7. Funkce jedné reálné proměnné, základní pojmy

POJEM FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Reálná funkce f jedné reálné proměnné je funkce (zobrazení) $f\colon X \to Y$, kde $X, Y \subseteq \mathbf{R}$. Jde o zvláštní případ obecného pojmu funkce definovaného v přednášce 2.

Poznámka:

V dalším výkladu budeme termínem funkce, případně funkce jedné proměnné rozumět vždy jen reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Funkce f je tedy předpis, který každému reálnému číslu $x \in X$ přiřazuje jediné reálné číslo $y = f(x) \in Y$. Předpis f lze zadat různými způsoby, například tabulkou, grafem, výrazem (vzorcem), případně více výrazy (vzorci), jak uvádí následující příklad. Nejčastěji je funkce zadána výrazem[*] $y = f(x)$, kde se x chápe jako proměnná, za kterou se dosazují čísla z X, a y jako proměnná nabývající hodnot z Y; x se pak nazývá *nezávisle proměnná* (*argument funkce*), *y závisle proměnná*. Namísto f se k označení funkce užívá často přímo výraz $f(x)$. Pro pevně zadanou hodnotu a proměnné x se příslušná hodnota $f(a)$ nazývá *hodnota funkce f v bodě a*, či *funkční hodnota v bodě a*. Množina X všech hodnot proměnné x se nazývá *definiční obor funkce f* a značí se $D(f)$. Množina všech hodnot funkce f se nazývá *obor hodnot funkce f* a značí se $H(f)$. Není-li pro funkci f zadán definiční obor $D(f) = X$, přijímá se úmluva, že se za něj považuje množina právě všech čísel, pro něž má předpis $y = f(x)$ smysl. V technických aplikacích je definičním oborem funkce nejčastěji interval.

Příklad:

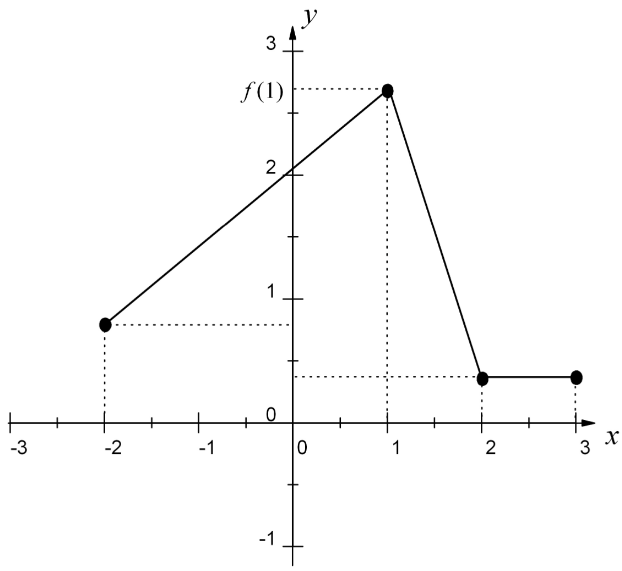
(a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$, **f je funkce zadaná dále uvedenou *tabulkou*. Platí** $H(f) = \{0, 1\}$.

x	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	1	1	0	1

(b) **Funkce f je zadána *grafem* na obr. 7.1.**

(c) **Funkce f je zadána *výrazem* (*vzorcem*)** $y = f(x) = \sqrt{x}$. **$D(f)$ není udán, v tomto případě podle úmluvy je** $D(f) = \langle 0, \infty)$.

[*] Říkáme, že funkce je zadána *analyticky*.



