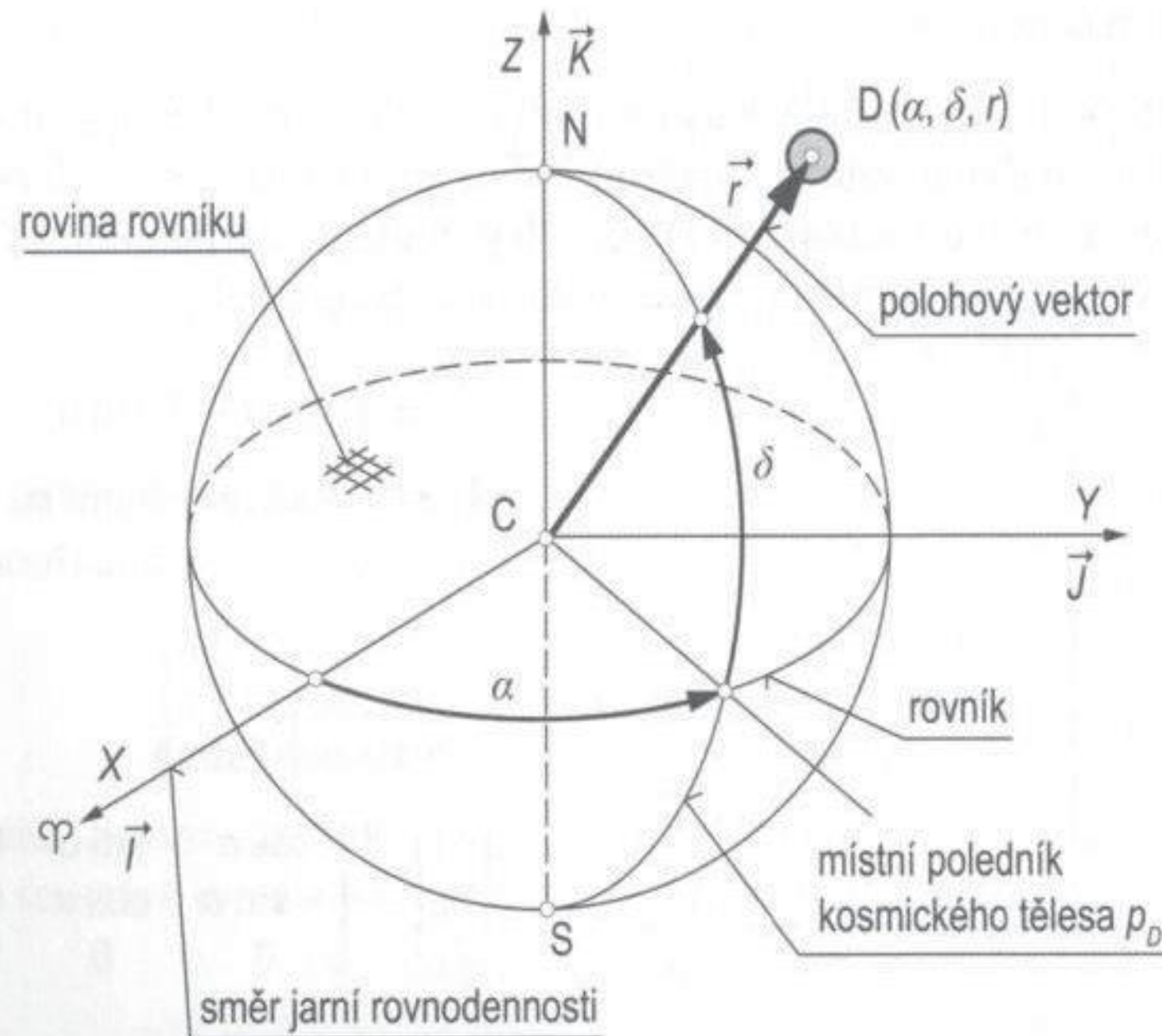


... pokračování

3.6.3 Geocentrická sférická souřadnicová soustava



Obr. 3-28 Definice geocentrické sférické souřadnicové soustavy. Poloha kosmického letadla je dána souřadnicemi (α, δ, r) .

Geocentrická sférická souřadnicová soustava (α, δ, r) je inerciální souřadnicová soustava, jejíž počátek je opět spojen se středem Země. Poloha kosmického tělesa na oběžné dráze je tentokrát určena dvěma úhly a průvodičem. Sférické souřadnice jsou definovány dle obr. 3-28 následovně:

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

α – rektascenze je úhel, který svírá směr jarní rovnodennosti s rovinou místního poledníku, kladná je ve směru na východ. Nabývá hodnot $(0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ)$,

δ – deklinace (úhlová výška objektu), úhel mezi průvodičem r a rovinou rovníku, kladná je když průvodič se nachází nad rovinou rovníku a naopak. Nabývá hodnot $(-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ)$,

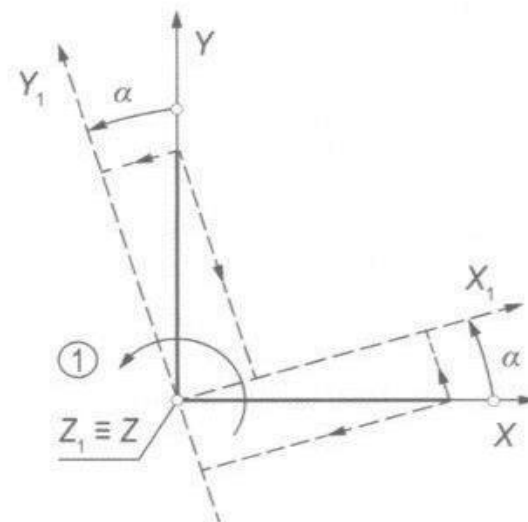
r – vzdálenost kosmického tělesa D od středu centrálního gravitačního pole C (modul polohového vektoru).

Často je třeba přecházet z geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy do geocentrické sférické a naopak. K tomu nám poslouží transformační rovnice mezi dvěma souřadnicovými soustavami pootočenými vůči sobě o sférické souřadnice α a δ .

Stanovení polohového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě pomocí geocentrických sférických souřadnic

Pro nalezení kartézských souřadnic polohového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě použijeme klasickou transformaci myšlené souřadnicové soustavy, v jejíž ose X leží polohový vektor. Dvěma pootočeními o rektascenzi a deklinaci vůči geocentrické rovníkové soustavě nalezneme transformační matici následujícím postupem.

První pootočení provedeme v kladném smyslu kolem osy Z o úhel α (rektascenzi) dle obr. 3-29 a zapíšeme vztahy vyjadřující vzájemnou relaci mezi složkami vektoru ve výchozí geocentrické soustavě (X, Y, Z) a její pootočenou polohou (X_1, Y_1, Z_1) . Vztahy zapíšeme ve složkové formě i v maticové formě, rov. (3.210).



Obr. 3-29 První pootočení os.

$$X_1 = X \cos \alpha + Y \sin \alpha,$$

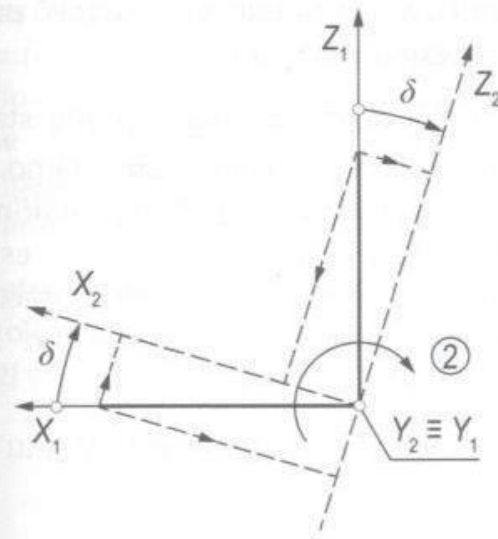
$$Y_1 = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha,$$

$$Z_1 = Z.$$

V maticové formě

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (3.210)$$

Druhé pootočení okamžité mezipolohy os (X_1, Y_1, Z_1) provedeme v záporném smyslu okolo osy Y_1 o úhel δ (deklinaci), čímž jsme dosáhli situace, kdy osa X_2 leží ve směru vektoru r .



Obr. 3-30 Druhé pootočení os.

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 \cos \delta + Z_1 \sin \delta, \\ Y_2 &= Y_1, \\ Z_2 &= -X_1 \sin \delta + Z_1 \cos \delta. \end{aligned}$$

V maticové formě

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix}. \quad (3.211)$$

Tato dvě pootočení nám již postačují pro nalezení transformační rovnice pro stanovení polohového vektoru pomocí geocentrických rovníkových souřadnic a geocentrických sférických souřadnic. Postupným dosazováním dílčích transformačních matic získáme transformační rovnici ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}.$$

Roznásobením matic v předchozí rovnici nakonec obdržíme

$$\begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta \sin \alpha & \sin \delta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}. \quad (3.212)$$

Pomocí inverzní matice získáme transformační rovnici pro stanovení geocentrických rovníkových souřadnic polohového vektoru ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha & -\sin \alpha & -\sin \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.213)$$

Odtud můžeme zapsat souřadnice polohového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě vyjádřené pomocí geocentrických sférických souřadnic

$$\begin{aligned} X &= r \cos \delta \cos \alpha, \\ Y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\ Z &= r \sin \delta. \end{aligned} \quad (3.214)$$

V klasickém vektorovém vyjádření můžeme polohový vektor zapsat takto

$$\vec{r} = r \cos \delta \cos \alpha \vec{i} + r \cos \delta \sin \alpha \vec{j} + r \sin \delta \vec{k} = r \vec{e}_r, \quad (3.215)$$

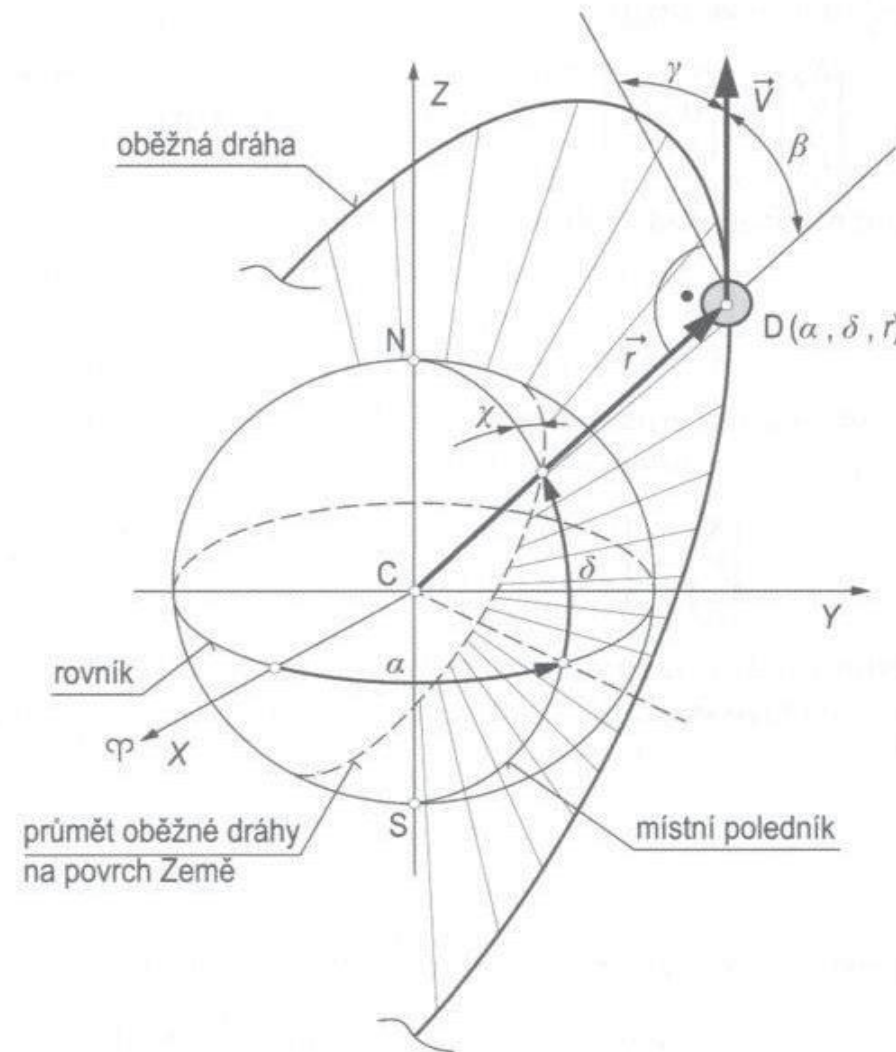
kde \vec{e}_r je jednotkový polohový vektor

$$\vec{e}_r = \cos \delta \cos \alpha \vec{i} + \cos \delta \sin \alpha \vec{j} + \sin \delta \vec{k}. \quad (3.216)$$

Stanovení vektoru rychlosti v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě pomocí geocentrických sférických souřadnic, azimutu a sklonu dráhy letu

Kromě polohového vektoru \vec{r} můžeme pomocí sférických souřadnic přímo stanovit vektor rychlosti letu \vec{V} kosmického tělesa na oběžné dráze. Jak je nám známo, vektor rychlosti letu leží v rovině dráhy a je k ní v každém okamžiku tečný. Proto rozšíříme výše uvedené sférické souřadnice ještě o azimut dráhy letu χ a sklon dráhy letu γ , respektive pomocný úhel β . Takže nyní v geocentrické sférické souřadnicové soustavě pracujeme novým souborem souřadnic $(\alpha, \delta, \chi, \gamma, r, V)$, jejichž význam v souladu s obr. 3-31 je následující:

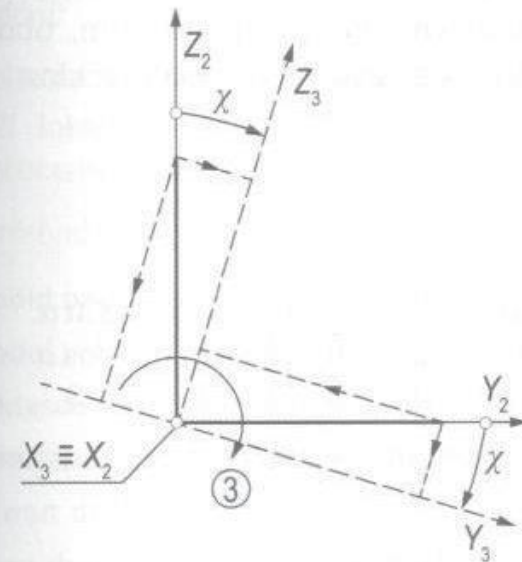
- χ – azimut je úhel mezi rovinou místního poledníku a vektorem rychlosti letu (jinými slovy tečnou k oběžné dráze),
- γ – sklon dráhy letu je úhel mezi vektorem rychlosti letu a kolmicí v bodě D k polohovému vektoru v rovině oběžné dráhy, resp. lokálním horizontem,
- β – pomocný transformační úhel je úhel mezi geocentrickou normálou a vektorem rychlosti letu v rovině oběžné dráhy. V některé literatuře se tento úhel nazývá rovněž jako „sklon dráhy letu“, $\beta = 90^\circ - \gamma$.



