

<b>Slezská univerzita v Opavě – Filosoficko-přírodovědecká fakulta</b>			
<b>Fyzikální praktikum I – Mechanika a molekulová fyzika</b>			
<b>Jméno:</b>	<b>Ročník, obor:</b> První	<b>Vyučující:</b>	<b>Datum měření:</b>
<b>Akademický rok:</b>	<b>Název úlohy:</b> <b>Modul pružnosti v tahu</b>		<b>Datum odevzdání:</b>
<b>Číslo úlohy:</b> 6			<b>Hodnocení:</b>

### 1. Cíl úlohy:

Určete modul pružnosti v tahu oceli a dřeva statickou a dynamickou metodou.

### 2. Teorie úlohy:

Působí – li na těleso síla a je – li zajištěno, že se pohybový stav tělesa nemění, nastává deformace tělesa. Tato deformace je buďto elastická nebo-li pružná (taková deformace je vratná), nebo plastická (obecně nevratná). V našem případě budeme uvažovat výhradně pružnou deformaci.

Napětí v tahu  $\nu$ , které při působení síly v tělese vzniká, je definováno jako poměr kolmé složky síly  $\Delta F$  k velikosti plochy  $\Delta S$ , na níž síla působí:

$$\nu = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (1)$$

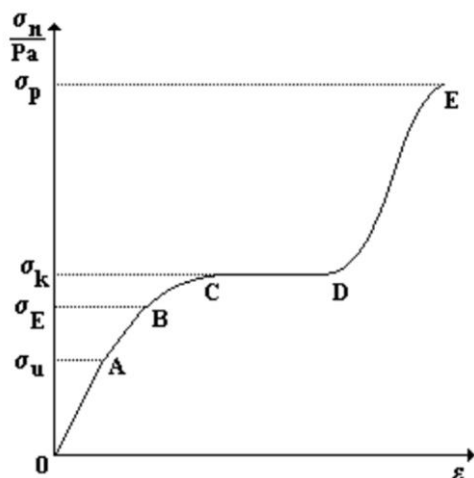
Jednotkou napětí je (stejně jako u tlaku) Pascal [Pa]. Relativní deformace tělesa  $\varepsilon$ , k níž působením síly dojde, je

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

kde  $l$  je příslušný lineární rozměr tělesa a  $\Delta l$  prodloužení.

Souvislost napětí  $\nu$  a relativní deformace  $\varepsilon$  vyjadřuje **křivka deformace** (viz obr. 1, místo  $\nu$  je použito  $\sigma$ ), na níž je vynesena závislost

$$\nu = \nu(\varepsilon). \quad (3)$$



Obr. 1: Deformační křivka pro ocel.

(převzato z <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/632-krivka-deformace> )

Z obr. 1 vidíme, že část 0A je lineární (u oceli pro  $\nu < 100$  MPa), je to oblast lineární deformace, pro ni platí Hookův zákon

$$\nu = E\varepsilon, \text{ nebo ve tvaru pro relativní deformaci } \varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \nu, \quad (4)$$

veličina  $E$  se nazývá **modul pružnosti v tahu** (nebo též Youngův modul), jeho jednotkou je 1 Pascal. Hodnoty  $E$  většiny technických materiálů jsou v rozmezí  $10^9$  až  $10^{12}$  Pa, pro ocel je přibližná hodnota  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa.

## Metody měření $E$

### 1. Statická metoda

K měření bychom mohli vyjít přímo z definice  $E$ , avšak přesnější je *měření z průhybu* materiálu.

K měření modulu pružnosti  $E$  použijeme tyč obdélníkového průřezu  $a \times b$ . Představme si tuto tyč volně položenou na dva břity, kolmé na délku tyče. Vzdálenost břitů je  $l$ . Zatížíme – li tyč uprostřed mezi oběma břity silou  $F$ , kolmou na stranu  $b$  průřezu, tyč se prohne, o vzdálenost  $y$ . Lze odvodit, že průhyb tyče  $y$  je

$$y = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 F}{a^3 b E}, \quad (5)$$

z čehož plyne

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 F}{a^3 b y}. \quad (6)$$

Tuto rovnici dosazením  $F = mg$  upravíme na tvar

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 mg}{a^3 b y}, \quad (7)$$

kde  $m$  je hmotnost použitého závaží.