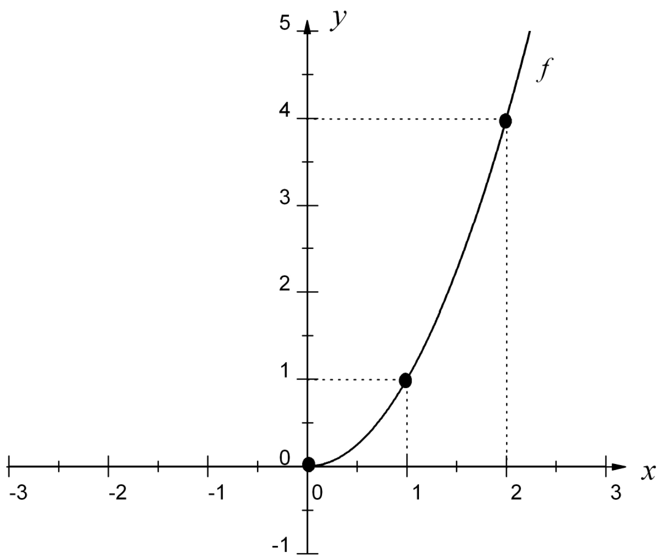
Obrázek 7.1. Zadání funkce grafem

GRAF FUNKCE

Graf funkce f je množina bodů $[x, y]$ roviny s vlastností $x \in D(f)$, $y = f(x)$.

Příklad:

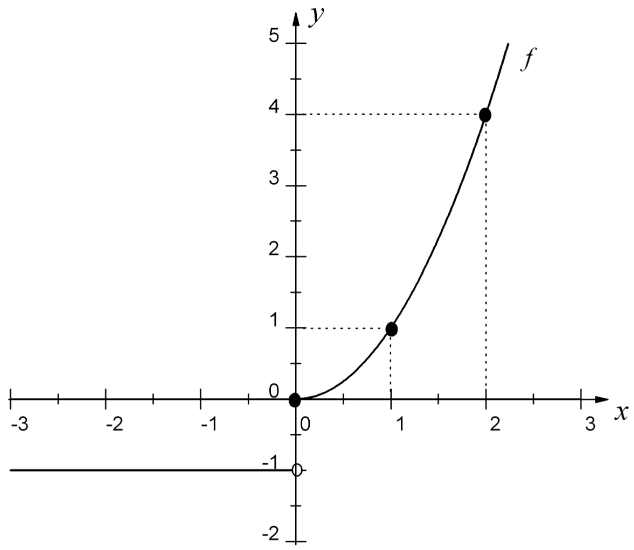
(a) Grafem funkce $y = f(x) = x^2$, $D(f) = \langle 0, \infty)$, je množina $\{[x, x^2];\ x \in \langle 0, \infty)\}$ bodů roviny. Jde o „pravou" polovinu paraboly na obr. 7.2.



Obrázek 7.2. Graf funkce $y = f(x) = x^2$, $D(f) = \langle 0, \infty)$

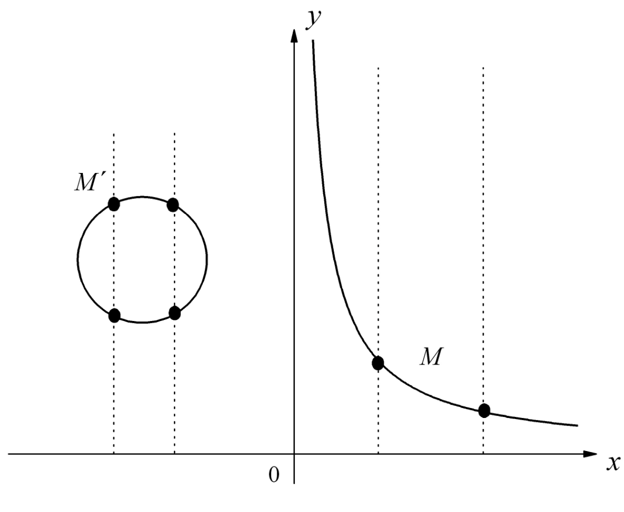
(b) Na obrázku 7.3 je graf funkce

$$y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{je} - \text{li } x < 0 \\ x^2 & \text{je} - \text{li } x \geq 0. \end{cases}$$



Obrázek 7.3. Graf funkce $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{je} - \text{li } x < 0 \\ x^2 & \text{je} - \text{li } x \geq 0 \end{cases}$

Z definice funkce plyne, že <u>množina bodů M roviny je grafem nějaké funkce</u>, jestliže <u>každá rovnoběžka s osou y má s množinou M nejvýše jeden společný bod.</u> Na obr. 7.4 je množina M grafem funkce $y = f(x)$, kdežto množina M' nemůže být grafem žádné funkce $y = f(x)$; některé rovnoběžky s osou y mají s M' více než jeden společný bod.



Obrázek 7.4.