Obr. 3-31 Poloha vektoru rychlosti v geocentrické sférické souřadnicové soustavě.

Pro nalezení kartézských souřadnic vektoru rychlosti v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě použijeme obdobný transformační postup jako v předchozím případě s tím, že je třeba použít čtyř pootočení myšlené souřadnicové soustavy, v jejíž ose X leží nyní vektor rychlosti. První dvě pootočení jsou shodná s předchozím případem. Na tato dvě pootočení o úhly α , δ navazují pootočení o další dvě souřadnice, azimut χ a pomocný úhel β (obr. 3-31).

Třetí pootočení okamžité mezipolohy os (X_2, Y_2, Z_2) provedeme v záporném smyslu okolo os X_2 o úhel χ (azimut dráhy). Tím jsme dosáhli situace, kdy rovina (X_3, Z_3) již leží v rovině oběžné dráhy.



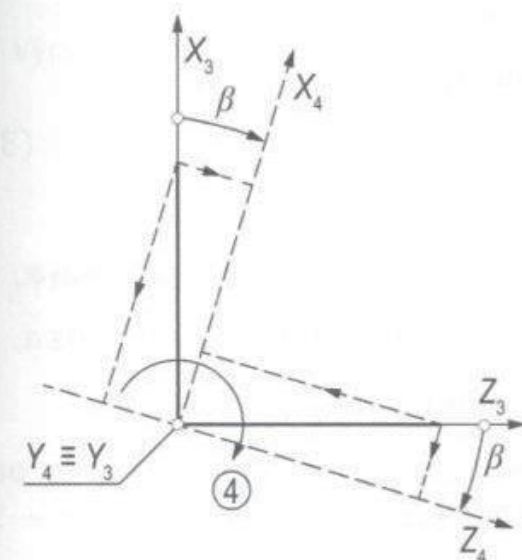
Obr. 3-32 Třetí pootočení os.

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2, \\ Y_3 &= Y_2 \cos \chi - Z_2 \sin \chi, \\ Z_3 &= Y_2 \sin \chi + Z_2 \cos \chi. \end{aligned}$$

V maticové formě

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & -\sin \chi \\ 0 & \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.217)$$

Nyní je třeba pootočit osu X_3 (vektor \vec{V}) v rovině dráhy do polohy tečné k oběžné dráze. K tomu je třeba realizovat čtvrté a poslední pootočení v záporném smyslu kolem osy Y_3 o pomocný úhel β (doplňkový úhel sklonu dráhy letu do 90°). Tímto je jednoznačně definována konečná poloha vektoru rychlosti pomocí sférických souřadnic $(\alpha, \delta, \chi, \gamma)$.



Obr. 3-33 Čtvrté pootočení os.

$$\begin{aligned} X_4 &= X_3 \cos \beta + Z_3 \sin \beta, \\ Y_4 &= Y_3, \\ Z_4 &= -X_3 \sin \beta + Z_3 \cos \beta. \end{aligned}$$

V maticové formě

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.218)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Nyní v rov. (3.218) místo pomocného úhlu β zavedeme standardní sklon dráhy letu γ dle dříve uvedeného převodního vztahu $\beta = 90^\circ - \gamma$. Pak platí

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma, \\ \cos \beta &= \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma.\end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme pro poslední transformační krok výraz

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}. \quad (3.219)$$

Postupným dosazením všech dílčích transformačních rovnic (3.210), (3.211), (3.217) a (3.218), resp. (3.219), odpovídajících výše uvedeným čtyřem pootočením, obdržíme transformační rovnici, v níž ovšem všechny složky představují nyní složky rychlosti

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_4 \\ \dot{Y}_4 \\ \dot{Z}_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & -\sin \chi \\ 0 & \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}$$

Po roznásobení dílčích transformačních matic, obdržíme konečný tvar transformační rovnice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}, \quad (3.220)$$

kde prvky transformační matice mají tvar

$$\begin{aligned}T_{11} &= (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \cos \alpha - \cos \gamma \sin \chi \sin \alpha, \\ T_{12} &= (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \sin \alpha + \cos \gamma \sin \chi \cos \alpha, \\ T_{13} &= \sin \gamma \sin \delta + \cos \gamma \cos \chi \cos \delta, \\ T_{21} &= \sin \chi \sin \delta \cos \alpha - \cos \chi \sin \alpha, \\ T_{22} &= \sin \chi \sin \delta \sin \alpha + \cos \chi \cos \alpha, \\ T_{23} &= -\sin \chi \cos \delta, \\ T_{31} &= -(\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \cos \chi \sin \delta) \cos \alpha - \sin \gamma \sin \chi \sin \alpha, \\ T_{32} &= -(\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \cos \chi \sin \delta) \sin \alpha + \sin \gamma \sin \chi \cos \alpha, \\ T_{33} &= -\cos \gamma \sin \delta + \sin \gamma \cos \chi \cos \delta.\end{aligned} \quad (3.221)$$

Složky vektoru \vec{V} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě získáme pomocí inverzní matice. Pak transformační rovnice bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.222)$$

Roznásobením dostaneme složky vektoru \vec{V} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě vyjádřené pomocí rozšířeného souboru souřadnic $(\alpha, \delta, \chi, \gamma, r, V)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V(\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \cos \alpha - V \cos \gamma \sin \chi \sin \alpha, \\ \dot{Y} &= V(\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \sin \alpha + V \cos \gamma \sin \chi \cos \alpha, \\ \dot{Z} &= V(\sin \gamma \sin \delta + \cos \gamma \cos \chi \cos \delta).\end{aligned}\quad (3.223)$$

Příklad 3.9

Zadání:

Pro zadané geocentrické sférické souřadnice α, δ , moduly r, V , azimut χ a sklon dráhy letu vůči lokálnímu horizontu γ vypočtete polohový vektor \vec{r} a vektor rychlosti letu \vec{V} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (GRSS).

Potřebná data:

Modul polohového vektoru	$r = 6800 \text{ [km]},$
Modul vektoru rychlosti letu	$V = 8,1 \text{ [km/s]},$
Rektascenze kosmického tělesa v GRSS	$\alpha = 80 \text{ [°]},$
Deklinace kosmického tělesa v GRSS	$\delta = 40 \text{ [°]},$
Azimut dráhy letu	$\chi = 30 \text{ [°]},$
Sklon dráhy letu (vůči lokálnímu horizontu)	$\gamma = 15 \text{ [°]}.$

Řešení:

a) Výpočet hodnot potřebných goniometrických funkcí

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin 80^\circ = 0,984808, & \cos \alpha &= \cos 80^\circ = 0,173648, \\ \sin \delta &= \sin 40^\circ = 0,642788, & \cos \delta &= \cos 40^\circ = 0,766044, \\ \sin \chi &= \sin 30^\circ = 0,5, & \cos \chi &= \cos 30^\circ = 0,866025, \\ \sin \gamma &= \sin 15^\circ = 0,258819, & \cos \gamma &= \cos 15^\circ = 0,965926.\end{aligned}$$

b) Výpočet složek polohového vektoru dle rov. (3.214)

$$\begin{aligned}X &= r \cos \delta \cos \alpha = 6800(0,766044)(0,173648) = 904,551 \text{ [km]}, \\ Y &= r \cos \delta \sin \alpha = 6800(0,766044)0,984808 = 5129,964 \text{ [km]}, \\ Z &= r \sin \delta = 6800(0,642788) = 4370,956 \text{ [km]}.\end{aligned}$$

c) Výpočet složek vektoru rychlosti letu dle rov. (3.223)

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V[(\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \cos \alpha - \cos \gamma \sin \chi \sin \alpha], \\ \dot{Y} &= V[(\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \cos \chi \sin \delta) \sin \alpha + \cos \gamma \sin \chi \cos \alpha], \\ \dot{Z} &= V(\sin \gamma \sin \delta + \cos \gamma \cos \chi \cos \delta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{X} &= 8,1[(0,258819(0,766044) - (0,965926)0,866025(0,642788))0,173648 \\ &\quad - 0,965926(0,5)0,984808] = -4,33 \text{ [kms}^{-1}\text{]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= 8,1[(0,258819(0,766044) - 0,965926(0,866025)0,642788)0,984808 \\ &\quad + 0,965926(0,5)0,173648] = -2,028345 \text{ [kms}^{-1}\text{]},\end{aligned}$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$\dot{Z} = 8,1(0,258819(0,642788) + 0,965926(0,866025)0,766044) = 6,538112 \text{ [kms}^{-1}\text{]}$$

d) Výsledky přepíšeme do standardní vektorové formy pro polohový vektor \vec{r} a vektor rychlosti letu v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

$$\vec{r} = 904,551\vec{i} + 5129,964\vec{j} + 4370,956\vec{k} \text{ [km]},$$

$$\vec{V} = -4,33\vec{i} - 2,028345\vec{j} + 6,538112\vec{k} \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

Stanovení geocentrických sférických souřadnic, azimutu a sklonu dráhy letu ze stavového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

Vycházíme ze známých prvků stavového vektoru (X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z) , z nichž je žádoucí nalézt geocentrické sférické souřadnice (α, δ) , azimut (χ) a sklon dráhy letu (γ) . Použijeme následující postup:

1) Výpočet modulů polohového vektoru r a rychlosti letu V dle rov. (3.194) a (3.195)

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}.$$

2) Výpočet rektascenze α

$$\alpha = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right), \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ. \quad (3.224)$$

3) Výpočet deklinace δ

$$\delta = \arcsin\left(\frac{Z}{r}\right), \quad -90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ. \quad (3.225)$$

4) Výpočet sklonu dráhy letu γ

$$\vec{r} \cdot \vec{V} = rV \cos(90^\circ - \gamma) = rV \sin \gamma, \quad (3.226)$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{rV}\right). \quad (3.227)$$

5) Výpočet azimutu

Nejprve definujeme potřebné jednotkové vektory. Jednotkový vektor specifického momentu hybnosti (kolmý na rovinu oběžné dráhy) je dán vztahem

$$\vec{e}_h = \frac{\vec{r} \times \vec{V}}{|\vec{r} \times \vec{V}|}. \quad (3.228)$$

Jednotkový vektor určený dle vztahu

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{e}_h \times \vec{r}}{|\vec{e}_h \times \vec{r}|} \quad (3.229)$$

odpovídá směru tečny k oběžné dráze (leží v rovině oběžné dráhy). Jednotkový vektor stanovený dle vztahu

$$\vec{e}_p = \frac{(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}}{|(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}|} \quad (3.230)$$

definuje směr tečny k poledníku (leží v rovině poledníku). Úhel mezi právě uvedenými jednotkovými vektory představuje úhel azimutu. Na základě skalárního součinu jednotkových vektorů $(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_p)$ určíme azimutu následovně

$$\begin{aligned}\vec{e}_t \cdot \vec{e}_p &= |\vec{e}_t| |\vec{e}_p| \cos \chi, \\ \cos \chi &= \vec{e}_t \cdot \vec{e}_p, \\ \chi &= \arccos(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_p).\end{aligned}\quad (3.231)$$

Výpočet azimutu vykazuje nejednoznačnost přiřazení správné hodnoty úhlu z hodnoty $\cos \chi$. Proto je třeba provést navíc výpočet hodnoty $\sin \chi$ pomocí vektorového součinu těchto jednotkových vektorů ($\vec{e}_t \times \vec{e}_p$)

$$\begin{aligned}\vec{e}_t \times \vec{e}_p &= |\vec{e}_t| |\vec{e}_p| \sin \chi, \\ \sin \chi &= \vec{e}_t \times \vec{e}_p.\end{aligned}\quad (3.232)$$

Na základě znaménka je možno identifikovat správnou hodnotu výše vypočteného úhlu azimutu. Detailní postup řešení uvedené úlohy lze nalézt v příkladu 3.10.

