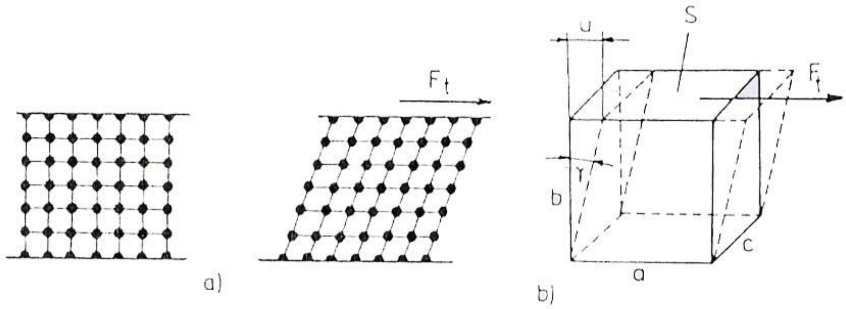
Slezská univerzita v Opavě – Fyzikální ústav			
Fyzikální praktikum I – Mechanika a molekulová fyzika			
Jméno:	**Ročník, obor:**	**Vyučující:**	**Datum měření:**
Spolupracující:	**Název úlohy:** **Měření modulu pružnosti ve smyku**		**Datum odevzdání:**
Číslo úlohy:			**Hodnocení:**

1. Cíl úlohy:
Určete modul pružnosti ve smyku pro ocel.

2. Teorie úlohy:

Při namáhání materiálu smykem (viz obr. 1) se jeho jednotlivé vrstvy navzájem posouvají (smýkají po sobě). Vzdálenost vrstev však zůstává zachována. Tečná síla F_t, působící v rovině horní stěny malého hranolu o hranách a,b,c, posunula tuto stěnu o vzdálenost u.



Obr. 1 Deformace tuhého tělesa při smyku.

Zaveďme veličiny nezávislé na rozměrech zvoleného hranolku: poměrné (relativní) posunutí γ a tečné (smykové) napětí τ :

$$\gamma = \frac{u}{b},$$

$$\tau = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{ac},$$

Hookeův zákon pro smyk má potom tvar:

$$\tau = G\gamma, \text{ nebo } \gamma = \tau \frac{1}{G},$$

kde konstantu úměrnosti G nazveme modulem pružnosti ve smyku. Můžeme tedy modul pružnosti spočíst ze vztahu vztahem:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \qquad [G] = \mathrm{Nm^{-2}} = \mathrm{Pa} \qquad \textbf{(1)}$$

K namáhání materiálu smykem dochází např. při zkrucování tyče kruhového průřezu, která je na jednom konci upevněna a na jejíž druhý konec působí dvojice sil krouticím momentem *M*. Dá se ukázat, že mezi tímto momentem a úhlem zkroucení tyče φ platí vztah

$$M = G\frac{\pi r^4}{2l}\cdot\varphi, \qquad \textbf{(2)}$$

kde *r* je poloměr a *l* délka tyče.

Použijeme-li tenkou a dlouhou tyč, je poměrné posunutí γ dostatečně malé i při velkém úhlu zkroucení φ. Usnadní nám to udržet namáhání materiálu v oblasti malých deformací a tedy i v mezích platnosti Hookeova zákona. Tento požadavek snadno splníme, když místo tyče užijeme tenký dlouhý drát o průměru *d*. Po dosazení *r* = *d*/2 dostává vztah (2) tvar:

$$M = G\frac{\pi d^4}{32\cdot l}\cdot\varphi. \qquad \textbf{(3)}$$

Zavěsme na dolní konec drátu těleso o momentu setrvačnosti *J* a působením momentu *M* drát zkruťme. Protože se pohybujeme v intervalu platnosti Hookeova zákona a tedy v oblasti pružných deformací, bude se drát po skončení působení deformačních sil vracet do původního stavu. Na těleso přitom bude působit moment *M*. Pohybová rovnice tělesa:

$$J\ddot{\varphi} = -M$$

přejde po dosazení za *M* z (3) na

$$\ddot{\varphi} + G\frac{\pi d^4}{32Jl}\cdot\varphi = 0.$$

To je ovšem diferenciální rovnice harmonického pohybu, pro jehož úhlovou frekvenci ω platí:

$$\omega^2 = G\frac{\pi d^4}{32Jl}. \qquad \textbf{(4)}$$

Zavěšené těleso tedy vykonává harmonické torzní kmity. Při výpočtu jsme nebrali v úvahu odpor prostředí a ztráty v drátu, které způsobují tlumení. Jejich vliv však lze obvykle zanedbat.

Dosadíme-li $\omega = 2\pi/T$ do (4), získáme po úpravě:

$$G = \frac{128\pi Jl}{d^4T^2}. \qquad \textbf{(5)}$$

kde *T* je doba torzních kmitů tělesa a *J* jeho moment setrvačnosti.

