# Systém výuky a podmínky zápočtu a zkoušky

## Systém

Dotace: 45min přednáška + 135min cvičení = 3 hodiny čistého času
Každý týden: 2 nové témata + opakování z minula

**Analytická geometrie a vektorový počet**
souřadnicové soustavy a transformace souřadnic; vektor, sčítání vektorů, skalární a vektorový součin, smíšený a dvojný součin; lineární kombinace vektorů, vektory lineárně závislé a nezávislé, bázové vektory; parametrické a obecná rovnice přímky a roviny; vzdálenost bodu od přímky a roviny, vzájemná poloha přímek a rovin, úhel dvou přímek a rovin; parametrické a obecné rovnice rovinných křivek.

**Matematická analýza I**
funkce jedné reálné proměnné, definiční obor, obor hodnot; polynomické, racionální lomené, exponenciální a goniometrické funkce; limita a spojitost funkce; derivace funkce a její geometrický význam; derivace elementárních funkcí; základní vlastnosti derivací; diferenciál a Taylorův vzorec; průběh funkce.

**Matematická analýza II**
primitivní funkce a neurčitý integrál funkce jedné reálné proměnné; integrace elementárních funkcí; základní vlastnosti neurčitých integrálů a integrační metody; Riemannův určitý integrál a jeho vlastnosti; geometrické aplikace Riemannova určitého integrálu.

## Hodnocení/bodování

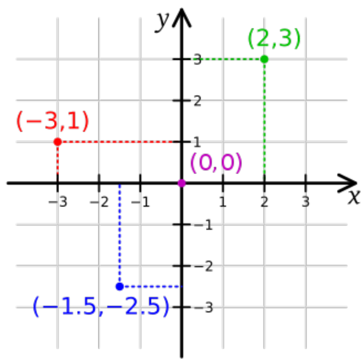
| Bodování | |
|---|---|
| Docházka | 10 |
| Písemka 1 | 15 |
| Písemka 2 | 15 |
| Úkol 1 | 15 |
| Domácí úkoly | 16 |
| Zkouška | 45 |
| Součet | 116 |

Splnění zápočtů minimálně 30b (po obou písemkách)
Splnění zkoušky minimálně 70b (po zápočtu a zkouškové písemce)
Minimálně jedna (důstojná) prezentace počítání u tabule

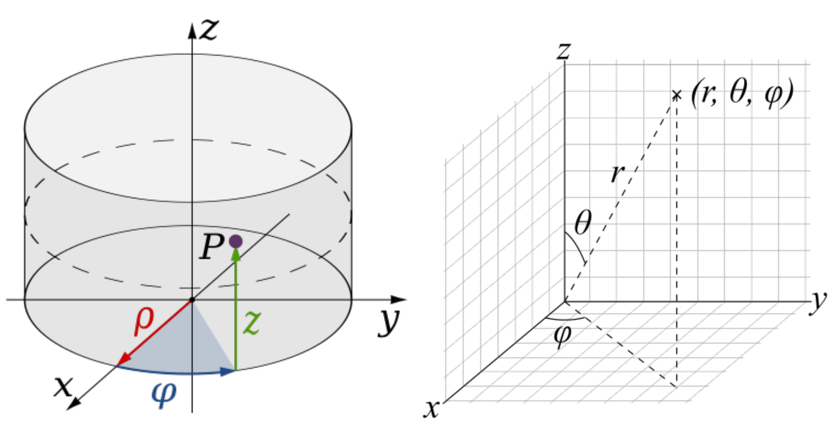
# 1 Souřadnicové soustavy a transformace souřadnic

**Soustava souřadnic:** Umožňuje jednoznačně popsat polohu bodu pomocí čísel jakožto souřadnic čili koordinát.

**Příklady soustav souřadnic:**




Obrázek 1: Kartézská soustava souřadnic ve 2D.




Obrázek 2: Polární soustava souřadnic ve 3D vlevo, sférická soustava souřadnic ve 3D napravo.

Bod v prostoru je dán uspořádanou n-ticí koordinátu v dané soustavě souřadnic. Bod v různých souřadných systémech může mít různé hodnoty koordinátů, nicméně jeho poloha v prostoru je pořád stejná. Např: $A = (a_x, a_y) = (1, 1)$ v kartézské soustavě a $A = (a_r, a_\theta) = (\sqrt{2}, 45°)$ v polární soustavě.
**Transformace souřadnic:** Udává vztah mezi dvěmi souřadnicovými systémy.