Příklad 3.10

Zadání:

Pro vektory polohy \vec{r} a rychlosti letu \vec{V} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě, vypočtené v příkladu 3.9, recipročně stanovte geocentrické sférické souřadnice (α, δ) , azimut χ a sklon dráhy letu γ .

Potřebná data:

Polohový vektor kosmického tělesa

$$\vec{r} = 904,551\vec{I} + 5129,964\vec{J} + 4370,956\vec{K} \quad [km].$$

Vektor rychlosti letu

$$\vec{V} = -4,33\vec{I} - 2,028345\vec{J} + 6,538112\vec{K} \quad [kms^{-1}].$$

Řešení:

a) Výpočet rektascenze α dle rov. (3.224)

$$\alpha = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) = \arctg\left(\frac{5129,964}{904,551}\right) = 1,396263 \quad [rad],$$

$$\alpha = 80 [^\circ] \quad \text{nebo} \quad \alpha = 260 [^\circ].$$

Na základě posouzení znamének složek X, Y polohového vektoru \vec{r} je zřejmé, že se jedná o první kvadrant a správná hodnota je

$$\alpha = 80 [^\circ].$$

b) Výpočet modulu polohového vektoru

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{904,551^2 + 5129,964^2 + 4370,956^2} = 6800 \quad [km].$$

c) Výpočet deklinace δ dle rov. (3.225)

$$\delta = \arcsin\left(\frac{Z}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{4370,956}{6800}\right) = 0,698132 \quad [rad] = 40 [^\circ].$$

S ohledem na definovaný rozsah úhlů δ a kladnou souřadnici Z je uvedená hodnota deklinace platná.

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

d) Výpočet skalárního součinu polohového vektoru a vektoru rychlosti letu

$$\vec{r} \cdot \vec{V} = 904,551(-4,33) + 5129,964(-2,028345) + 4370,956(6,538112)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{V} = 14255,753 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{].}$$

e) Výpočet modulu vektoru rychlosti letu

$$V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} = \sqrt{(-4,33)^2 + (-2,028345)^2 + 6,538112^2} = 8,1 \text{ [kms}^{-1}\text{]}$$

f) Výpočet sklonu dráhy letu γ dle rov. (3.227)

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{rV}\right) = \arcsin\left(\frac{14255,753}{6800(8,1)}\right) = 0,261799 \text{ [rad]} = 15^\circ.$$

g) Výpočet vektoru specifického momentu hybnosti dle rov. (3.196)

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = h_x \vec{I} + h_y \vec{J} + h_z \vec{K},$$

kde složky jsou dány výrazy (3.197) až (3.199)

$$h_x = YV_z - ZV_y,$$

$$h_y = ZV_x - XV_z,$$

$$h_z = XV_y - YV_x,$$

$$h_x = 5129,964(6,538112) - 4370,956(-2,028345) = 42406,089,$$

$$h_y = 4370,956(-4,33) - (904,551)6,538112 = -24840,297,$$

$$h_z = 904,551(-2,028345) - 5129,964(-4,33) = 20378,006,$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = 42406,089\vec{I} - 24840,297\vec{J} + 20378,006\vec{K}.$$

h) Výpočet modulu specifického momentu hybnosti dle rov. (3.200)

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} = \sqrt{42406,089^2 + (-24840,297)^2 + 20378,006^2},$$

$$h = |\vec{r} \times \vec{V}| = 53203,19.$$

i) Výpočet jednotkového vektoru specifického momentu hybnosti

$$\vec{e}_h = \frac{\vec{h}}{h} = \frac{\vec{r} \times \vec{V}}{|\vec{r} \times \vec{V}|} = \frac{42406,089\vec{I} - 24840,297\vec{J} + 20378,006\vec{K}}{53203,19},$$

$$\vec{e}_h = 0,797059\vec{I} - 0,466895\vec{J} + 0,383022\vec{K}.$$

j) Výpočet vektoru určujícího směr tečny k oběžné dráze v prostoru

$$\vec{e}_h \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ e_{hx} & e_{hy} & e_{hz} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (\vec{e}_h \times \vec{r})_x \vec{I} + (\vec{e}_h \times \vec{r})_y \vec{J} + (\vec{e}_h \times \vec{r})_z \vec{K},$$

kde složky jsou dány výrazy

$$(\vec{e}_h \times \vec{r})_x = e_{hy}Z - e_{hz}Y,$$

$$(\vec{e}_h \times \vec{r})_y = e_{hz}X - e_{hx}Z,$$

$$(\vec{e}_h \times \vec{r})_z = e_{hx}Y - e_{hy}X,$$

$$(\vec{e}_h \times \vec{r})_x = -0,466895(4370,956) - 0,383022(5129,964) = -4005,667,$$

$$(\vec{e}_h \times \vec{r})_y = 0,383022(904,551) - 0,797059(4370,956) = -3137,447,$$

$$(\vec{e}_h \times \vec{r})_z = 0,797059(5129,964) - (-0,466895)904,551 = 4511,215,$$

$$\vec{e}_h \times \vec{r} = -4005,667\vec{i} - 3137,447\vec{j} + 4511,215\vec{k}.$$

k) Výpočet modulu vektoru určujícího směr tečny k oběžné dráze

$$|\vec{e}_h \times \vec{r}| = \sqrt{(-4005,667)^2 + (-3137,447)^2 + 4511,215^2} = 6800.$$

l) Výpočet jednotkového vektoru určujícího směr tečny k dráze dle rov. (3.229)

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{e}_h \times \vec{r}}{|\vec{e}_h \times \vec{r}|} = \frac{-4005,667\vec{i} - 3137,447\vec{j} + 4511,215\vec{k}}{6800},$$

$$\vec{e}_t = -0,589069\vec{i} - 0,461389\vec{j} + 0,663414\vec{k}.$$

m) Výpočet vektorového součinu $\vec{r} \times \vec{K}$

$$\vec{r} \times \vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5129,964\vec{i} - 904,551\vec{j}.$$

n) Výpočet vektorového součinu $(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}$

$$(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (\vec{r} \times \vec{K})_x & (\vec{r} \times \vec{K})_y & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

$$(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5129,964 & -904,551 & 0 \\ 904,551 & 5129,964 & 4370,956 \end{vmatrix},$$

$$(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r} = -904,551(4370,956)\vec{i} - 5129,964(4370,956)\vec{j} + (5129,964^2 + 904,551^2)\vec{k},$$

$$(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r} = -3953753\vec{i} - 22422847\vec{j} + 27134746\vec{k}.$$

o) Výpočet modulu $|(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}|$

$$|(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}| = \sqrt{(-3953753)^2 + (-22422847)^2 + 27134746^2} = 35421895.$$

p) Výpočet jednotkového vektoru určujícího směr tečny k poledníku dle rov. (3.230)

$$\vec{e}_p = \frac{(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}}{|(\vec{r} \times \vec{K}) \times \vec{r}|} = \frac{-3953753\vec{i} - 22422847\vec{j} + 27134746\vec{k}}{35421895},$$

$$\vec{e}_p = -0,111619\vec{i} - 0,633022\vec{j} + 0,766044\vec{k}.$$

q) Výpočet úhlu azimutu dle rov. (3.231)

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_p = -0,589069(-0,111619) + (-0,461389)(-0,633022) + 0,663414(0,766044) = 0,866025,$$

$$\chi = \arccos(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_p) = \arccos(0,866025) = 0,523599 \text{ [rad]},$$

$$\chi = 30 [^\circ] \quad \text{nebo} \quad \chi = 330 [^\circ].$$

Pro přiřazení adekvátního úhlu azimutu je nutno doplnit výpočet hodnoty $\sin \chi$.

r) Výpočet vektorového součinu $(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)$

$$\vec{e}_t \times \vec{e}_p = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ e_{tX} & e_{tY} & e_{tZ} \\ e_{pX} & e_{pY} & e_{pZ} \end{vmatrix} = (\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_X \vec{I} + (\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_Y \vec{J} + (\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_Z \vec{K},$$

$$(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_X = e_{tY} e_{pZ} - e_{tZ} e_{pY},$$

$$(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_Y = e_{tZ} e_{pX} - e_{tX} e_{pZ},$$

$$(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_Z = e_{tX} e_{pY} - e_{tY} e_{pX},$$

$$(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_X = -0,461389(0,766044) - 0,663414(-0,633022) = 0,066511,$$

$$(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_Y = 0,663414(-0,111619) - (-0,589069)(0,766044) = 0,377203,$$

$$(\vec{e}_t \times \vec{e}_p)_Z = -0,589069(-0,633022) - (-0,461389)(-0,111619) = 0,321394.$$

s) Výpočet modulu vektoru $|\vec{e}_t \times \vec{e}_p|$

$$|\vec{e}_t \times \vec{e}_p| = \sqrt{0,066511^2 + 0,377203^2 + 0,321394^2} = 0,5.$$

t) Výpočet hodnoty $\sin \chi$ dle vztahu (3.232)

$$\sin \chi = \vec{e}_t \times \vec{e}_p = 0,5.$$

Jelikož hodnota $\sin \chi > 0$, pak správná hodnota azimutu je $\chi = 30 [^\circ]$.

3.6.4 Rotující geocentrické souřadnicové soustavy

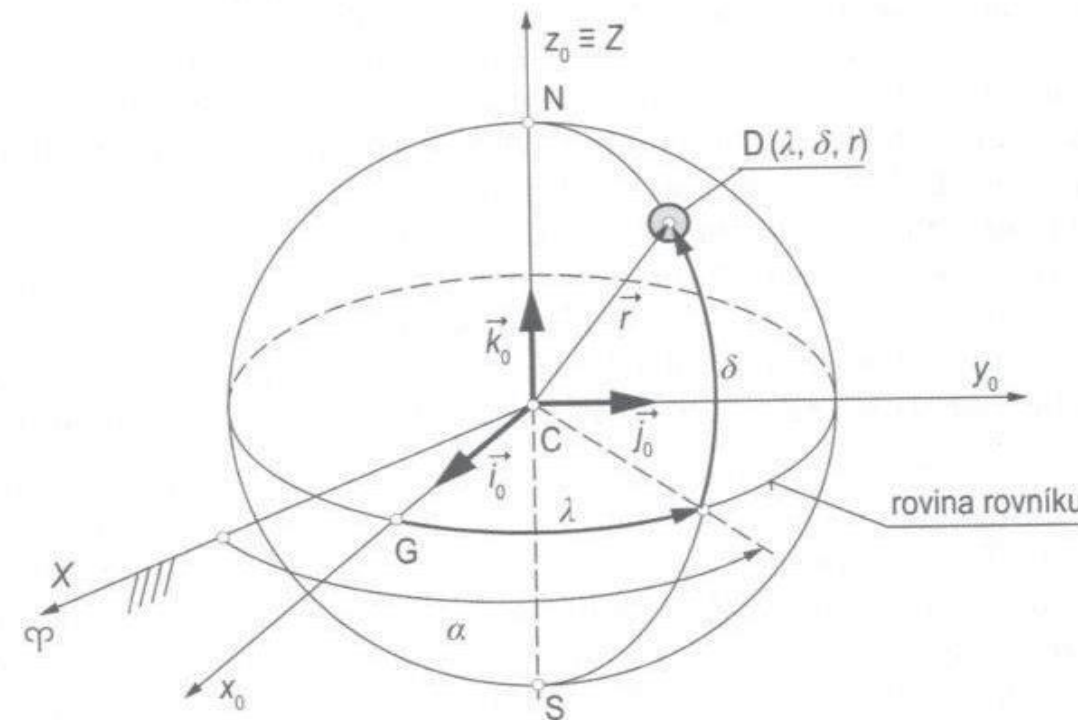
Mezi rotující geocentrické souřadnicové soustavy patří: rotující geocentrická sférická souřadnicová soustava (λ, δ, r) a rotující geocentrická rovníková souřadnicová soustava (x_0, y_0, z_0) . Rotující geocentrická sférická souřadnicová soustava je definována stejně jako geocentrická sférická souřadnicová soustava (α, δ, r) s tím rozdílem, že místo souřadnice α (rektascenze) se používá zeměpisná délka λ . Rotující geocentrická rovníková souřadnicová soustava je klasická pravoúhlá pravotočivá kartézská souřadnicová soustava. Osa x_0 stále prochází greenwickským poledníkem. Obě souřadnicové soustavy jsou tudíž pevně spojeny se Zemí a spolu s ní rotují kolem osy $Z \equiv z_0$. Z toho vyplývá, že se jedná o neinerciální souřadnicové soustavy. Vzájemná relace mezi geocentrickými a rotujícími geocentrickými soustavami je patrný z obr. 3-34. Zeměpisná délka je definována jako úhel mezi místním a greenwickským poledníkem, nazývaným také jako nultý poledník. Relace mezi rektascenzí a zeměpisnou délkou je dána výrazem

$$\lambda = \alpha - \alpha_G, \quad 0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ, \quad (3.233)$$

kde α_G je rektascenze greenwickského poledníku ve zvoleném čase. Podrobnější definice uvedena dále (obr. 3-37).

Na rozdíl od standardní zeměpisné délky, která je definována v rozsahu $0^\circ \div 180^\circ$ a uvádí se v kladných hodnotách východním směrem a v záporných hodnotách západním

směrem od greenwichského rovníku, zde budeme zeměpisnou délku λ používat v rozsahu $0^\circ \div 360^\circ$ východním (kladným) směrem.



