátami, jako je tomu např. u sondážních raket, snahou je prolétávat relativně tenkou hustou vrstvou atmosféry co nejkratší dobu a při poměrně malém nárůstu rychlosti. Teprve po určité krátké době je nosná raketa účinkem změny směru tahu hlavních motorů nebo speciálních stabilizačních a řídicích raketových motorů, případně využitím aerodynamických orgánů klopení, odkloněna od vertikály na určitý počáteční sklon dráhy letu γ_0 . A to hlavně z důvodů snížení gravitačních ztrát. V další fázi se sklon dráhy letu postupně snižuje tak, aby ve výšce požadované oběžné dráhy dosáhl pokud možno nulové hodnoty ($\gamma = 0^\circ$). Zde vzniká otázka jakou dráhu zvolit, jak nosnou raketu řídit, aby byla její dráha optimální. V tomto případě stojíme před úlohou nalezení zákona řízení vektoru tahu tak, aby bylo možno na zadanou výšku orbitální dráhy dopravit co největší užitečné zatížení. To vede na variační úlohy, kterými je možno nalézt optimální trajektorie. Tyto matematické úlohy jdou nad rámec této knihy, a proto zájemce o tuto problematiku odkazujeme na speciální literaturu. V průběhu křivočarého letu je třeba se vystříhat velkých úhlů

náběhu. Tak jak postupně narůstá rychlost a dynamický tlak, vzniká vážné nebezpečí, že při nepřiměřeně velkých úhlech náběhu mohou aerodynamické síly způsobovat velké namáhání konstrukce nosné rakety. Proto je třeba udržovat úhly náběhu na přijatelných hodnotách, a v řadě případů na nulových hodnotách (viz gravitační klopení). Navíc, z důvodů hmotnostní úspornosti je konstrukce nosné rakety dosti poddajná. Pod vnějším zatížením vznikají velké příčné síly a ohybové momenty, které mohou vést až k destrukci nosné rakety. Lokálním deformacím nosných raket se čelí tím, že vnitřní prostor nosné rakety je často přetlakován. Aby se předešlo nepřiměřeně velkým zatížením konstrukce nosné rakety v atmosférické části trajektorie, obvykle se v kritických fázích cíleně snižuje tah tak, aby nebyl překročen dynamický tlak působící na nosnou raketu.

Trajektorie s řízením vektoru tahu při konstantní úhlové rychlosti klopení

Pro řešení naší úlohy zapíšeme pohybové rovnice nosné rakety v zemské souřadnicové soustavě (x_g, y_g, z_g) pevně spojené s nerotující Zemí dle definičního obr. 4-16. Osa y_g je kolineární se zemskou normálou.



Obr. 4-16 Vyvedení nosné rakety na oběžnou dráhu. Detailnější přehled působících sil na nosnou raketu a kinematických letových veličin během vzletu.

Soustavu rovnic pro pohyb nosné rakety ve vertikální rovině (x_g, y_g) tvoří dvě silové rovnice a jedna rovnice pro klopivý moment vztažený k těžišti

$$m\ddot{x}_g = F \cos(\vartheta + \varphi_F) - N \sin \vartheta - A \cos \vartheta, \quad (4.140)$$

$$m\ddot{y}_g = F \sin(\vartheta + \varphi_F) + N \cos \vartheta - A \sin \vartheta - G, \quad (4.141)$$

$$I_y \ddot{\vartheta} = -F(l - x_T) \sin \varphi_F + N(x_T - x_A). \quad (4.142)$$

Aerodynamické síly v uvedených rovnicích jsme vyjádřili, jak je v aerodynamice raket zvykem, v axiálním a normálovém směru. Místo vzlaku L používáme normálovou sílu N , která je kolmá na podélnou osu nosné rakety x (kladná v záporném smyslu kolmé osy z) a je dána vztahem

$$N = C_N \frac{1}{2} \rho V^2 S \quad (4.143)$$

a místo aerodynamického odporu D je zavedena axiální síla A , působící ve směru podélné osy nosné rakety x a je dána vztahem (kladná v záporném smyslu podélné osy)

$$A = C_A \frac{1}{2} \rho V^2 S. \quad (4.144)$$

Součinitele normálové síly C_N a axiální síly C_A souvisí s klasickými aerodynamickými součiniteli C_D, C_L dle vztahů

$$C_N = C_D \sin \alpha + C_L \cos \alpha, \quad (4.145)$$

$$C_A = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha. \quad (4.146)$$

Za vztažnou plochu S se volí průřezová plocha trupu nosné rakety. I_y je moment setrvačnosti kolem bočné osy y , ϑ je podélný sklon nosné rakety (úhel mezi lokálním horizontem a podélnou osou x), φ_F je úhel nastavení vektoru tahu vůči podélné ose x , x_T je vzdálenost těžiště od přídě nosné rakety, x_A je vzdálenost aerodynamického středu (působíště normálové síly N) od přídě nosné rakety a l je délka nosné rakety.

Ze zvolené podmínky konstantní úhlové rychlosti klopení vyplývá, že klopivé zrychlení vystupující na levé straně rov. (4.142) je nulové ($\ddot{\vartheta} = 0$). Budeme-li znát závislost normálové síly na čase i změnu polohy těžiště s časovou spotřebou pohonných látek můžeme stanovit potřebný úhel nastavení vektoru tahu dle vztahu

$$\varphi_F = \arcsin \left[\frac{N(x_T - x_A)}{F(l - x_T)} \right]. \quad (4.147)$$

V průběhu křivočarého stoupání nosné rakety se s časem plynule zmenšuje sklon dráhy letu z počáteční hodnoty γ_0 , úhlová rychlost klopení je záporná ($\dot{\vartheta} < 0$). Navíc v důsledku křivosti Země se podél dráhy letu mění lokální horizont vzhledem k horizontální rovině při vzletu. Změnu lze určit ze vztahu $dx_g = (r_z + y_g)d\theta$, kde $d\theta$ je změna lokálního horizontu v závislosti na změně polohy nad zakřiveným povrchem Země. Pak okamžitý sklon dráhy letu γ lze vyjádřit vztahem

$$\gamma = \gamma_0 + \dot{\vartheta}t + \int_0^{x_g} \frac{dx_g}{r_z + y_g}. \quad (4.148)$$

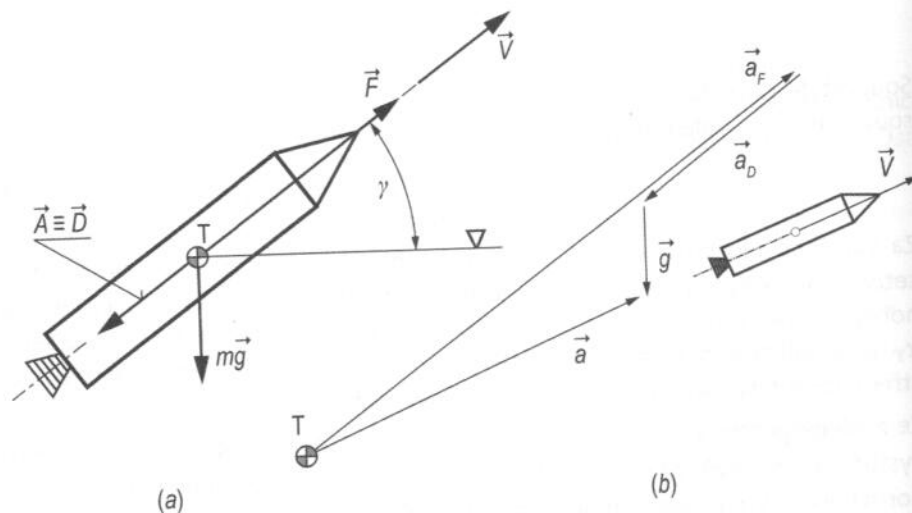
A potřebný úhel náběhu při konstantní úhlové rychlosti klopení nosné rakety je možno stanovit ze vztahu $V \sin \alpha = \dot{x}_g \sin(\alpha + \gamma) - \dot{y}_g \cos(\alpha + \gamma)$ odkud úhel náběhu

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{\dot{x}_g \sin(\alpha + \gamma) - \dot{y}_g \cos(\alpha + \gamma)}{(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.149)$$

Bohužel, řešení uvedených rovnic, z nichž lze určit zákon řízení, je v tomto případně schůdné jen použitím iteračních numerických metod.

Trajektorie s využitím gravitačního klopení

V praktických aplikacích je velmi často využíván způsob vyvedení kosmického tělesa na oběžnou dráhu po trajektorii, která je formována využitím gravitačního klopení. V tomto případě musí být vektor tahu stále orientován ve směru vektoru rychlosti letu, jak je uvedeno na obr. 4-17a. Nosná raketa je urychlována přebytkem tahu $\Delta F = F - D$ ve směru okamžitého vektoru rychlosti a zakřivování dráhy je způsobováno tíhovou silou $G = mg$. Na obr. 4-17b je současně znázorněn vektorový součet složek dílčích zrychlení, z něhož je zřejmý mechanismus zakřivování trajektorie nosné rakety.



Obr. 4-17 Vyvedení nosné rakety na oběžnou dráhu s využitím gravitačního klopení.

Vraťme se opět k obr. 4-8 a dříve odvozeným obecným pohybovým rovnicím (4.55) a (4.57), které přepíšeme na tvar

$$\dot{V} = \frac{F}{m} \cos(\alpha + \varphi_F) - \frac{D}{m} - g \sin \gamma, \quad (4.150)$$

$$-V\dot{\gamma} = -\frac{F}{m} \sin(\alpha + \varphi_F) - \frac{L}{m} + \left(g - \frac{V^2}{r_Z + h}\right) \cos \gamma. \quad (4.151)$$

Pro tento způsob vyvedení musí zároveň platit podmínka, že $\varphi_F = -\alpha$, neboli úhel mezi vektorem tahu a vektorem rychlosti $\alpha_F = 0$. Dosazením podmínek pro gravitační klopení $\alpha_F = \alpha + \varphi_F = 0$ a uvážením skutečnosti, že za těchto podmínek je vztlak nulový ($L = 0$) můžeme předchozí pohybové rovnice upravit takto

$$\dot{V} = \frac{F}{m} - \frac{D}{m} - g \sin \gamma, \quad (4.152)$$

$$-V\dot{\gamma} = \left(g - \frac{V^2}{r_Z + h}\right) \cos \gamma. \quad (4.153)$$

Doplníme soustavu rovnic ještě o kinematické vazby dle rov. (4.49) a (4.50). Předtím však rovnici (4.49) přepíšeme na tvar $(r_Z + h)\dot{\theta} = V \cos \gamma$ odkud výraz pro $\dot{\theta}$ dosadíme do vztahu $\dot{x}_g = r_Z \dot{\theta}$ pro výpočet vzdálenosti po povrchu Země

$$\dot{x}_g = \frac{r_z}{r_z + h} V \cos \gamma, \quad (4.154)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma. \quad (4.155)$$

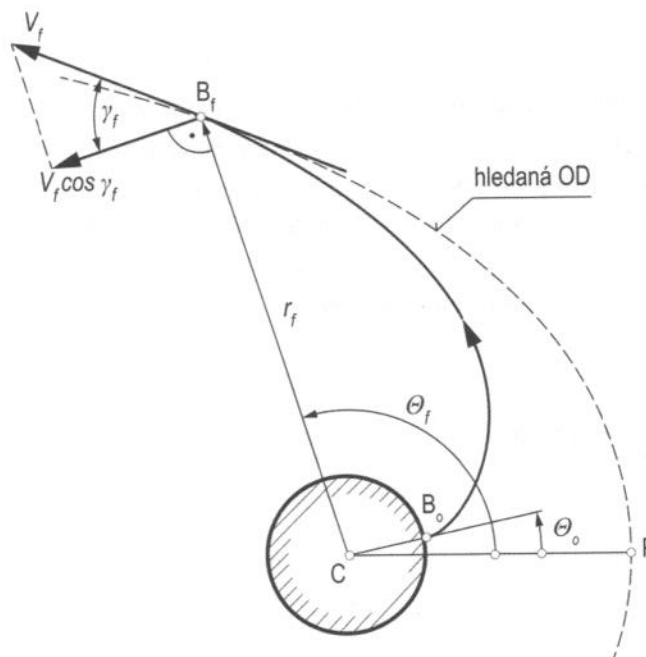
I v tomto případě je řešení výše uvedené soustavy rovnic schůdné jen použitím iteračních numerických metod, kde je třeba uvážit změnu hmotnosti nosné rakety v důsledku spotřebování pohonných látek, změnu hustoty vzduchu a odporu na čase, což činí úlohu velmi složitou. Nesmíme opomenout ani závislost tahu na čase. Z tohoto pohledu se úlohy mohou rozdělit na řešení s konstantním tahem ($F = konst$), dále na úlohy, kdy tah je úměrný změně hmotnosti, tj. ($F/mg = konst$) a nakonec pro volný bezmotorový balistický let platí $F = 0$.

Připomeňme, že rovnice (4.152) platí jen pro atmosférický úsek trajektorie. Na úseku letu nosné rakety mimo atmosféru se rovnice zjednoduší díky nulovosti aerodynamického odporu na tvar

$$\dot{V} = \frac{F}{m} - g \sin \gamma. \quad (4.156)$$

V literatuře lze najít mnoho numerických metod řešení, v nichž se pro zjednodušení používají různé bezrozměrové tvary pohybových rovnic, např. [51].

4.5.3 Stanovení oběžné dráhy z finálních podmínek při dohoření pohonných látek



Obr. 4-18 Stanovení dráhy z parametrů v koncovém bodě trajektorie vyvedení.

Předpokládejme, že známe polohový vektor $r = r_f$ a kinematické veličiny $V = V_f$ a $\gamma = \gamma_f$ v koncovém bodě trajektorie, po níž bylo vyvedeno kosmické těleso na oběžnou

dráhu (obr. 4-18). Máme odpovědět na otázku, na jaký typ dráhy se kosmické těleso ve skutečnosti dostalo.

Ze známých veličin v koncovém bodě B_f můžeme přímo určit specifický moment hybnosti. Pro náš případ jej stanovíme pomocí vztahů (3.30) a (4.49)

$$h = r_f^2 \dot{\Theta}_f = r_f (r_f \dot{\Theta}_f) = r_f V_f \cos \gamma_f. \quad (4.157)$$

Z podmínek v bodě B_f můžeme nalézt také energetickou konstantu dle vztahu (3.90)

$$\mathcal{E} = \frac{V_f^2}{2} - \frac{\mu}{r_f}. \quad (4.158)$$

Pro nalezení excentricity použijeme opět výraz (3.90) pro energetickou konstantu, který nyní zapíšeme pro podmínky v perigeu P , kam postupně dosadíme další podmínky v perigeu. Nejprve dosadíme dle rov. (3.93) za $V_p = h/r_p$ a poté dosadíme za r_p dle rovnice dráhy (3.44) $r_p = (h^2/\mu)/(1+e)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\mu^2}{2h^2}(1+e)^2 - \frac{\mu^2}{h^2}(1+e) = -\frac{1\mu^2}{2h^2}(1+e)(1-e), \\ \mathcal{E} &= -\frac{1\mu^2}{2h^2}(1-e^2). \end{aligned} \quad (4.159)$$

Uvedený vztah nám poslouží ke stanovení výrazu pro hledanou excentricitu dráhy ve tvaru

$$e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E} \frac{h^2}{\mu^2}}, \quad (4.160)$$

odkud podle hodnoty excentricity vyplyne také typ dráhy.

Velikost příslušné dráhy stanovíme dle hodnoty délky hlavní poloosy a , kterou určíme dle vztahu (3.94) $a = -\mu/2\mathcal{E}$.

Pomocí hlavní poloosy a a excentricity určíme vzdálenost perigea dle vztahu (3.58)

$$r_p = a(1-e).$$

Nakonec dle rovnice dráhy (3.44) zapsanou pro podmínky v bodě B_f

$$r_f = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1+e \cos \Theta_f}, \quad (4.161)$$

získáme výraz pro pravou anomálii dle vztahu

$$\Theta_f = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{h^2}{\mu r_f} - 1 \right) \right]. \quad (4.162)$$

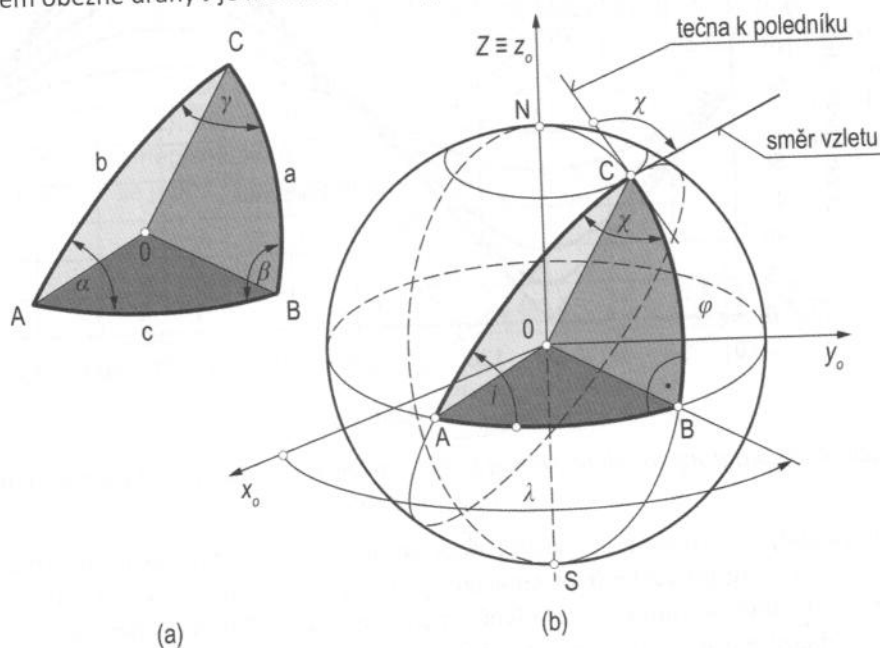
Nyní máme k dispozici všechny určující parametry pro jednoznačnou identifikaci dráhy v její rovině pouze na základě znalosti parametrů v bodě B_f .

4.5.4 Vliv zeměpisné šířky a azimutu na sklon oběžné dráhy

Pro vyvedení umělé družice na oběžnou dráhu s požadovaným sklonem i je rozhodující místo vzletu a samozřejmě směr vypuštění. Na obr. 4-19b je znázorněno místo vzletu (bod C), které leží na velké kružnici a je dáno zeměpisnými souřadnicemi (λ, φ) . Směr

vzletu je určen úhlem azimutu χ . Na obou uvedených parametrech bude záviset poloha roviny oběžné dráhy, vyjádřená sklonem dráhy i . Připomeňme, že sklon dráhy může nabývat pouze kladných hodnot v rozsahu ($0^\circ \leq i \leq 180^\circ$), azimut je definován kladně v celém rozsahu úhlů ($0^\circ \div 360^\circ$) a je měřen od severu ve směru pohybu hodinových ručiček.

Jak je patrné z obr. 4-19b vazba mezi zeměpisnou šířkou φ , azimutem χ a hledaným sklonem oběžné dráhy i je možno stanovit pomocí sférického trojúhelníku (ABC).



Obr. 4-19 Sférický trojúhelník definující závislost sklonu oběžné dráhy na poloze místa a směru vzletu kosmického tělesa.

Z geometrie obecného sférického trojúhelníku (ABC) znázorněného na obr. 4-19a je známo, že relace mezi úhly (α, β, γ) a stranami (abc) je dána kosinovou větou pro úhly [58] ve tvaru

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a. \quad (4.163)$$

Výrazy pro další úhly lze nalézt cyklickou záměnou úhlů a stran. Zdůrazněme, že strany jsou rovněž vyjádřeny úhlovými veličinami. Z porovnání sférických trojúhelníků (ABC) v obr. 4-19a a 4-19b vyplývá, že pro náš případ platí

$$\alpha = i, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = \chi, \quad a = \varphi.$$

Po dosazení do rov. (4.163) obdržíme

$$\cos i = -\cos 90^\circ \cos \chi + \sin 90^\circ \sin \chi \cos \varphi,$$

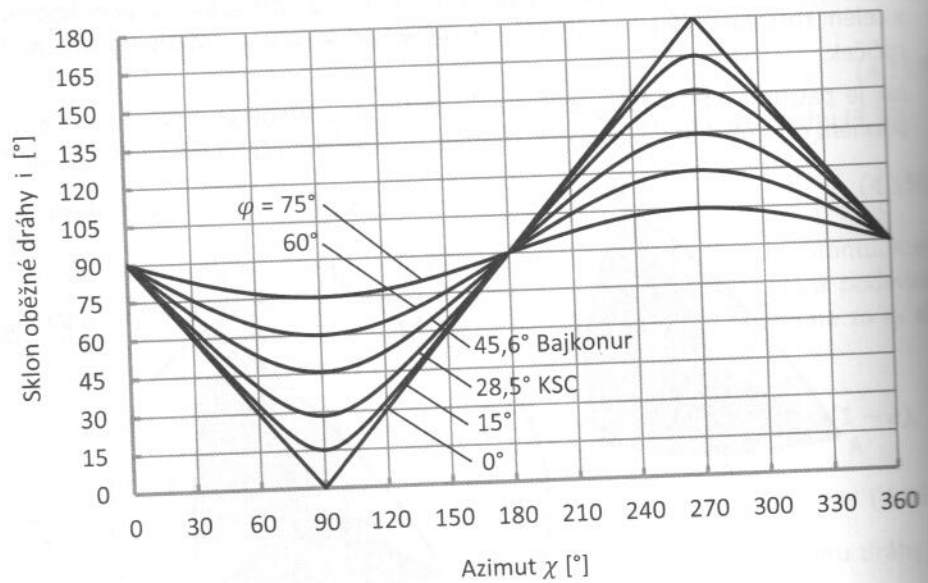
odkud plyne jednoduchý výsledný výraz pro určení sklonu oběžné dráhy v závislosti na zeměpisné šířce a azimutu ve tvaru

$$\cos i = \sin \chi \cos \varphi. \quad (4.164)$$

Grafické znázornění závislosti sklonu oběžné dráhy na azimutu pro několik zeměpisných šířek je uvedeno na obr. 4-20. Do diagramu jsou zahrnuty také závislosti pro polohy

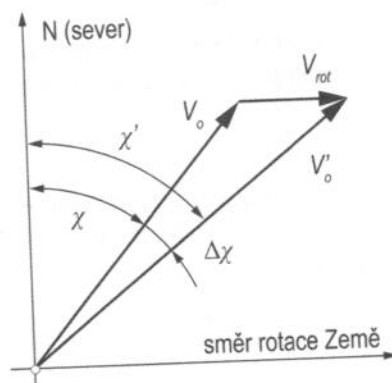
4. Aktivní pohyb kosmických těles

dvou nejznámějších kosmodromů, mezi něž patří americké KSC na Floridě ($\varphi = 28,5^\circ$) a ruský Bajkonur v Kazachstánu ($\varphi = 45,6^\circ$).



Obr. 4-20 Diagram závislosti sklonu oběžné dráhy na azimutu pro vybrané zeměpisné šířky místa vzletu.

Rov. (4.164) je odvozena bez vlivu rotace Země nebo planety. Pokud uvážíme otáčení Země, která rotuje východním směrem, je třeba zahrnout rotační složku rychlosti a korigovat úhel azimutu o relativně malý úhel $\Delta\chi$. Změna výsledné rychlosti a odpovídajícího azimutu je znázorněna pomocí rychlostního trojúhelníku uvedeného na obr. 4-21.

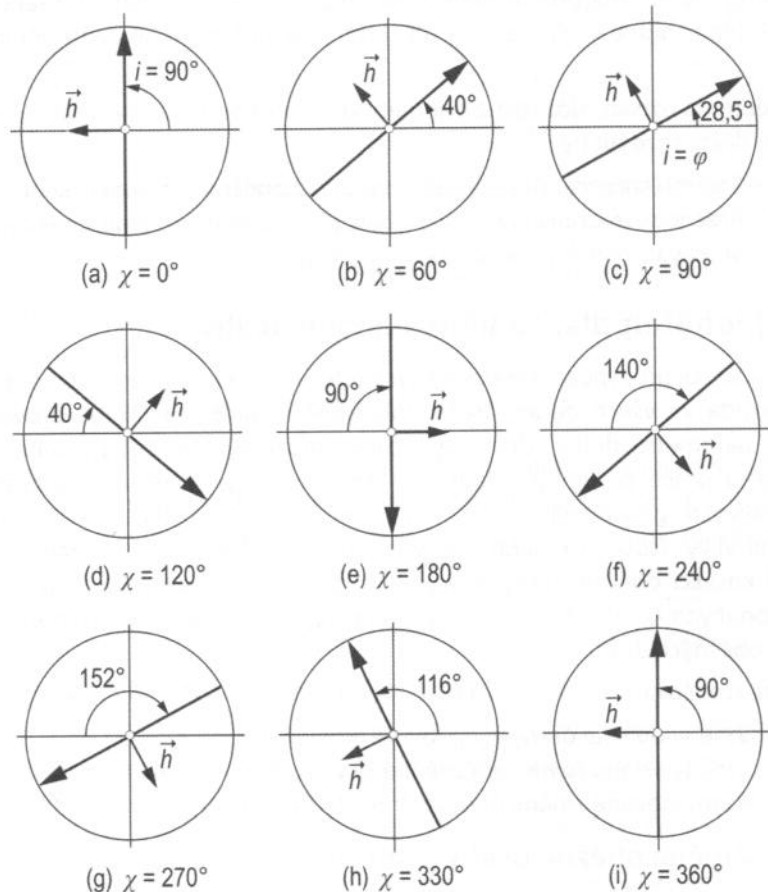


Obr. 4-21 Oprava rychlosti a azimutu na vliv rotace Země.