Změřením příčných rozměrů tyče  $a$  a  $b$ , vzdálenosti břitů  $l$  a průhybu tyče  $y$  při známé síle  $F$  tedy můžeme určit modul pružnosti  $E$ . Průhyb měříme hodinkovým indikátorem. Při posunutí měřicího kolíčku hodinkového indikátoru o 1 mm opíše jeho ručička úhel  $360^\circ$ . Kruhá stupnice je rozdělena na 100 dílků, proto posunutí ručičky o 1 dílek odpovídá posunu kolíku o  $10^{-2}$  mm. Indikátorové hodinky upevníme tak, že při nezatížené tyči ukazují počáteční výchylku  $n_0$ . Při zatěžování tyče se údaj hodinek mění na hodnotu  $n$ . Pro průhyb tyče pak platí  $y = n - n_0$ . Po provedení měření zkontrolujeme  $n_0$ , hodnoty by se neměly lišit.

### 2. Dynamická metoda

Upevníme – li jeden konec tyče a druhý ponecháme volný, může tento volný konec při malých výchylkách vykonávat harmonické kmity. Pro dobu kmitu lze odvodit vztah

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1^3 m_r}{3EJ}} \quad (8)$$

V tomto vztahu  $E$  značí modul pružnosti v tahu materiálu, ze kterého je vetknutá tyč zhotovena,  $m_r$  značí redukovanou hmotnost volné části vetknuté tyče (hmotnost tyče redukovaná na její volný konec),  $l_1$  značí celkovou délku tyče od místa vetknutí až k jejímu volnému konci,  $J$  značí kvadratický moment průřezu (moment setrvačnosti průřezu), pro který vzhledem k tvaru zkoumané tyče platí

$$J = \frac{1}{12} \cdot a^3 b, \quad (9)$$

kde  $a$  je rozměr tyče ve směru kmitů.

Redukovanou hmotnost tyče  $m_r$  nelze přímo měřit a proto ji ze vztahu (8) vyloučíme následujícím způsobem: na volný konec tyče připevníme pomocné těleso známé hmotnosti  $m_p$  tak, aby jeho těžiště připadalo na volný konec tyče. Doba kmitu se v důsledku změřené hmotnosti prodlouží na  $T_1$ , pro kterou platí

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1^3 \cdot (m_r + m_p)}{3EJ}} \quad (10)$$

Obě rovnice (8) a (10) umocníme a výsledky vzájemně odečteme. Jednoduchou úpravou pak obdržíme pro hledanou hodnotu modulu pružnosti v tahu  $E$  výraz

$$E = \frac{4\pi^2 m_p l_1^3}{3J \cdot (T_1^2 - T^2)} \quad (11)$$

Rovnici (11) převedeme s využitím rovnice (9) na výraz

$$E = \frac{16\pi^2 l_1^3 m_p}{a^3 b \cdot (T_1^2 - T^2)} \quad (12)$$

Stanovením jednotlivých parametrů na pravé straně rovnice (12) lze modul pružnosti v tahu vypočítat.

### Použité měřicí přístroje a pomůcky

- Hodinový indikátor
- Stolní váhy
- Posuvné měřítko
- Stopky
- Svinovací metr

### Postup měření

Nejlépe napište vlastní, pro ostatní např. :

- 1) Nejprve jsem posuvným měřítkem změřil oba rozměry ( $a$ ,  $b$ ) ocelové tyče.

- 2) Dále jsem změřil svinovacím metrem vzdálenost  $l_1$  pro statickou metodu.
- 3) Poté jsem určil hmotnosti obou závaží  $m_1$  a  $m_2$ .
- 4) Provedl jsem měření průhybu tyče pro zatížení závažími  $m_1$  a  $m_2$ .
- 5) Potom tyč upevnil do zařízení na stěně a změřil délku tyče  $l_2$  pro dynamickou metodu.
- 6) Změřil jsem dobu kmitu pro dynamickou metodu bez připevněného závaží a s připevněným závažím ( $m_1 + m_2$ ).
- 7) Statickou a dynamickou metodou jsem vypočítal  $E$  pro ocelovou tyč.
- 8) Statickou metodou jsem obdobně vypočítal  $E$  pro dřevěnou tyč.