Obr. 3-34 Definice rotující geocentrické sférické souřadnicové soustavy. Poloha objektu je dána souřadnicemi (λ, δ, r) .

3.7 Určování oběžných drah z pozorování

Doposud jsme se zabírali určováním pohybu kosmických těles a popisu jejich drah vzhledem ke středu centrálního gravitačního pole. Avšak neméně důležité je určování pohybu kosmických těles, či přirozených nebeských těles vzhledem k místu pozorovatele, který se nachází na povrchu vztažného tělesa (na povrchu Země). To znamená, že úloha je obvykle postavena tak, že na základě pozorování hledáme tvar a parametry oběžné dráhy.

Vzhledem k tomu, že pohyb daného kosmického objektu nesledujeme ze středu Země, ale pozorujeme s povrchu Země, je třeba nejen zvolit vhodné vztažné souřadnicové soustavy, ale také uvážit známé pohyby Země a vzít v úvahu i časoměrné údaje, a uvádět v jaké epoše (čase) určitá událost (pozorování kosmického objektu) nastala. Neméně důležité je také určit místo pozorovatele na povrchu Země, která není přesnou sférickou koulí, ale je podél osy rotace zploštělá. Proto se budeme nejprve věnovat časomíře pro určování epochy pozorovaných událostí. Do dalších úvah budou zahrnuty samozřejmě také vlivy zploštění Země.

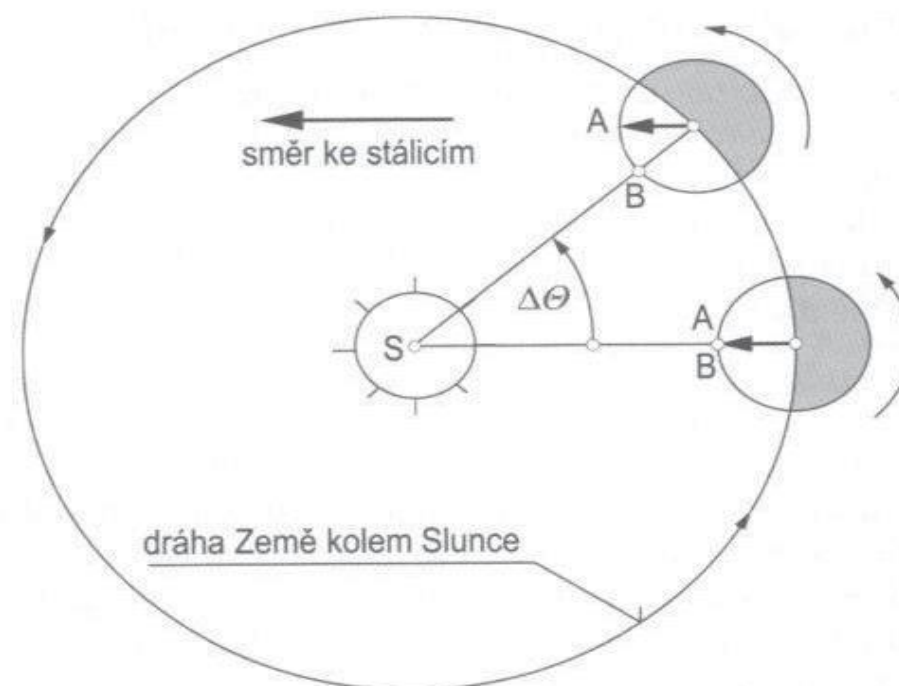
3.7.1 Časomíra – určování epochy

Po tisíciletí lidé odvozovali plynutí času z rotačních pohybů Země. Lépe řečeno ze zdánlivých pohybů nebeských těles (Slunce, Měsíce) vůči nějakému záměrnému bodu na nebeské sféře. Odvozuje-li se čas podle pohybu Slunce, jedná se o sluneční čas. Za časovou jednotku může být zvolena právě doba mezi dvěma stejnými zdánlivými

polohami Slunce, např. mezi dvěma kulminacemi Slunce. Tuto dobu nazýváme zdánlivý sluneční den.

Bohužel, takto stanovený sluneční den vykazuje určité nepravidelnosti, jejichž hlavní příčiny spočívají v následujících vlivech. Země se nepohybuje kolem Slunce rovnoměrně, ale v souladu s druhým Keplerovým zákonem se pohybuje rychleji, když je blíže ke Slunci a naopak. Ani samotné Slunce se nepohybuje po ekliptice rovnoměrně. Zdánlivý pohyb je ovlivněn také sklonem rovníku vůči ekliptice. V určité míře se projevuje gravitační působení Měsíce a blízkých planet a další, prozatím neobjasněné vlivy. Proto byl zaveden střední sluneční den, který je rozdělen na 24 středních slunečních hodin. Tím jsme se vyhnuli nepravidelně plynoucímu času, který např. ukazují sluneční hodiny, a za základ měření času se používá *střední sluneční čas*, podle něž se řídí běžný občanský život. Posledně uvedený čas ukazují např. naše hodinky.

Pro pozorovatele na různých polednicích však máme různé časy, tzv. lokální časy. Běžný život si proto vyžádal sjednocení měření času. Byl zaveden tzv. univerzální (světový) čas UT. Střední sluneční den je definován dobou, za kterou Slunce projde stejným vztažným poledníkem. Za tento vztažný nultý poledník byl zvolen greenwichský poledník procházející tamější hvězdárnou. To znamená, že v pravé poledne světového času (UT) prochází Slunce právě tímto nultým poledníkem. Od tohoto poledníku se rovněž definují zeměpisné délky, jimiž se určují geografické polohy míst na zeměkouli. Lokální časy jsou pak odvozeny od světového času připočítáváním, respektive odpočítáváním jedné hodiny pro každé časové pásmo, i když existují jisté výjimky. Časová pásma vznikla rozdělením obvodu Země na 24 částí o zeměpisné délce 15° .



Obr. 3-35 Rozdíl mezi středním slunečním dnem a středním siderickým dnem.

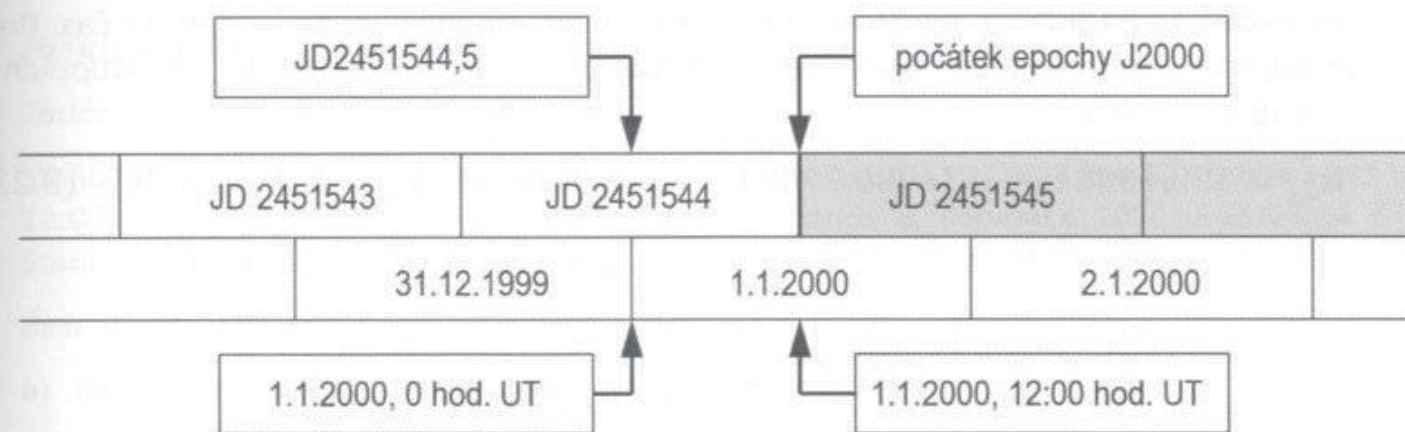
Pokud budeme vztahovat dobu rotace Země vůči vzdáleným stálicím, pak se jedná o *hvězdný (siderický) čas*. Siderický den je doba, za kterou se objeví vztažný bod (hvězda) na stejném poledníku. Za vztažný bod byl zvolen bod jarní rovnodennosti. Na obr. 3-35

je znázorněn pohyb rotující Země kolem Slunce. Odtud vidíme, že vztažné směry ke stálícím (zde k bodu jarní rovnodennosti) a ke Slunci jsou v různých fázích pohybu Země kolem Slunce odlišné. Zatímco se Země pootočila vůči stálícím o 360° , vůči Slunci se musí pootočit o něco více.

Z toho vyplývá, že siderický den je kratší než sluneční den. Sluneční čas i siderický čas plynou sice rovnoměrně, ale mají různé základní časové jednotky (dny). Siderický den trvá 23 hodin 56 minut a 4 sekundy. Sluneční den trvá 24 hodin. To znamená, že Země se otočí o 360° za jeden siderický den a o $360,98564724^\circ$ za střední sluneční den.

Lokální siderický čas daného místa je doba, která uplynula od průchodu lokálního poledníku přes vztažný směr jarní rovnodennosti. Siderický čas lze převést na úhlovou vzdálenost ve stupních tak, že siderický čas násobíme číslem 15. Toto číslo představuje počet stupňů, o něž se pootočí Země za hodinu.

Při určování časových údajů o pozorování poloh kosmických těles vyvstával problém při používání občanského gregoriánského kalendáře. Máme-li např. stanovit dobu mezi dvěma událostmi, musíme přitom pracně zohledňovat různé počty dní v měsíci, přestupné roky a jiné anomálie. Proto byl zaveden systém juliánských dní, což jsou střední sluneční dny, které plynou rovnoměrně a jednoznačně od zvoleného data.



Obr. 3-36 Vzájemný vztah gregoriánského kalendáře a juliánských dní.

Systém juliánských dní zavedl J. Scaliger již v roce 1582 jako kalendář vhodnější pro astronomická pozorování. Číselně se žádný den neopakuje a není používáno dělení na měsíce a týdny. Počátek tohoto systému byl stanoven na pravé poledne 1. ledna 4713 před Kristem. Období je děleno na epochy a století. Juliánské století má 36525 středních slunečních dní. Současná epocha označena jako epocha J2000 začala v poledne UT 1. ledna 2000. Tomu odpovídá juliánský den JD 2451545. Jak je uvedeno na obr. 3-36, začátky juliánských dnů se liší od začátků dní v gregoriánském kalendáři. Mezi oběma systémy byly stanoveny transformační vztahy. Označme si symbolem JD_0 juliánský den v 0 hod. UT, pak pro každý jiný čas UT je juliánský den dán výrazem v desítkové soustavě

$$JD = JD_0 + \frac{UT}{24}. \quad (3.234)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Hodnoty JD_0 jsou tabelovány nebo se dají stanovit např. dle lit. [16] ze vztahu

$$JD_0 = 367R - \text{Int} \left\{ \frac{7 \left[R + \text{Int} \left(\frac{M+9}{12} \right) \right] \right\}}{4} \right\} + \text{Int} \left(\frac{275M}{9} \right) + D + 1721013,5, \quad (3.235)$$

kde symbol R je rok, M je měsíc a D je den a mohou nabývat následujících hodnot

$$1901 \leq R \leq 2099,$$

$$1 \leq M \leq 12,$$

$$1 \leq D \leq 31.$$

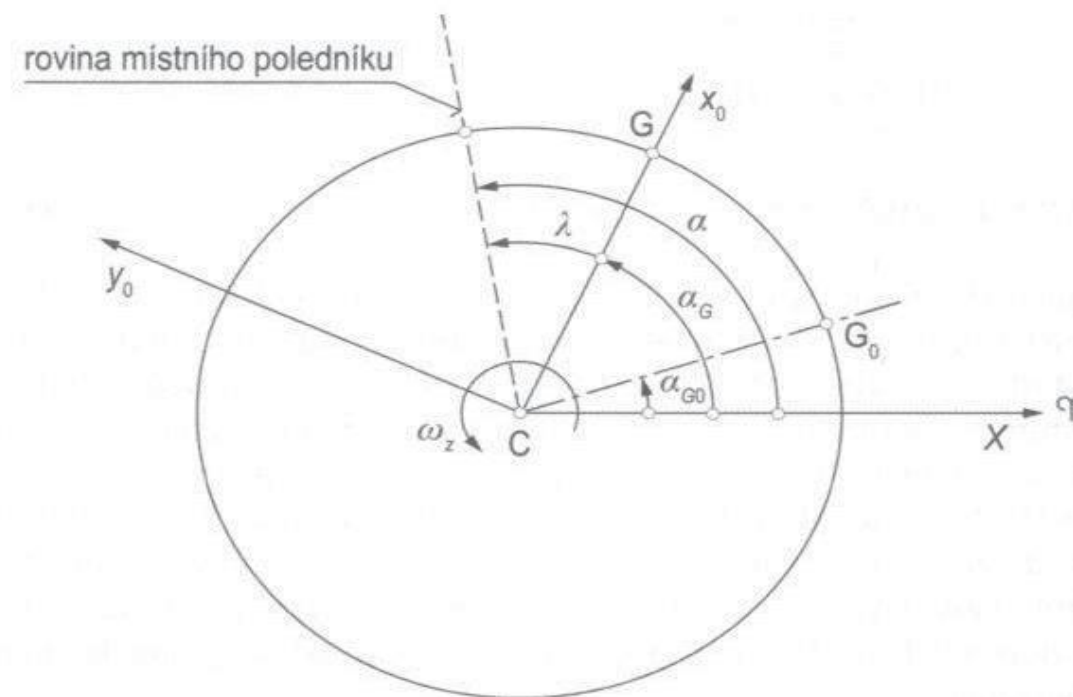
Symbolem $\text{Int}(\)$ je naznačeno, že z výrazu v závorce se bere pouze celočíselná část výsledku. Čísla za desetinou čárkou se neuvažují.