Těleso (obr. 2) vykonávající kmitavý pohyb je složeno z tyče o hmotnosti M o momentu setrvačnosti J_T a dvou stejných symetricky vzhledem k ose rotace umístěných přídavných těles o hmotnostech m_V a momentech setrvačnosti k vlastní ose rotace procházející těžištěm J_V. Jelikož přídavná závaží mají tvar dutých válců nasunutých na tyč, lze pro moment setrvačnosti J celé kmitající sestavy napsat vztah:

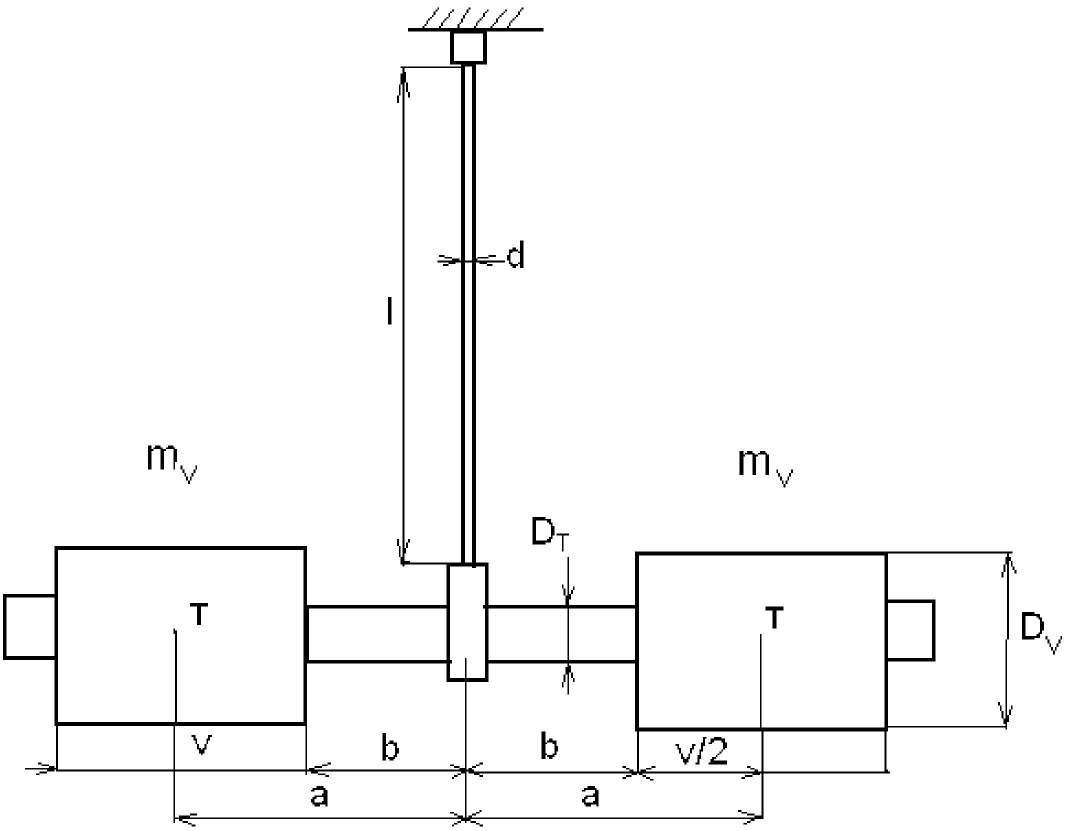
$$J = J_T + 2\left(J_V + m_V a^2\right), \qquad (6)$$

kde $$J_T = \frac{1}{12} \cdot ML^2 \qquad (7)$$

$$J_V = \frac{m_V}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_T}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_V}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{3}\right] \qquad (8)$$

Po dosazení:

$$J = \frac{1}{12} \cdot ML^2 + 2\left\{\frac{m_V}{4} \cdot \left[\left(\frac{D_T}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_V}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{3}\right] + m_V a^2\right\} \qquad (10)$$



Obr. 2

Vypočteme–li tedy moment setrvačnosti J tělesa podle rovnice (10), můžeme poté vypočítat i hodnotu modulu pružnosti ve smyku ocelové struny podle rovnice (5).

Abychom se vyhnuli použití teoretického vztahu pro J_V a J_T, vyloučíme je z měření následovně. Válce umístíme postupně do vzdálenosti a_1 , a_2 , odpovídající časy jsou T_1, T_2 .
Platí

$$J_{a1} = J_T + 2\left(J_V + m_V a_1^{\ 2}\right) \qquad (11)$$

$$J_{a2} = J_T + 2\left(J_V + m_V a_2^{\ 2}\right) \qquad (12)$$

Rovnice odečteme

$$J_{a2} - J_{a1} = 2m_V\left(a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}\right) \qquad (13)$$

Z rovnice (5) vyjádříme *J* a pro dvě různé vzdálenosti *a* a příslušné časy *T,* platí

$$J_{a2} - J_{a1} = \frac{Gd^4}{128\pi l}\left(T_2^{\ 2} - T_1^{\ 2}\right) \qquad (14)$$

Porovnáním pravých stran rovnic (13) a (14) dostaneme

$$G = \frac{128\pi l 2m_V\left(a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}\right)}{d^4\left(T_2^{\ 2} - T_1^{\ 2}\right)} \qquad (15)$$

Vlastní měření

Úkol

Určete modul pružnosti ve smyku ocelové struny.

Pomůcky

Mikrometrické měřítko
Pravítko
Váhy
Posuvné měřítko
Stopky
Svinovací metr

Postup měření

Nejlépe vlastní, pro ostatní např.:

1. Změřte průměr drátu d a jeho délku l.
2. Určete hmotnost závaží m_V.
3. Změřte 10 kmitů torzního kyvadla se závažími vzdálenými o délku *a* od středu tyče a vypočtěte dobu jednoho kmitu.
4. Proveďte pro více různých vzdáleností *a*.
5. Ze vztahu (15) vypočtěte *G*.