Při kreslení grafu funkce se postupuje tradiční metodou „*bod po bodu*“. Nejprve se určí dostatečný počet dvojic $[x, f(x)]$, zakreslí se jako body roviny a tyto se pak spojí vhodnou „čarou”. Graf bude tím přesnější, čím bude k dispozici více bodů $[x, f(x)]$. Osobní počítače s grafickým výstupem jsou vesměs vybaveny procedurami, které najdou dostatečný počet takových bodů, pomocí nichž vykreslí metodou „bod po bodu” graf funkce s uspokojivou věrností. Sestrojování grafů funkcí s využitím analytických prostředků bude též tématem přednášky o průběhu funkce.

NULOVÝ BOD FUNKCE

Číslo a se nazývá *nulový bod* (též *kořen*) funkce f, jestliže platí $f(a) = 0$.

Příklad:

(a) Funkce $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ má jediný nulový bod 2.

(b) Funkce $f(x) = x^2 - 1$ má nulové body 1, –1.

Hledání nulových bodů funkcí patří k velmi důležitým, avšak často k obtížným úlohám. Někdy nelze určit nulové body ve tvaru přesného čísla. Pak zbývá nalezení nulových bodů přibližně užitím numerických metod. Cenný je v tomto případě <u>přibližný odhad nulového bodu</u>, který <u>získáme nakreslením grafu</u> (nejlépe počítačem). Je zřejmé, že <u>nulové body jsou</u> pak <u>průsečíky grafu funkce s osou x</u> (pozor na nulové body, které mohou ležet mimo rozsah grafického výstupu).

Příklad:

Z grafu funkce $f(x) = x^2 - 2$ na obr. 7.5 lze soudit, že nulové body jsou dva; první z nich, x_1, patří do $\langle -1; -1{,}5\rangle$ (je asi –1,4), druhý, x_2, patří do $\langle 1; 1{,}5\rangle$ (je asi 1,4). V tomto případě umíme nulové body určit přesně řešením kvadratické rovnice $x^2 - 2 = 0$, tj. $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

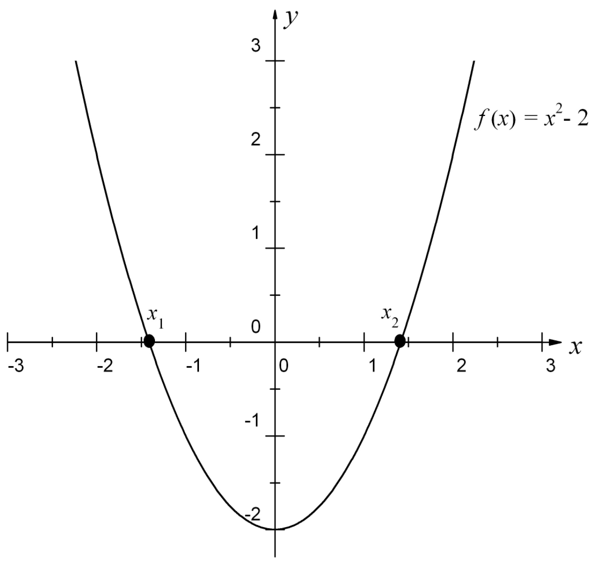
ROVNOST FUNKCÍ

Funkce f, g jsou si *rovny*, jestliže $D(f) = D(g)$ a pro každé $x \in D(f)$ (případně $D(g)$) platí $f(x) = g(x)$; zapisuje se $f = g$, v opačném případě $f \neq g$.

Příklad:

(a) Funkce $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ jsou si rovny, $f = g$.

(b) Funkce $f(x) = 1$, $g(x) = x/x$ si nejsou rovny, $f \neq g$, neboť $D(f) = \mathrm{R}$, $D(g) = \mathrm{R} - \{0\}$, $D(f) \neq D(g)$.



Obrázek 7.5. Graf funkce $y = f(x) = x^2 - 2$

OPERACE S FUNKCEMI

Součet, *rozdíl*, *součin* a *podíl* funkcí *f*, *g* se definuje a značí takto:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$ („funkce součtu se rovná součtu funkcí")

$(f-g)(x) = f(x) - g(x);$ („funkce rozdílu se rovná rozdílu funkcí")

$(fg)(x) = f(x)g(x);$ („funkce součinu se rovná součinu funkcí")

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0).$ („funkce podílu se rovná podílu funkcí")

Z uvedených vztahů vyplývá grafická interpretace — graf výsledné funkce se dostane metodou „bod po bodu" provedením požadované operace s funkčními hodnotami v příslušném bodě.