Bezrozměrovou dobu t_0 , která uplynula mezi daným juliánským dnem JD_0 a počátkem epochy J2000 lze stanovit ve stoletích ze vztahu

$$t_0 = \frac{JD_0 - 2451545}{36525}. \quad (3.236)$$

Pro stanovení polohy na zeměkouli v každém daném okamžiku v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě musíme znát odpovídající lokální siderický čas. Pro to je nejprve nutno stanovit greenwickský lokální čas α_{G_0} v 0 hod. UT ve stupních ze vztahu dle lit. [61]

$$\alpha_{G_0} = 100,4606184 + 36000,77004t_0 + 3,87933 \cdot 10^{-4}t_0^2 - 2,583 \cdot 10^{-8}t_0^3. \quad (3.237)$$



Obr. 3-37 Vzájemná vazba mezi úhly definujícími polohu greenwickského a místního poledníku.

Pokud vypočtená hodnota vybočí z rozsahu $0^\circ \leq \alpha_{G_0} \leq 360^\circ$, je nutno připočítat nebo odpočítat odpovídající celočíselné násobky 360° tak, abychom dodrželi předepsaný rozsah α_{G_0} .

Pokud máme stanovenou správnou hodnotu α_{G_0} můžeme konečně určit greenwichský siderický čas α_G pro libovolný jiný čas UT dle vztahu

$$\alpha_G = \alpha_{G_0} + 360,98564724 \frac{UT}{24}. \quad (3.238)$$

Připomeňme, že konstanta 360,98564724 v uvedeném vztahu představuje počet stupňů, o které se pootočí zeměkoule za 24 středních slunečních hodin.

Připočtením zeměpisné délky λ k právě určené hodnotě α_G můžeme konečně stanovit lokální siderický čas na požadovaném poledníku vyjádřený ve stupních dle výrazu

$$\alpha = \alpha_G + \lambda. \quad (3.239)$$

Pokud vypočtená hodnota α překročí rozsah $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, postupujeme stejně jako v předchozím případě při stanovování správné hodnoty α_{G_0} . Vzájemné relace mezi právě odvozeným úhly jsou znázorněny na obr. 3-37.

Příklad 3.11

Zadání:

Stanovte juliánský den prvního operačního vzletu raketoplánu Columbia 12. dubna 1981 ve 12:00:03 UT a posledního vzletu raketoplánu Atlantis 8. července 2011 v 15:29:04 UT. Stanovte v juliánských dnech, jaká doba mezi těmito událostmi uplynula.

Řešení:

a) Nejprve rovnici (3.235) pro zkrácení zápisu přepíšeme

$$JD_0 = 367R - A + B + D + 1721013,5,$$

kde

$$A = \text{Int} \left\{ \frac{7 \left[R + \text{Int} \left(\frac{M+9}{12} \right) \right]}{4} \right\}, \quad B = \text{Int} \left(\frac{275M}{9} \right).$$

b) Výpočet juliánského dne pro první událost (0 h UT). $R = 1981$, $M = 4$, $D = 12$. Výpočtem stanovíme konstanty

$$A = \text{Int} \left\{ \frac{7 \left[1981 + \text{Int} \left(\frac{4+9}{12} \right) \right]}{4} \right\} = 3468, \quad B = \text{Int} \left(\frac{275(4)}{9} \right) = 122.$$

$$JD_0 = 367(1981) - 3468 + 122 + 12 + 1721013,5 = 2444706,5.$$

Pro výpočet juliánského dne nutno nejprve stanovit světový čas (UT), který uplynul od poslední půlnoci v hodinách (v desetinném vyjádření)

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$UT = h + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600} = 12 + \frac{0}{60} + \frac{3}{3600} = 12,000833 \text{ [h]}.$$

Juliánský den je pak dán hodnotou JD_0 , ke které připočteme světový čas, který uplynul od poslední půlnoci (0 h UT), vyjádřený ve dnech

$$JD_1 = JD_0 + \frac{UT}{24} = 2444706,5 + \frac{12,000833}{24} = 2444707,0.$$

- c) Výpočet juliánského dne pro druhou událost (0 h UT). $R = 2011$, $M = 7$, $D = 8$.
Výpočtem stanovíme konstanty

$$A = \text{Int} \left\{ \frac{7 \left[2011 + \text{Int} \left(\frac{7+9}{12} \right) \right]}{4} \right\} = 3521, \quad B = \text{Int} \left(\frac{275(7)}{9} \right) = 213.$$

$$JD_0 = 367(2011) - 3521 + 213 + 8 + 1721013,5 = 2455750,5.$$

Pro výpočet juliánského dne nutno nejprve stanovit siderický čas ve zlomcích hodin

$$UT = h + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600} = 15 + \frac{29}{60} + \frac{4}{3600} = 15,484444 \text{ [h]}.$$

V tomto případě je juliánský den dán hodnotou JD_0 , ke které připočteme čas, který uplynul od poslední půlnoci (0 h UT), vyjádřený ve dnech

$$JD_2 = JD_0 + \frac{UT}{24} = 2455750,5 + \frac{15,484444}{24} = 2455751,145.$$

- d) Doba, která uplynula mezi oběma událostmi je dána následujícím počtem juliánských dní

$$\Delta(JD) = JD_2 - JD_1 = 2455751,145 - 2444707,0 = 11044,145.$$

3.7.2 Vliv zploštění Země. Geodetické souřadnice

Doposud jsme předpokládali, že Země má dokonalý sférický tvar. Ve skutečnosti je Země zploštělá. V dalším budeme uvažovat, že Země má tvar rotačního elipsoidu. Na obr. 3-38 je znázorněna rovina místního poledníku (na obrázku je zploštění Země záměrně zvětšeno). Rovníková (hlavní) poloosa a_z je větší než polární (vedlejší) poloosa Země b_z . Zploštění Země je definováno následovně

$$\sigma = \frac{a_z - b_z}{a_z}. \quad (3.240)$$

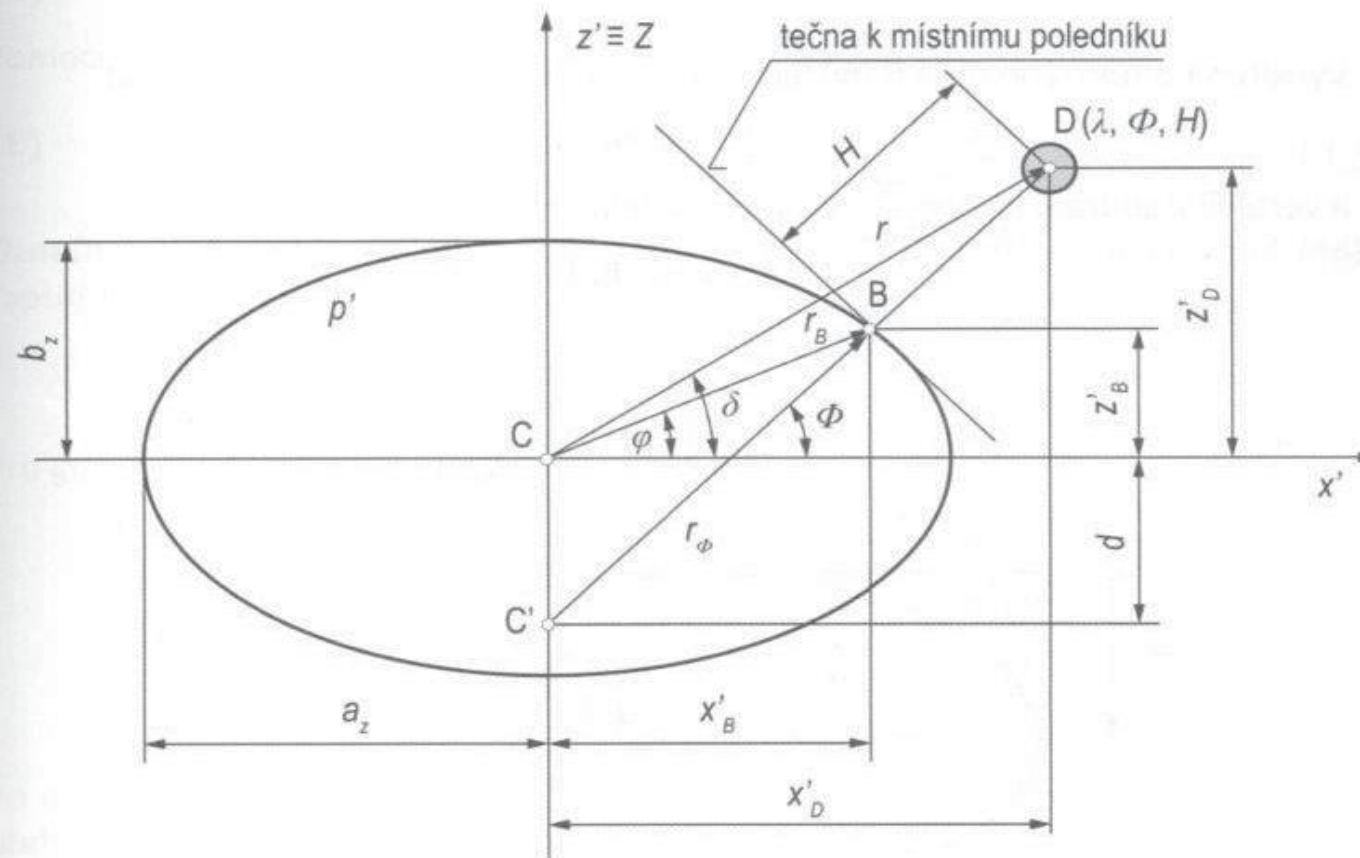
Uvážením známého vztahu pro vedlejší poloosu elipsy $b_z = a_z \sqrt{1 - e_z^2}$, můžeme zavést smluvní excentricitu Země. Jednoduchou úpravou nalezneme relaci mezi zploštěním Země a smluvní excentricitou

$$\sigma = 1 - \sqrt{1 - e_z^2}. \quad (3.241)$$

A naopak, smluvní excentricitu v závislosti na zploštění Země můžeme vyjádřit vztahem

$$e_z = \sqrt{2\sigma - \sigma^2}. \quad (3.242)$$

Kvůli zploštění Země musíme nyní uvážit nové skutečnosti, které jsou patrné z obr. 3-38. Normála k místní horizontální rovině v bodě B (geodetická normála) již neleží na jedné nositelce s polohovým vektorem \vec{r}_B ani s polohovým vektorem \vec{r} kosmického tělesa (družice D) na oběžné dráze. Geocentrická výška h na sférické zeměkouli (ve směru nositelky vektoru \vec{r}) je nahrazena geodetickou výškou H ve směru geodetické normály. A jsou zavedeny dvě zeměpisné šířky definující polohu bodu B. Vedle geocentrické zeměpisné šířky φ na elipsoidu budeme používat i geodetickou zeměpisnou šířku Φ . Poloha kosmického tělesa s uvážením zploštění Země bude nyní dána následujícími geodetickými souřadnicemi: zeměpisnou délkou λ , geodetickou šířkou Φ a geodetickou výškou H .



Obr. 3-38 Vzájemná relace mezi geocentrickou a geodetickou šířkou. Definice geodetické výšky v rovině místního poledníku.

Relace mezi geodetickými a geocentrickými souřadnicemi

Jak bylo právě uvedeno, geodetické souřadnice jsou dány trojicí souřadnic (λ, Φ, H) , které na zploštělé rotující zeměkouli definují polohu kosmického tělesa (družice D). Předpokládejme, že známe polohu kosmického tělesa (družice D), definovanou trojicí geodetických souřadnic (λ, Φ, H) , a hodláme nalézt souřadnice v některé geocentrické souřadnicové soustavě.

Věnujme se nejprve nalezení určujících vazeb mezi geometrickými parametry. Poloha lokálního poledníku (p') je dána zeměpisnou délkou λ . V rovině lokálního poledníku dle obr. 3-38 je zavedena pomocná souřadnicová soustava (x', z') s počátkem ve středu Země C. Poloha vztažného bodu B na zemském elipsoidu, který leží v rovině lokálního

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

poledníku, nechť je dána lokálními souřadnicemi (x'_B, z'_B) . Hledejme souvislost mezi uvedenými pravouhlými souřadnicemi a sférickými souřadnicemi.