Zatímco změna azimutu $\Delta\chi$ je malá a lze ji zanedbat, rotační rychlost Země je užitečným energetickým příspěvkem při vyvedení kosmického tělesa na oběžnou dráhu, zejména při velkých azimutech χ v blízkosti rovníku. Rotační složka rychlosti je dána vztahem

$$V_{rot} = r_Z \omega_Z \cos \varphi, \quad (4.165)$$

kde úhlová rychlost rotace Země $\omega_Z = 7,292 \cdot 10^{-5} [s^{-1}]$. Největší příspěvek se projeví na rovníku, kde rotační rychlost $V_{rot} = 465 [ms^{-1}]$ a klesá na nulu na pólech. Proto je výhodné vzlet směřovat východním směrem. Jak vyplývá z rovnice (4.164), při vzletu východním směrem ($\chi = 90^\circ$) z místa nacházejícím se přímo na rovníku ($\varphi = 0^\circ$) lze vyvést kosmické těleso na rovníkovou oběžnou dráhu s nulovým sklonem ($i = 0$). Z téže rov. (4.164) vyplývá, že při vzletu z kteréhokoliv jiného místa ($\varphi \neq 0^\circ$) bude kosmické těleso vyvedeno vždy na oběžnou dráhu s nenulovým sklonem ($i \neq 0^\circ$). Pro lepší představu je na obr. 4-22 znázorněno několik případů vyjadřujících souvislosti mezi zvoleným azimutem χ a odpovídajícím sklonem dráhy i při vzletu z kosmodromu KSC o zeměpisné šířce $\varphi = 28,5^\circ$. Srovnej s obr. 4-20. Za povšimnutí stojí speciální případ (obr. 4-22c), kdy při vzletu východním směrem je hodnota sklonu dráhy letu rovna právě zeměpisné šířce ($i = \varphi$). Z obr. 4-22 je zároveň patrné, že pro azimuty větší jak 180° se jedná již o nepřímé (retrográdní) oběžné dráhy.



Obr. 4-22 Přehledné znázornění závislosti sklonu oběžné dráhy na azimutu pro zeměpisnou šířku $\varphi = 28,5^\circ$.

(4.165)

5 MANÉVROVÁNÍ NA OBĚŽNÉ DRÁZE

Manévrováním na oběžné dráze rozumíme jakoukoliv aktivní změnu dráhy. Jelikož oběžná dráha je v každém okamžiku jednoznačně definována vektorem rychlosti, pak manévrování na oběžné dráze je možno realizovat pouhou změnou vektoru rychlosti. To znamená, že dráhu můžeme měnit buď jen změnou velikosti rychlosti, nebo jen změnou jejího směru, anebo změnou obojího současně. V dalších rozborech budeme uvažovat, že změny dráhy jsou prováděny použitím rychlostního impulsu, který bude vyvolán pomocí manévrovacích reaktivních motorů. Přičemž impulsem rozumíme okamžitou změnu vektoru rychlosti. Změny oběžné dráhy mohou být prováděny buď jen jedním impulsem, nebo dvěma a více impulsy nutnými pro dosažení žádané cílové oběžné dráhy. Kromě propulzního účinku manévrovacích a řídicích reaktivních motorů neuvažujeme žádné další působící síly, kromě účinků jednoho centrálního gravitačního pole.

S ohledem na rozsah, složitost a energetickou náročnost manévru můžeme manévry na oběžné dráze rozdělit na:

- a) Změny (korekce) dráhy (výchozí a cílová oběžná dráha mají společný bod),
- b) Přejížděvací dráhy (výchozí a cílová oběžná dráha nemají společný bod),
- c) Setkávací manévry (kosmická navigace).

5.1 Jednoimpulsní změny oběžné dráhy

Velmi často se při vypouštění kosmických těles na oběžnou dráhu stává, že cílová dráha neodpovídá ve všech parametrech dráze požadované a je třeba provést dodatečné úpravy parametrů dráhy. Odchytky v cílové dráze mohou být způsobeny odchytkami v průběhu práce pohonných jednotek nosné rakety, okamžitým stavem atmosféry, proměnlivostí gravitačního pole a dalšími, mnohdy těžko postižitelnými vnějšími rušivými vlivy. Jsou-li zmíněné odchytky oběžné dráhy relativně malé, pak je namíste použití korekcí oběžné dráhy, kterými se dolaďuje požadovaná cílová oběžná dráha. Vedle pouhých korekcí to mohou být samozřejmě i náročnější, programově plánované změny oběžných drah.

Budeme rozlišovat:

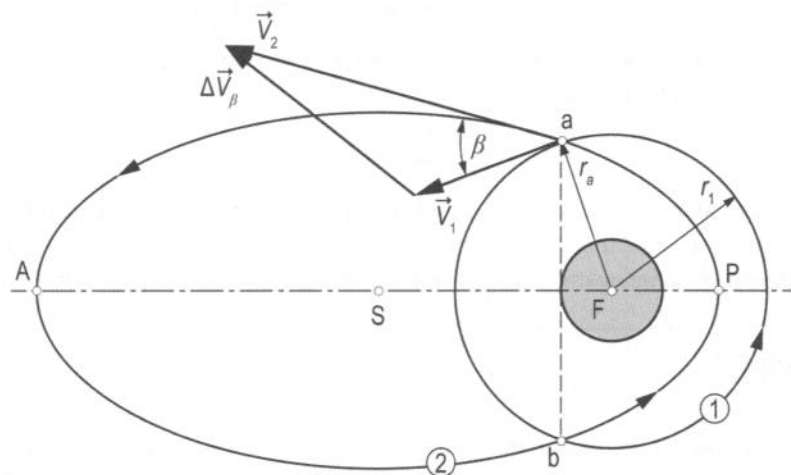
- a) Změny oběžné dráhy v její rovině (koplanární),
- b) Změny sklonu roviny oběžné dráhy v prostoru (nekoplanární),
- c) Kombinované změny oběžné dráhy (tvaru i polohy v prostoru).

5.1.1 Změna oběžné dráhy v její rovině

Jednoimpulsní změna oběžné dráhy v rovině je možná jen v případě, že výchozí dráha (1) a cílová dráha (2) mají společný bod (průsečík nebo dotýkový bod). Na obrázku 5-1 je naznačeno řešení pro nezbytný vektorový rychlostní impuls pro přechod z oběžné dráhy (1) na žádanou cílovou dráhu (2). Vektor rychlosti na výchozí dráze je \vec{V}_1 a vektor rychlosti letu na žádané cílové dráze v jejich společném bodě je \vec{V}_2 . Vektor

potřebného rychlostního impulsu bude dán vektorovým rozdílem obou uvedených vektorů rychlosti

$$\Delta \vec{V}_\beta = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1). \quad (5.1)$$



Obr. 5-1 Jednoimpulsní koplánární změna oběžné dráhy (změna směru i velikosti rychlosti).

Potřebné pootočení β vektoru \vec{V}_2 vůči vektoru \vec{V}_1 je dáno požadavkem tečnosti vektoru \vec{V}_2 k cílové dráze (2). Využitím kosinové věty můžeme modul žádaného rychlostního impulsu stanovit dle vztahu

$$\Delta V_\beta = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \beta}. \quad (5.2)$$

Zavedeme-li do našich úvah sklon dráhy letu γ , což je úhel mezi vektorem rychlosti letu a lokálním horizontem, lze úhel pootočení definovat také jako rozdíl příslušných sklonů drah letu $\beta = \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Pak lze rovnici (5.2) přepsat v závislosti na sklonech drah letu takto

$$\Delta V_\beta = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2(\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)}. \quad (5.3)$$

Korekce změnou modulu rychlosti letu při zachování směru

Pokud je třeba zachovat směr ($\beta = 0$) a požaduje se pouze změna velikosti rychlosti letu, pak modul rychlostního impulsu je dána modifikací výrazu (5.2) na tvar

$$\Delta V_\beta = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2} = \sqrt{(V_2 - V_1)^2} = V_2 - V_1. \quad (5.4)$$

Tato změna oběžné dráhy je například uvedena na obr. 5-2, kde v průsečíku drah „a“ je provedena změna kruhové oběžné dráhy na eliptickou.

Korekce změnou směru letu při zachování modulu rychlosti

V případě, kdy je požadována pouze změna směru letu při zachování rychlosti letu ($V_1 = V_2 = V = konst$), lze výraz pro modul rychlostního impulsu dle rov. (5.2) upravit na tvar

5. Manévrování na oběžné dráze

$$\Delta V_\beta = \sqrt{2V^2 - 2V^2 \cos \beta} = V\sqrt{2(1 - \cos \beta)}.$$

Z goniometrických funkcí pro poloviční úhly platí vztah

$$1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right).$$

Po dosazení do předchozího výrazu obdržíme pro tento případ konečný vztah pro modul rychlostního impulsu

$$\Delta V_\beta = 2V \sin \left(\frac{\beta}{2} \right). \quad (5.5)$$

Poznámka: Abychom se vyhnuli kolizi významu symbolu h , který používáme jak pro výšku, tak pro specifický moment hybnosti, jsou v následujících příkladech a celé kapitole výšky označovány alternativním symbolem H .

Příklad 5.1

Zadání:

Stanovte potřebný rychlostní impuls beze změny směru výsledného vektoru rychlosti, jímž lze provést koplanární změnu dané kruhové oběžné dráhy (1) na eliptickou oběžnou dráhu (2) s požadovanou excentricitou.

Potřebná data:

Výška perigea oběžné dráhy (2)	$H_p = 222 \text{ [km]},$
Excentricita oběžné dráhy (2)	$e = 0,25 \text{ [1]},$
Poloměr Země	$r_z = 6378 \text{ [km]},$
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}].$

Řešení:

- a) Výpočet poloměru kruhové oběžné dráhy (1), který bude totožný se vzdáleností perigea eliptické oběžné dráhy (2)

$$r_1 \equiv r_p = r_z + H_p = 6378 + 222 = 6600 \text{ [km]}.$$

- b) Výpočet kruhové rychlosti $V_1 \equiv V_{I_1}$ na oběžné dráze (1) dle vztahu (3.96)

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600}{6600}} = 7,7713 \text{ [kms}^{-1}].$$

- c) Výpočet hlavní poloosy eliptické dráhy (2) provedeme dle vztahu (3.54)

$$a = \frac{r_p}{1 - e} = \frac{6600}{1 - 0,25} = 8800 \text{ [km]}.$$

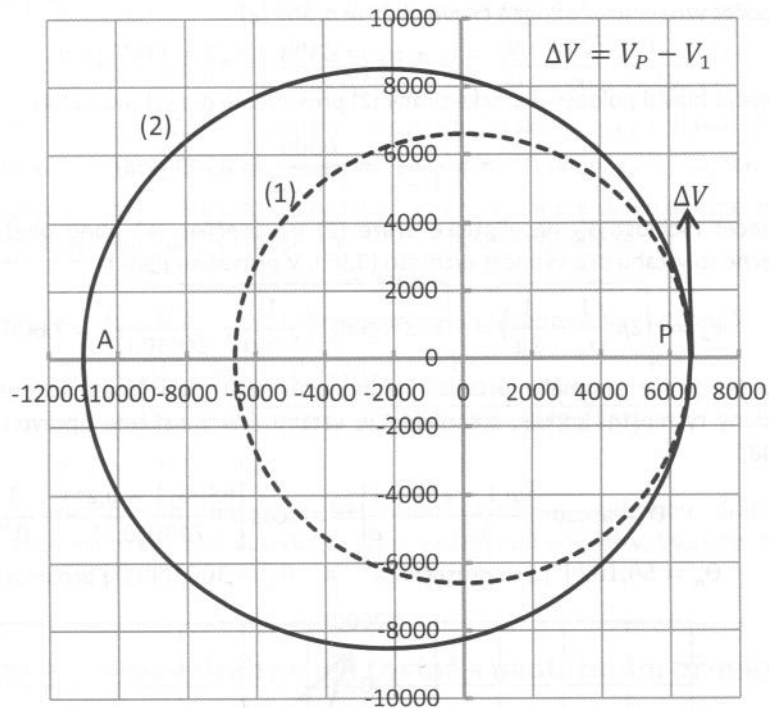
- d) Výpočet rychlosti v perigeu (P) eliptické dráhy (2) dle obecného vztahu pro výpočet rychlosti (3.95)

$$V_p = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2(398600) \left(\frac{1}{6600} - \frac{1}{2(8800)} \right)} = 8,6886 \text{ [kms}^{-1}].$$

- e) Výpočet potřebného rychlostního impulsu

$$\Delta V = V_p - V_1 = 8,6886 - 7,7713 = 0,9173 \text{ [kms}^{-1}].$$

Uvedeným rychlostním impulsem ΔV je zajištěna změna kruhové oběžné dráhy na požadovanou eliptickou oběžnou dráhu. Bod, v němž je rychlostní impuls zaveden se stává jejím perigeem. Výsledky řešení jsou uvedeny na obr. 5-2.



Obr. 5-2 Změna oběžné dráhy změnou modulu rychlosti při zachování jejího směru.

Příklad 5.2

Zadání:

Stanovte potřebný rychlostní impuls ΔV_p , jímž lze provést koplanární změnu dané kruhové oběžné dráhy (1) na eliptickou oběžnou dráhu (2) se zadanými parametry (e, H_p) změnou směru i velikosti výsledného vektoru rychlosti.

Potřebná data:

Výška kruhové oběžné dráhy (1)	$H_1 = 1022 \text{ [km]}$,
Excentricita cílové oběžné dráhy (2)	$e = 0,20 \text{ [1]}$,
Výška perigea cílové oběžné dráhy (2)	$H_p = 422 \text{ [km]}$,
Poloměr Země	$r_z = 6378 \text{ [km]}$,
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}$.

Řešení:

a) Výpočet poloměru výchozí kruhové oběžné dráhy (1)

$$r_1 = r_z + H_1 = 6378 + 1022 = 7400 \text{ [km]}.$$

b) Výpočet kruhové rychlosti $V_1 \equiv V_{I_1}$ na oběžné dráze (1) dle vztahu (3.96)

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600}{7400}} = 7,3393 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

c) Výpočet vzdálenosti perigea cílové oběžné dráhy (2)

$$r_p = r_z + H_p = 6378 + 422 = 6800 \text{ [km]}.$$

d) Výpočet hlavní poloosy eliptické dráhy (2) provedeme dle vztahu (3.54)

$$a = \frac{r_p}{1 - e} = \frac{6800}{1 - 0,2} = 8500 \text{ [km]}.$$

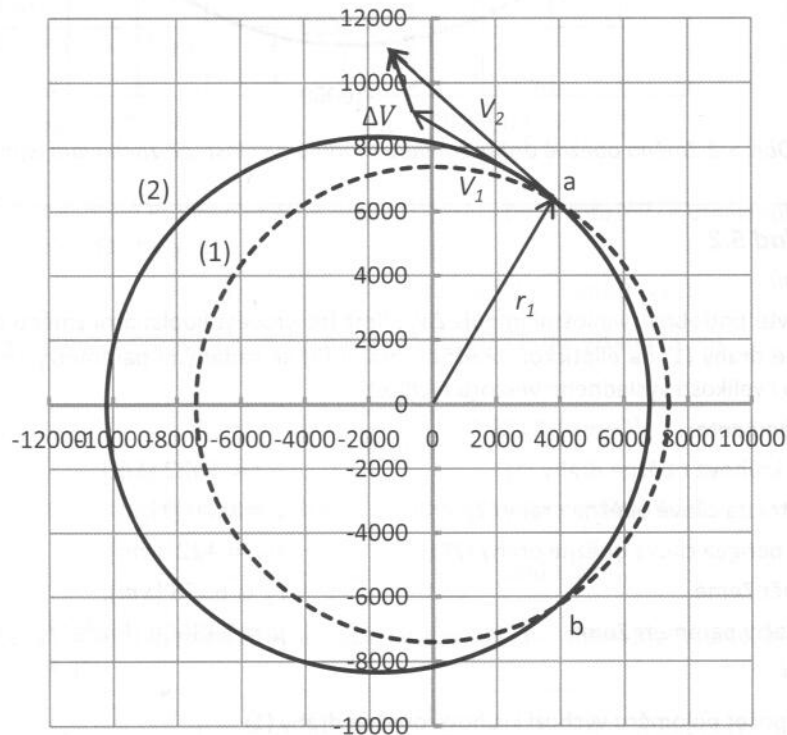
e) Výpočet rychlosti V_2 na eliptické dráze (2) v průsečíku „a“ obou oběžných drah dle obecného vztahu pro výpočet rychlosti (3.95). V průsečíku platí $r_2 = r_1$ a $\Theta_2 = \Theta_1$

$$V_2 = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2(398600) \left(\frac{1}{7400} - \frac{1}{2(8500)} \right)} = 7,800 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

f) Výpočet pravé anomálie určující polohu průsečíků obou drah, kde je třeba udělit hledaný rychlostní impuls, stanovíme ze vztahu, který získáme úpravou rovnice dráhy (3.48)

$$\Theta = \arccos \left[\frac{a(1 - e^2)}{r_1 e} - \frac{1}{e} \right] = \arccos \left[\frac{8500(1 - 0,2^2)}{7400(0,2)} - \frac{1}{0,2} \right],$$

$$\Theta_a = 59,102 \text{ [}^\circ\text{]} \text{ pro průsečík „a“} \quad \text{a} \quad \Theta_b = 300,898 \text{ [}^\circ\text{]} \text{ pro průsečík „b“}.$$



Obr. 5-3 Výsledek řešení změny oběžné dráhy současnou změnou směru i velikosti vektoru rychlosti v průsečíku drah „a“.

- g) Výpočet sklonů drah letu vůči místnímu horizontu γ
 V našem případě, na výchozí kruhové oběžné dráze (1) jsou sklony dráhy letu nulové $\gamma_1 = 0^\circ$. Sklony dráhy letu eliptické dráhy (2) v průsečících s dráhou (1) určíme dle vztahu (3.143). Pro průsečík „a“ platí (podobně pro průsečík „b“)

$$\gamma_2 = \arctg\left(\frac{e \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta}\right) = \arctg\left(\frac{0,2 \sin(59,102)}{1 + 0,2 \cos(59,102)}\right).$$

V průsečíku „a“ ($\Theta = 59,102^\circ$) obdržíme pro dráhu (2) sklon $\gamma_2 = 8,846 [^\circ]$,
 a v průsečíku „b“ ($\Theta = 300,898^\circ$) obdržíme pro dráhu (2) sklon $\gamma_2 = -8,846 [^\circ]$.

- h) Výpočet úhlu β mezi směry vektorů rychlosti letu na výchozí a cílové oběžné dráze. Úhel je dán rozdílem sklonů dráhy letu $\beta = \gamma_2 - \gamma_1$. V našem případě je

$$\beta = \gamma_2 = \pm 8,846 [^\circ].$$

- i) Konečně výpočet potřebného rychlostního impulsu provedeme dle vztahu (5.2)

$$\Delta V_\beta = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \beta},$$

$$\Delta V_\beta = \sqrt{7,3393^2 + 7,8^2 - 2(7,3393)7,8 \cos(8,846^\circ)},$$

$$\Delta V_\beta = 1,255 [kms^{-1}].$$

Uvedeným rychlostním impulsem lze změnit kruhovou oběžnou dráhu (1) na požadovanou eliptickou oběžnou dráhu (2) se zadanými parametry. Výsledky řešení jsou uvedeny na obr. 5-3.

5.1.2 Změna oběžné dráhy v její rovině s pootočením přímky apsid

Výše uvedené jednoimpulsní manévry jsou typické tím, že přímky apsid obou oběžných drah jsou kolinéární a v průsečíku drah mají stejné průvodiče i pravé anomálie. Prozkoumejme nyní úlohu, kdy je žádoucí změnit oběžnou dráhu, včetně pootočení přímek apsid v její rovině o úhel $\Delta\Theta$. V tomto případě má průsečík obou drah stejné pouze průvodiče $r_1 = r_2$, ale pravé anomálie jsou různé $\Theta_1 \neq \Theta_2$; anomálie se liší o požadovaný úhel pootočení přímky apsid $\Delta\Theta$ (obr. 5-4). Pootočení je kladné v kladném smyslu měření pravé anomálie od pericentra výchozí oběžné dráhy (1)

$$\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2. \quad (5.6)$$

Pro průsečík (a) obou oběžných drah s různými anomáliemi $\Theta_1 \neq \Theta_2$ dle rovnice oběžné dráhy (3.44) platí

$$r_1 = \frac{h_1^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_1 \cos \Theta_1},$$

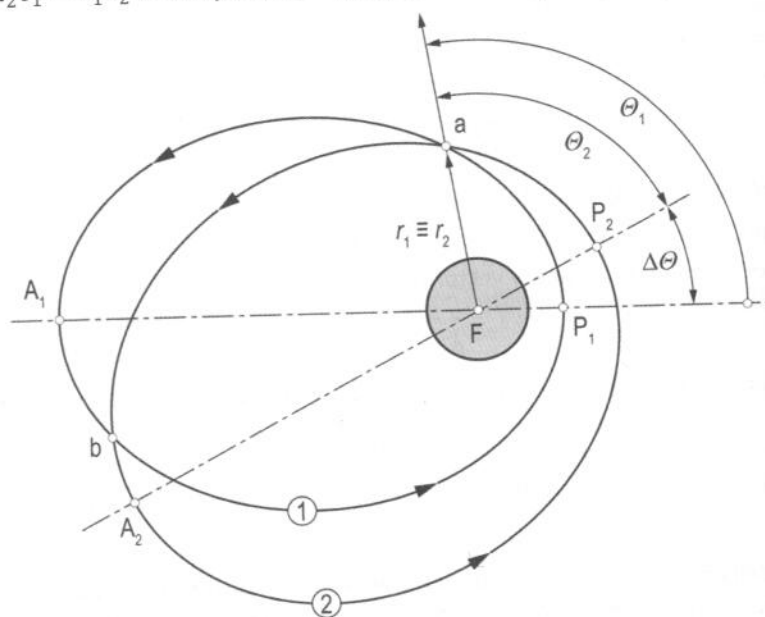
$$r_2 = \frac{h_2^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_2 \cos \Theta_2}.$$

Z podmínky rovnosti průvodičů ve společném průsečíku $r_1 = r_2$ můžeme uvedené vztahy přepsat na rovnici ve tvaru

$$h_1^2(1 + e_2 \cos \Theta_2) - h_2^2(1 + e_1 \cos \Theta_1) = 0.$$

Nyní roznásobíme závorky, dosadíme za $\Theta_2 = \Theta_1 - \Delta\Theta$ dle rov. (5.6) a uplatníme vztah pro kosinus rozdílu dvou úhlů $\cos(\Theta_1 - \Delta\Theta) = \cos \Theta_1 \cos \Delta\Theta + \sin \Theta_1 \sin \Delta\Theta$. Po úpravě obdržíme rovnici ve tvaru

$$(h_2^2 e_1 - h_1^2 e_2 \cos \Delta\theta) \cos \theta_1 - h_1^2 e_2 \sin \Delta\theta \sin \theta_1 = h_1^2 - h_2^2. \quad (5.7)$$



Obr. 5-4 Průsečík dvou oběžných drah, jejichž přímky apsid nejsou kolineární.

Uvedenou rovnici zapišeme ve zkrácené formě

$$A \cos \theta_1 - B \sin \theta_1 = C, \quad (5.8)$$

kde jsme označili koeficienty rovnice ve tvaru

$$A = h_2^2 e_1 - h_1^2 e_2 \cos \Delta\theta, \quad (5.9)$$

$$B = h_1^2 e_2 \sin \Delta\theta, \quad (5.10)$$

$$C = h_1^2 - h_2^2. \quad (5.11)$$

Řešením uvedené rovnice lze dospět k následujícímu výsledku pro pravou anomálii θ_2 výchozí oběžné dráhy v jejich průsečících „a“ a „b“

$$\theta_1 = -\psi \pm \arccos\left(\frac{C}{A} \cos \psi\right), \quad (5.12)$$

kde znaménko plus platí pro první průsečík „a“ a znaménko minus platí pro druhý průsečík „b“. Úhel ψ je dán výrazem

$$\psi = \arctg\left(\frac{B}{A}\right). \quad (5.13)$$

Řešení rovnice (5.8) pro nalezení pravé anomálie θ_1 je podrobně uvedeno v Příloze C.