Příklad:

Pro funkce $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ je $(f+g)(x) = (x+1)^2 + \sqrt{x}$, $(f-g)(x) = (x+1)^2 - \sqrt{x}$,

$(fg)(x) = (x+1)^2\sqrt{x}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}$.

VÝZNAČNÉ TYPY FUNKCÍ

Funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$; její graf je souměrný podle osy y.

Funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$; její graf je souměrný podle počátku.

Funkce f je *periodická* (*s periodou p*), jestliže existuje $p \neq 0$ takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $x + p \in D(f)$ a $f(x) = f(x + p)$.

Funkce f je *rostoucí*, případně *klesající* na $M \subseteq D(f)$, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, případně $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f je *neklesající*, případně *nerostoucí* na $M \subseteq D(f)$, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, případně $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f je *ryze monotónní* na $M \subseteq D(f)$, jestliže je f na M rostoucí nebo klesající.

Funkce f je *monotónní* na $M \subseteq D(f)$, jestliže je f na M neklesající nebo nerostoucí.

Funkce f je *shora omezená*, případně *zdola omezená* na $M \subseteq D(f)$, je-li množina $f(M) = \{f(x);\, x \in M\}$ shora, případně zdola omezená.

Funkce f je *omezená* na $M \subseteq D(f)$, je-li f na M shora i zdola omezená.

Poznámka:

Pokud se v uvedených definicích uvažuje $M = D(f)$, vynechává se dovětek „na M”.

K ověření, zda daná funkce je některého z uvedených typů lze v jednoduchých případech vystačit s běžnými prostředky středoškolské matematiky. Lze ale také využít prostředků diferenciálního počtu (viz přednáška 12).

SLOŽENÁ FUNKCE

Uvažujme funkce f, g a předpokládejme, že některé hodnoty funkce $g(x)$ patří do $D(f)$. Každé takové hodnotě $u = g(x) \in D(f)$ lze přiřadit hodnotu $y = f(u) = f(g(x))$. Tím je definována nová funkce $h(x) = f(g(x))$, která se nazývá *funkce složená* z funkcí f, g a značíme ji $h = f \circ g$. Platí $D(h) = \{x;\, x \in D(g),\ g(x) \in D(f)\}$. f je *vnější* a g *vnitřní složka*. Uzávorkování ve výrazu $f(g(x))$ pro funkci složenou z funkcí f, g určuje jednoznačně pořadí, v němž se skládání provádí, tj. funkce g se aplikuje jako první, funkce f jako druhá.

Poznámka:

Složenou funkci $f(g(x))$ lze slovně vyjádřit termínem „f po g“.

Příklad:

(a) Nechť $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x$. Složená funkce „f po g“, $f(g(x)) = \sqrt{2x}$, je funkce, která vznikla složením funkce g, která zdvojnásobuje, s funkcí f, která odmocňuje. Složená funkce „g po f“ vznikne složením funkce f, která odmocňuje, a funkce g, která zdvojnásobuje, tj. $g(f(x)) = 2\sqrt{x}$.

(b) Funkce $h(x) = \sqrt{x^2}$ je funkce složená z funkce g, která umocňuje, a funkce f, která odmocňuje, tj. „f po g“, $f(g(x)) = \sqrt{x^2}$.

Termín složená funkce se vztahuje ke způsobu, jakým lze vyjádřit funkční hodnoty, nikoliv přímo k funkci samotné. Zda funkce je složená či ne závisí na tom, jak na ni pohlížíme. Funkce v předchozím příkladu (b) je složená — přitom však na ni lze pohlížet jako na „nesloženou“ funkci $f(x) = |x|$. Rozklad složené funkce na její složky bude důležitý v řadě konstrukcí. Skládání funkcí lze přirozeně rozšířit i pro více funkcí.

Příklad:

Funkce $v(x) = \sqrt{\ln \cos x}$ je funkce složená „√ po ln po cos“, tj. $v(x) = f(g(h(x)))$, kde h počítá kosinus, g počítá přirozený logaritmus, f odmocňuje.