Na základě osové afinity (vzájemného vztahu) mezi soustřednými kružnicemi a elipsou dle obr. 3-39 platí následující vztah

$$\frac{z'_B}{z'_2} = \frac{\overline{K_1C}}{\overline{K_2C}} = \frac{b_z}{a_z}.$$

Odtud plyne výraz pro souřadnici z'_B bodu B v rovině lokálního poledníku (p')

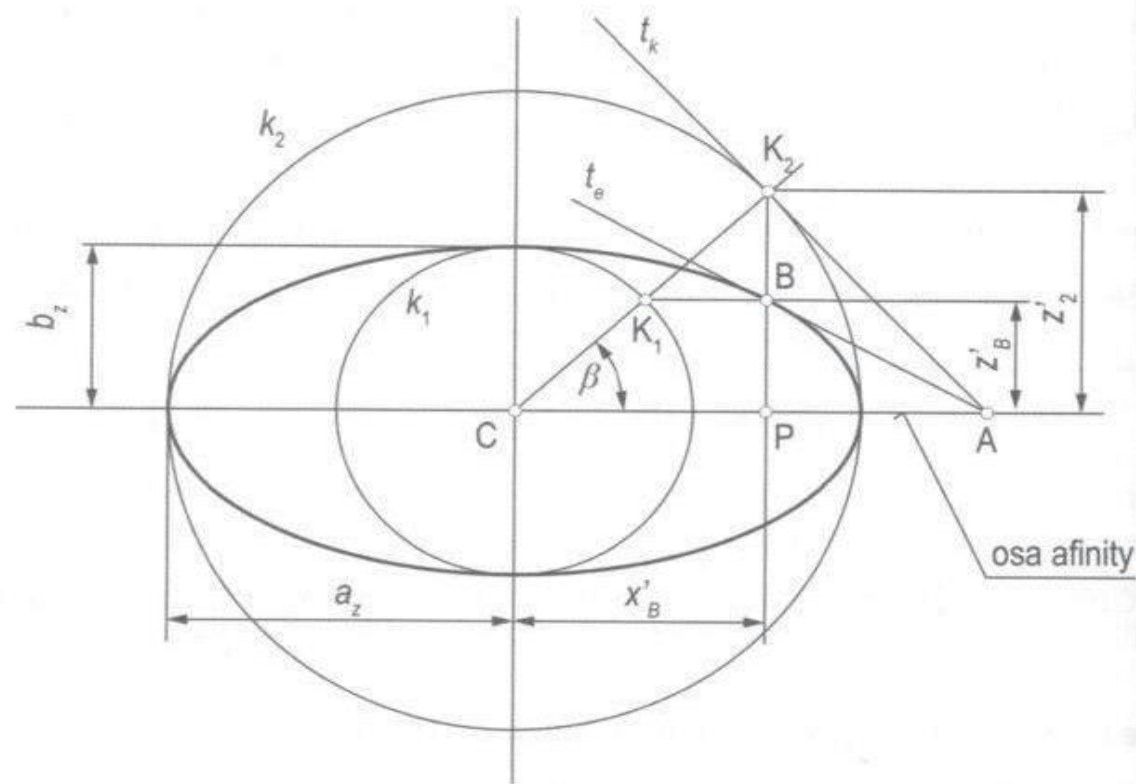
$$z'_B = z'_2 \frac{b_z}{a_z} = z'_2 \frac{a_z \sqrt{1 - e_z^2}}{a_z} = z'_2 \sqrt{1 - e_z^2}. \quad (3.243)$$

Využitím pomocného úhlu β můžeme horizontální souřadnici bodu B zapsat

$$x'_B = a_z \cos \beta \quad (3.244)$$

a vertikální souřadnici bodu K_2 vyjádřit následovně

$$z'_2 = a_z \sin \beta.$$



Obr. 3-39 Definice souřadnic (x'_B, z'_B) dotykového bodu tečny pomocí osové afinity mezi kružnicí a elipsou.

Po dosazení výrazu pro z'_2 do rov. (3.243) obdržíme rovněž vertikální souřadnici bodu B v závislosti na pomocném úhlu β ve tvaru

$$z'_B = a_z \sqrt{1 - e_z^2} \sin \beta. \quad (3.245)$$

Pro nalezení výrazů pro $\sin \beta$ a $\cos \beta$ využijeme vztah pro normálu k elipse v bodě B pro niž platí

$$\operatorname{tg} \Phi = -\frac{dx'_B}{dz'_B}. \quad (3.246)$$

Diferenciály vztahů (3.244) a (3.245) obdržíme ve tvaru

$$dx'_B = a_z(-\sin \beta)d\beta,$$

$$dz'_B = a_z\sqrt{1-e_z^2}\cos \beta d\beta.$$

Po dosazení do vztahu (3.246) a úpravě obdržíme pro tangentu geodetické šířky výraz

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1-e_z^2}}. \quad (3.247)$$

Pomocí tohoto vztahu si upravíme výraz pro $\operatorname{tg} \beta$ na tvar

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \Phi \sqrt{1-e_z^2} = \frac{\sqrt{1-e_z^2} \sin \Phi}{\cos \Phi}. \quad (3.248)$$

Označíme-li $A = \sqrt{1-e_z^2} \sin \Phi$, $B = \cos \Phi$ a $C = \sqrt{A^2+B^2}$, pak výraz (3.248) lze zapsat jednoduše takto

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{B}.$$

Pro goniometrické funkce pomocného úhlu β platí

$$\sin \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\sqrt{1-e_z^2} \sin \Phi}{\sqrt{1-e_z^2 \sin^2 \Phi}}, \quad (3.249)$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1-e_z^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (3.250)$$

Po dosazení rov. (3.249) a (3.250) do výrazů pro souřadnice bodu B (3.244) a (3.245) obdržíme

$$x'_B = \frac{a_z \cos \Phi}{\sqrt{1-e_z^2 \sin^2 \Phi}}, \quad (3.251)$$

$$z'_B = \frac{a_z(1-e_z^2) \sin \Phi}{\sqrt{1-e_z^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (3.252)$$

Oba výše uvedené výrazy vyjadřují relaci mezi souřadnicemi vztažného bodu „B“ na zemském elipsoidu a geodetickou šířkou Φ .

Vyjádříme-li ještě v souladu s obr. 3-38 souřadnici x'_B pomocí geodetického poloměru r_Φ (vzdálenosti mezi bodem C' a bodem B)

$$x'_B = r_\Phi \cos \Phi$$

a položíme rovno výrazu pro souřadnici x'_B dle rovnice (3.251), obdržíme vztah pro geodetický poloměr r_Φ ve tvaru

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$r_{\Phi} = \frac{a_z}{\sqrt{1 - e_z^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (3.253)$$

Zavedením geodetického poloměru dle rov. (3.253) do výrazu (3.252) pro vertikální souřadnici vztažného bodu na zemském elipsoidu z'_B , obr. (3-38), obdržíme výraz

$$z'_B = r_{\Phi}(1 - e_z^2) \sin \Phi = r_{\Phi} \sin \Phi - r_{\Phi} e_z^2 \sin \Phi, \quad (3.254)$$

z něhož vyplývá vztah pro vzdálenost mezi středem Země C a geodetickým středem C'

$$d = r_{\Phi} e_z^2 \sin \Phi. \quad (3.255)$$

Vzdálenost vztažného bodu B od středu Země představuje polohový vektor vztažného bodu na zemském elipsoidu, který je dán výrazem

$$r_B = \sqrt{x_B'^2 + z_B'^2}. \quad (3.256)$$

Souřadnice x'_B a z'_B můžeme vyjádřit jak pomocí geocentrické šířky φ na zemském elipsoidu a poloměru r_B , tak pomocí geodetické šířky Φ a geodetického poloměru r_{Φ} dle obr. 3-38 následovně

$$x'_B = r_B \cos \varphi = r_{\Phi} \cos \Phi, \quad (3.257)$$

$$z'_B = r_B \sin \varphi = r_{\Phi}(1 - e_z^2) \sin \Phi. \quad (3.258)$$

Dělením obou rovnic vyloučíme poloměry a získáme přímou relaci mezi geocentrickou šířkou a geodetickou šířkou v závislosti na excentricitě Země, respektive s využitím rov. (3.242) v závislosti na zploštění Země

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 - e_z^2) \operatorname{tg} \Phi = (1 - \sigma)^2 \operatorname{tg} \Phi. \quad (3.259)$$

Konečně souřadnice kosmického tělesa (družice D) v geodetické výšce H v rovině lokálního poledníku (p') mohou být s využitím souřadnic vztažného bodu na povrchu zemského elipsoidu dle rov. (3.251) a (3.252) zapsány například následovně

$$x'_D = x'_B + H \cos \Phi = \left(\frac{a_z}{\sqrt{1 - e_z^2 \sin^2 \Phi}} + H \right) \cos \Phi, \quad (3.260)$$

$$z'_D = z'_B + H \sin \Phi = \left(\frac{a_z(1 - e_z^2)}{\sqrt{1 - e_z^2 \sin^2 \Phi}} + H \right) \sin \Phi. \quad (3.261)$$

Výše uvedené relace mezi geometrickými parametry je možno využívat pro přepočty mezi jednotlivými souřadnicovými soustavami.

Pak pro převod geodetických souřadnic polohy kosmického tělesa (λ, Φ, H) do rotující geocentrické sférické souřadnicové soustavy (λ, δ, r) použijeme následující postup. První ze souřadnic, zeměpisná délka λ , je stejná v obou systémech.

Pro nalezení deklinace je třeba znát souřadnice kosmického tělesa v rovině lokálního poledníku (p'). Tyto souřadnice lze nalézt pomocí rov. (3.260) a (3.261) s přihlédnutím k rov. (3.253)

$$x'_D = (r_{\Phi} + H) \cos \Phi, \quad (3.262)$$

$$z'_D = [r_\Phi(1 - e_z^2) + H] \sin \Phi, \quad (3.263)$$

nebo z alternativních rovnic (3.260) a (3.261) s přihlédnutím k rov. (3.257) a (3.258)

$$x'_D = r_B \cos \varphi + H \cos \Phi, \quad (3.264)$$

$$z'_D = r_B \sin \varphi + H \sin \Phi. \quad (3.265)$$

V dalším kroku stanovíme modul geocentrického polohového vektoru kosmického tělesa pomocí souřadnic bodu D v rovině místního poledníku

$$r = \sqrt{x_D'^2 + z_D'^2}. \quad (3.266)$$

A konečně deklinaci určíme ze vztahu

$$\delta = \arcsin\left(\frac{z'_D}{r}\right). \quad (3.267)$$

Převod geodetických souřadnic polohy kosmického tělesa (λ, Φ, H) do (inerciální) geocentrické sférické souřadnicové soustavy (α, δ, r) se od předchozího postupu odlišuje pouze ve stanovení jedné souřadnice, rektascenze α . Rektascenze je pro danou epochu dána výrazem

$$\alpha = \lambda + \alpha_G = \alpha + \left(\alpha_{G_0} + 360,98564724 \frac{UT}{24}\right), \quad 0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ. \quad (3.268)$$

Transformace geodetických souřadnic (λ, Φ, H) do (inerciální) geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy (X, Y, Z) je v podstatě shodná s předchozí transformací. Po stanovení souřadnic (x'_D, z'_D) dle rovnic (3.262), (3.263) a rektascenze α následuje poslední krok, v němž jsou stanoveny souřadnice (X, Y, Z) z těchto vztahů

$$X = x'_D \cos \alpha = (r_\Phi + H) \cos \Phi \cos \alpha, \quad (3.269)$$

$$Y = x'_D \sin \alpha = (r_\Phi + H) \cos \Phi \sin \alpha, \quad (3.270)$$

$$Z = [r_\Phi(1 - e_z^2) + H] \sin \Phi. \quad (3.271)$$

Na základě výše odvozených souřadnic (X, Y, Z) můžeme polohu kosmického tělesa vyjádřit polohovým vektorem v závislosti na kombinaci geodetických souřadnic Φ, H , rektascenzi a excentricitě Země ve tvaru

$$\vec{r} = (r_\Phi + H) \cos \Phi (\cos \alpha \vec{I} + \sin \alpha \vec{J}) + [r_\Phi(1 - e_z^2) + H] \sin \Phi \vec{K}. \quad (3.272)$$

Jeho modul je dán výrazem (3.194)

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

kam je nutno tentokrát dosadit za složky X, Y, Z dle rov. (3.269), (3.270) a (3.271). Dosadíme-li do rov. (3.272) za geodetickou výšku $H = 0$, obdržíme výraz pro polohový vektor \vec{r}_B libovolného vztažného bodu B na povrchu zemského elipsoidu.

$$\vec{r}_B = r_\Phi \cos \Phi (\cos \alpha \vec{I} + \sin \alpha \vec{J}) + r_\Phi(1 - e_z^2) \sin \Phi \vec{K}. \quad (3.273)$$

3.7.3 Topocentrická rovníková souřadnicová soustava

Topocentrickou rovníkovou souřadnicovou soustavu (X', Z', Y') můžeme definovat podobně jako geocentrickou rovníkovou souřadnicovou soustavu. Jak uvedeno na obr. 3-40 má stejnou orientaci v prostoru, její osy (X', Z', Y') jsou stále rovnoběžné s osami geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy (X, Y, Z) . Avšak její počátek „0“ leží na povrchu Země a je s ní pevně spojen. Je určena pro pozorování kosmických těles z povrchu Země, a proto je její počátek ztotožněn s místem pozorování.