Pravou anomálii θ_2 druhého průsečíku oběžných drah určíme dle rov. (5.6) pro zadaný úhel pootočení přímek apsid

$$\theta_2 = \theta_1 - \Delta\theta. \quad (5.14)$$

Pro další řešení je nutno rozhodnout, ve kterém průsečíku oběžných drah hodláme zavádět rychlostní impuls. Pro objasnění výpočtu velikosti a směru rychlostního impulsu zvolme první průsečík „a“. Hledejme nyní v tomto průsečíku velikosti (moduly) rychlosti

(5.7) V_1 a V_2 odpovídající oběma oběžným dráhám. Pro jejich stanovení použijeme vztahy pro radiální rychlost a transverzální rychlost. Radiální rychlost V_r je dána rovnicí (3.138), kterou upravíme pomocí rov. (3.38) na tvar

$$V_r = \frac{\mu}{h} e \sin \Theta. \quad (5.15)$$

Kombinací rovnic (3.30) a (3.137) obdržíme pro výpočet transverzální rychlosti vztah

$$V_\Theta = \frac{h}{r}. \quad (5.16)$$

Moduly výsledných rychlostí V_1 a V_2 pro jednotlivé oběžné dráhy (1) a (2) v jejich průsečíku určíme dle vztahu

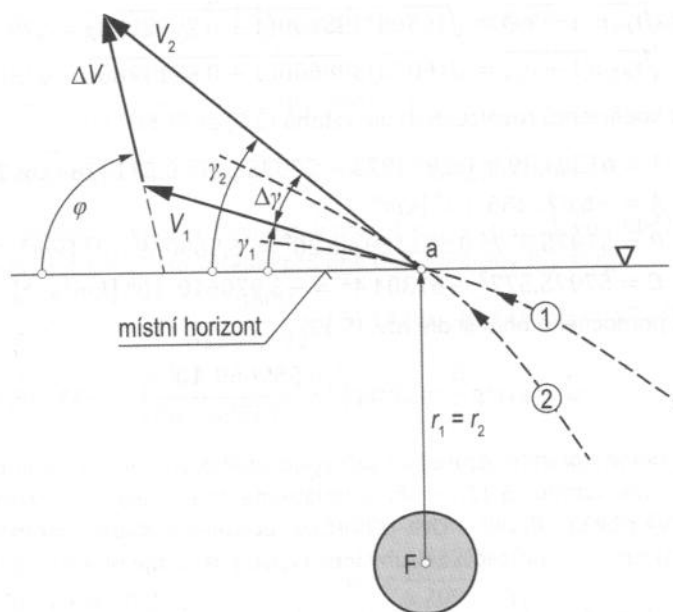
$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\Theta^2}. \quad (5.17)$$

Jejich poloha v průsečíku drah je dána sklony dráhy letu γ_1 a γ_2 vzhledem k místní horizontální rovině, které určíme dle vztahu (3.142) upraveného na tvar

$$\gamma = \arctg \frac{V_r}{V_\Theta}. \quad (5.18)$$

Na základě znalostí sklonů drah letu a rychlosti obou oběžných drah v jejich průsečíku můžeme dle rov. (5.2), kde $\beta \equiv \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ stanovit velikost rychlostního impulsu. A jeho polohu (sklon) φ vůči místní horizontální rovině nalezneme rovněž dle rovnice (5.18), kterou ale aplikujeme v souladu s obr. 5-5 pro přírůstky radiální a transverzální rychlosti

$$(5.8) \quad \varphi = \arctg \frac{\Delta V_r}{\Delta V_\Theta}. \quad (5.19)$$



Obr. 5-5 Definice sklonu vektoru rychlostního impulsu vůči místní horizontální rovině.

Příklad 5.3

Zadání:

Stanovte velikost rychlostního impulsu ΔV_β potřebného pro změnu eliptické oběžné dráhy, včetně pootočení přímky apsid v její rovině o zadaný úhel. Současně stanovte místo Θ , kde je nutno potřebný rychlostní impuls zavést.

Potřebná data:

Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]},$
Poloha perigea výchozí dráhy (1)	$r_{P1} = 6500 \text{ [km]},$
Poloha apogea výchozí dráhy (1)	$r_{A1} = 12000 \text{ [km]},$
Poloha perigea cílové dráhy (2)	$r_{P2} = 6000 \text{ [km]},$
Poloha apogea cílové dráhy (2)	$r_{A2} = 22000 \text{ [km]},$
Požadované pootočení přímky apsid	$\Delta\theta = 20 \text{ [}^\circ\text{]}.$

Řešení:

a) Výpočet excentricity výchozí a cílové oběžné dráhy dle rov. (3.49)

$$e_1 = \frac{r_{A1} - r_{P1}}{r_{A1} + r_{P1}} = \frac{12000 - 6500}{12000 + 6500} = 0,2972973 \text{ [1]},$$

$$e_2 = \frac{r_{A2} - r_{P2}}{r_{A2} + r_{P2}} = \frac{22000 - 6000}{22000 + 6000} = 0,5714286 \text{ [1]}.$$

b) Výpočet specifických momentů hybnosti obou oběžných drah provedeme v jeřich perigeu ($\theta = 0^\circ$) dle vztahu (3.44) upraveného do tvaru

$$h_1 = \sqrt{r_{P1}\mu(1 + e_1)} = \sqrt{(6500)398600(1 + 0,2972973)} = 57975,577 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{]},$$

$$h_2 = \sqrt{r_{P2}\mu(1 + e_2)} = \sqrt{(6000)398600(1 + 0,5714286)} = 61304,393 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{]}.$$

c) Výpočet koeficientů rovnice (5.8) dle vztahů (5.9) až (5.11)

$$A = 61304,393^2 \cdot 0,2972973 - 57975,577^2 \cdot 0,5714286 \cos 20^\circ,$$

$$A = -6,875256 \cdot 10^8 \text{ [km}^4\text{s}^{-2}\text{]},$$

$$B = 57975,577^2 \cdot 0,571429 \sin 20^\circ = 6,569069 \cdot 10^8 \text{ [km}^4\text{s}^{-2}\text{]},$$

$$C = 57975,577^2 - 61304,4^2 = -3,970610 \cdot 10^8 \text{ [km}^4\text{s}^{-2}\text{]}.$$

d) Výpočet pomocného úhlu ψ dle rov. (5.13)

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \operatorname{arctg} \left(\frac{6,569069 \cdot 10^8}{-6,875256 \cdot 10^8} \right) = -43,695 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

e) Výpočet polohy prvního průsečíku „a“ vyjádřeného pravou anomálií na výchozí oběžné dráze (1) dle vztahu (5.12), v němž uplatníme znaménko plus. Vzhledem k tomu, že máme dvě oběžné dráhy a dva průsečíky, použijeme dvojitě indexování. První index (písmeno) označuje průsečík a druhý index (číslo) označuje oběžnou dráhu.

$$\theta_{a1} = -\psi + \arccos \left(\frac{C}{A} \cos \psi \right) = 43,695^\circ + \arccos \left[\frac{-3,970610 \cdot 10^8}{-6,875256 \cdot 10^8} \cos(-43,695^\circ) \right]$$

$$\theta_{a1} = 109,015 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

5. Manévrování na oběžné dráze

Poloha téhož průsečíku „a“ vyjádřená pravou anomálií na cílové oběžné dráze (2) je dána relací (5.14)

$$\Theta_{a2} = \Theta_{a1} - \Delta\Theta = 109,015^\circ - 20^\circ = 89,015^\circ [^\circ].$$

- f) Výpočet polohy druhého průsečíku „b“ vyjádřeného pravou anomálií na výchozí oběžné dráze (1) dle vztahu (5.12), v němž uplatníme znaménko mínus

$$\Theta_{b1} = -\psi - \arccos\left(\frac{C}{A} \cos \psi\right) = 43,695^\circ - \arccos\left[\frac{-3,970610 \cdot 10^8}{-6,875256 \cdot 10^8} \cos(-43,695^\circ)\right],$$

$$\Theta_{b1} = -21,624 [^\circ], \text{ respektive } \Theta_{b1} = 338,376 [^\circ].$$

Poloha téhož průsečíku „b“ vyjádřená pravou anomálií na cílové oběžné dráze (2) je dána relací (5.14)

$$\Theta_{b2} = \Theta_{b1} - \Delta\Theta = -21,624^\circ - 20^\circ = -41,624 [^\circ], \text{ respektive } \Theta_{b2} = 318,376 [^\circ].$$

- g) Výpočet délek průvodičů r_a a r_b v průsečících oběžných drah „a“ a „b“ provedeme pomocí rovnice dráhy (3.44). V průsečíku „a“ jsou průvodiče obou drah stejné, takže použijeme vztah platný pro oběžnou dráhu (1)

$$r_{a1} = \frac{h_1^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_1 \cos \Theta_{a1}} = \frac{57975,577^2}{398600} \frac{1}{1 + 0,2972973 \cos 109,015^\circ}$$

$$r_{a1} = 9336,837 [km],$$

$$r_{b1} = \frac{h_1^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_1 \cos \Theta_{b1}} = \frac{57975,577^2}{398600} \frac{1}{1 + 0,2972973 \cos 338,376^\circ}$$

$$r_{b1} = 6606,551 [km].$$

- h) Výpočet potřebných rychlostí v průsečíku „a“ pro výchozí oběžnou dráhu (1) dle vztahů (5.15) až (5.17)

$$V_{r1} = \frac{\mu}{h_1} e_1 \sin \Theta_{a1} = \frac{398600}{57975,577} 0,2972973 \sin 109,015^\circ = 1,9325 [kms^{-1}],$$

$$V_{\Theta 1} = \frac{h_1}{r_{a1}} = \frac{57975,577}{9336,837} = 6,2093 [kms^{-1}],$$

$$V_1 = \sqrt{V_{r1}^2 + V_{\Theta 1}^2} = \sqrt{1,9325^2 + 6,2093^2} = 6,5031 [kms^{-1}].$$

- i) Obdobně provedeme výpočet rychlosti v průsečíku „a“ pro cílovou oběžnou dráhu (2). Průvodiče v průsečíku „a“ jsou stejné pro obě oběžné dráhy $r_{a2} = r_{a1}$

$$V_{r2} = \frac{\mu}{h_2} e_2 \sin \Theta_{a2} = \frac{398600}{61304,393} 0,5714286 \sin 89,015^\circ = 3,7149 [kms^{-1}],$$

$$V_{\Theta 2} = \frac{h_2}{r_{a2}} = \frac{61304,393}{9336,837} = 6,5659 [kms^{-1}],$$

$$V_2 = \sqrt{V_{r2}^2 + V_{\Theta 2}^2} = \sqrt{3,7149^2 + 6,5659^2} = 7,5440 [kms^{-1}].$$

- j) Výpočet sklonu dráhy letu v průsečíku „a“ obou oběžných drah γ_1 a γ_2 dle rovnice (5.18)

$$\gamma_1 = \arctg \frac{V_{r1}}{V_{\Theta 1}} = \arctg \frac{1,9325}{6,2093} = 17,287 [^\circ],$$

$$\gamma_2 = \arctg \frac{V_{r2}}{V_{\Theta 2}} = \arctg \frac{3,7149}{6,5659} = 29,500 [^\circ].$$

5. Manévrování na oběžné dráze

k) Výpočet potřebného úhlu změny směru výsledného vektoru oběžné dráhy (2) β

$$\beta = \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 = 29,500^\circ - 17,287^\circ = 12,213 [^\circ].$$

l) Výpočet velikosti potřebného rychlostního impulsu v průsečíku oběžných drah „a“ dle rov. (5.2)

$$\Delta V_\beta = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \beta},$$

$$\Delta V_\beta = \sqrt{6,5031^2 + 7,544^2 - 2(6,5031)7,544 \cos 12,213^\circ},$$

$$\Delta V_\beta = 1,8177 [kms^{-1}].$$

m) Výpočet přírůstků velikosti radiální rychlosti a transversální rychlosti v průsečíku obou oběžných drah „a“

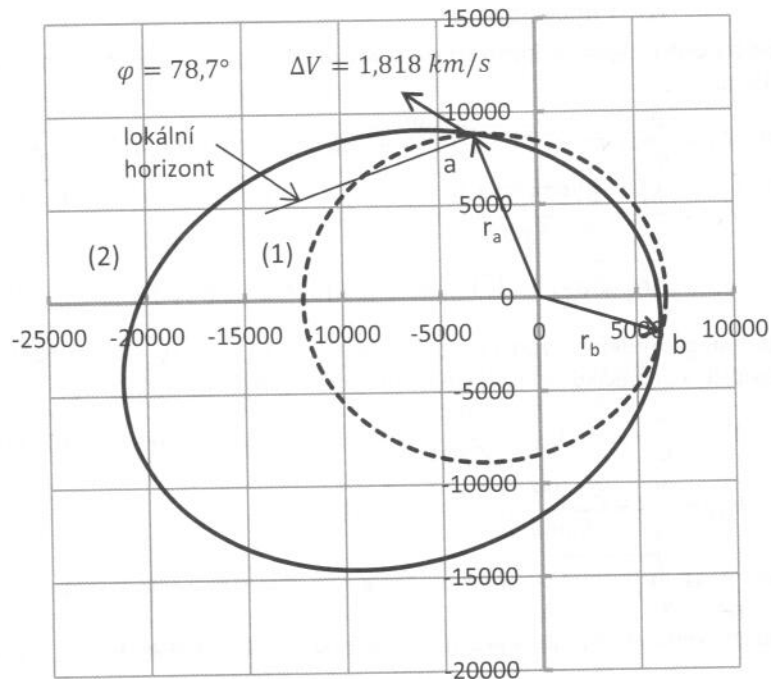
$$\Delta V_r = V_{r2} - V_{r1} = 3,7149 - 1,9325 = 1,7824 [kms^{-1}],$$

$$\Delta V_\theta = V_{\theta2} - V_{\theta1} = 6,5659 - 6,2093 = 0,3566 [kms^{-1}].$$

n) Výpočet sklonu vektoru rychlostního impulsu vůči místní horizontální rovině určíme dle rov. (5.19)

$$\varphi = \arctg \frac{\Delta V_r}{\Delta V_\theta} = \arctg \frac{1,7824}{0,3566} = 78,686 [^\circ].$$

Výše uvedeným rychlostním impulsem ΔV_β v bodě „a“ ve směru φ vůči lokální horizontální rovině je možno zajistit žádanou změnu oběžné dráhy se zadaným úhlem pootočení přímky apsid. Pro ilustraci jsou výsledky řešení uvedeny na obr. 5-6.



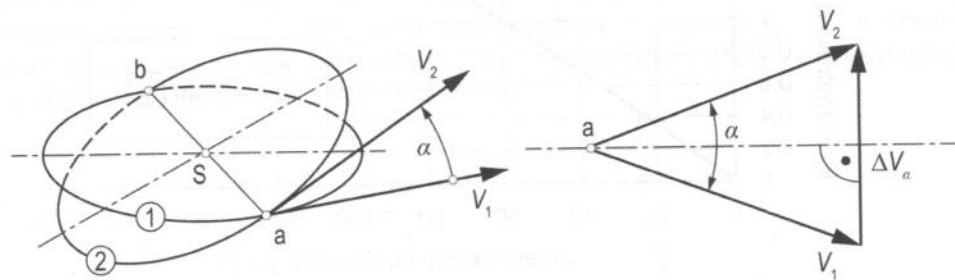
Obr. 5-6 Změna oběžné dráhy v její rovině s pootočením přímky apsid.

5.1.3 Změna sklonu oběžné dráhy v uzlovém bodě

Podobně jako v předchozím případě, také při jednoimpulsní změně sklonu oběžné dráhy je třeba realizovat rychlostní impuls v průsečíku obou drah. Přičemž předpokládáme, že průsečík je totožný s uzlovým bodem. Změnu sklonu si ukážeme na jednoduchém příkladu pootočení rovin kruhových oběžných drah. Pootočením kruhových oběžných drah se nemění velikosti rychlostí ($V_2 = V_1 = V_I$). Díky tomu je vektorový trojúhelník rychlostí rovnostranný. Na obr. 5-7 je naznačeno řešení pro nezbytný vektorový rychlostní impuls pro změnu kruhové oběžné dráhy (1) na žádanou cílovou kruhovou dráhu (2). Vektor rychlosti na výchozí dráze je \vec{V}_1 a vektor rychlosti letu na žádané cílové dráze v jejich společném bodě je \vec{V}_2 . Aplikací kosinové věty, nebo přímo dle obr. 5-7 lze nalézt výraz pro stanovení rychlostního impulsu ΔV_α potřebného pro pootočení roviny kruhové oběžné dráhy o úhel α . Dle obr. 5-7 můžeme psát

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta V_\alpha / 2}{V_I},$$

$$\Delta V_\alpha = 2V_I \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.20)$$



Obr. 5-7 Změna sklonu kruhové oběžné dráhy v uzlovém bodě a rychlostní trojúhelník definující potřebný impuls ΔV_α .

Za předpokladu, že se nemění tvar ani velikost eliptické oběžné dráhy a pootočení se děje kolem společné průsečnice, která je totožná s uzlovou přímkou, pak lze pro pootočení eliptických oběžných drah použít obdobný vztah. Avšak na rozdíl od kruhových oběžných drah, v tomto případě je úhel pootočení α dán úhlem mezi transverzálními složkami $V_{\theta_1} = V_{\theta_2} = V_\theta$, které jsou kolmé na osu otáčení. Radiální složky rychlostí jsou při tomto orbitálním manévru stejné. Pro výpočet rychlostního impulsu ΔV_α je proto třeba rovnici (5.20) modifikovat na tvar

$$\Delta V_\alpha = 2V_\theta \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.21)$$

Podívejme se nyní na speciální případ, kdy je požadována změna sklonu kruhové oběžné dráhy o úhel $\alpha = 90^\circ$, $V = V_I$. Po dosazení do rov. (5.20) obdržíme

$$\Delta V_{\alpha=90^\circ} = 2V_I \sin \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = 2V_I \frac{\sqrt{2}}{2} = V_I \sqrt{2} = V_{II}. \quad (5.22)$$

Z uvedeného vztahu můžeme vidět, že změna sklonu kruhové oběžné dráhy o $\alpha = 90^\circ$ je energeticky mimořádně náročná. Uvedený manévr vyžaduje stejnou energii, kterou by bylo třeba udělit kosmickému tělesu pro získání únikové rychlosti V_{II} .

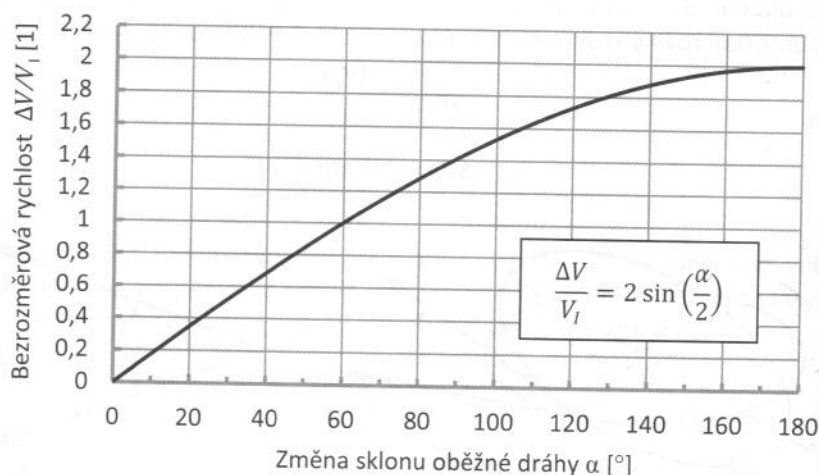
Další zajímavý případ je aplikace rychlostního impulsu, který je roven místní kruhové rychlosti $\Delta V_\alpha = V_I$ při zachování rychlosti letu $V_1 = V_2 = V$. Po dosazení do rov. (5.20) obdržíme

$$\Delta V_\alpha \equiv V_I = 2V_I \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

odkud požadovaný úhel změny sklonu dráhy je dán výrazem

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ.$$

Úplnou informaci o potřebném rychlostním impulsu ΔV v závislosti na požadovaném pootočení α pro kruhové oběžné dráhy lze nalézt na obr. 5-8.



Obr. 5-8 Závislost bezrozměrového rychlostního impulsu ($\Delta V \equiv \Delta V_\alpha$) na požadované změně sklonu oběžné dráhy.

5.1.4 Změna sklonu oběžné dráhy s pootočením uzlové přímky

V případě obecného impulsního pootočení oběžné dráhy o úhel α v průsečíku oběžných drah, který není totožný s uzlovým bodem, dochází ke změně polohy oběžné dráhy v prostoru – mění se nejen sklon cílové oběžné dráhy, ale také délka vzestupného uzlu. Na obr. 5-9 je uveden případ obecné změny sklonu dráhy pomocí rychlostního impulsu zavedeného v libovolném průsečíku obou oběžných drah.

Předpokládejme, že máme zadány parametry výchozí oběžné dráhy (1): délku vzestupného uzlu Ω_1 , sklon oběžné dráhy i_1 . Zadán je rovněž žádaný sklon cílové oběžné dráhy i_2 a délka vzestupného uzlu Ω_2 . Hledejme úhlovou polohu ν_1 zavedení rychlostního impulsu ΔV a velikost nezbytného úhlu pootočení α tak, aby bylo dosaženo sklonu cílové oběžné dráhy i_2 a odpovídající délky vzestupného uzlu Ω_2 . Pomocí relací platných pro tmavěji vyznačený sférický trojúhelník na obr. 5-9 lze výraz pro kosinus úhlu pootočení α zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos i_1 \cos(180 - i_2) + \sin i_1 \sin(180 - i_2) \cos(\Delta\Omega), \\ \cos \alpha &= \cos i_1 \cos(i_2) + \sin i_1 \sin(i_2) \cos(\Delta\Omega), \end{aligned} \quad (5.23)$$

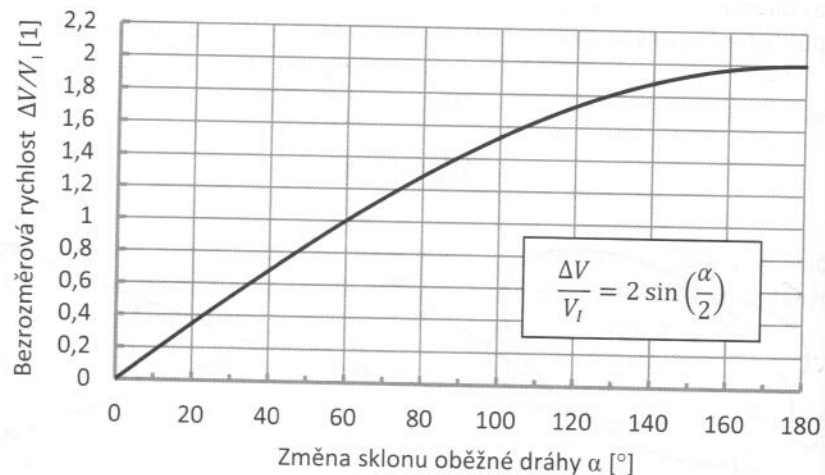
Další zajímavý případ je aplikace rychlostního impulsu, který je roven místní kruhové rychlosti $\Delta V_\alpha = V_I$ při zachování rychlosti letu $V_1 = V_2 = V$. Po dosazení do rov. (5.20) obdržíme

$$\Delta V_\alpha \equiv V_I = 2V_I \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

odkud požadovaný úhel změny sklonu dráhy je dán výrazem

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ.$$

Úplnou informaci o potřebném rychlostním impulsu ΔV v závislosti na požadovaném pootočení α pro kruhové oběžné dráhy lze nalézt na obr. 5-8.



Obr. 5-8 Závislost bezrozměrového rychlostního impulsu ($\Delta V \equiv \Delta V_\alpha$) na požadované změně sklonu oběžné dráhy.

5.1.4 Změna sklonu oběžné dráhy s pootočením uzlové přímky

V případě obecného impulsního pootočení oběžné dráhy o úhel α v průsečíku oběžných drah, který není totožný s uzlovým bodem, dochází ke změně polohy oběžné dráhy v prostoru – mění se nejen sklon cílové oběžné dráhy, ale také délka vzestupného uzlu. Na obr. 5-9 je uveden případ obecné změny sklonu dráhy pomocí rychlostního impulsu zavedeného v libovolném průsečíku obou oběžných drah.