PROSTÁ A INVERZNÍ FUNKCE

Funkce f se nazývá *prostá* na $M \subseteq D(f)$, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ bude $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; v případě $M = D(f)$ se vynechává „na M“.
<u>Z definice je zřejmé, že prostá funkce nabývá každé své hodnoty právě jednou, neboli, každá rovnoběžka s osou x protne její graf nejvýše v jednom bodě.</u>

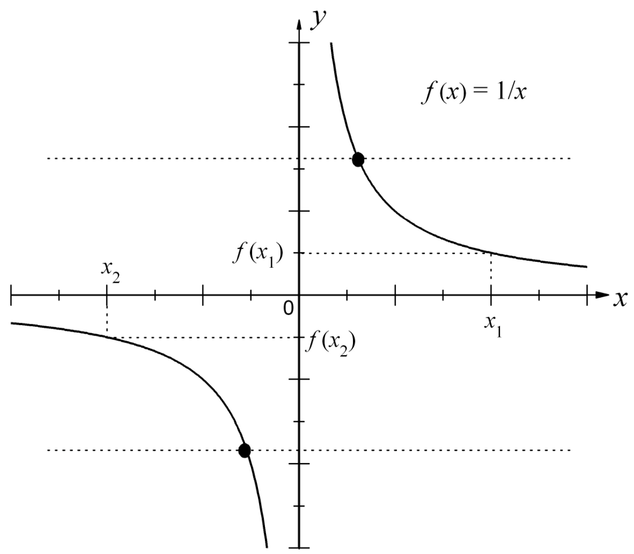
Příklad:

(a) Funkce $f(x) = 1/x$ je prostá, neboť pro $x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) = 1/x_1 \neq f(x_2) = 1/x_2$ (obr. 7.6.).

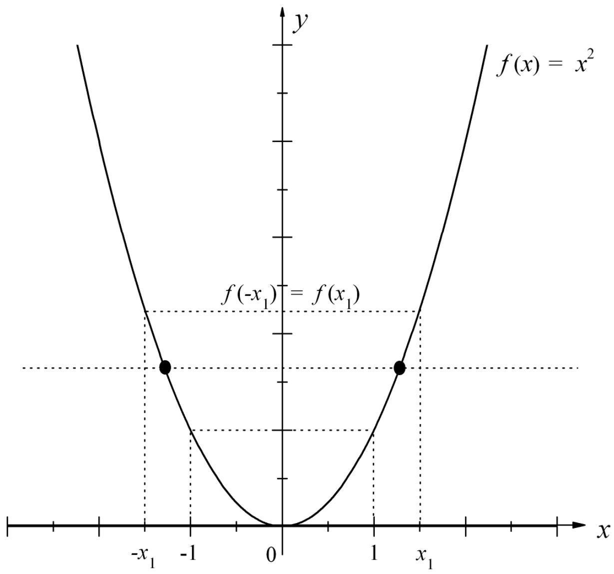
(b) Nechť $f(x) = x^2$. Pro $x_1, -x_1$, kde $x_1 \neq 0$ platí $x_1 \neq -x_1$, avšak $f(x_1) = x_1^2 = (-x_1)^2 = f(-x_1)$, tj. $f(x) = x^2$ nabývá každé své nenulové hodnoty dvakrát (její graf — parabolu — může rovnoběžka s osou x protnout dvakrát), není tedy prostá. Je však prostá, například, na intervalu $\langle 0, \infty)$, nebo na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ (pravá nebo levá polovina paraboly) (viz obr. 7.7.)

Platí tato <u>důležitá vlastnost</u>, kterou často upotřebíme v praktických úlohách:
Je-li funkce f na M rostoucí nebo klesající, pak je na M prostá.

<u>Poznámka:</u>
Pozor! Opačné tvrzení neplatí!!!