Např.:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

### 1.1 Příklady:

1. Proč existují různé soustavy souřadnic?

2. Je-li transformace mezi kartezskou a sférickou soustavou souřadnic dána vztahy (1), určete koordináty těchto bodů v kartézské soustavě souřadnic:

   - $A = [2, 0, \pi]$
   - $B = [-1, \pi/2, \pi/2]$
   - $C = [10, 0, 0]$

## 2 Vektor, sčítání vektorů, skalární a vektorový součin, smíšený a dvojný součin

**Skalár** je ve fyzice, v matematice nebo informatice veličina, jejíž hodnota je v daných jednotkách plně určena jediným číselným údajem.
**Vektor** je definován jako prvek vektorového prostoru. V něm lze zavést bázi a dále souřadnice daného vektoru vzhledem k této bázi. Pokud je vektorový prostor konečnědimenzionální, souřadnice vektoru tvoří uspořádané n-tice čísel, označovaných jako složky (též komponenty) vektoru. Vektor lze definovat také jako zdálenost a směr mezi dvěma body. Máme-li tedy bod $A$ a bod $B$, vektor definovaný těmito body vypočteme jako rozdíl koordinátů obou bodů $\vec{v} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
**Báze vektorového prostoru** Jedná se o množinu jistým způsobem výjimečných vektorů z daného vektorového prostoru, pomocí níž jsme schopni vyjádřit libovolný vektor tohoto prostoru.
**Příklad báze a vektoru:**
báze - $\vec{a} = (1, 0)$; $\vec{b} = (0, 1)$
vektor - $\vec{v} = (2, 3) = 2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$
**Velikost vektoru:** Udává délku daného vektoru $|\vec{v}|$.
**Skalární součin:** Zobrazení, které dvojici vektorů přiřadí číslo (skalár), které má vztah k velikosti těchto vektorů, k tzv. ortogonalitě a případně k úhlu, který svírají.
$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |x||y| \cos\alpha$, kde $\alpha$ je úhel mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.
**Vektorový součin:** Binární operace vektorů v trojrozměrném vektorovém prostoru. Výsledkem této operace je vektor (na rozdíl od součinu skalárního). Výsledný vektor je kolmý k oběma původním vektorům.

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2 \ , \ u_3 v_1 - u_1 v_3 \ , \ u_1 v_2 - u_2 v_1)$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1,2,0) \times (0,1,2) = (2 \cdot 2 - 0 \cdot 1, \ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2, \ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (4, -2, 1)$

$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (0,1,2) \times (1,2,0) = (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2, \ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0, \ 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (-4, 2, -1)$

Je zřejmé, že vektory **u×v** a **v×u** jsou navzájem opačné vektory. Oba jsou kolmé na rovinu určenou vektory **u**, **v**.

- **Výpočet pomocí determinantu matice**:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Pro výpočet determinantu matice řádu 3 lze použít například Sarrusovo pravidlo, podle nějž je výsledek

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{i} u_2 v_3 + u_1 v_2 \mathbf{k} + v_1 \mathbf{j} u_3 - \mathbf{k} u_2 v_1 - u_3 v_2 \mathbf{i} - v_3 \mathbf{j} u_1 \\ &= \mathbf{i} \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot \mathbf{k} + 0 \cdot \mathbf{j} \cdot 0 - \mathbf{k} \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j} \cdot 1 \\ &= 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \end{aligned}$$

## 2.1 Příklady:

1. Zakreslete (pouze vektory ve 2D) a sečtěte tyto vektory:
   - $\vec{a} = (1, 2)$ a $\vec{b} = (3, 4)$
   - $\vec{a} = (-10, -7)$ a $\vec{b} = (1, -4)$
   - $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-5, -6, -7)$ a $\vec{c} = (1, 1, 1)$
2. Nalezněte střed úsečky ohraničené body:
   - $A = [0, 0]$ a $B = [0, 4]$
   - $A = [-1, 2]$ a $B = [2, 3]$
3. Vypočtěte skalární součint těchto vektorů a určete úhly mezi těmito vektory:
   - $\vec{a} = (1, 0)$ a $\vec{b} = (0, 1)$
   - $\vec{a} = (1, 4)$ a $\vec{b} = (-2, 1/4)$
   - $\vec{a} = (5, -7)$ a $\vec{b} = (1, -4)$
4. Vypočtěte vektorový součint těchto vektorů:
   - $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$ a $\vec{c} = (-2, 1, 2)$
   - $\vec{a} = (1, 4, 0)$, $\vec{b} = (-3, 1, 4)$ a $\vec{b} = (0, 0, 2)$
   - $\vec{a} = (5, -2, 3)$, $\vec{b} = (-4, 1, 0)$ a $\vec{b} = (1, 1, 1)$

## Malý testík :-)

1. $\frac{12}{a^2-4} - \frac{3}{a-2} + \frac{4}{2+a}$
2. $6 - 2\frac{3-2y}{5} = 4y$
3. $\frac{(\sin x \cot x)^2 - 1}{3\sin^2 x}$
4. Vypočtěte determinant matice $A$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
5. Z ineternetu jsme stáhli soubor za 450s rychlostí 20Mb/s. Jak dlouho bude trvat stažení totožného souboru rychlostí 30Mb/s?