Předpokládejme, že máme zadány parametry výchozí oběžné dráhy (1): délku vzestupného uzlu Ω_1 , sklon oběžné dráhy i_1 . Zadán je rovněž žádaný sklon cílové oběžné dráhy i_2 a délka vzestupného uzlu Ω_2 . Hledejme úhlovou polohu v_1 zavedení rychlostního impulsu ΔV a velikost nezbytného úhlu pootočení α tak, aby bylo dosaženo sklonu cílové oběžné dráhy i_2 a odpovídající délky vzestupného uzlu Ω_2 . Pomocí relací platných pro tmavěji vyznačený sférický trojúhelník na obr. 5-9 lze výraz pro kosinus úhlu pootočení α zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos i_1 \cos(180 - i_2) + \sin i_1 \sin(180 - i_2) \cos(\Delta\Omega), \\ \cos \alpha &= \cos i_1 \cos(i_2) + \sin i_1 \sin(i_2) \cos(\Delta\Omega), \end{aligned} \quad (5.23)$$

kde $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Úhlovou polohu místa na výchozí oběžné dráze v_1 (průsečík obou drah), kde je třeba zavést rychlostní impuls, stanovíme pomocí sinové věty pro tentýž sférický trojúhelník

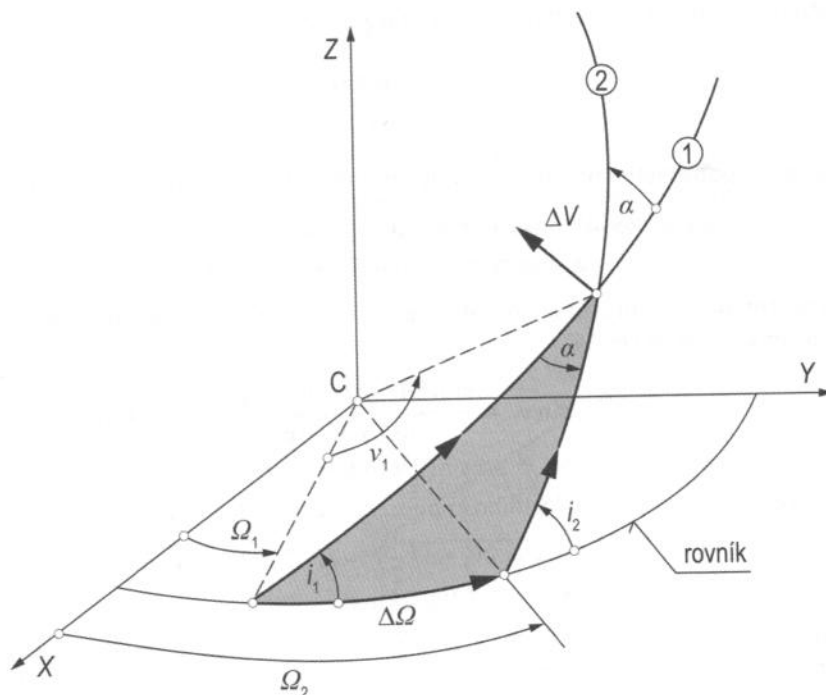
$$\frac{\sin(\Delta\Omega)}{\sin \alpha} = \frac{\sin v_1}{\sin(180 - i_2)},$$

$$\sin v_1 = \frac{\sin(\Delta\Omega) \sin(i_2)}{\sin \alpha}, \quad (5.24)$$

kde úhel $v_1 = \omega_1 + \Theta_1$, což je úhel mezi uzlovou přímkou výchozí oběžné dráhy (1) a průvodičem definujícím polohu průsečíku obou oběžných drah.

Velikost rychlostního impulsu v průsečíku kruhových oběžných drah stanovíme stejně jako v případě jednoduché změny sklonu oběžné dráhy dle výše uvedeného vztahu (5.20). Pokud se jedná jen o změnu sklonu, jsou rychlosti v průsečíku oběžných drah stejné. A zachovány jsou i ostatní parametry oběžné dráhy (kromě sklonu a délky vzestupného uzlu).

Pro případ $\Delta\Omega = 0$ bude v souladu s rov. (5.24) poloha pro zavedení rychlostního impulsu totožná s uzlovým bodem výchozí dráhy ($v_1 = 0$). Pak dle rov. (5.23) je pootočení oběžných drah α totožné se změnou sklonu dráhy $\Delta i = i_2 - i_1$. A obecný případ se redukuje na situaci odpovídající prosté změně sklonu dráhy v uzlovém bodu, jak uvedeno v předchozí podkapitole 5.1.3.



Obr. 5-9 Obecná změna sklonu oběžné dráhy rychlostním impulsem mimo uzlový bod.

Příklad 5.4

Zadání:

Jsou dány prvky výchozí kruhové oběžné dráhy (1). Stanovte potřebný rychlostní impuls ΔV_α , potřebné místo v_1 a velikost pootočení roviny oběžné dráhy α tak, aby cílová oběžná dráha měla požadovaný sklon i_2 a délku vzestupného uzlu Ω_2 . Ostatní prvky drah zůstávají beze změny.

Potřebná data:

Výška kruhové oběžné dráhy	$H = 322$ [km],
Poloměr Země	$r_z = 6378$ [km],
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600$ [km ³ s ⁻²],
Sklon výchozí oběžné dráhy (1)	$i_1 = 20$ [°],
Sklon cílové oběžné dráhy (2)	$i_2 = 30$ [°],
Délka vzestupného uzlu výchozí dráhy (1)	$\Omega_1 = 25$ [°],
Délka vzestupného uzlu cílové dráhy (2)	$\Omega_2 = 55$ [°].

Řešení:

- a) Výpočet poloměru kruhové oběžné dráhy (1)

$$r = r_z + H = 6378 + 322 = 6700 \text{ [km]}.$$

- b) Výpočet kruhové rychlosti na oběžné dráze dle vztahu (3.96)

$$V_I = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{398600}{6700}} = 7,7131 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

- c) Výpočet potřebného pootočení roviny oběžné dráhy (2) vůči dráze (1) dle vztahu (5.23)

$$\cos \alpha = \cos 20^\circ \cos 30^\circ + \sin 20^\circ \sin 30^\circ \cos(55^\circ - 25^\circ) = 0,961897,$$

$$\alpha = \arccos(0,961897) = 15,86746 \text{ [°]}.$$

- d) Výpočet polohy (průsečíku drah), kde je třeba zavést rychlostní impuls, definovaný úhlem
- v_1
- dle vztahu (5.24)

$$\sin v_1 = \frac{\sin(55^\circ - 25^\circ) \sin 30^\circ}{\sin 15,86746^\circ} = 0,914368,$$

$$v_1 = \arcsin(0,914368) = 66,116 \text{ [°]}.$$

- e) Výpočet potřebného rychlostního impulsu provedeme dle vztahu (5.20)

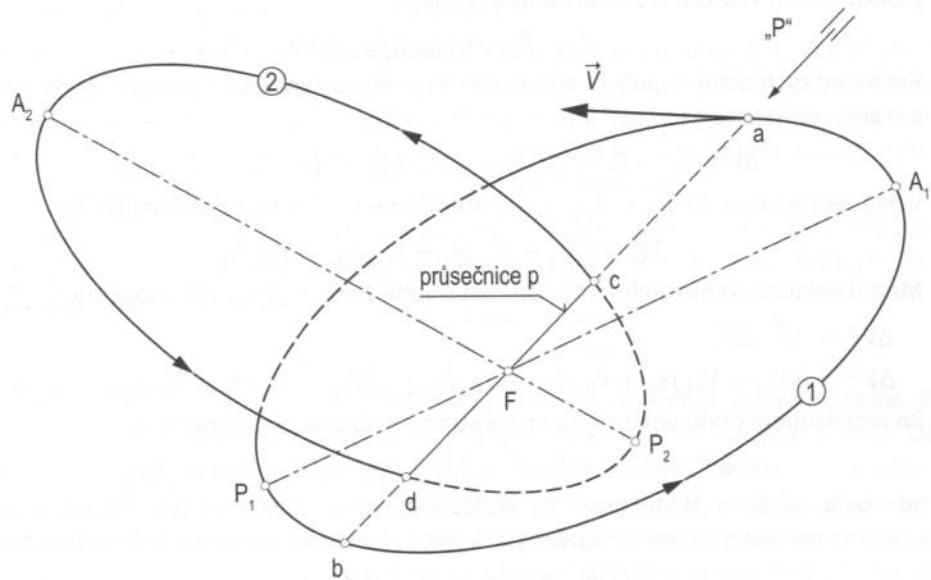
$$\Delta V_\alpha = 2V_I \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2(7,7131) \sin\left(\frac{15,86746^\circ}{2}\right),$$

$$\Delta V_\alpha = 2,1292 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

Uvedeným rychlostním impulsem je zajištěna změna výchozí kruhové oběžné dráhy na oběžnou dráhu s požadovaným sklonem a délkou vzestupného uzlu. Pověšimněte si toho, že požadované pootočení o úhel α se nerovná prostému rozdílu sklonů cílové a výchozí oběžné dráhy, $\alpha \neq (i_2 - i_1)$. To může nastat jen v případě, kdy rychlostní impuls je zaveden v jednom z uzlů, nikoliv v obecné poloze průsečíků oběžných drah.

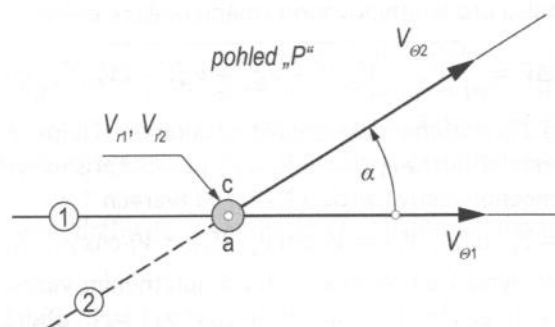
5.1.5 Kombinovaná změna oběžné dráhy

Doposud byla změna oběžné dráhy prováděna buď jen v její rovině, nebo se měnil pouze její sklon. V praktických aplikacích se však vyskytují případy, kdy je třeba měnit oběžnou dráhu v její rovině současně se změnou jejího sklonu. Příkladem takové úlohy je změna výchozí, zpravidla kruhové, parkovací oběžné dráhy družice Země o nenulovém sklonu na geostacionární rovníkovou oběžnou dráhu s nulovým sklonem (viz příklad 5.9).



Obr. 5-10 Kombinovaná změna oběžné dráhy.

Na obr. 5-10 jsou znázorněny dvě obecné nekoplanární oběžné dráhy (1) a (2), jejichž roviny se protínají v průsečnici označené „p“. Oběžné dráhy mají společné ohnisko, které leží na průsečnici jejich rovin. Roviny oběžných drah svírají úhel α (obr. 5-11).



Obr. 5-11 Radiální a transversální složky rychlostí V_1 a V_2 .

Hledejme potřebný rychlostní impuls ΔV nutný k pootočení roviny oběžné dráhy (1) do roviny oběžné dráhy (2) o úhel α a současně změně tvaru oběžné dráhy v její rovině. Pro současnou jednoimpulsní změnu dráhy mohou být impulsy zavedeny buď v bodě

„a“ nebo „b“. Předpokládejme, že zavedeme přechodový impuls v bodě „a“. Pak je zřejmé, že jednotkové vektory radiálních rychlostí ležící na společné průsečnici se během manévru nemění, zatímco jednotkové vektory transverzálních rychlostí se při pootočení kolem průsečnice rovin mění.

Protože radiální a transverzální jednotkové vektory jsou navzájem kolmé, úhel pootočení α je dán úhlem, který svírají mezi sebou pouze transverzální jednotkové vektory (obr. 5-11). Takže úhel pootočení roviny bude dán skalárním součinem jednotkových vektorů transverzálních rychlostí

$$\vec{e}_{\theta 1} \cdot \vec{e}_{\theta 2} = |\vec{e}_{\theta 1}| |\vec{e}_{\theta 2}| \cos \alpha = \cos \alpha. \quad (5.25)$$

Potřebný rychlostní impuls je dán rozdílem vektorů rychlostí s uvažování jejich radiálních a transverzálních složek

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = (V_{r2} \vec{e}_{r2} + V_{\theta 2} \vec{e}_{\theta 2}) - (V_{r1} \vec{e}_{r1} + V_{\theta 1} \vec{e}_{\theta 1}).$$

Vzhledem k tomu, že $\vec{e}_{r2} = \vec{e}_{r1} = \vec{e}_r$, přepíšeme rovnici na odpovídající tvar

$$\Delta \vec{V} = (V_{r2} - V_{r1}) \vec{e}_r + V_{\theta 2} \vec{e}_{\theta 2} - V_{\theta 1} \vec{e}_{\theta 1}.$$

Modul vektoru rychlostního impulsu nalezneme pomocí skalárního součinu

$$\Delta V^2 = \Delta \vec{V} \cdot \Delta \vec{V},$$

$$\Delta V^2 = [(V_{r2} - V_{r1}) \vec{e}_r + V_{\theta 2} \vec{e}_{\theta 2} - V_{\theta 1} \vec{e}_{\theta 1}] \cdot [(V_{r2} - V_{r1}) \vec{e}_r + V_{\theta 2} \vec{e}_{\theta 2} - V_{\theta 1} \vec{e}_{\theta 1}].$$

Po roznásobení obou vektorů na pravé straně a úpravě obdržíme výraz

$$\Delta V^2 = (V_{r2} - V_{r1})^2 + V_{\theta 1}^2 + V_{\theta 2}^2 - 2V_{\theta 1} V_{\theta 2} \vec{e}_{\theta 1} \cdot \vec{e}_{\theta 2}, \quad (5.26)$$

kde byla uvažena skutečnost, že skalární součiny radiálního jednotkového vektoru s oběma transverzálními jednotkovými vektory jsou díky vzájemné kolmosti nulové

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{\theta 1} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{\theta 2} = 0$$

a stejnojmenné skalární součiny jednotkových vektorů jsou rovny jedné

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_{\theta 1} \cdot \vec{e}_{\theta 1} = \vec{e}_{\theta 2} \cdot \vec{e}_{\theta 2} = 1.$$

Poslední člen v rovnici (5.26) obsahuje skalární součin transverzálních jednotkových vektorů ($\vec{e}_{\theta 1} \cdot \vec{e}_{\theta 2}$), který dle výrazu (5.25) představuje kosinus úhlu pootočení α . Takže rovnici (5.26) přepíšeme na konečný výraz pro stanovení velikosti potřebného rychlostního impulsu pro kombinovanou změnu oběžné dráhy

$$\Delta V = \sqrt{(V_{r2} - V_{r1})^2 + V_{\theta 1}^2 + V_{\theta 2}^2 - 2V_{\theta 1} V_{\theta 2} \cos \alpha}. \quad (5.27)$$

Uvedený vztah (5.27) můžeme dále upravit následovně. Nejprve si vyjádříme výrazy pro radiální a transverzální složky rychlostí V_1 a V_2 pomocí příslušných sklonů dráhy letu dle vztahů, které je možno stanovit z rov. (3.142) ve tvarech

$$V_{r1} = V_1 \sin \gamma_1, \quad V_{r2} = V_2 \sin \gamma_2, \quad V_{\theta 1} = V_1 \cos \gamma_1, \quad V_{\theta 2} = V_2 \cos \gamma_2.$$

Dosazením těchto výrazů do rovnice (5.27) a uplatněním vazeb mezi goniometrickými funkcemi ($\sin^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_1 = \sin^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$) obdržíme mezivýsledek ve tvaru

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 (\sin \gamma_2 \sin \gamma_1 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 \cos \alpha)}.$$

Rozšířením závorky pod odmocninou o výrazy $(\pm \cos \gamma_2 \cos \gamma_1)$ současně s uplatněním vztahu pro kosinus rozdílu dvou úhlů $\cos(\gamma_2 - \gamma_1) = \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 + \sin \gamma_2 \sin \gamma_1$ a následné úpravě, obdržíme konečný výraz pro výpočet velikosti (modulu) potřebného rychlostního impulsu

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2[\cos \beta - \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 (1 - \cos \alpha)]}, \quad (5.28)$$

kde jsme označili $\beta \equiv \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$, což je úhel reprezentující již dříve používané pootočení vektoru rychlosti v rovině oběžné dráhy.

Odvozený výraz (5.28) slouží ke stanovení rychlostního impulsu pro kombinovanou změnu oběžné dráhy jak v její rovině, tak se změnou jejího sklonu. Jestliže uvedený výraz představuje kombinovanou změnu oběžné dráhy, pak v sobě zahrnuje také dílčí změny oběžné dráhy, buď změnu dráhy jen v její rovině, nebo pouze změnu sklonu oběžné dráhy. O tom se můžeme snadno přesvědčit následovně.

Jako první případ zvolme pouze izolovanou změnu oběžné dráhy v její rovině. Pro tento případ platí, že změna sklonu oběžné dráhy je nulová $\alpha = 0$. Pak výraz (5.28) je jednoduše redukován na tvar

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \beta},$$

což souhlasí s dříve odvozeným výrazem (5.2) pro změnu oběžné dráhy v její rovině. Pro jednoduché pootočení kruhové oběžné dráhy o úhel α platí naopak $\beta = 0$. Dále uvážíme, že rychlosti na kruhové oběžné dráze jsou konstantní, rovnají se l. kosmické rychlosti v dané výšce ($V_1 = V_2 = V_l$) a sklon dráhy letu je $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Pak po dosazení těchto skutečností do rov. (5.28) a úpravě obdržíme dříve odvozenou rov. (5.20) platnou pro pootočení kruhové oběžné dráhy kolem libovolné průsečnice procházející středem.

Obdobně pro případ, kdy se jedná jen o změnu sklonu stejných eliptických oběžných drah za předpokladu $\beta = 0$, respektive $\gamma_2 = \gamma_1$. Pak lze pro jednoduché pootočení roviny oběžné dráhy nalézt potřebný rychlostní impuls dle rov. (5.27) uplatněním podmínek $V_{\theta 1} = V_{\theta 2} = V_{\theta}$ a $V_{r1} = V_{r2}$. Po dosazení uvedených podmínek do rov. (5.27) a úpravě zjistíme, že se rov. (5.27) zredukovala na dříve odvozenou rov. (5.21) platnou pro pootočení elipsy kolem uzlové přímky o úhel α .

Průzkumem odvozených vztahů pro rychlostní impulsy je zřejmé, že jejich velikost záleží na místě na oběžné dráze, ve kterém je zaveden. Speciálně pro změnu sklonu eliptické oběžné dráhy z rov. (5.27) vyplývá, že nejmenší potřebný rychlostní impuls bude v apocentru. Jak známo z předchozího výkladu, v apocentru jsou radiální rychlosti nulové ($V_{r1} = V_{r2} = 0$) a transversální rychlosti nejmenší. Z toho vyplývá, že změny sklonu eliptické oběžné dráhy je z energetického hlediska vhodné provádět právě v apocentru.

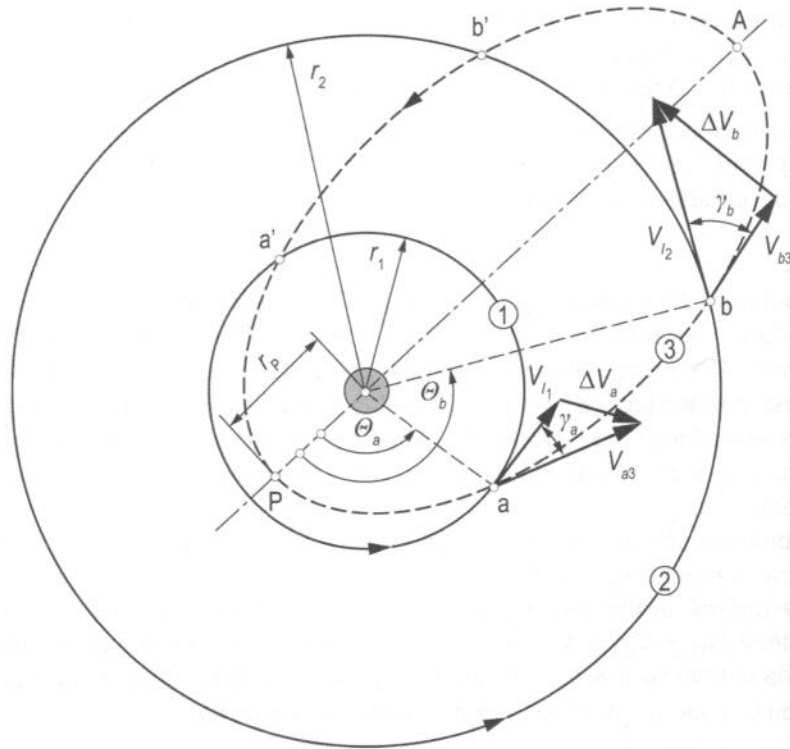
5.2 Přechodové dráhy

Doposud jsme se věnovali případům, kdy koplánární oběžné dráhy měly alespoň jeden společný bod. Pokud však dvě koplánární oběžné dráhy nemají vůbec žádný společný bod, je třeba realizovat přechod z jedné dráhy na druhou pomocí tzv. přechodové

dráhy. Z toho také vyplývá, že přechod nelze realizovat jednoimpulsním manévrem. K tomu jsou nezbytné nejméně dva impulsy.

5.2.1 Obecná přechodová dráha mezi kruhovými oběžnými dráhami

Na obr. 5-12 je příklad obecné eliptické přechodové dráhy mezi dvěma kruhovými oběžnými dráhami. Oběžné dráhy, ležící v jedné rovině budeme označovat čísly v závorce následovně. Výchozí oběžná dráha je označena (1), cílová dráha (2) a přechodová dráha (3).



Obr. 5-12 Obecná eliptická přechodová dráha mezi dvěma kruhovými oběžnými dráhami.

Zkoumejme dvouimpulsní přechod z výchozí kruhové oběžné dráhy (1) na cílovou kruhovou oběžnou dráhu (2) o větším poloměru ($r_2 > r_1$). Přechod lze provést jakoukoliv eliptickou dráhou, která má s oběma oběžnými dráhami společné body. To je splněno v případě, kdy pro vzdálenost pericentra přechodové eliptické dráhy platí ($r_p < r_1$), a pro vzdálenost apocentra přechodové dráhy naopak platí ($r_a > r_2$). V průsečíku výchozí oběžné dráhy (1) s přechodovou dráhou (3), označeném písmenem „a“, je zaveden první rychlostní impuls ΔV_a . Tímto impulsem se převede kosmické těleso na přechodovou eliptickou dráhu (3). Rychlost na výchozí kruhové oběžné dráze (1) v bodě „a“ je rovna první kosmické rychlosti $V_{a1} = V_{11} = \sqrt{\mu/r_1}$. Rychlost v témže průsečíku na eliptické přechodové dráze (3) je V_{a3} . Je dána tvarem a velikostí zvolené

eliptické přechodové dráhy (r_A, r_P). Velikost této rychlosti určíme pomocí vztahu (3.95). Pro náš případ

$$V_{a3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a} \right)}. \quad (5.29)$$

Vektor \vec{V}_{a3} musí být tečný k eliptické přechodové dráze (obr. 5-12). Úhel pootočení β_a v místě „a“ je v našem případě totožný se sklonem dráhy letu vůči místnímu horizontu ($\beta_a = \gamma_a$). Sklon dráhy letu na přechodové dráze (3) v bodě „a“ určíme dle rov. (3.143). V tomto případě

$$\gamma_a = \arctg \left(\frac{e \sin \Theta_a}{1 + e \cos \Theta_a} \right). \quad (5.30)$$

Potřebné parametry přechodové eliptické dráhy e , p a Θ_a nalezneme metodami uvedenými v kapitole 3. Velikost prvního rychlostního impulsu ΔV_a v průsečíku „a“ určíme pomocí kosinové věty dle vztahu (5.2), který přepíšeme pro náš případ na tvar

$$\Delta V_a = \sqrt{V_{I_1}^2 + V_{a3}^2 - 2V_{I_1}V_{a3} \cos \gamma_a}. \quad (5.31)$$

Obdobným postupem stanovíme i rychlost na přechodové oběžné dráze (3) v bodě „b“, kde rychlost na cílové oběžné dráze je rovna první kosmické rychlosti $V_{a2} = V_{I_2} = \sqrt{\mu/r_2}$. Rychlost v průsečíku „b“ na přechodové dráze (3) je dána výrazem

$$V_{b3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a} \right)}. \quad (5.32)$$

Pro stanovení sklonu dráhy letu γ_b na přechodové dráze (3) v bodě „b“ použijeme rov. (5.30), kde nahradíme indexy „a“ indexy „b“. Odpovídající potřebný rychlostní impuls v průsečíku drah „b“ pro přechod na cílovou oběžnou dráhu (2) stanovíme opět použitím kosinové věty ve tvaru

$$\Delta V_b = \sqrt{V_{b3}^2 + V_{I_2}^2 - 2V_{b3}V_{I_2} \cos \gamma_b}. \quad (5.33)$$

Celkový rychlostní impuls bude dán součtem absolutních hodnot obou rychlostních impulsů v bodech „a“ a „b“

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b. \quad (5.34)$$

Tomuto totálnímu rychlostnímu impulsu pak odpovídá celková energetická náročnost daného manévru. Volbou tvaru a velikosti eliptické přechodové dráhy je možno ovlivňovat velikost celkové energetické náročnosti přechodového manévru.

Příklad 5.5

Zadání:

Jsou dány dvě koplanární kruhové oběžné dráhy kolem Země o zadaných poloměrech. Stanovte velikosti a místa dvou rychlostních impulsů nutných pro přechod z výchozí oběžné dráhy (1) na cílovou oběžnou dráhu (2). Pro přechod použijte obecnou eliptickou přechodovou dráhu (3). Přechodová dráha je zadána polohami perigea a apogea.