Obrázek 7.6. Graf funkce $y = f(x) = 1/x$



Obrázek 7.7. Graf funkce $y = f(x) = x^2$

Pro prosté funkce se definují funkce inverzní (v jiných případech však inverzní funkci zavést nelze!). Je-li funkce f prostá, přísluší každému $y \in H(f)$ právě jedno takové $x \in D(f)$, že platí $y = f(x)$. Tím je na množině $H(f)$ definována funkce, která se nazývá *inverzní funkcí* k funkci f a značí se f^{-1} (pozor, jde o jinou funkci než $1/f$). Funkce a k ní funkce inverzní si vymění vzájemně definiční obory a obory hodnot, tj. $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$.

Z uvedeného vyplývá, že rovnice $y = f(x)$ je splněna, právě když platí $x = f^{-1}(y)$. V praktických úlohách spočívá nalezení inverzní funkce ve vyjádření x jako funkce y. Pokud takové vyjádření je jednoznačné, dostáváme přímo $x = f^{-1}(y)$.

K interpretaci smyslu pojmu inverze je důležité si uvědomit, že je-li funkcí f prováděn jistý početní úkon, je k ní inverzní funkcí prováděn úkon inverzní, například k funkci, která zdvojnásobuje, bude inverzní funkce dělit dvěma.

Příklad:

a) Funkce $y = f(x) = 2x$ je rostoucí (tedy i prostá) a podle shora uvedené vlastnosti k ní existuje inverzní funkce. Ze vztahu $y = 2x$ lze jednoznačně vyjádřit $x = y/2 = f^{-1}(y)$, což je hledaná inverzní funkce.

b) K funkci $y = f(x) = x^2$, $D(f) = \mathrm{R}$ neexistuje funkce inverzní, neboť f není prostá. Jak je zřejmé v tomhle případě nelze vyjádřit jednoznačně x jako funkci y. Pokud ale zvolíme vhodnou množinu $M \subseteq D(f)$, na které je f prostá, pak inverzní funkce bude existovat!

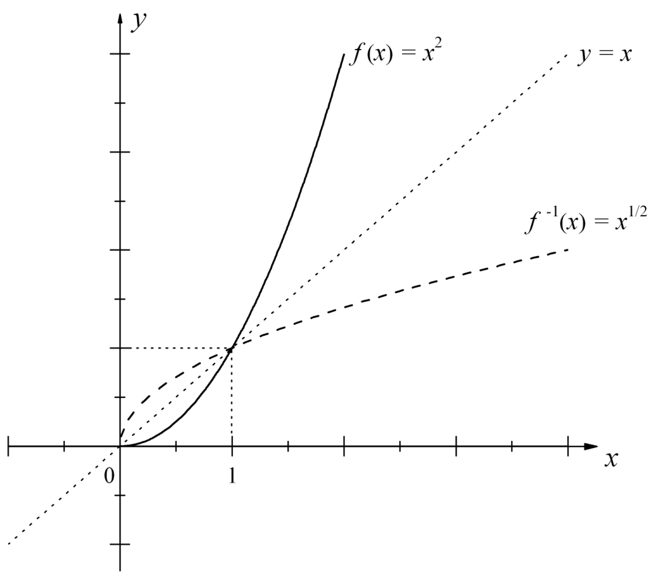
Jak již bylo zmíněno, přejdeme-li od funkce k příslušné funkci inverzní, vymění si navzájem úlohy závisle a nezávisle proměnná. Při grafické interpretaci to znamená, že nyní hodnoty proměnné y vynášíme na horizontální osu (x) a hodnoty proměnné $x = f^{-1}(y)$ na vertikální osu (y). V důsledku toho jsou grafy funkcí f a f^{-1} souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu (tj. podle přímky $y = x$ podle níž jsou souměrné osy x, y). Této vlastnosti využíváme při kreslení grafů inverzních funkcí.

Poznámka:

Abychom respektovali úmluvu, že nezávisle proměnnou označíme x a závisle proměnnou y (tj. aby označení proměnných bylo shodné s označením os, na které se nanášejí), zaměníme po formálním nalezení inverzní funkce ve tvaru $x = f^{-1}(y)$ její označení na $y = f^{-1}(x)$.

Příklad:

Nechť $y = f(x) = x^2$, $D(f) = \langle 0, \infty)$. f je rostoucí na $\langle 0, \infty)$, tedy k ní existuje funkce inverzní. Platí $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, po záměně $y = \sqrt{x}$. Na obr. 7.8. jsou nakresleny grafy funkcí $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ s využitím souměrnosti podle přímky $y = x$.