Poloha kosmického tělesa v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě je dána polohovým vektorem $\vec{\rho}$, který můžeme pomocí odpovídající definice rektascenze a deklinace (α', δ') v soustavě (X', Z', Y') vyjádřit vztahem analogickým s rov. (3.215)

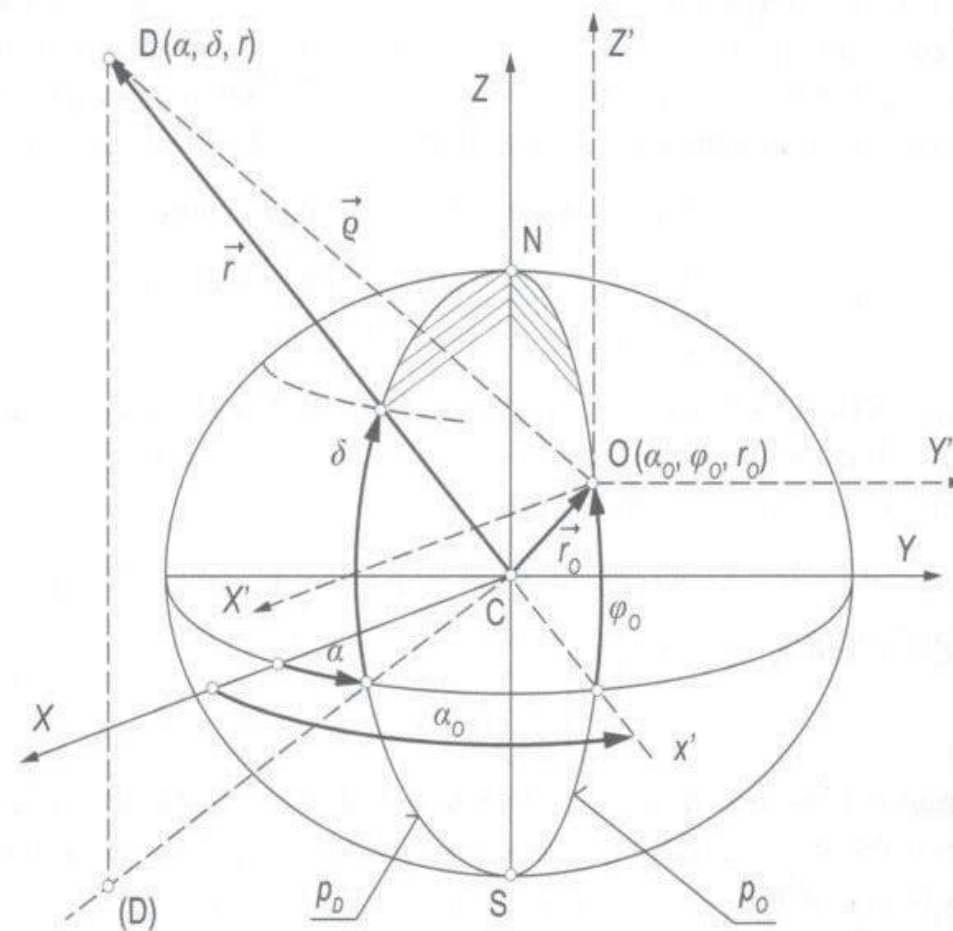
$$\vec{\rho} = \rho \cos \delta' \cos \alpha' \vec{I}' + \rho \cos \delta' \sin \alpha' \vec{J}' + \rho \sin \delta' \vec{K}'.$$

Vzhledem k tomu, že osy obou výše zmíněných souřadnicových soustav jsou stále rovnoběžné, mají jejich jednotkové vektory stále shodné směry. Tudíž musí platit $\vec{I}' = \vec{I}$, $\vec{J}' = \vec{J}$ a $\vec{K}' = \vec{K}$. Z toho plyne alternativní výraz pro polohový vektor $\vec{\rho}$ ve tvaru

$$\vec{\rho} = \rho \cos \delta' \cos \alpha' \vec{I} + \rho \cos \delta' \sin \alpha' \vec{J} + \rho \sin \delta' \vec{K} = \rho \vec{e}'_0, \quad (3.274)$$

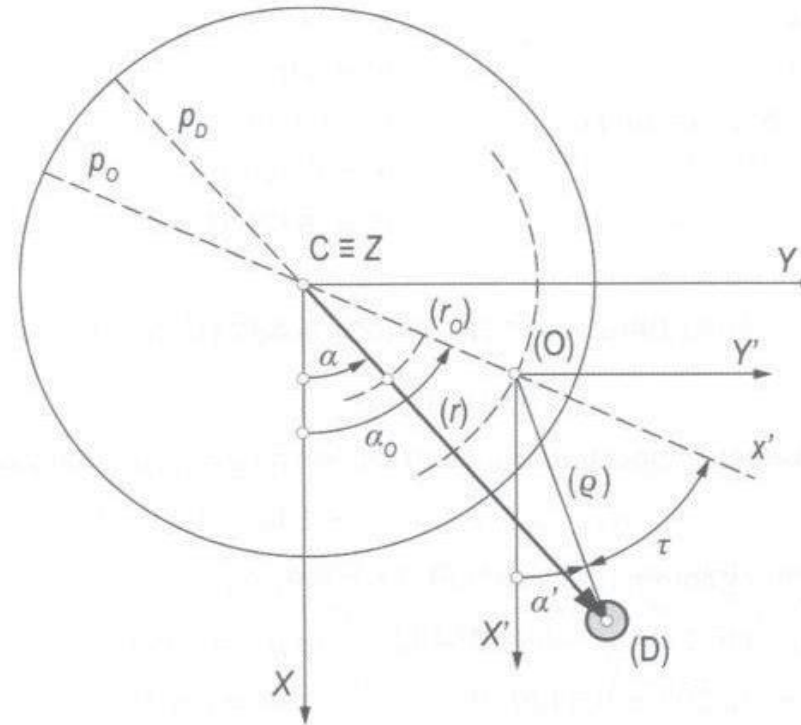
kde jednotkový vektor je v tomto případě dán vztahem

$$\vec{e}'_0 = \cos \delta' \cos \alpha' \vec{I} + \cos \delta' \sin \alpha' \vec{J} + \sin \delta' \vec{K}. \quad (3.275)$$



Obr. 3-40 Definice topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy (X', Y', Z') .

Přestože jsou osy obou zmíněných souřadnicových soustav rovnoběžné, rektascenze a deklinace v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (α', δ') se neshodují s rektascenzí a deklinací v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (α, δ) . To je dáno tím, že se neshodují počátky těchto souřadnicových soustav. Pro případ rektascenzí je odlišnost těchto sférických souřadnic v obou soustavách patrna z obr. 3-41. Obdobně to platí i pro deklinace.



Obr. 3-41 Vzájemné relace mezi rektascenzí v geocentrické rovníkové (X, Y, Z) a topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X', Z', Y') .

Pro přepočítání kartézských souřadnic (X', Z', Y') a sférických souřadnic (α', δ', ρ) z topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy do geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy a naopak, je třeba doplnit relaci mezi polohovými vektory

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}. \quad (3.276)$$

Pro výpočet polohového vektoru \vec{r}_0 lze použít rov. (3.273) pro stanovení polohového vektoru libovolného bodu na zemském povrchu v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě. Nyní však musíme uvedený vztah modifikovat pro rektascenzi α_0 , definující polohu poledníku p_0 , na němž leží počátek topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy „0“. Po úpravě získáme výraz

$$\vec{r}_0 = r_\Phi \cos \Phi (\cos \alpha_0 \vec{I} + \sin \alpha_0 \vec{J}) + r_\Phi (1 - e^2) \sin \Phi \vec{K}. \quad (3.277)$$

Příklad 3.12

Zadání:

Poloha kosmického tělesa je dána polohovým vektorem \vec{r} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z) v čase odpovídající poloze nultého poledníku α_G .

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Nalezněte rektascenzi α' a deklinaci δ' kosmického tělesa v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X', Z', Y') , jejíž počátek je dán zeměpisnou délkou a geodetickou šířkou. Dále stanovte rektascenzi α a deklinaci δ v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě téhož kosmického tělesa nalézajícího se ve stejné poloze a čase a porovnejte získané výsledky.

Potřebná data:

Zeměpisná délka	$\lambda = 60^\circ$,
Geodetická šířka	$\Phi = 20^\circ$,
Rektascenze nultého poledníku	$\alpha_G = 130^\circ$,
Zploštění Země	$\sigma = 0,003353$,
Poloměr Země	$r_Z = 6378 \text{ [km]}$,
Polohový vektor	

$$\vec{r} = -4511\vec{I} - 2605\vec{J} + 4371\vec{K} \text{ [km]}.$$

Řešení:

- a) Výpočet rektascenze počátku topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy α_0

$$\alpha_0 = \lambda + \alpha_G = 60 + 130 = 190 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

- b) Výpočet hodnot goniometrických funkcí pro úhly α_0 a Φ

$$\sin \alpha_0 = \sin 190^\circ = -0,1736482, \quad \cos \alpha_0 = \cos 190^\circ = -0,9848078,$$

$$\sin \Phi = \sin 20^\circ = 0,3420201, \quad \cos \Phi = \cos 20^\circ = 0,9396926.$$

- c) Výpočet excentricity Země e_Z provedeme dle rov. (3.242)

$$e_Z = \sqrt{2\sigma - \sigma^2} = \sqrt{2(0,003353) - 0,003353^2} = 0,0818215.$$

- d) Výpočet poloměru r_Φ dle rov. (3.253)

$$r_\Phi = \frac{a_Z}{\sqrt{1 - e_Z^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{6378}{\sqrt{1 - 0,0818215^2 \cdot 0,3420201^2}} = 6380,4989 \text{ [km]}.$$

- e) Výpočet polohového vektoru \vec{r}_0 v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z)

Pro výpočet použijeme vztah (3.277) pro stanovení polohového vektoru, který definuje počátek topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy „0“

$$\vec{r}_0 = r_\Phi \cos \Phi (\cos \alpha_0 \vec{I} + \sin \alpha_0 \vec{J}) + r_\Phi (1 - e_Z^2) \sin \Phi \vec{K},$$

$$\vec{r}_0 = 6380,4989(0,9396926)(-0,9848078\vec{I} - 0,1736482\vec{J}) + 6380,4989(1 - 0,0818215^2)0,3420201\vec{K},$$

$$\vec{r}_0 = -5904,6195\vec{I} - 1041,1437\vec{J} + 2167,6495\vec{K}.$$

- f) Výpočet modulu polohového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z)

$$r = \sqrt{(-4511)^2 + (-2605)^2 + 4371^2} = 6800,0579 \text{ [km]}.$$

- g) Výpočet polohového vektoru kosmického tělesa v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

Polohový vektor $\vec{\rho}$ stanovíme vektorovým rozdílem

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

$$\vec{\rho} = (-4511\vec{i} - 2605\vec{j} + 4371\vec{k}) - (-5904,6195\vec{i} - 1041,1437\vec{j} + 2167,6495\vec{k}),$$

$$\vec{\rho} = 1393,6195\vec{i} - 1563,8563\vec{j} + 2203,3505\vec{k}.$$

- h) Výpočet modulu polohového vektoru $\vec{\rho}$

$$\rho = \sqrt{1393,6195^2 + (-1563,8563)^2 + 2203,3505^2} = 3040,1604 \text{ [km]}.$$

- i) Výpočet jednotkového polohového vektoru \vec{e}'_{ρ} v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.274)

$$\vec{e}'_{\rho} = (1393,6195\vec{i} - 1563,8563\vec{j} + 2203,3505\vec{k})/3040,1604,$$

$$\vec{e}'_{\rho} = 0,4584033\vec{i} - 0,5143993\vec{j} + 0,7247481\vec{k}.$$

- j) Výpočet deklinace δ' a rektascenze α' v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě ($X', Y' Z'$)

Deklinaci a rektascenzi stanovíme porovnáním složek obecného tvaru jednotkového vektoru dle rov. (3.275) s výše vypočtenými složkami téhož jednotkového vektoru

$$\vec{e}'_{\rho} = \cos \delta' \cos \alpha' \vec{i} + \cos \delta' \sin \alpha' \vec{j} + \sin \delta' \vec{k}.$$

Z porovnání vyplývá výpočtový vztah pro deklinaci

$$\sin \delta' = 0,7247481,$$

odkud deklinace

$$\delta' = \arcsin(0,7247481) = 46,447897 \text{ [°]}.$$

Protože deklinace je definována v rozsahu úhlů $\delta' = \pm 90^\circ$, vypočtená hodnota je jednoznačná a není třeba žádné korektury.

Pro výpočet rektascenze α' máme k dispozici dva vztahy

$$\cos \delta' \cos \alpha' = 0,4584033,$$

$$\cos \delta' \sin \alpha' = -0,5143993,$$

$$\cos(46,447897^\circ) \cos \alpha' = 0,4584033,$$

$$\cos \alpha' = \frac{0,4584033}{\cos(46,447897^\circ)} = 0,6653034,$$

$$\alpha' = \arccos(0,6653034) = 48,294^\circ, \text{ nebo } \alpha' = 311,706^\circ.$$

Obdrželi jsme nejednoznačné řešení a výsledek je třeba korigovat. Na základě posouzení hodnot souřadnic X' a Y' jednotkového vektoru \vec{e}'_{ρ} je zřejmé, že platná hodnota rektascenze v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě je

$$\alpha' = 311,706^\circ.$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

- k) Výpočet jednotkového polohového vektoru kosmického tělesa v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě, (Potřebný modul $r = 6800,0579$ byl již stanoven v bodě f)

$$\vec{e}_r = \frac{(-4511\vec{I} - 2605\vec{J} + 4371\vec{K})}{6800,0579},$$

$$\vec{e}_r = -0,663377\vec{I} - 0,383085\vec{J} + 0,642789\vec{K}.$$

- l) Výpočet deklinace δ a rektascenze α v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z)

Deklinaci a rektascenzi stanovíme opět porovnáním složek obecného tvaru jednotkového vektoru dle rov. (3.216) s výše vypočtenými složkami téhož jednotkového vektoru

$$\vec{e}_r = \cos \delta \cos \alpha \vec{I} + \cos \delta \sin \alpha \vec{J} + \sin \delta \vec{K}.$$

Z porovnání vyplývají výpočtové vztahy pro deklinaci

$$\sin \delta = 0,642789,$$

odkud deklinace

$$\delta = \arcsin(0,642789) = 40 [^\circ].$$

S ohledem na možný rozsah deklinace ($\delta = \pm 90^\circ$) je vypočtená hodnota deklinace platná a není třeba žádné korektury.