5. Manévrování na oběžné dráze

Potřebná data:

Poloměr výchozí kruhové oběžné dráhy (1)	$r_1 = 7500 [km]$,
Poloměr cílové kruhové oběžné dráhy (2)	$r_2 = 10000 [km]$,
Vzdálenost perigea přechodové dráhy (3)	$r_p = 6700 [km]$,
Vzdálenost apogea přechodové dráhy (3)	$r_A = 13500 [km]$,
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 [km^3 s^{-2}]$.

Řešení:

a) Výpočet kruhové rychlosti (l. kosmické rychlosti) na výchozí oběžné dráze (1)

$$V_{a1} = V_{l1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600}{7500}} = 7,2902 [kms^{-1}].$$

b) Výpočet excentricity zvolené přechodové eliptické dráhy (3)

$$e = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p} = \frac{13500 - 6700}{13500 + 6700} = 0,336634 [1].$$

c) Výpočet hlavní poloosy přechodové dráhy (3)

$$a = \frac{r_A + r_p}{2} = \frac{13500 + 6700}{2} = 10100 [km].$$

d) Výpočet parametru přechodové eliptické dráhy (3)

$$p = a(1 - e^2) = 10100(1 - 0,336634^2) = 8955,443 [km].$$

e) Výpočet pravé anomálie prvního průsečíku „a“ z rovnice dráhy

$$\Theta_a = \arccos\left(\frac{p - r_1}{er_1}\right) = \arccos\left(\frac{8955,443 - 7500}{0,336634(7500)}\right) = 54,797 [^\circ].$$

f) Výpočet sklonu dráhy letu v průsečíku „a“

$$\gamma_a = \arctg\left(\frac{e \sin \Theta_a}{1 + e \cos \Theta_a}\right) = \arctg\left(\frac{0,336634 \sin 54,797^\circ}{1 + 0,336634 \cos 54,797^\circ}\right) = 12,973 [^\circ].$$

g) Výpočet velikosti místní rychlosti na přechodové dráze (3) v průsečíku „a“

$$V_{a3} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{2(398600)\left(\frac{1}{7500} - \frac{1}{2(10100)}\right)} = 8,1748 [kms^{-1}].$$

h) Výpočet potřebného impulsu pro přechod na dráhu (3) v průsečíku „a“

$$\Delta V_a = \sqrt{V_{l1}^2 + V_{a3}^2 - 2V_{l1}V_{a3} \cos \gamma_a},$$

$$\Delta V_a = \sqrt{7,2902^2 + 8,1748^2 - 2(7,2902)8,1748 \cos 12,973^\circ} = 1,9557 [kms^{-1}].$$

i) Výpočet kruhové rychlosti (l. kosmické rychlosti) na cílové oběžné dráze (2)

$$V_{b2} = V_{l2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} = \sqrt{\frac{398600}{10000}} = 6,3135 [kms^{-1}].$$

j) Výpočet pravé anomálie druhého průsečíku „b“ z rovnice dráhy

$$\Theta_b = \arccos\left(\frac{p - r_2}{er_2}\right) = \arccos\left(\frac{8955,443 - 10000}{0,336634(10000)}\right) = 108,077 [^\circ].$$

k) Výpočet sklonu dráhy letu v průsečíku „b“

$$\gamma_b = \arctg\left(\frac{e \sin \theta_b}{1 + e \cos \theta_b}\right) = \arctg\left(\frac{0,336634 \sin 108,077^\circ}{1 + 0,336634 \cos 108,077^\circ}\right) = 19,664 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

l) Výpočet velikosti místní rychlosti na přechodové dráze (3) v průsečíku „b“

$$V_{b3} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{2(398600)\left(\frac{1}{10000} - \frac{1}{2(10100)}\right)} = 6,3447 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

m) Výpočet potřebného impulsu pro přechod na dráhu (2) v průsečíku „b“

$$\Delta V_b = \sqrt{V_{b3}^2 + V_{l2}^2 - 2V_{b3}V_{l2} \cos \gamma_b},$$

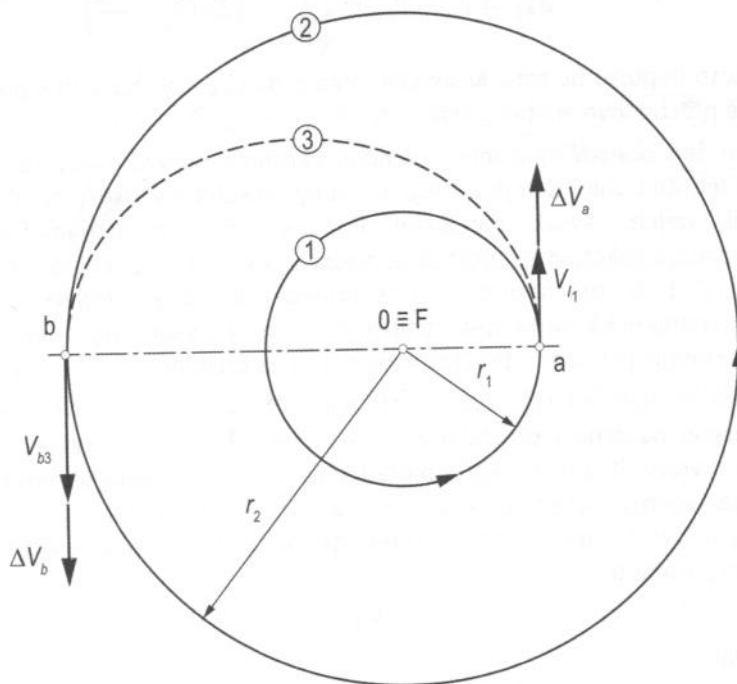
$$\Delta V_b = \sqrt{6,3447^2 + 6,3135^2 - 2(6,3447)6,3135 \cos 19,664^\circ} = 2,1617 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

n) Konečně celkový potřebný rychlostní impuls pro přechodový manévr z výchozí dráhy (1) na cílovou dráhu (2) je dán součtem dílčích impulsů

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b = 1,9557 + 2,1617 = 4,1174 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

5.2.2 Hohmannova přechodová dráha mezi kruhovými oběžnými dráhami

Německý stavební inženýr Walter Hohmann v roce 1925 ukázal, že energeticky nejvýhodnější přechodovou dráhou je taková dráha, kdy průsečíky drah degradují na dva dotykové body, jak je znázorněno na obr. 5-13, [37]. V dotykových bodech mají obě dráhy společné tečny. Tečny v pericentru jsou rovnoběžné s tečnami v apocentru.



Obr. 5-13 Hohmannova přechodová dráha.

V obou tečných bodech, pro něž platí ($r_p = r_1$) a ($r_A = r_2$), jsou sklony dráhy letu γ nulové. Z toho v souladu s rov. (5.31) a (5.33) plyne, že v těchto bodech jsou potřebné rychlostní impulsy pro přechody mezi dráhami nejmenší. Energie vynaložená pro přechodový manévr, která je úměrná součtu obou rychlostních impulsů ($\Delta V_a + \Delta V_b$) je tím pádem nejmenší.

Rozebereme případ Hohmannovy eliptické přechodové dráhy (obr. 5-13) pro přechod z kruhové oběžné dráhy na cílovou kruhovou oběžnou dráhu o větším poloměru ($r_2 > r_1$). První rychlostní impuls ΔV_a je udělen v dotykovém bodě „a“, totožném s pericentrem přechodové dráhy (3). Kosmické letadlo je urychleno na rychlost V_{a3} . Díky nulovosti sklonů dráhy letu jsou rychlosti v tomto bodě kolineární. Pak velikost potřebného rychlostního impulsu je dána prostým rozdílem rychlosti v pericentru dráhy (3) a kruhové rychlosti na dráze (1)

$$\Delta V_a = V_{a3} - V_{11} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}. \quad (5.35)$$

Kosmické letadlo je tímto rychlostním impulsem převedeno na Hohmannovu eliptickou přechodovou dráhu (3). Pokračuje v pohybu po eliptické přechodové dráze až do dalšího tečného bodu „b“, kde oplývá rychlostí V_{b3} . Zde, v apocentru eliptické dráhy (3) je zaveden další rychlostní impuls ΔV_b , jímž je kosmické letadlo převedeno na cílovou kruhovou oběžnou dráhu (2). Jeho velikost je dána rozdílem kruhové rychlosti na dráze (2) a rychlosti V_{b3} v apocentru přechodové dráhy (3)

$$\Delta V_b = V_{12} - V_{b3} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a}\right)}. \quad (5.36)$$

Bez tohoto impulsu by totiž kosmické letadlo nadále pokračovalo v pohybu po druhé polovině přechodové eliptické dráhy (3).

Dodejme, že v případě opačného přechodu z kruhové oběžné dráhy na cílovou oběžnou dráhu o menším poloměru je postup obdobný. Absolutní velikosti rychlostních impulsů zůstávají stejné, avšak rychlostní impulsy jsou orientovány obráceně. Tah manévrovacích raketových motorů je třeba vyvozovat v opačném smyslu. V tečných bodech „a“ a „b“ přecházíme v tomto případě na dráhy energeticky nižších úrovní. Celková energetická náročnost tohoto manévru je však stejná jako v předchozím případě. Energie je v tomto případě vynaložena na brzdění.

Podívejme se nyní na vliv relací mezi poloměry výchozí a cílové oběžné dráhy na energetickou náročnost přechodového manévru. Pro tyto účely upravíme oba výše uvedené výrazy (5.35) a (5.36) následovně. Za hlavní poloosu přechodové dráhy dosadíme známý vztah $a = (r_1 + r_2)/2$. Dále zavedeme relaci mezi prvními kosmickými rychlostmi na obou kruhových oběžných dráhách využitím vztahů pro gravitační parametr

$$\mu = V_{11}^2 r_1 = V_{12}^2 r_2,$$

odkud platí

$$V_{12} = V_{11} / \sqrt{r_2/r_1}. \quad (5.37)$$

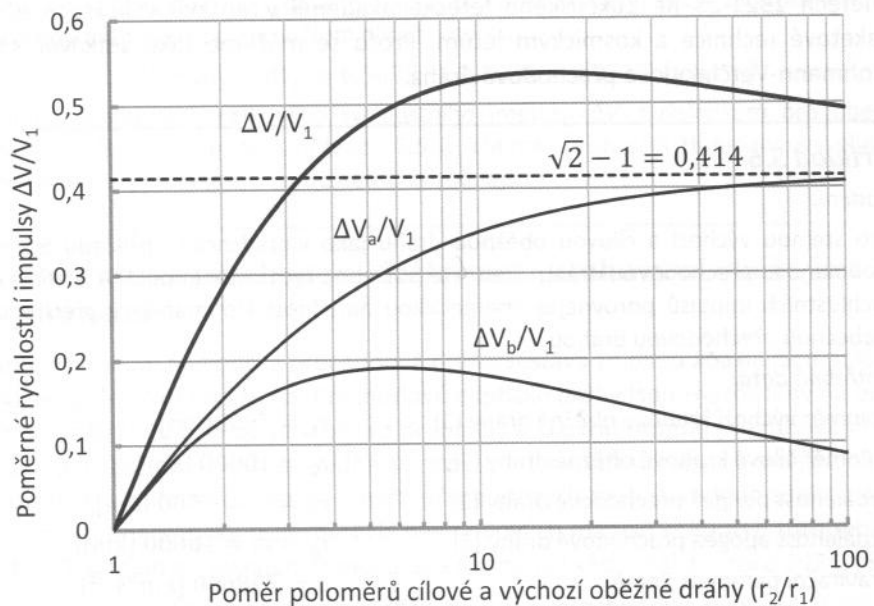
Po dosazení do obou výrazů (5.35) a (5.36) a úpravě obdržíme vztahy pro rychlostní impulsy v závislosti na poměru (r_2/r_1) a kruhové rychlosti výchozí oběžné dráhy

$$\Delta V_a = V_{I_1} \left[\sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 \right], \quad (5.38)$$

$$\Delta V_b = \frac{V_{I_1}}{\sqrt{r_2/r_1}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_2/r_1)}} \right]. \quad (5.39)$$

Celkový potřebný rychlostní impuls je dán součtem obou dílčích impulsů, což lze upravit na tvar

$$\Delta V = \frac{V_{I_1}}{\sqrt{r_2/r_1}} \left[\sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) + 1}} \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) - \sqrt{\frac{r_2}{r_1} + 1} \right]. \quad (5.40)$$



Obr. 5-14 Závislost poměrných rychlostních impulsů na poměru poloměrů cílové a výchozí oběžné dráhy ($V_1 \equiv V_{I_1}$).

Na obr. 5-14 jsou znázorněny průběhy jak dílčích poměrných rychlostních impulsů, tak výsledného poměrného rychlostního impulsu. Všechny rychlostní impulsy jsou jednotně vztahy na I. kosmickou rychlost výchozí kruhové oběžné dráhy. Zatímco první impuls monotónně roste k asymptotické hodnotě $\Delta V_a/V_1 = 0,414$, druhý rychlostní impuls vykazuje maximum $(\Delta V_b/V_1)_{max} = 0,190$ při poměru $(r_2/r_1) = 5,879$ a poté klesá k nule. Celkový poměrný rychlostní impuls dosahuje své maximum $(\Delta V/V_1)_{max} = 0,536$ při poměru poloměrů vnější a vnitřní kruhové oběžné dráhy $(r_2/r_1) = 15,582$.

(5.37)

5. Manévrování na oběžné dráze

Kromě energetické náročnosti může hrát významnou roli také doba letu t_H po Hohmannově přechodové dráze. Doba letu po Hohmannově eliptické přechodové dráze stanovíme pomocí III. Keplerova zákona. Doba letu je dána poloviční hodnotou periody dle rov. (3.86)

$$t_H = \frac{T_H}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}$$

Po dosazení za hlavní poloosu Hohmannovy eliptické oběžné dráhy $a_H = (r_1 + r_2)/2$ obdržíme pro dobu letu výraz

$$t_H = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\mu}} \quad (5.41)$$

Poznámka: V ruské literatuře lze nalézt zmínku, že ke stejnému poznatku jako W. Hohmann dospěl také ruský vědec V. P. Vetčinkin (1888-1950), žák významného ruského aerodynamika N. J. Žukovského. V.P.Vetčinkin o tomto problému přednášel již v letech 1921-25 na Žukovského letecké akademii v Moskvě v kursech věnovaných raketové technice a kosmickým letům. Proto se můžeme také setkat s termínem Hohmann-Vetčinkinova přechodová dráha.

Příklad 5.6

Zadání:

Pro stejnou výchozí a cílovou oběžnou dráhu jako v předchozím příkladu 5.5 navrhnete Hohmannovu přechodovou dráhu. Stanovte potřebné rychlostní impulsy a pomocí celkových rychlostních impulsů porovnejte energetickou náročnost Hohmannovy přechodové dráhy s obecnou přechodovou dráhou.

Potřebná data:

Poloměr výchozí kruhové oběžné dráhy (1)	$r_1 = 7500 [km]$,
Poloměr cílové kruhové oběžné dráhy (2)	$r_2 = 10000 [km]$,
Vzdálenost perigea přechodové dráhy (3)	$r_P = r_1 = 7500 [km]$,
Vzdálenost apogea přechodové dráhy (3)	$r_A = r_2 = 10000 [km]$,
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 [km^3 s^{-2}]$.

Řešení:

Postup výpočtu je obdobný jako v příkladu 5.5. Výpočet je dokonce jednodušší v tom, že sklon dráhy letu jak v perigeu, tak v apogeu Hohmannovy přechodové dráhy je nulový. Dále pro pravé anomálie v tečných bodech platí $\Theta_a \equiv \Theta_{P_3} = 0^\circ$ a $\Theta_b \equiv \Theta_{A_3} = 180^\circ$.

a) Výpočet kruhové rychlosti (l. kosmické rychlosti) na výchozí oběžné dráze (1)

$$V_{a1} \equiv V_{l_1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600}{7500}} = 7,2902 [kms^{-1}].$$

b) Výpočet hlavní poloosy přechodové dráhy (3)

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{10000 + 7500}{2} = 8750 [km].$$

c) Výpočet rychlosti na přechodové dráze (3) v perigeu, označeném bodem „a“

$$V_{a3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2(398600) \left(\frac{1}{7500} - \frac{1}{2(8750)} \right)} = 7,7935 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

d) Výpočet potřebného impulsu pro přechod na dráhu (3) v bodě „a“

$$\Delta V_a = V_{a3} - V_{I_1} = 7,7935 - 7,2902 = 0,5033 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

e) Výpočet kruhové rychlosti (l. kosmické rychlosti) na cílové oběžné dráze (2)

$$V_{I_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} = \sqrt{\frac{398600}{10000}} = 6,3135 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

f) Výpočet rychlosti na přechodové dráze (3) v apogeu, označeném bodem „b“

$$V_{b3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2(398600) \left(\frac{1}{10000} - \frac{1}{2(8750)} \right)} = 5,8451 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

g) Výpočet potřebného rychlostního impulsu pro přechod na cílovou dráhu (2) v bodě „b“

$$\Delta V_b = V_{I_2} - V_{b3} = 6,3135 - 5,8451 = 0,4684 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

h) Konečně celkový potřebný rychlostní impuls pro přechodový manévr z výchozí dráhy (1) na cílovou dráhu (2) je dán součtem dílčích impulsů

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b = 0,5033 + 0,4684 = 0,9717 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

Porovnáním potřebného celkového rychlostního impulsu ΔV s výsledkem pro obecnou přechodovou eliptickou dráhu v příkladu 5.5 je zřejmé, že použití Hohmannovy eliptické přechodové dráze je energeticky podstatně výhodnější.

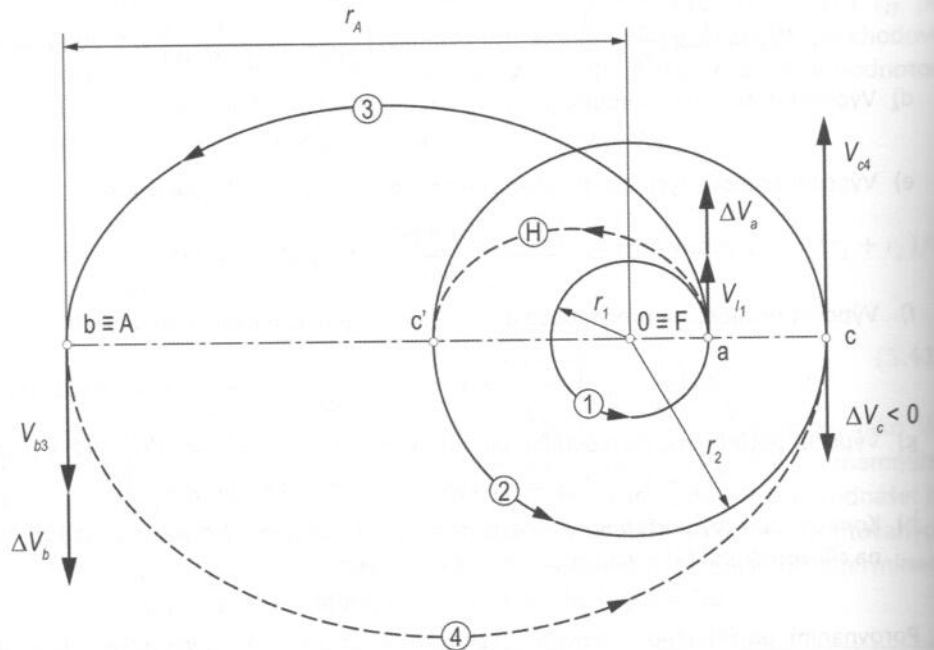
5.2.3 Bieliptická přechodová dráha mezi kruhovými oběžnými dráhami

Jak název napovídá, bieliptická přechodová dráha sestává ze dvou koaxiálních poloelips (3) a (4) se společným ohniskem. Přechodové eliptické dráhy jsou znázorněny na obr. 5-15. Výchozí oběžnou dráhou je kruhová dráha (1) a cílovou dráhou je kruhová oběžná dráha (2), jejíž poloměr $r_2 > r_1$. Jedná se tedy o let z vnitřní dráhy na vnější oběžnou dráhu obchvatem. Použití dvou vložených přechodových drah je vedeno snahou nalézt další možnosti energeticky úspornějších přechodových manévrů. Poprvé tuto možnost předložil A.Sternfeld na zasedání francouzské Akademie věd v Paříži v roce 1934, [64].

Volbou co největší vzdálenosti apocentra r_A první přechodové eliptické dráhy (3), označeného písmenem „b“, lze snižovat velikost potřebného rychlostního impulsu nezbytného pro přechod na další dráhu. V tomto případě na druhou přechodovou eliptickou dráhu (4).

Prvním rychlostním impulsem ΔV_a v bodě „a“ se kosmické letadlo převede na velmi výstřední eliptickou dráhu (3). Velikost prvního impulsu stanovíme pomocí vztahu (5.38), který v tomto případě upravíme tak, že místo poloměru r_2 dosadíme vzdálenost apocentra r_A eliptické přechodové dráhy (3)

$$\Delta V_a = V_{I_1} \left[\sqrt{\frac{2(r_A/r_1)}{1 + (r_A/r_1)}} - 1 \right]. \quad (5.42)$$



Obr. 5-15 Bieliptická přechodová dráha mezi dvěma kruhovými oběžnými dráhami.

Tímto impulsem je v bodě „a“ kosmické letadlo urychleno na rychlost V_{a3} . V apocentru první poloelipsy, kdy kosmické letadlo dosáhlo rychlosti V_{b3} , se ve směru společné tečny zavede další rychlostní impuls ΔV_b (obr. 5-15). Jeho velikost je dána rozdílem rychlosti v apocentru přechodové dráhy (4) a rychlosti v témže apocentru přechodové dráhy (3)

$$\Delta V_b = V_{b4} - V_{b3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_4} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_3} \right)}. \quad (5.43)$$

Za příslušné hlavní poloosy dosadíme $a_3 = (r_A + r_1)/2$, $a_4 = (r_A + r_2)/2$. Po úpravě máme k dispozici mezivýsledek

$$\Delta V_b = \frac{\mu}{r_A} \left[\sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_2)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_1)}} \right].$$

Odmocninu před hranatou závorkou vyjádříme pomocí první kosmické rychlosti $V_{I1}/\sqrt{r_A/r_1}$. Po další úpravě získáváme výsledný vztah pro rychlostní impuls v bodě „b“

$$\Delta V_b = \frac{V_{I1}}{\sqrt{r_A/r_1}} \left[\sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{(r_2/r_1) + (r_A/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_1)}} \right]. \quad (5.44)$$

Tímto impulsem je v bodě „b“ kosmické letadlo převedeno na druhou eliptickou přechodovou dráhu (4). Pokračuje až do pericentra, označeného písmenem „c“, kde je třeba zavést další rychlostní impuls ΔV_c , jímž je kosmické letadlo převedeno na cílovou kruhovou oběžnou dráhu (2). Potřebný rychlostní impuls je dán rozdílem rychlosti

v bodě „c“ na cílové kruhové dráze (2) $V_{c2} = V_{I_2}$ a eliptické rychlosti na dráze (4) v témže bodě

$$\Delta V_c = V_{I_2} - V_{c4} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a_4} \right)}. \quad (5.45)$$

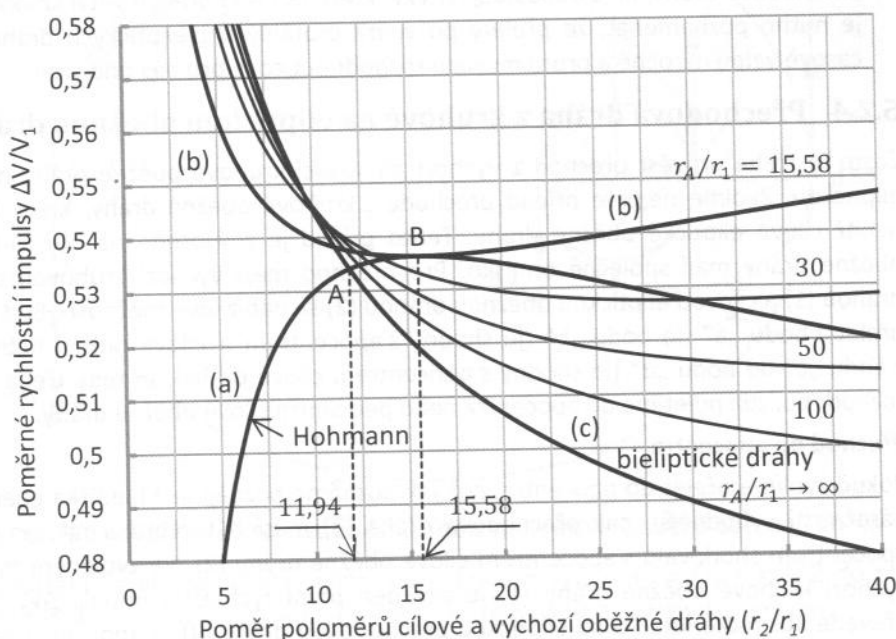
Jelikož rychlost $V_{c4} > V_{I_2}$ vychází impuls ΔV_c záporný. Jedná se tedy o brzdicí impuls.