Obrázek 7.8. Graf funkce x^2 a $\sqrt{x}$

Cílové znalosti

1. Nulový bod funkce, geometrická interpretace.
2. Význačné typy funkcí.
3. Složená funkce
4. Inverzní funkce, podmínky existence.

VII. Funkce jedné reálné proměnné_CVIČENÍ

POJEM FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. Pro funkci $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ najděte: a) $f(2x)$. b) $f(x^2)$.

2. Pro funkci $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ najděte: a) $2f(x)$. b) $[f(x)]^2$.

3. Pro funkci $f(x)=x^3-1$ najděte pro pevně zadané *a*, *b*, *h*:

   a) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b\neq a)$. b) $f\left(\dfrac{a+h}{2}\right)$.

4. Pro funkci $f(x)=x^4-x+1$ najděte $f(-1)$, $[f(-1)]^2$, $f(-1)-3$.

5. Pro funkci

   $$f(x)=\begin{cases} 3^x; & -1<x<0 \\ 4; & 0\le x<1 \\ 3x-1; & 1\le x\le 3 \end{cases}$$

   najděte $f(2)$, $f(0)$, $f(-0{,}5)$.

6. Pro funkci

   $$f(x)=\begin{cases} 3^{-x}-1; & -1\le x<0 \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; & 0\le x<\pi \\ \dfrac{x}{x^2-2}; & \pi\le x\le 6 \end{cases}$$

   najděte $f(-1)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $f(4)$, $f(6)$.

7. Určete $D(f)$ pro funkce:

   a) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$. b) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. c) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$.

   d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

GRAF FUNKCE

8. Načrtněte graf funkce:

a) $f(x)=\begin{cases} -2; & x>0 \\ \dfrac{1}{2}; & x=0 \\ -x^3; & x<0 \end{cases}$. b) $f(x)=x+\sqrt{x^2}$. c) $f(x)=\begin{cases} \sin x; & -\pi \le x \le 0 \\ 2; & 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-1}; & 1<x\le 4 \end{cases}$. d) $f(x)=|x+2|x$.

NULOVÝ BOD FUNKCE

9. Najděte nulové body funkce:

a) $f(x)=x^3$. b) $f(x)=x^2-2x+1$. c) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

10. Najděte nulové body funkce:

a) $f(x)=(x-1)(x+2)$. b) $f(x)=\dfrac{(x+2)}{(x-1)}$. c) $f(x)=x^3+x^2$.

VÝZNAČNÉ TYPY FUNKCÍ

11. Rozhodněte o tom zda je funkce lichá, příp. sudá:

a) $f(x)=2x^3-x+1$. b) $f(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$. c) $f(x)=\sin x+\cos x$. d) $f(x)=4-2x^4+\sin^2 x$.

12. Určete periodu funkce:

a) $f(x)=\mathrm{tg}(2x)$. b) $f(x)=|\cos x|$.

FUNKCE SLOŽENÁ

13. Určete, ze kterých funkcí a v jakém pořadí je utvořena složená funkce:

a) $f(x)=\sin\sqrt{(2+x)}$. b) $f(x)=\mathrm{tg}\, x^2$. c) $f(x)=\left|(x-1)^3\right|$. d) $f(x)=\sqrt{|\sin x|}$. e) $f(x)=3^{x^2-1}$.

PROSTÁ A INVERZNÍ FUNKCE

14. U funkcí zadaných na obrázku (viz seminář) rozhodněte, zda jsou prosté na *M*:

a] *f*, *M* = **R**. b) *g*, *M* = ⟨*a*, *b*⟩. c) *h*, *M* = **R**.

15. U funkcí na obrázku (viz seminář) rozhodněte, zda jsou prosté na M:

a] f, M = $\mathbf{R}$. b) g, M = $\mathbf{R}$. c) h, M = $\mathbf{R}$.

16. Rozhodněte o existenci inverzní funkce. V kladném případě ji najděte (příp. graficky).

a) $f(x)=\frac{1}{3}x+2$. b) f je na obrázku (viz seminář).

17. Najděte inverzní funkci k funkci f:

a) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. b) $f(x)=x^3$. c) $f(x)=1+x^2$, $D(f)=\langle 0,\infty)$.