Úpravou vztahu (5.45) podobně jako v předchozím případě dospějeme k výslednému vztahu pro stanovení rychlostního impulsu pro zachycení kosmického letadla na cílové kruhové oběžné dráze

$$\Delta V_c = \frac{V_{I_1}}{\sqrt{r_2/r_1}} \left[1 - \sqrt{\frac{2(r_A/r_1)}{(r_2/r_1) + (r_A/r_1)}} \right]. \quad (5.46)$$

Celkový impuls pro bieliptický přechod z vnitřní kruhové oběžné dráhy na vnější dráhu je dán součtem absolutních (!) hodnot dílčích impulsů

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b + |\Delta V_c|. \quad (5.47)$$



Obr. 5-16 Porovnání energetické náročnosti Hohmannovy a bieliptické přechodové dráhy ($V_1 \equiv V_{I_1}$).

Na obr. 5-16 jsou uvedeny závislosti poměrného rychlostního impulsu ($\Delta V/V_1$) na poměru poloměrů cílové a výchozí oběžné dráhy (r_2/r_1). Křivka (a) platí pro přechod po Hohmannově eliptické dráze. Svazek křivek mezi limitními křivkami (b) až (c) platí pro bieliptické přechodové dráhy. Horní křivka (b) platí pro specifický poměr (r_A/r_1) = 15,58 a dolní křivka (c) pro teoretickou hodnotu (r_A/r_1) $\rightarrow \infty$. Při rovnosti poměrů (r_A/r_1) = (r_2/r_1) = 15,58 (bod „B“) je energetická náročnost přeletu po

v bodě „c“ na cílové kruhové dráze (2) $V_{c2} = V_{I_2}$ a eliptické rychlosti na dráze (4) v témže bodě

$$\Delta V_c = V_{I_2} - V_{c4} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a_4} \right)}. \quad (5.45)$$

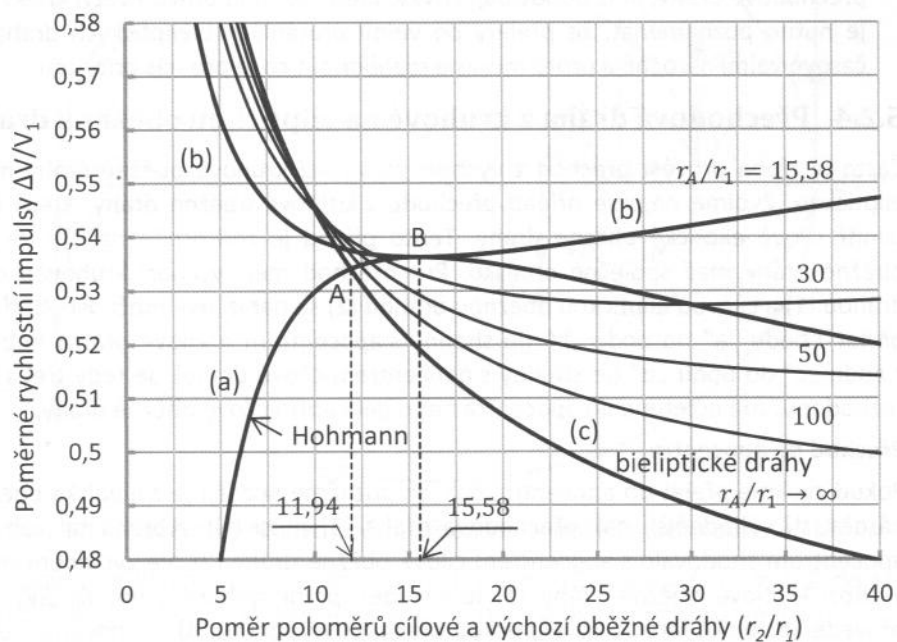
Jelikož rychlost $V_{c4} > V_{I_2}$ vychází impuls ΔV_c záporný. Jedná se tedy o brzdicí impuls.

Úpravou vztahu (5.45) podobně jako v předchozím případě dospějeme k výslednému vztahu pro stanovení rychlostního impulsu pro zachycení kosmického letadla na cílové kruhové oběžné dráze

$$\Delta V_c = \frac{V_{I_1}}{\sqrt{r_2/r_1}} \left[1 - \sqrt{\frac{2(r_A/r_1)}{(r_2/r_1) + (r_A/r_1)}} \right]. \quad (5.46)$$

Celkový impuls pro bieliptický přechod z vnitřní kruhové oběžné dráhy na vnější dráhu je dán součtem absolutních (!) hodnot dílčích impulsů

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b + |\Delta V_c|. \quad (5.47)$$



Obr. 5-16 Porovnání energetické náročnosti Hohmannovy a bieliptické přechodové dráhy ($V_1 \equiv V_{I_1}$).

Na obr. 5-16 jsou uvedeny závislosti poměrného rychlostního impulsu ($\Delta V/V_1$) na poměru poloměrů cílové a výchozí oběžné dráhy (r_2/r_1). Křivka (a) platí pro přechod po Hohmannově eliptické dráze. Svazek křivek mezi limitními křivkami (b) až (c) platí pro bieliptické přechodové dráhy. Horní křivka (b) platí pro specifický poměr (r_A/r_1) = 15,58 a dolní křivka (c) pro teoretickou hodnotu (r_A/r_1) $\rightarrow \infty$. Při rovnosti poměrů (r_A/r_1) = (r_2/r_1) = 15,58 (bod „B“) je energetická náročnost přeletu po

bieliptické dráze stejná jako po Hohmannově dráze ($\Delta V_c = 0$). Dolní limitní křivka (c) pro $(r_A/r_1) \rightarrow \infty$ se protíná s křivkou (a) platnou pro Hohmannovu přechodovou dráhu v bodě „A“. To odpovídá poměru cílové a výchozí kruhové dráhy $(r_2/r_1) = 11,94$. Zde je opět energetická náročnost přeletu po Hohmannově přechodové dráze stejná jako po bieliptické přechodové dráze, byť je jen teoreticky možná, bez praktického významu. Podobně pro každý průsečík mezi body „A“ až „B“ je energetická náročnost pro obě přechodové dráhy stejná.

Na základě uvedeného můžeme udělat následující závěry:

- V rozsahu poměrů poloměrů $0 < (r_2/r_1) < 11,94$ je jednoznačně výhodnější používat Hohmannovy přechodové dráhy (dráhy odpovídají bodům na křivce (a)).
- V rozsahu poměrů poloměrů $11,94 < (r_2/r_1) < 15,58$ jsou bieliptické přechodové dráhy výhodnější jen ty, u nichž poměr $(r_A/r_1) > 15,58$ a poměr (r_2/r_1) je větší než hodnota definována průsečíkem křivky (a), platné pro Hohmannovu přechodovou dráhu, s odpovídající křivkou pro bieliptickou dráhu (jedná se o průsečíky křivek mezi body „A“ a „B“).
- V rozsahu poměrů poloměrů $15,58 < (r_2/r_1) < \infty$ jsou výhodnější bieliptické přechodové dráhy, jimž odpovídají křivky, které leží pod pravou větví křivky (a). Zde je nutno poznamenat, že přelety po velmi protáhlých bieliptických dráhách jsou časově velmi náročné a proto musíme rozhodnout co je pro nás prioritou.

5.2.4 Přechodová dráha z kruhové na eliptickou oběžnou dráhu

Často je třeba provést přechod z výchozí parkovací kruhové oběžné dráhy na dráhu eliptickou. Zvolme nejprve případ přechodu z kruhové oběžné dráhy, která leží zcela uvnitř cílové eliptické oběžné dráhy. Tento případ je znázorněn na obr. 5-17. Obě oběžné dráhy mají společné ohnisko. Pro přechod mezi výchozí kruhovou oběžnou dráhou (1) a cílovou eliptickou oběžnou dráhou (2) se nabízí dvě možnosti. Buď zvolíme přelet z bodu „a“ do bodu „b“ (je shodný s apocentrem A cílové dráhy) nebo přelet z bodu „c“ do bodu „d“ (je shodný s pericentrem cílové dráhy). Je tedy třeba nejdříve rozhodnout, zda poletíme do apocentra nebo pericentra cílové oběžné dráhy.

Přechod do apocentra

Pokud zvolíme přelet do apocentra, což jak poznáme později je z hlediska energetické náročnosti výhodnější, pak přechodová dráha (3) musí být vybrána tak, aby se její apocentrum shodovalo s apocentrem cílové oběžné dráhy (2). Ve zvoleném místě „a“ výchozí kruhové oběžné dráhy (1) je zaveden první rychlostní impuls ΔV_a , jímž se převede kosmické letadlo na eliptickou přechodovou dráhu (3). V apocentru pak musí následovat další rychlostní impuls ΔV_b , kterým se převede kosmické letadlo na cílovou eliptickou oběžnou dráhu (2).

Pro stanovení potřebných rychlostních impulsů můžeme použít obdobný postup jako v předchozím případě pro přechod mezi dvěma kruhovými oběžnými dráhami. První impuls v bodě „a“, který se shoduje s pericentrem přechodové dráhy (3), bude dán rozdílem rychlosti V_{a3} na přechodové dráze (3) v bodě „a“ a kruhové rychlosti V_1 na výchozí kruhové dráze (1)

nitní křivka (c)
 odovou dráhu
 = 11,94. Zde
 ze stejná jako
 ého významu.
 čnost pro obě

ě výhodnější
 křivce (a)).
 é přechodové
 r₁) je větší než
 přechodovou
 úsečky křivek

u dráhu

áhu na dráhu
 která leží celá
 or. 5-17. Obě
 ovou oběžnou
 i. Buď zvolíme
) nebo přelet
 třeba nejprve
 ny.

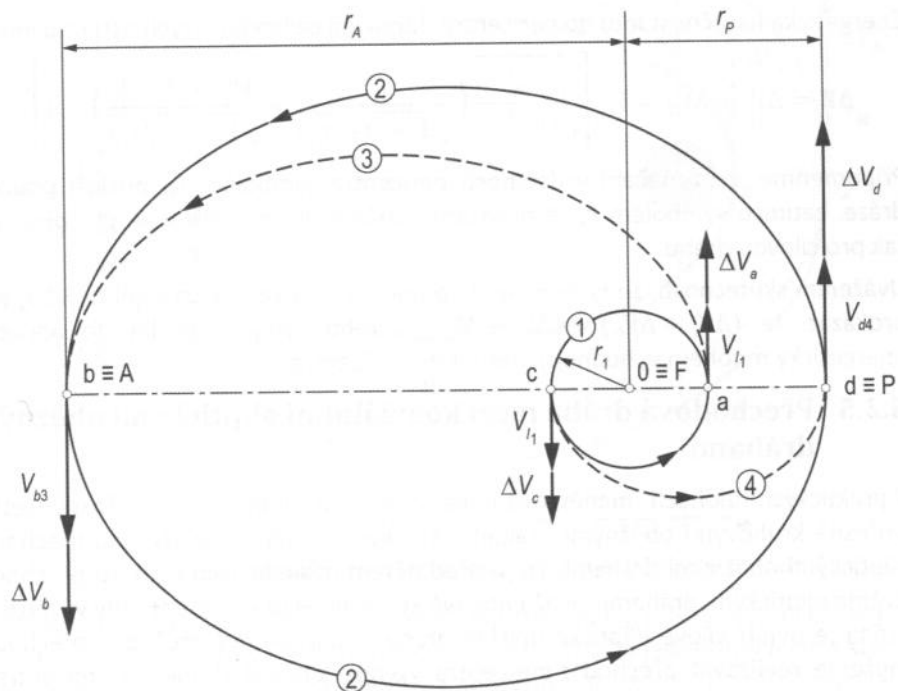
a energetické
 k, aby se její
 ém místě „a“
 ΔV_a, jímž se
 ntru pak musí
 dlo na cílovou

ý postup jako
 ráhami. První
 (3), bude dán
 chlosti V_{I1} na

$$\Delta V_a = V_{a3} - V_{I1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a_3} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}. \quad (5.48)$$

Po přiletu do bodu „b“, který je společným apocentrem přechodové i cílové dráhy, kosmické letadlo oplývá rychlostí V_{b3}. Zde je zaveden druhý rychlostní impuls ΔV_b. Jeho velikost je dána rozdílem potřebné rychlosti pro let po dráze (2) V_{b2} a rychlosti V_{b3} v apocentru přechodové dráhy (3)

$$\Delta V_b = V_{b2} - V_{b3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_2} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a_3} \right)}. \quad (5.49)$$



Obr. 5-17 Přechod z kruhové oběžné dráhy na vnější eliptickou oběžnou dráhu.

Po dosažení za hlavní poloosy elips $a_2 = (r_P + r_A)/2$ a $a_3 = (r_1 + r_A)/2$ do rovnic (5.48) a (5.49), obdržíme po úpravě výrazy pro oba rychlostní impulsy ve tvaru

$$\Delta V_a = V_{I1} \left[\sqrt{\frac{2(r_A/r_1)}{1 + (r_A/r_1)}} - 1 \right], \quad (5.50)$$

$$\Delta V_b = \frac{V_{I1}}{\sqrt{r_A/r_1}} \left[\sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_P)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_A/r_1)}} \right]. \quad (5.51)$$

Celkový rychlostní impuls pro let do apocentra je dán součtem uvedených dvou dílčích impulsů $\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b$.

Přechod do pericentra

Obdobně bychom postupovali při volbě letu z kruhové oběžné dráhy (1) z bodu „c“ do pericentra cílové oběžné dráhy (2), označeného jako bod „d“. Obdrželi bychom následující výrazy pro oba příslušné rychlostní impulsy

$$\Delta V_c = V_{l_1} \left[\sqrt{\frac{2(r_p/r_1)}{1 + (r_p/r_1)}} - 1 \right], \quad (5.52)$$

$$\Delta V_d = \frac{V_{l_1}}{\sqrt{r_p/r_1}} \left[\sqrt{\frac{2}{1 + (r_p/r_A)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_p/r_1)}} \right]. \quad (5.53)$$

Energetická náročnost letu do pericentra odpovídá celkovému rychlostnímu impulsu

$$\Delta V = \Delta V_c + \Delta V_d = V_{l_1} \left[\sqrt{\frac{2}{(r_p/r_1)}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (r_p/r_A)}} + \frac{(r_p/r_1) - 1}{\sqrt{1 + (r_p/r_1)}} \right) - 1 \right]. \quad (5.54)$$

Připomeňme, že označení vzdálenosti pericentra symbolem r_p přísluší pouze cílové dráze, zatímco symbolem r_A je označena vzdálenost apocentra jak pro přechodovou, tak pro cílovou dráhu.

Uvážením skutečnosti, že $r_A > r_p$ se dá přímo z výše uvedených vztahů (5.50) až (5.53) prokázat, že $(\Delta V_a + \Delta V_b) < (\Delta V_c + \Delta V_d)$. Z toho vyplývá, že let do apocentra je energeticky mnohem výhodnější, než let do pericentra.

5.2.5 Přechodová dráha mezi koaxiálními eliptickými oběžnými dráhami

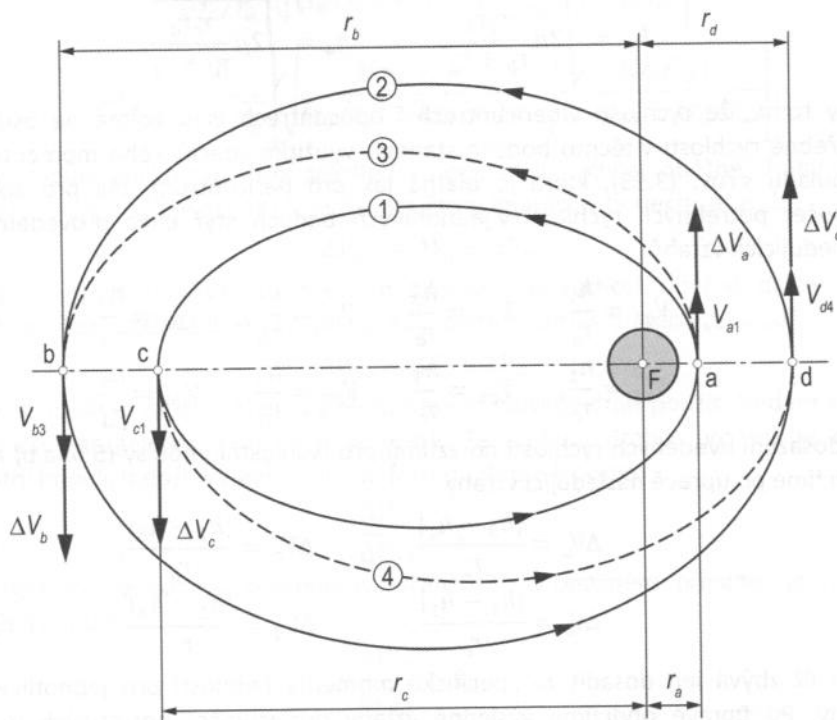
V praktických úlohách manévrování na oběžných dráhách se málokdy setkáváme s přesně kruhovými oběžnými dráhami. Frekventovanější případy jsou přechody mezi eliptickými oběžnými dráhami. To je předmětem následujících rozborů přechodů mezi dvěma eliptickými dráhami. Uvažujme dvě koaxiální eliptické dráhy, kdy výchozí oběžná dráha je uvnitř cílové eliptické oběžné dráhy. Nabízí se dvě možnosti přechodu. Buď můžeme realizovat přechod z pericentra výchozí oběžné dráhy do apocentra cílové oběžné dráhy, nebo z apocentra výchozí oběžné dráhy do pericentra cílové oběžné dráhy. Ukážeme si postup řešení pro obě možnosti současně.

Na obr. 5-18 je znázorněn případ přechodové dráhy (3) z pericentra výchozí eliptické dráhy (1) do apocentra cílové dráhy (2). Z obrázku je patrné, že přechodová dráha (3) má s výchozí dráhou společné pericentrum, označené písmenem „a“ a s cílovou dráhou má společné apocentrum v bodě označeném písmenem „b“. Druhou možností představuje přechodová dráha (4) z apocentra vnitřní eliptické oběžné dráhy (1) do pericentra cílové oběžné dráhy (2). V tomto případě má přechodová dráha (4) s výchozí dráhou společné apocentrum, označené písmenem „c“ a s cílovou dráhou má společné pericentrum v bodě označeném písmenem „d“. Ve všech zmíněných bodech mají vždy společnou tečnu kolmou na přímkou apsid. To znamená, že rychlosti v tečných bodech jsou kolineární. Potřebné rychlostní impulsy ve všech odpovídajících bodech jsou dány pouze rozdílem rychlosti na následující dráze a předchozí dráze. Pro tyto čtyři rychlostní impulsy platí vztahy

$$\Delta V_a = |V_{a3} - V_{a1}|, \quad \Delta V_b = |V_{b2} - V_{b3}|, \quad (5.55a, b)$$

$$\Delta V_c = |V_{c4} - V_{c1}|, \quad \Delta V_d = |V_{d2} - V_{d4}|. \quad (5.56a, b)$$

Připomeňme, že podobně jako v předchozích případech rozlišujeme rychlosti pomocí dvou indexů. První index (malé písmeno) označuje místo působitě rychlosti a druhý index (číslo) přiřazuje rychlost k odpovídající dráze.



Obr. 5-18 Přechod mezi dvěma koaxiálními eliptickými dráhami.

Pro nalezení uvedených rychlostí musíme znát parametry příslušných elips, konkrétně excentricitu e a specifický moment hybnosti h . Excentricity jednotlivých elips stanovíme pomocí známých vzdáleností pericentra a apocentra dle vztahu (3.49). Z rovnice dráhy (3.44) pro podmínky v pericentru ($\theta = 0^\circ$) nalezneme výraz pro specifický moment hybnosti

$$h = \sqrt{r_p \mu (1 + e)}. \quad (5.57)$$

Jelikož specifický moment hybnosti je pro danou eliptickou oběžnou dráhu konstantní, stačí jej určit jen z podmínky v pericentru. Po dosazení výrazu pro excentricitu (3.49) do vztahu (5.57) získáme obecný tvar pro specifický moment hybnosti v závislosti na vzdálenostech pericentra a apocentra

$$h = \sqrt{2\mu \frac{r_A r_P}{r_A + r_P}}. \quad (5.58)$$

Nyní je třeba do obecného vztahu (5.58) pro specifický moment hybnosti pro jednotlivé eliptické dráhy dosadit odpovídající polohy pericenter a apocenter dle naší notace

uvedené na obr. 5-18. Po dosažení získáváme specifické momenty hybnosti pro čtyři eliptické dráhy ve tvarech

$$h_1 = \sqrt{2\mu \frac{r_c r_a}{r_c + r_a}}, \quad h_2 = \sqrt{2\mu \frac{r_b r_d}{r_b + r_d}}, \quad (5.59a, b)$$

$$h_3 = \sqrt{2\mu \frac{r_b r_a}{r_b + r_a}}, \quad h_4 = \sqrt{2\mu \frac{r_c r_d}{r_c + r_d}}. \quad (5.60a, b)$$

Díky tomu, že rychlosti v pericentrech i apocentrech jsou kolmé na osu apsid lze potřebné rychlosti v těchto bodech stanovit využitím specifického momentu hybnosti v souladu s rov. (3.93), která je platná jak pro pericentrum, tak pro apocentrum. Výpočet potřebných rychlostí v jednotlivých bodech čtyř elips provedeme pomocí následujících vztahů

$$V_{a1} = \frac{h_1}{r_a}, \quad V_{a3} = \frac{h_3}{r_a}, \quad V_{b2} = \frac{h_2}{r_b}, \quad V_{b3} = \frac{h_3}{r_b},$$

$$V_{c1} = \frac{h_1}{r_c}, \quad V_{c4} = \frac{h_4}{r_c}, \quad V_{d2} = \frac{h_2}{r_d}, \quad V_{d4} = \frac{h_4}{r_d}.$$

Po dosažení uvedených rychlostí do vztahů pro rychlostní impulsy (5.55a,b) a (5.56a,b) obdržíme po úpravě následující vztahy

$$\Delta V_a = \frac{|h_3 - h_1|}{r_a}, \quad \Delta V_b = \frac{|h_2 - h_3|}{r_b}, \quad (5.61a, b)$$

$$\Delta V_c = \frac{|h_4 - h_1|}{r_c}, \quad \Delta V_d = \frac{|h_2 - h_4|}{r_d}. \quad (5.62a, b)$$

Nyní již zbývá jen dosadit za specifické momenty hybností pro jednotlivé eliptické dráhy. Po úpravě obdržíme výsledné vztahy pro výpočet potřebných rychlostních impulsů. Potřebný rychlostní impuls pro přechod z pericentra oběžné dráhy (1) na přechodovou dráhu (3) stanovíme ze vztahu

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \left| \sqrt{\frac{2r_b}{r_b + r_a}} - \sqrt{\frac{2r_c}{r_c + r_a}} \right|.$$

Vztah dále upravíme zavedením vztažné lokální i. kosmické rychlosti $V_{I_a} = \sqrt{\mu/r_a}$ platné pro bod „a“. Podobně ji zavedeme i do výrazů pro další rychlostní impulsy. Dále zavedeme relativní vzdálenosti pericenter a apocenter (r_b/r_a) , (r_c/r_a) a (r_d/r_a) . Takže výraz pro rychlostní impuls ΔV_a po naznačené úpravě nabude tvar

$$\Delta V_a = V_{I_a} \left| \sqrt{\frac{2(r_b/r_a)}{1 + (r_b/r_a)}} - \sqrt{\frac{2(r_c/r_a)}{1 + (r_c/r_a)}} \right|. \quad (5.63)$$

Podobnou úpravu provedeme i u ostatních rychlostních impulsů. Po úpravách obdržíme následující výsledné vztahy

$$\Delta V_b = \frac{V_{I_a}}{\sqrt{r_b/r_a}} \left| \sqrt{\frac{2(r_d/r_a)}{(r_d/r_a) + (r_b/r_a)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_b/r_a)}} \right|, \quad (5.64)$$

$$\Delta V_c = \frac{V_{I_a}}{\sqrt{r_c/r_a}} \left| \sqrt{\frac{2(r_d/r_a)}{(r_d/r_a) + (r_c/r_a)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_c/r_a)}} \right|, \quad (5.65)$$

$$\Delta V_d = \frac{V_{I_a}}{\sqrt{r_d/r_a}} \left| \sqrt{\frac{2(r_b/r_a)}{(r_b/r_a) + (r_d/r_a)}} - \sqrt{\frac{2(r_c/r_a)}{(r_c/r_a) + (r_d/r_a)}} \right|, \quad (5.66)$$

Celkový impuls aplikovaný pro přechod z pericentra výchozí oběžné dráhy (1) do apocentra cílové oběžné dráhy (2) je dán součtem impulsů v bodech „a“ a „b“

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_a + \Delta V_b.$$

A celkový impuls použitý pro přechod z apocentra výchozí oběžné dráhy (1) do pericentra cílové oběžné dráhy (2) je dán součtem impulsů v bodech „c“ a „d“

$$\Delta V_{cd} = \Delta V_c + \Delta V_d.$$

Logicky se naskytá otázka, kterou z těchto přechodových drah použít. Vedení snahou, co nejnižší energetické náročnosti je jasné, že zvolíme dráhu, pro niž je celkový rychlostní impuls menší. Vyjádřeno jinou formou, bude-li poměr

$$\frac{\Delta V_{cd}}{\Delta V_{ab}} > 1$$

je energeticky výhodnější přechodová dráha (3). V opačném případě, je-li poměr celkových impulsů

$$\frac{\Delta V_{cd}}{\Delta V_{ab}} < 1,$$

pak je vhodnější zvolit přechodovou dráhu (4). Konkrétní řešení pro oba možné druhy přechodových drah je uvedeno v příkladu 5.7.

Z výše uvedených rozborů, speciálně stanovování potřebných rychlostních impulsů vyplývá, že metoda řešení platí rovněž pro případ přechodů z vnější eliptické oběžné dráhy na vnitřní eliptickou oběžnou dráhu. Pro stejný tvar přechodové dráhy je to energeticky jedno. Rychlostní impulsy jsou stejné, mají ovšem opačný smysl.

Příklad 5.7

Zadání:

Jsou dány dvě koaxiální eliptické oběžné dráhy kolem Země o zadaných parametrech. Stanovte celkový rychlostní impuls nutný pro tečný přechod z výchozí oběžné dráhy (1) na cílovou oběžnou dráhu (2) po přechodové dráze (3). Totéž určete pro přelet po přechodové dráze (4). Stanovte dobu přeletu.

Potřebná data:

Perigeum výchozí eliptické oběžné dráhy (1)	$r_a = 7500 [km],$
Apogeum cílové eliptické oběžné dráhy (2)	$r_b = 21000 [km],$
Apogeum výchozí eliptické oběžné dráhy (1)	$r_c = 10000 [km],$

5. Manévrování na oběžné dráze

Perigeum cílové eliptické oběžné dráhy (2)

$$r_a = 9500 \text{ [km]},$$

Gravitační parametr Země

$$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}.$$

Řešení:

Výpočet pomocných veličin

a) Výpočet vztažené lokální i. kosmické rychlosti v bodě „a“

$$V_{Ia} = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} = \sqrt{\frac{398600}{7500}} = 7,2902 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

b) Výpočet poměrných vzdáleností apogea a perigea vztažených na r_a

$$\frac{r_b}{r_a} = \frac{21000}{7500} = 2,8, \quad \frac{r_c}{r_a} = \frac{10000}{7500} = 1,33333, \quad \frac{r_d}{r_a} = \frac{9500}{7500} = 1,26667.$$

Výpočet přechodové dráhy (3)

c) Výpočet prvního poměrného rychlostního impulsu pro přechod na přechodovou dráhu (3) v bodě „a“ dle rov. (5.63)

$$\frac{\Delta V_a}{V_{Ia}} = \left| \sqrt{\frac{2(r_b/r_a)}{1 + (r_b/r_a)}} - \sqrt{\frac{2(r_c/r_a)}{1 + (r_c/r_a)}} \right|,$$

$$\frac{\Delta V_a}{V_{Ia}} = \left| \sqrt{\frac{2(2,8)}{1 + 2,8}} - \sqrt{\frac{2(1,33333)}{1 + 1,33333}} \right| = 0,14491 \text{ [1]}.$$

d) Výpočet druhého poměrného rychlostního impulsu pro přechod na cílovou dráhu (2) v bodě „b“ dle rov. (5.64)

$$\frac{\Delta V_b}{V_{Ia}} = \frac{1}{\sqrt{r_b/r_a}} \left| \sqrt{\frac{2(r_d/r_a)}{(r_d/r_a) + (r_b/r_a)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_b/r_a)}} \right|,$$

$$\frac{\Delta V_b}{V_{Ia}} = \frac{1}{\sqrt{2,8}} \left| \sqrt{\frac{2(1,26667)}{1,26667 + 2,8}} - \sqrt{\frac{2}{1 + 2,8}} \right| = 0,03813 \text{ [1]}.$$

e) Výpočet celkového rychlostního impulsu pro přelet po přechodové dráze (3)

$$\Delta V_{ab} = \left(\frac{\Delta V_a}{V_{Ia}} + \frac{\Delta V_b}{V_{Ia}} \right) V_{Ia} = (0,14491 + 0,03813) 7,2902 = 1,3344 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

f) Výpočet doby přeletu po přechodové dráze (3) dle rov. (5.41)

$$t_{ab} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_a + r_b)^3}{2\mu}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(7500 + 21000)^3}{2(398600)}} = 8464,54 \text{ [s]} = 2,351 \text{ [h]}.$$

Výpočet přechodové dráhy (4)

g) Výpočet prvního poměrného rychlostního impulsu pro přechod na přechodovou dráhu (4) v bodě „c“ dle rov. (5.65)

$$\frac{\Delta V_c}{V_{Ia}} = \frac{1}{\sqrt{r_c/r_a}} \left| \sqrt{\frac{2(r_d/r_a)}{(r_d/r_a) + (r_c/r_a)}} - \sqrt{\frac{2}{1 + (r_c/r_a)}} \right|,$$

$$\frac{\Delta V_c}{V_{Ia}} = \frac{1}{\sqrt{1,33333}} \left| \sqrt{\frac{2(1,26667)}{1,26667 + 1,33333}} - \sqrt{\frac{2}{1 + 1,33333}} \right| = 0,05307 \text{ [1]}.$$

- h) Výpočet druhého poměrného rychlostního impulsu pro přechod na cílovou dráhu (2) v bodě „d“ dle rov. (5.66)

$$\frac{\Delta V_d}{V_{I_a}} = \frac{1}{\sqrt{r_d/r_a}} \left| \sqrt{\frac{2(r_b/r_a)}{(r_b/r_a) + (r_d/r_a)}} - \sqrt{\frac{2(r_c/r_a)}{(r_c/r_a) + (r_d/r_a)}} \right|$$

$$\frac{\Delta V_d}{V_{I_a}} = \frac{1}{\sqrt{1,26667}} \left| \sqrt{\frac{2(2,8)}{2,8 + 1,26667}} - \sqrt{\frac{2(1,33333)}{1,33333 + 1,26667}} \right| = 0,14282 \text{ [1].}$$

- i) Výpočet celkového rychlostního impulsu pro přelet po přechodové dráze (4)

$$\Delta V_{cd} = \left(\frac{\Delta V_c}{V_{I_a}} + \frac{\Delta V_d}{V_{I_a}} \right) V_{I_a} = (0,05307 + 0,14282) 7,2902 = 1,4281 \text{ [kms}^{-1}\text{].}$$

- j) Výpočet doby přeletu po přechodové dráze (4) dle rov. (5.41)

$$t_{cd} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_c + r_d)^3}{2\mu}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(10000 + 9500)^3}{2(398600)}} = 4790,58 \text{ [s]} = 1,331 \text{ [h].}$$

Na základě získaných číselných výsledků můžeme udělat závěr, že v tomto případě je přece jen energeticky výhodnější přelet po přechodové dráze (3), byť doba potřebná k přeletu je poněkud větší. Opět je třeba rozhodnout, co je pro danou misi potřebnější.

5.2.6 Rychlý přechod mezi koaxiálními eliptickými oběžnými dráhami

Případ je určitou modifikací úlohy o tečné eliptické přechodové dráze mezi dvěma eliptickými oběžnými dráhami, kterou jsme rozebírali v předchozí podkapitole 5.2.5. Velmi často je nutno zkrátit dobu přeletu mezi dvěma eliptickými oběžnými dráhami. K tomu slouží tzv. rychlý přechod. Přechod opět realizujeme z eliptické oběžné dráhy (1), která je uvnitř cílové dráhy (2). Specifikum této oběžné dráhy spočívá v tom, že přechodová dráha (3) má společné pericentrum s výchozí dráhou (1) v bodě „a“ a protíná cílovou oběžnou dráhu v bodě „b“. Schéma přechodu je naznačeno na obr. 5-19.

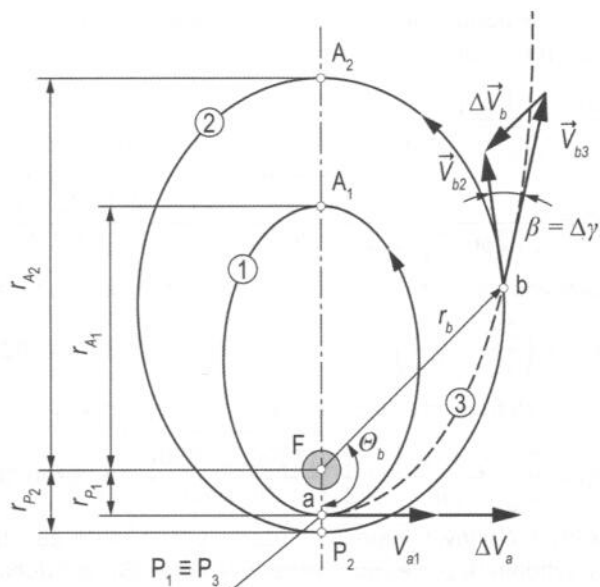
Přepokládá se, že parametry výchozí a cílové oběžné dráhy jsou dány a je třeba zvolit velikost přechodové dráhy tak, aby protínala cílovou dráhu. To je splněno jen v případě, kdy vzdálenost apocentra přechodové dráhy je větší než vzdálenost apocentra cílové oběžné dráhy $r_{A_3} > r_{A_2}$.

Podobně jako v předchozím případě, první rychlostní impuls ΔV_a je zaveden v pericentru výchozí oběžné dráhy (1). Jeho velikost stanovíme dle rov. (5.61a) s tím, že v tomto případě platí $r_a = r_{P_1}$

$$\Delta V_a = \frac{|h_3 - h_1|}{r_{P_1}}. \quad (5.67)$$

Výpočet specifických momentů provedeme dle rov. (5.59a,b) a (5.60a). Pro náš případ budeme potřebovat znát specifické momenty hybnosti pro všechny tři dráhy

$$h_1 = \sqrt{2\mu \frac{r_{A_1} r_{P_1}}{r_{A_1} + r_{P_1}}}, \quad h_2 = \sqrt{2\mu \frac{r_{A_2} r_{P_2}}{r_{A_2} + r_{P_2}}}, \quad h_3 = \sqrt{2\mu \frac{r_{A_3} r_{P_3}}{r_{A_3} + r_{P_3}}}. \quad (5.68a, b, c)$$



Obr. 5-19 Rychlý přechod mezi koaxiálními eliptickými oběžnými dráhami.

Pravou anomálií Θ_b , definující polohu průsečíku drah „b“, určíme pomocí rovnice dráhy (3.44), kterou zapíšeme jednak pro oběžnou dráhu (2), jednak pro přechodovou dráhu (3)

$$r_b = \frac{h_2^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_2 \cos \Theta_b} = \frac{h_3^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_3 \cos \Theta_b}.$$

Z uvedené rovnosti nalezneme vztah pro společnou pravou anomálii v průsečíku „b“

$$\cos \Theta_b = \frac{h_2^2 - h_3^2}{h_3^2 e_2 - h_2^2 e_3}, \quad (5.69)$$

odkud

$$\Theta_b = \arccos \left(\frac{h_2^2 - h_3^2}{h_3^2 e_2 - h_2^2 e_3} \right). \quad (5.70)$$

Vzdálenost průsečíku od společného ohniska (modul průvodiče) určíme opět z rovnice dráhy, např. cílové oběžné dráhy

$$r_b = \frac{h_2^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_2 \cos \Theta_b}. \quad (5.71)$$

Excentricity cílové oběžné dráhy (2) a přechodové dráhy (3) stanovíme ze známých vztahů (3.49)

$$e_2 = \frac{r_{A_2} - r_{P_2}}{r_{A_2} + r_{P_2}}, \quad e_3 = \frac{r_{A_3} - r_{P_3}}{r_{A_3} + r_{P_3}}. \quad (5.72a, b)$$

Doplňme ještě výrazy pro hlavní poloosy cílové i přechodové dráhy dle rov. (3.50), kterou modifikujeme pro náš případ, ($r_{P_3} = r_{P_1}$)

$$a_2 = \frac{r_{A_2} + r_{P_2}}{2}, \quad a_3 = \frac{r_{A_3} + r_{P_3}}{2}. \quad (5.73a, b)$$

Konečně můžeme přistoupit k výpočtu rychlostí letu v průsečíku „b“ jak pro cílovou oběžnou dráhu (2), tak pro přechodovou dráhu (3)

$$V_{b2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{2a_2} \right)}, \quad (5.74)$$

$$V_{b3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{2a_3} \right)}. \quad (5.75)$$

Pro výpočet druhého rychlostního impulsu ΔV_b v průsečíku drah „b“ je třeba stanovit úhel, který oba vektory rychlosti spolu svírají. K tomu nám poslouží výraz (3.143) pro výpočet sklonu dráhy letu

$$\gamma_{b2} = \arctg \left(\frac{e_2 \sin \Theta_b}{1 + e_2 \cos \Theta_b} \right), \quad \gamma_{b3} = \arctg \left(\frac{e_3 \sin \Theta_b}{1 + e_3 \cos \Theta_b} \right). \quad (5.76)$$

Jejich rozdíl definuje úhel, který oba vektory v průsečíku „b“ svírají

$$\beta \equiv \Delta\gamma = \gamma_{b3} - \gamma_{b2}. \quad (5.77)$$

Se znalostí velikostí obou rychlostí V_{b2} , V_{b3} a úhlu $\Delta\gamma$ lze aplikací kosinové věty stanovit rychlostní impuls v bodě „b“ dle vztahu

$$\Delta V_b = \sqrt{V_{b2}^2 + V_{b3}^2 - 2V_{b2}V_{b3} \cos(\Delta\gamma)}. \quad (5.78)$$

A konečně celkový rychlostní impuls, jímž je realizován rychlý přechod z výchozí oběžné dráhy (1) na cílovou oběžnou dráhu (2) je dán součtem obou

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b. \quad (5.79)$$

Rychlý přechodový manévr bude sice energeticky náročnější, avšak časově úspornější. Je třeba uvážit, co bude prioritou. Pro posouzení úspory času je třeba ještě doplnit výpočet času t_b potřebného pro přelet z pericentra v bodě „a“ do bodu „b“ po přechodové dráze. K tomu je třeba použít Keplerovu rovnici (3.112), kde čas průchodu pericentrem položíme rovno nule ($t_p = 0$) a střední pohyb (úhlová rychlost) $n_3 = 2\pi/T_3$. Po dosazení máme rovnici

$$\frac{2\pi}{T_3} t_b = (E_b - e_3 \sin E_b). \quad (5.80)$$

Pro výpočet excentrické anomálie použijeme rovnici (3.125), kterou přepíšeme na tvar

$$E_b = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - e_3}{1 + e_3}} \operatorname{tg} \frac{\Theta_b}{2} \right). \quad (5.81)$$

Periodu přechodové dráhy T_3 můžeme stanovit dle vztahu (3.111), který upravíme pomocí výrazu pro vedlejší poloosu $b = a\sqrt{1 - e^2}$ na tvar

$$T_3 = 2\pi \frac{a_3^2}{h_3} \sqrt{1 - e_3^2}. \quad (5.82)$$

Po dosazení výrazu pro periodu přechodové dráhy (5.82) do rov. (5.80) můžeme zapsat výsledný výraz pro dobu přeletu z pericentra do průsečíku „b“

$$t_b = \frac{a_3^2}{h_3} \sqrt{1 - e_3^2 (E_b - e_3 \sin E_b)}. \quad (5.83)$$

Příklad 5.8

Zadání:

Jsou dány dvě koaxiální eliptické oběžné dráhy Země o zadaných parametrech. Stanovte celkový rychlostní impuls nutný pro rychlý přechod z výchozí oběžné dráhy (1) na cílovou oběžnou dráhu (2). Pro přechod je zvolena eliptická přechodová dráha (3). Přechodová dráha má počátek perigeu výchozí oběžné dráhy. Porovnejte energetickou náročnost a dobu přeletu touto metodou s metodou tečného přeletu do apocentra cílové oběžné dráhy.

Potřebná data:

Perigeum výchozí eliptické oběžné dráhy (1)	$r_{P_1} = 7500 [km],$
Apogeum výchozí eliptické oběžné dráhy (1)	$r_{A_1} = 10000 [km],$
Perigeum cílové eliptické oběžné dráhy (2)	$r_{P_2} = 9500 [km],$
Apogeum cílové eliptické oběžné dráhy (2)	$r_{A_2} = 21000 [km],$
Perigeum přechodové eliptické dráhy (3)	$r_{P_3} = r_{P_1},$
Apogeum přechodové eliptické dráhy (3)	$r_{A_3} = 35500 [km],$
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 [km^3 s^{-2}].$

Řešení:

a) Výpočet specifických momentů hybnosti pro všechny dráhy

$$h_1 = \sqrt{2\mu \frac{r_{A_1} r_{P_1}}{r_{A_1} + r_{P_1}}} = \sqrt{2(398600) \frac{10000(7500)}{10000 + 7500}} = 58451,445 [km^2 s^{-1}],$$

$$h_2 = \sqrt{2\mu \frac{r_{A_2} r_{P_2}}{r_{A_2} + r_{P_2}}} = \sqrt{2(398600) \frac{21000(9500)}{21000 + 9500}} = 72211,302 [km^2 s^{-1}],$$

$$h_3 = \sqrt{2\mu \frac{r_{A_3} r_{P_3}}{r_{A_3} + r_{P_3}}} = \sqrt{2(398600) \frac{35500(7500)}{35500 + 7500}} = 70257,748 [km^2 s^{-1}].$$

b) Výpočet prvního rychlostního impulsu ΔV_a ve společném perigeu výchozí a přechodové dráhy (bod „a“)

$$\Delta V_a = \frac{|h_3 - h_1|}{r_{P_1}} = \frac{|70257,748 - 58451,445|}{7500} = 1,5742 [km s^{-1}].$$

c) Výpočet excentricity cílové oběžné dráhy (2) a přechodové eliptické dráhy (3)

$$e_2 = \frac{r_{A_2} - r_{P_2}}{r_{A_2} + r_{P_2}} = \frac{21000 - 9500}{21000 + 9500} = 0,377049 [1],$$

$$e_3 = \frac{r_{A_3} - r_{P_3}}{r_{A_3} + r_{P_3}} = \frac{35500 - 7500}{35500 + 7500} = 0,651163 [1].$$

d) Výpočet hlavní poloosy cílové oběžné dráhy (2) a přechodové dráhy (3)

$$a_2 = \frac{r_{A_2} + r_{P_2}}{2} = \frac{21000 + 9500}{2} = 15250 [km],$$

(5.83)

$$a_3 = \frac{r_{A_3} + r_{P_3}}{2} = \frac{35500 + 7500}{2} = 21500 \text{ [km]}.$$

e) Výpočet pravé anomálie, kterou je definována poloha průsečíku drah v bodě „b“

$$\Theta_b = \arccos\left(\frac{h_2^2 - h_3^2}{h_3^2 e_2 - h_2^2 e_3}\right) = \arccos\left(\frac{72211,302^2 - 70257,748^2}{70257,748^2 \cdot 0,377049 - 72211,302^2 \cdot 0,651163}\right),$$

$$\Theta_b = 100,451 \text{ [°]}.$$

f) Výpočet délky průvodiče r_b definujícího polohu průsečíku drah „b“ provedeme pro cílovou oběžnou dráhu (2)

$$r_b = \frac{h_2^2}{\mu} \frac{1}{1 + e_2 \cos \Theta_b} = \frac{72211,302^2}{398600} \frac{1}{1 + 0,377049 \cos 100,451^\circ} = 14042,42 \text{ [km]}.$$

g) Výpočet rychlosti v průsečíku drah „b“ na cílové oběžné dráze (2)

$$V_{b2} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{2a_2}\right)} = \sqrt{2(398600) \left(\frac{1}{14042,42} - \frac{1}{2(15250)}\right)} = 5,5347 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

h) Výpočet rychlosti v průsečíku drah „b“ na přechodové dráze (3)

$$V_{b3} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{2a_3}\right)} = \sqrt{2(398600) \left(\frac{1}{14042,42} - \frac{1}{2(21500)}\right)} = 6,1831 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

i) Výpočet sklonu dráhy letu (2) v průsečíku „b“

$$\gamma_{b2} = \arctg\left(\frac{e_2 \sin \Theta_b}{1 + e_2 \cos \Theta_b}\right) = \arctg\left(\frac{0,377049 \sin 100,451^\circ}{1 + 0,377049 \cos 100,451^\circ}\right) = 21,703 \text{ [°]}.$$

j) Výpočet sklonu dráhy letu (3) v průsečíku „b“

$$\gamma_{b3} = \arctg\left(\frac{e_3 \sin \Theta_b}{1 + e_3 \cos \Theta_b}\right) = \arctg\left(\frac{0,651163 \sin 100,451^\circ}{1 + 0,651163 \cos 100,451^\circ}\right) = 35,984 \text{ [°]}.$$

k) Výpočet úhlu, který svírají vektory rychlosti v průsečíku „b“

$$\Delta\gamma = \gamma_{b2} - \gamma_{b3} = 21,703 - 35,984 = -14,281 \text{ [°]}.$$

l) Výpočet rychlostního impulsu v průsečíku „b“ potřebného pro přechod na cílovou oběžnou dráhu (2)

$$\Delta V_b = \sqrt{V_{b2}^2 + V_{b3}^2 - 2V_{b2}V_{b3} \cos(\Delta\gamma)},$$

$$\Delta V_b = \sqrt{5,5347^2 + 6,1831^2 - 2(5,5347)6,1831 \cos(-14,281^\circ)} = 1,5923 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

m) Výpočet výsledného rychlostního impulsu

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b = 1,5742 + 1,5923 = 3,1665 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

n) Výpočet excentrické anomálie v průsečíku drah v bodě „b“

$$E_b = 2 \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - e_3}{1 + e_3}} \operatorname{tg} \frac{\Theta_b}{2}\right) = 2 \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - 0,651163}{1 + 0,651163}} \operatorname{tg} \frac{100,451^\circ}{2}\right),$$

$$E_b = 1,00903 \text{ [rad]} = 57,813 \text{ [°]}.$$

o) Výpočet doby přeletu z perigea „a“ po přechodové dráze (3) do průsečíku „b“

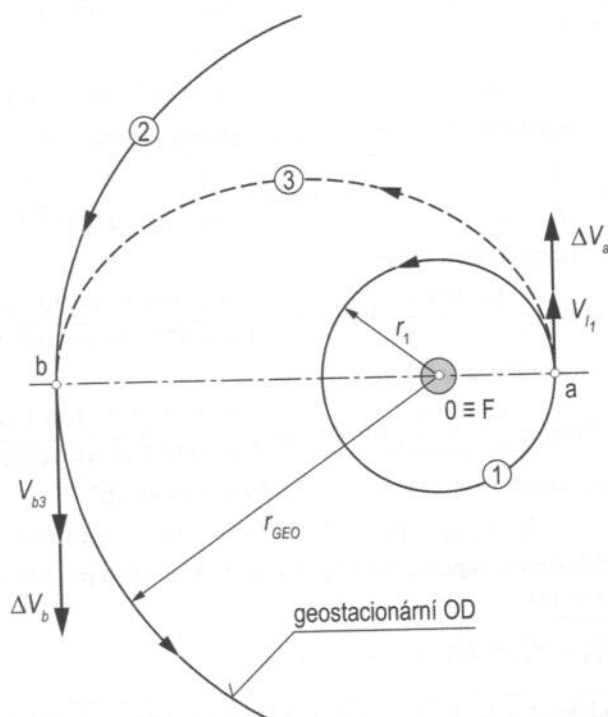
$$t_b = \frac{a_3^2}{h_3} \sqrt{1 - e_3^2} (E_b - e_3 \sin E_b),$$

$$t_b = \frac{21500^2}{70257,748} \sqrt{1 - 0,651163^2 (1,00903 - 0,651163 \sin 57,813^\circ)},$$

$$t_b = 2286,634 \text{ [s]} = 0,6352 \text{ [h]}.$$

5.2.7 Přechod na geostacionární oběžnou dráhu

Mezi speciální přechodové manévry můžeme zařadit vyvedení telekomunikační nebo meteorologické umělé družice na geostacionární dráhu kolem Země. Geostacionární dráha je kruhová oběžná dráha s nulovým sklonem ve specifické výšce nad povrchem Země. Podrobněji bylo o geostacionární dráze pojednáno v podkapitole 3.9.3.



Obr. 5-20 Přechodová dráha mezi kruhovou parkovací dráhou a geostacionární oběžnou dráhou Země.

Vyvedení umělé družice na geostacionární oběžnou dráhu obvykle sestává ze tří kroků (obr. 5-20). Umělá družice se nejprve vyvede na nízkou parkovací kruhovou oběžnou dráhu kolem Země (1). Poté se převede na Hohmannovu přechodovou dráhu (3). Apogeum Hohmannovy přechodové dráhy se musí nacházet ve výšce geostacionární oběžné dráhy (2). Až potud je řešení shodné s metodou uvedenou v podkapitole 5.2.2. Nicméně pokud se místo vypuštění umělé družice nenachází přímo na rovníku, pak je třeba v místě „b“ aplikovat třetí impuls, jímž se změní sklon dráhy na nulový. Postup řešení přechodu umělé družice na geostacionární oběžnou dráhu Země je představen formou následujícího příkladu 5.9.

Příklad 5.9**Zadání:**

Telekomunikační družice, která má být vyvedena na geostacionární oběžnou dráhu kolem Země, je nejprve vypuštěna na parkovací kruhovou oběžnou dráhu. Stanovte výsledný rychlostní impuls nezbytný pro vyvedení družice pomocí Hohmannovy přechodové dráhy s následnou změnou sklonu dráhy. Dále stanovte potřebný rychlostní impuls pro kombinovanou změnu parkovací dráhy na geostacionární oběžnou dráhu. Porovnejte energetickou náročnost obou způsobů vyvedení družice na geostacionární oběžnou dráhu.

Potřebná data:

Výška parkovací kruhové oběžné dráhy (1)	$H_1 = 280 \text{ [km]},$
Výška geostacionární oběžné dráhy (2)	$H_2 = H_{GEO} = 35786 \text{ [km]},$
Zeměpisná šířka místa vzletu	$\varphi = 28,5 \text{ [}^\circ\text{]},$
Azimut vzletu	$\chi = 90 \text{ [}^\circ\text{]},$
Poloměr Země	$r_Z = 6378 \text{ [km]},$
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}.$

1. varianta řešení:

a) Stanovení perigea a apogea Hohmannovy přechodové dráhy (3)

$$r_P = r_1 = r_Z + H_1 = 6378 + 280 = 6658 \text{ [km]},$$

$$r_A = r_2 = r_Z + H_2 = 6378 + 35786 = 42164 \text{ [km]}.$$

b) Výpočet excentricity Hohmannovy přechodové dráhy (3)

$$e_3 = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = \frac{42164 - 6658}{42164 + 6658} = 0,727254 \text{ [1]}.$$

c) Výpočet specifického momentu hybnosti pro přechodovou dráhu (3)

$$h_3 = \sqrt{r_P \mu (1 + e_3)} = \sqrt{(6658) 398600 (1 + 0,727254)} = 67704,7 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{]}.$$

d) Výpočet rychlosti v bodě „a“ na parkovací kruhové oběžné dráze (l. kosmická rychlost)

$$V_{a1} = V_{I_1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{398600}{6658}} = 7,7374 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

e) Výpočet rychlosti v bodě „a“ na Hohmannově přechodové dráze (3)

$$V_{a3} = \frac{h_3}{r_P} = \frac{67704,7}{6658} = 10,1689 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

f) Výpočet potřebného rychlostního impulsu pro přechod na dráhu (3) v místě „a“

$$\Delta V_a = V_{a3} - V_{a1} = 10,1689 - 7,7374 = 2,4315 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

g) Výpočet rychlosti v bodě „b“ na Hohmannově přechodové dráze (3)

$$V_{b3} = \frac{h_3}{r_A} = \frac{67704,7}{42164} = 1,6057 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

h) Výpočet rychlosti (l. kosmické rychlosti) v bodě „b“ na oběžné dráze (2)

$$V_{b2} = V_{I_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}} = \sqrt{\frac{398600}{42164}} = 3,0747 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

5. Manévrování na oběžné dráze

- i) Výpočet potřebného rychlostního impulsu pro přechod na oběžnou dráhu (2) v bodě „b“

$$\Delta V_b = V_{b2} - V_{b3} = 3,0747 - 1,6057 = 1,4690 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

- j) Výpočet dílčího součtu rychlostních impulsů pro přechodový manévr z výchozí dráhy (1) na dráhu (2)

$$(\Delta V_a + \Delta V_b) = 2,4315 + 1,4690 = 3,9005 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

Tímto je dokončen rovinný manévr po Hohmannově přechodové dráze. Nyní je ještě třeba změnit sklon dráhy letu na nulový, teprve pak se bude jednat o geostacionární oběžnou dráhu. Jak je již známo z předchozích rozborů, energeticky nejvýhodnější je provádět změnu roviny dráhy rychlostním impulsem v apogeu (bod „b“).

- k) Stanovení velikosti úhlu pootočení roviny oběžné dráhy (2) do roviny rovníku

Mezi azimutem χ , sklonem dráhy i a zeměpisnou šířkou φ platí vztah (4.164) $\cos i = \sin \chi \cos \varphi$. Jelikož v našem případě je azimut $\chi = 90^\circ$, pak $i = \varphi = 28,5^\circ$.

- l) Výpočet rychlostního impulsu v bodě „b“ potřebného pro pootočení oběžné dráhy (2) o úhel $\alpha = i$ kolem přímky apsid

$$\Delta V_\alpha = 2V_{b2} \sin\left(\frac{i}{2}\right) = 2(3,0747) \sin\left(\frac{28,5^\circ}{2}\right) = 1,5137 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

- m) Celkový rychlostní impuls, jímž je dokončen přechodový manévr na geostacionární oběžnou dráhu je dán součtem všech výše stanovených dílčích rychlostních impulsů

$$\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b + \Delta V_\alpha = 2,4315 + 1,4690 + 1,5137 = 5,4142 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

2. varianta řešení:

Druhá varianta řešení se odlišuje pouze tím, že v bodě „b“ je aplikována kombinovaná změna oběžné dráhy dle vztahu (5.28). V našem případě pro podmínky v bodě „b“ platí

$$\gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \beta \equiv \Delta\gamma = \gamma_3 - \gamma_2 = 0, \quad \alpha = i.$$

- a) Výpočet kombinovaného rychlostního impulsu $\Delta V_{\alpha\beta}$ dle rov. (5.28) upravené pro podmínky v bodě „b“

$$\Delta V_{\alpha\beta} = \sqrt{V_{b2}^2 + V_{b3}^2 - 2V_{b2}V_{b3} \cos(i)},$$

$$\Delta V_{\alpha\beta} = \sqrt{3,0747^2 + 1,6057^2 - 2(3,0747)1,6057 \cos(28,5^\circ)} = 1,8315 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

- b) V tomto případě celkový rychlostní impuls sestává z impulsu ΔV_a v bodě „a“, potřebného pro přechod na Hohmannovu přechodovou dráhu (3) (viz výše) a kombinované změny oběžné dráhy $\Delta V_{\alpha\beta}$ v bodě „b“, která zahrnuje současnou koplanární změnu dráhy (3) i změnu jejího sklonu do roviny geostacionární dráhy

$$\Delta V^* = \Delta V_a + \Delta V_{\alpha\beta} = 2,4315 + 1,8315 = 4,263 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

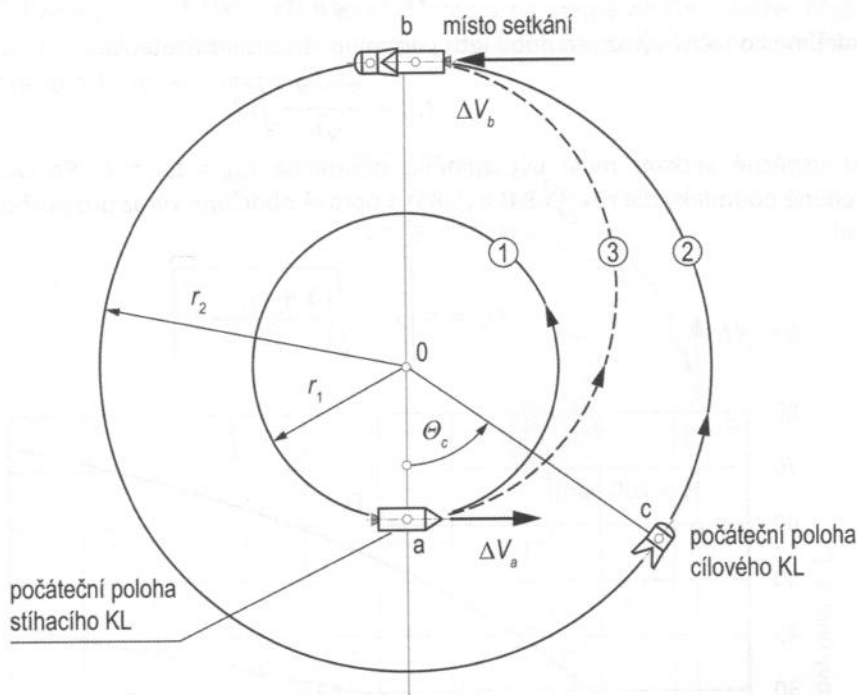
Porovnáním obou variant je zřejmé, že druhá varianta je podstatně výhodnější. Použití dvou oddělených rychlostních impulsů v bodě „b“ je ve srovnání s jedinou kombinovanou změnou oběžné dráhy v bodě „b“ energeticky náročnější. Z porovnání obou celkových rychlostních impulsů vyplývá, že druhá varianta vede na úsporu 21%.

5.3 Setkávací manévry

Mezi velmi důležité manévry na oběžných dráhách patří úlohy setkávání dvou kosmických letadel na oběžné dráze nebo požadavek přemístění kosmického tělesa do jiné polohy na oběžné dráze. Přitom se může jednat o setkávání na téže dráze nebo různých oběžných dráhách.

5.3.1 Setkávací manévr využitím Hohmannovy přechodové dráhy

Mějme dvě kosmická letadla na dvou různých kruhových oběžných dráhách. Kosmické letadlo na vnější oběžné dráze (2) necht' je pasivní cíl, s nímž se má setkat kosmické letadlo pohybující se po vnitřní oběžné dráze (1). Aktivní kosmické letadlo je vybaveno pohonnou jednotkou a je tudíž schopno manévrování, stíhání cíle. Na obr. 5-21 je uveden případ, kdy stíhaný cíl se nachází před aktivním kosmickým letadlem ve směru pohybu. Vzájemná úhlová poloha je dána fázovým úhlem θ_c . Poloměry vnitřní i cílové oběžné dráhy jsou dány. Pro zahájení setkávacího manévru, tj. přechodu na Hohmannovu přechodovou dráhu v bodě „a“ je třeba stanovit fázový úhel θ_c , který definuje polohu cíle v okamžiku aplikace prvního rychlostního impulsu ΔV_a .



Obr. 5-21 Schéma setkávacího manévru pomocí Hohmannovy přechodové dráhy.

Tímto rychlostním impulsem je aktivní kosmické letadlo převedeno na Hohmannovu přechodovou dráhu, po níž pokračuje až do bodu setkání „b“. Zde je třeba aplikovat druhý rychlostní impuls ΔV_b , jímž se ztotožní rychlost s pasivním kosmickým letadlem (cílem). Rychlostní impulsy se stanoví metodami uvedenými v předchozí části.

Potřebný fázový úhel se stanoví z podmínky stejných dob letu z aktuální polohy obou kosmických letadel do bodu setkání „b“. Doba letu po přechodové dráze (3) mezi body „a“ a „b“ je dána poloviční periodou eliptické Hohmannovy přechodové dráhy

$$t_{ab} = \frac{T_H}{2}.$$

Po dosažení za periodu T_H dle III. Keplerova zákona, definovaného rov. (3.86), a výrazu pro hlavní poloosu $a_3 = (r_1 + r_2)/2$ získáváme výraz

$$t_{ab} = \pi \sqrt{\frac{a_3^3}{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}. \quad (5.84)$$

Doba letu pasivního kosmického letadla z bodu „c“ do bodu setkání „b“ je dána úhlovou vzdáleností $(\pi - \Theta_c)$ a úhlovou rychlostí letu po kruhové oběžné dráze (2) $\omega_2 = 2\pi/T_2$

$$t_{cb} = \frac{\pi - \Theta_c}{2\pi/T_2}.$$

Po dosazení za periodu letu po kruhové dráze (2)

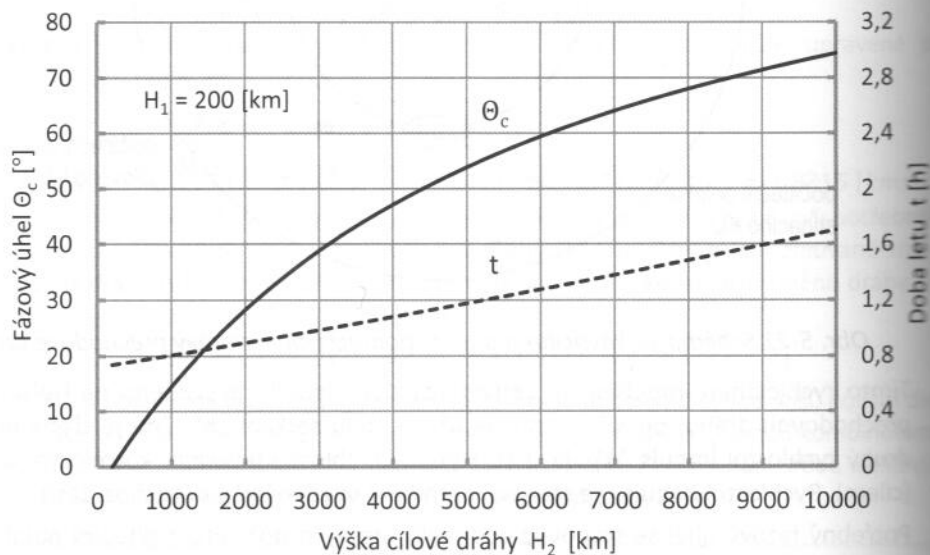
$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{V_{l_2}} = \frac{2\pi r_2}{\sqrt{\mu/r_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \sqrt{r_2^3},$$

obdržíme konečný výraz pro dobu letu pasivního kosmického letadla

$$t_{cb} = \frac{\pi - \Theta_c}{\sqrt{\mu}} \sqrt{r_2^3}. \quad (5.85)$$

Pro úspěšné setkání musí být splněna podmínka $t_{ab} = t_{cb} = t$. Po dosazení do uvedené podmínky dle rov. (5.84) a (5.85) a úpravě obdržíme výraz pro potřebný fázový úhel

$$\Theta_c = \pi \left[1 - \sqrt{\left(\frac{1 + r_1/r_2}{2}\right)^3} \right]. \quad (5.86)$$



Obr. 5-22 Závislost fázového úhlu a doby letu na výšce cílové dráhy pro nízkou výškovou oběžnou dráhu (LEO) $H_1 = 200$ km.

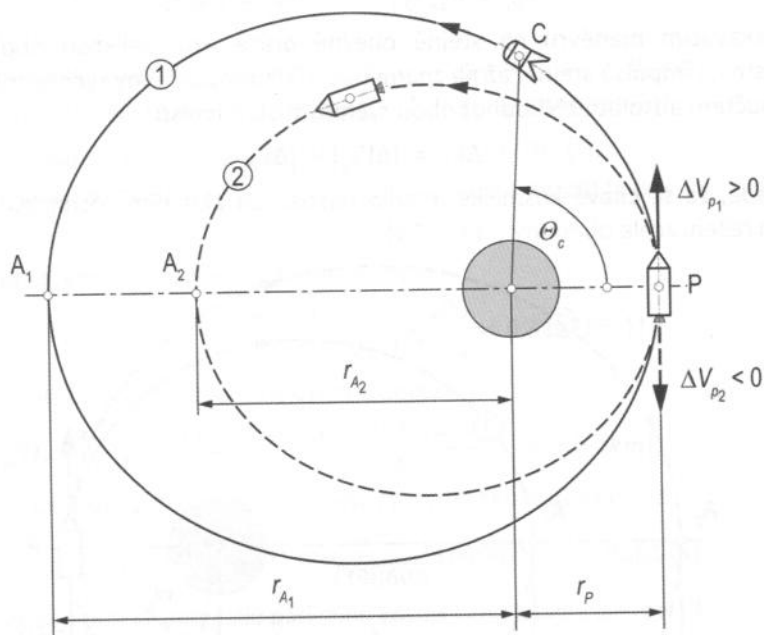
Podívejme se ještě na limitní hodnoty fázového úhlu pro případy $r_2 = r_1$ a $r_2 \rightarrow \infty$. Být ani jedna z limitních hodnot nemá praktický význam, z rov. (5.86) vyplývá, že fázový úhel může teoreticky nabývat hodnot v rozsahu

$$(5.84) \quad 0 \leq \theta_c \leq \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{8}} \right] = 116,36 \text{ [}^\circ\text{]}. \quad (5.87)$$

Na obr. 5-22 je jako příklad uvedena závislost fázového úhlu na výšce cílové oběžné dráhy H_2 pro setkávací manévry z výchozí nízké oběžné dráhy ve výšce $H_1 = 200$ km. Diagram zahrnuje rovněž odpovídající dobu letu v hodinách.

5.3.2 Setkávací manévry na stejné oběžné dráze

Jedná se o případy dvou kosmických letadel nacházejících se na stejné oběžné dráze. Úkolem je nalézt vhodný manévr, jímž by bylo možno zajistit setkání těchto kosmických letadel na téže oběžné dráze. Vedle setkávacích manévrů na stejné oběžné dráze je často potřeba změnit polohu kosmického letadla na stejné oběžné dráze. Mezi tyto úlohy patří např. potřebná změna polohy telekomunikační, nebo meteorologické družice na geostacionární dráze apod.



Obr. 5-23 Setkávací manévr na stejné oběžné dráze pro případ, kdy cílové kosmické letadlo je před aktivním kosmickým letadlem.

Věnujme se setkávacímu manévru dvou kosmických těles na stejné eliptické oběžné dráze. Postup lze jednoduše modifikovat i pro kruhové oběžné dráhy. Na obr. 5-23 je znázorněn případ setkávacího manévru dvou kosmických letadel nacházejících se na stejné eliptické dráze. Přitom pasivní cíl se nachází před aktivním kosmickým letadlem, který je v roli stíhače. To znamená, že aktivní kosmické letadlo musí být převedeno na vnitřní přechodovou dráhu (2), (přerušovaná čára) tak, aby se vrátilo na původní oběžnou dráhu ve stejném okamžiku a místě, kde se bude nacházet cílové kosmické letadlo. V tomto případě je třeba zavést nejdříve brzdící impuls $\Delta V_{P_2} = V_{P_2} - V_{P_1}$ ve společném perigeu pro obě oběžné dráhy ($P_1 = P_2 = P$). Tím je aktivní kosmické letadlo

5. Manévrování na oběžné dráze

převedeno na kratší vnitřní oběžnou dráhu (2). Předpokládáme, že parametry výchozí společné oběžné dráhy jsou známy. Je třeba stanovit parametry přechodové dráhy (2) tak, aby perioda přechodové dráhy T_2 byla stejná jako doba letu cíle z aktuální polohy C do společného perigea P

$$T_2 = T_1 - t_{PC},$$

kde t_{PC} je čas potřebný pro přelet z perigea P do aktuální polohy pasivního kosmického letadla C, definované polohovým úhlem θ_C . Dobu t_{PC} určíme řešením Keplerovy rovnice (3.114).

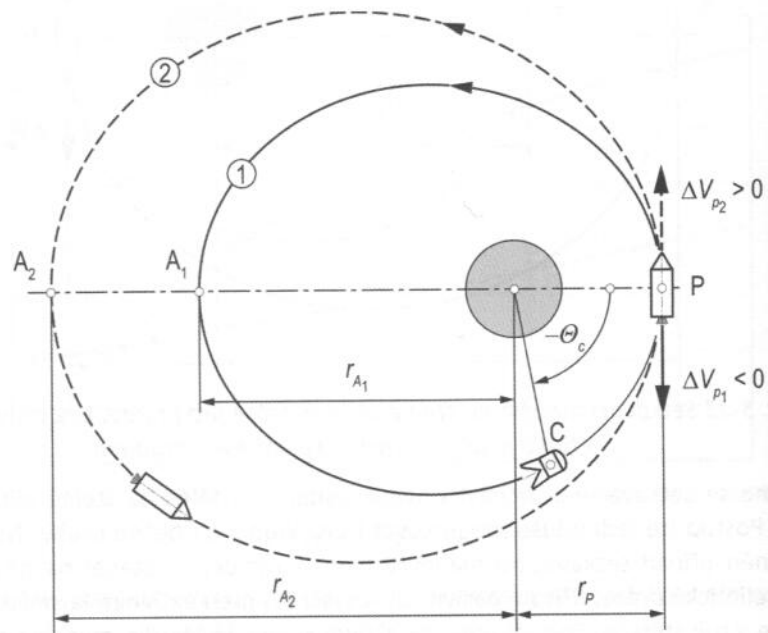
V okamžiku dosažení perigea oběma kosmickými letadly je třeba aktivnímu kosmickému letadlu udělit druhý rychlostní impuls $\Delta V_{P_1} = V_{P_1} - V_{P_2}$, jímž se urychlí a synchronizuje jeho pohyb s cílovým kosmickým letadlem na původní oběžné dráze (1). V opačném případě by aktivní kosmické letadlo pokračovalo po přechodové dráze (2). Rychlosti V_{P_1} a V_{P_2} určíme z podmínek v perigeu dle rov. (3.93)

$$V_{P_1} = h_1/r_P, \quad V_{P_2} = h_2/r_P.$$

Při setkávacím manévru na stejné oběžné dráze jsou velikosti obou potřebných rychlostních impulsů stejné, až na znaménko. Celkový potřebný rychlostní impuls je pak dán součtem absolutních hodnot obou rychlostních impulsů

$$\Delta V_P = |\Delta V_{P_1}| + |\Delta V_{P_2}|.$$

V případě, že se cílové kosmické letadlo nachází za aktivním kosmickým letadlem, je postup řešení zcela obdobný (obr. 5-24).



Obr. 5-24 Setkávací manévr na stejné oběžné dráze pro případ, kdy cílové kosmické letadlo je za aktivním kosmickým letadlem.

V tomto případě je třeba použít delší přechodové dráhy, nacházející se vně výchozí společné oběžné dráhy. Proto je nyní nutno zavést rychlostní impuls $\Delta V_{P_2} > 0$ (na obr.

5-24 čárkovaný vektor) v perigeu, kterým se aktivní kosmické letadlo převede na vnější přechodovou dráhu (přerušovaná čára). Perioda přechodové dráhy (2) se nyní musí rovnat součtu periody výchozí oběžné dráhy a doby t_{CP} potřebné pro přelet z aktuální polohy C do perigea P

$$T_2 = T_1 + t_{CP}.$$

Po této době je v perigeu zaveden rychlostní impuls $\Delta V_{P_1} < 0$, kterým se kosmické letadlo ubrdí na rychlost odpovídající cílovému kosmickému letadlu v bodě P.

Příklad 5.10

Zadáni:

Dvě kosmická letadla se pohybují po společné eliptické oběžné dráze kolem Země. Cílové pasivní kosmické letadlo se nachází před aktivním kosmickým letadlem, které se má během jednoho oběhu setkat s cílem v perigeu P. Stanovte celkový rychlostní impuls, potřebný pro uskutečnění požadovaného setkávacího manévru na téže oběžné dráze.

Potřebná data:

Perigeum společné eliptické oběžné dráhy (1)	$r_{P_1} = r_P = 7200 \text{ [km]},$
Apogeum společné eliptické oběžné dráhy (1)	$r_{A_1} = 14000 \text{ [km]},$
Fázový úhel (skutečná anomálie cíle)	$\Theta_C = 80 \text{ [}^\circ\text{]},$
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}.$

Řešení:

a) Výpočet excentricity společné oběžné dráhy (1)

$$e_1 = \frac{r_{A_1} - r_{P_1}}{r_{A_1} + r_{P_1}} = \frac{14000 - 7200}{14000 + 7200} = 0,320755 \text{ [1]}.$$

b) Výpočet hlavní poloosy společné oběžné dráhy (1)

$$a_1 = \frac{r_{A_1} + r_{P_1}}{2} = \frac{14000 + 7200}{2} = 10600 \text{ [km]}.$$

c) Výpočet periody společné oběžné dráhy T_1 dle III. Keplerova zákona

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a_1^{(3/2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{398600}} 10600^{(3/2)} = 10861 \text{ [s]}.$$

d) Výpočet excentrické anomálie pasivního kosmického letadla dle rov. (3.125)

$$E_C = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - e_1}{1 + e_1}} \operatorname{tg} \frac{\Theta_C}{2} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - 0,320755}{1 + 0,320755}} \operatorname{tg} \frac{80^\circ}{2} \right),$$

$$E_C = 1,08341 \text{ [rad]} = 62,075 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

e) Výpočet potřebné doby pro přelet z perigea P do aktuální polohy cílového kosmického letadla C pomocí Keplerovy rovnice (3.114) s přihlédnutím k rov. (3.113)

$$t_{PC} = \frac{T_1}{2\pi} (E_C - e_1 \sin E_C) = \frac{10861}{2\pi} (1,08341 - 0,320755 \sin 62,075^\circ),$$

$$t_{PC} = 1382,87 \text{ [s]}.$$

f) Výpočet doby letu cílového kosmického letadla z aktuální polohy C do společného perigea P