Pro výpočet rektascenze α máme k dispozici dva vztahy

$$\cos \delta \cos \alpha = -0,663377,$$

$$\cos \delta \sin \alpha = -0,383085,$$

$$\cos(40^\circ) \cos \alpha = -0,663377,$$

$$\cos \alpha = \frac{-0,663377}{\cos(40^\circ)} = -0,865977,$$

$$\alpha = \arccos(-0,865977) = 150^\circ, \text{ nebo } \alpha = 210^\circ.$$

Opět jsme obdrželi nejednoznačné řešení a výsledek je třeba korigovat. Na základě posouzení hodnot souřadnic X a Y jednotkového vektoru \vec{e}_r je zřejmé, že úhlová poloha kosmického letadla se nachází ve třetím kvadrantu a tudíž platná hodnota rektascenze v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě je

$$\alpha = 210^\circ.$$

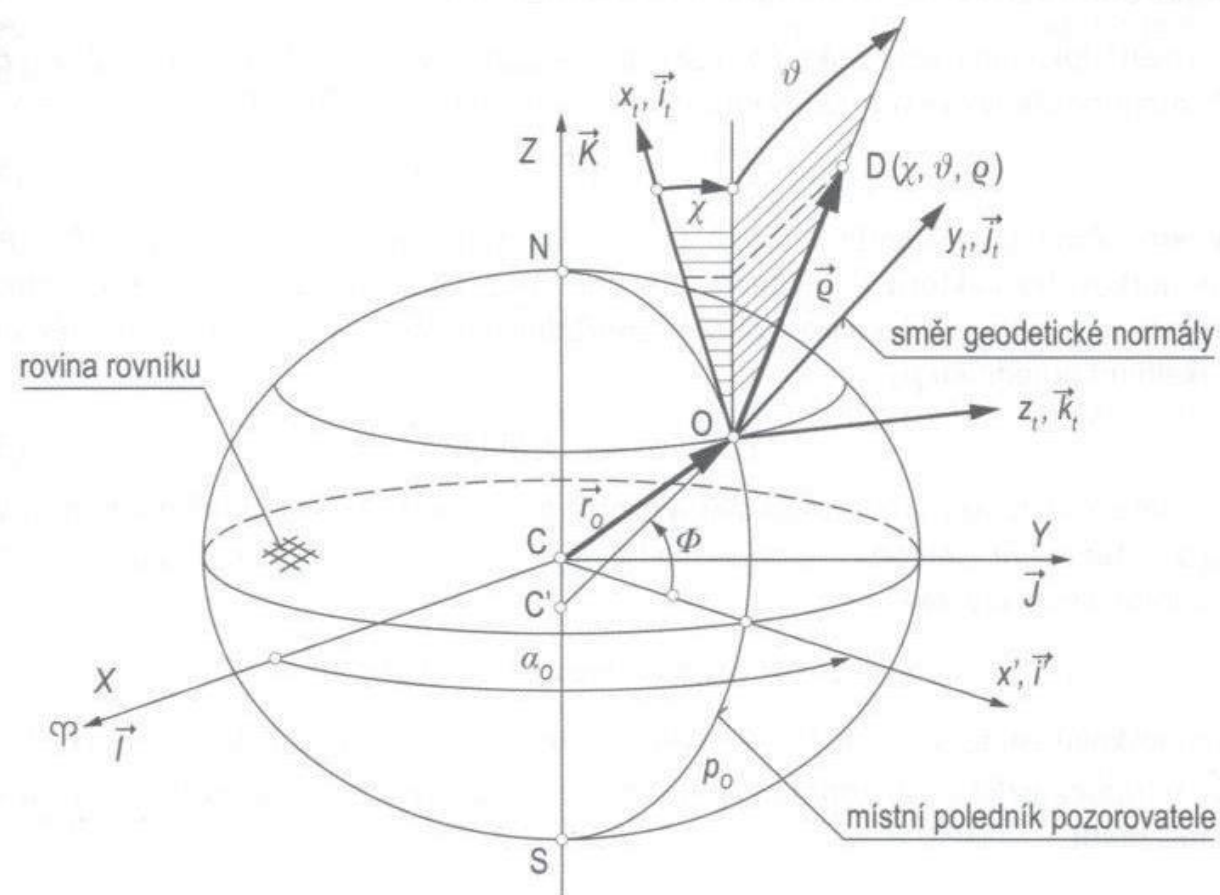
Na základě získaných výsledků je potvrzeno, že byt jsou osy obou souřadnicových soustav rovnoběžné, rektascenze a deklinace jsou v obou soustavách různé.

3.7.4 Topocentrická horizontální souřadnicová soustava

Topocentrická horizontální souřadnicová soustava (x_t, y_t, z_t) , někdy nazývána také jako topocentrická obzorníková souřadnicová soustava, je rovněž určena pro pozorování kosmických těles s povrchu Země. Počátek této souřadnicové soustavy „0“

je umístěn na povrchu buď sférické zeměkoule, nebo na povrchu zemského elipsoidu. Zde budeme realističtěji uvažovat zploštělou zeměkouli (zemský elipsoid). Počátek topocentrické horizontální souřadnicové soustavy bude na povrchu zemského elipsoidu definován polohovým vektorem \vec{r}_0 a zeměpisnými souřadnicemi: zeměpisnou délkou λ a zeměpisnou šířkou φ . Tato soustava je pevně spojena se Zemí a spolu s ní rotuje. Patří tudíž mezi neinerciální souřadnicové soustavy. Osa x_t je tečná k místnímu eliptickému poledníku p_0 , na němž leží počátek topocentrické horizontální souřadnicové soustavy. Kladný smysl osy x_t směřuje k severnímu pólu. Osa z_t je tečná k příslušné rovnoběžce s kladným smyslem na východ. Obě tyto osy definují místní tečnou rovinu (x_t, z_t) . Třetí osa v našem případě leží ve směru geodetické normály s kladným smyslem k zenitu. Spolu s předchozími osami tvoří pravouhlou pravotočivou souřadnicovou soustavu (obr. 3-42).

Poloha kosmického tělesa (družice D) je definována lokálními kartézskými souřadnicemi (x_t, y_t, z_t) nebo sférickými souřadnicemi: azimutem χ , elevačním úhlem ϑ a lokálním polohovým vektorem $\vec{\rho}$. Azimut je úhel mezi tečnou k lokálnímu poledníku (osou x_t) a průmětem vektoru $\vec{\rho}$ do horizontální roviny (x_t, z_t) . Měří se od severu a je kladný ve směru pohybu hodinových ručiček v rozsahu $(0^\circ \leq \chi \leq 360^\circ)$. Elevační úhel ϑ je úhel mezi lokálním vektorem $\vec{\rho}$ a horizontální rovinou (x_t, z_t) . Pokud polohový vektor $\vec{\rho}$ leží nad horizontální rovinou, považujeme elevační úhel za kladný a naopak. Nabývá hodnot $(-90^\circ \leq \vartheta \leq +90^\circ)$.



Obr. 3-42 Definice topocentrické horizontální souřadnicové soustavy (x_t, y_t, z_t) a sférických souřadnic (χ, ϑ, ρ) .

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Výraz pro polohový vektor $\vec{\rho}$, definující polohu kosmického tělesa v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě, lze odvodit přímo z obr. 3-42 ve tvaru

$$\vec{\rho} = \rho \cos \vartheta \cos \chi \vec{i}_t + \rho \sin \vartheta \vec{j}_t + \rho \cos \vartheta \sin \chi \vec{k}_t = \rho \vec{e}_\rho, \quad (3.278)$$

kde \vec{e}_ρ je jednotkový polohový vektor

$$\vec{e}_\rho = \cos \vartheta \cos \chi \vec{i}_t + \sin \vartheta \vec{j}_t + \cos \vartheta \sin \chi \vec{k}_t. \quad (3.279)$$

Transformace mezi topocentrickou rovníkovou, respektive geocentrickou rovníkovou a topocentrickou horizontální souřadnicovou soustavou

Na úvod je nutno opět připomenout, že směry a smysly jednotkových vektorů topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy jsou stejné jako v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě. To znamená, že relace mezi jednotkovými vektory topocentrické horizontální souřadnicové soustavy $(\vec{i}_t, \vec{j}_t, \vec{k}_t)$ a topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ budou stejné jako relace mezi jednotkovými vektory topocentrické horizontální souřadnicové soustavy $(\vec{i}_t, \vec{j}_t, \vec{k}_t)$ a geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Proto budeme v dalším používat pouze označení jednotkových vektorů $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ nejen pro geocentrickou rovníkovou, ale také pro topocentrickou rovníkovou souřadnicovou soustavu.

V rovině lokálního poledníku (p_0) zavedeme pomocný jednotkový vektor \vec{i}' pro osu x' . Tento jednotkový vektor je v souřadnicové soustavě (X, Y, Z) definován výrazem

$$\vec{i}' = \cos \alpha_0 \vec{I} + \sin \alpha_0 \vec{J}. \quad (3.280)$$

Vektor \vec{i}' má stejný směr i smysl také v souřadnicové soustavě (X', Y', Z') . Pomocí jednotkového vektoru \vec{i}' můžeme dle obr. 3-42 již přímo psát výraz pro jednotkový vektor \vec{j}_t v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě, který leží rovněž v rovině lokálního poledníku p_0

$$\vec{j}_t = \cos \Phi \vec{i}' + \sin \Phi \vec{K}. \quad (3.281)$$

Po dosazení výrazu pro jednotkový vektor \vec{i}' do rovnice (3.281) obdržíme konečný výraz pro stanovení polohy jednotkového vektoru \vec{j}_t v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě

$$\vec{j}_t = \cos \Phi \cos \alpha_0 \vec{I} + \cos \Phi \sin \alpha_0 \vec{J} + \sin \Phi \vec{K}. \quad (3.282)$$

Jednotkové vektory \vec{j}_t a \vec{K} leží v rovině místního poledníku, pak pro jednotkový vektor \vec{k}_t v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě, který je na tuto rovinu kolmý, musí platit

$$\vec{k}_t = \frac{\vec{K} \times \vec{j}_t}{|\vec{K} \times \vec{j}_t|}, \quad (3.283)$$

kde vektorový součin můžeme vyjádřit následovně

$$\vec{K} \times \vec{j}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \Phi \cos \alpha_0 & \cos \Phi \sin \alpha_0 & \sin \Phi \end{vmatrix} = -\cos \Phi \sin \alpha_0 \vec{i} + \cos \Phi \cos \alpha_0 \vec{j}.$$

Modul uvedeného součinu jednotkových vektorů je dán jednoduchým výrazem

$$|\vec{K} \times \vec{j}_t| = \cos \Phi$$

a definitivní výraz pro jednotkový vektor v souladu s rov. (3.283) obdržíme ve tvaru

$$\vec{k}_t = -\sin \alpha_0 \vec{i} + \cos \alpha_0 \vec{j}. \quad (3.284)$$

Konečně pro poslední jednotkový vektor \vec{i}_t , který je kolmý na rovinu (\vec{j}_t, \vec{k}_t) platí vektorový součin

$$\vec{i}_t = \vec{j}_t \times \vec{k}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ \cos \Phi \cos \alpha_0 & \cos \Phi \sin \alpha_0 & \sin \Phi \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Po úpravě jsme získali jednotkový vektor ve směru osy x_t ve tvaru

$$\vec{i}_t = -\sin \Phi \cos \alpha_0 \vec{i} - \sin \Phi \sin \alpha_0 \vec{j} + \cos \Phi \vec{K}. \quad (3.285)$$

Nyní již můžeme jednotlivé rov. (3.285), (3.282) a (3.284) přepsat na maticovou rovnici pro transformaci jednotkových vektorů nebo přímo souřadnic polohy kosmického tělesa z topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy do topocentrické horizontální souřadnicové soustavy (x_t, y_t, z_t) takto

$$\{q\}_{th} = [T_{th/tr}]\{q\}_{tr}, \quad (3.286)$$

kde jsme vektory označili následovně

$$\{q\}_{th} = \begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{Bmatrix}, \quad \{q\}_{tr} = \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix}, \quad (3.287)$$

a transformační matice byla pomocí zmíněných rovnic (3.285), (3.282) a (3.284) získána ve tvaru

$$[T_{th/tr}] = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \alpha_0 & -\sin \Phi \sin \alpha_0 & \cos \Phi \\ \cos \Phi \cos \alpha_0 & \cos \Phi \sin \alpha_0 & \sin \Phi \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.288)$$

Pro zpětnou transformaci použijeme inverzní matici, která je u ortogonálních soustav rovna transponované matici $[T_{th/tr}]^{-1} = [T_{th/tr}]^T = [T_{tr/th}]$. Pak pro transformaci souřadnic (x_t, y_t, z_t) z topocentrické horizontální souřadnicové soustavy do topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy (X', Y', Z') použijeme transformační rovnici ve tvaru

$$\{q\}_{tr} = [T_{tr/th}]\{q\}_{th}, \quad (3.289)$$

kde inverzní transformační matice má tvar

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$[T_{tr/th}] = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \alpha_0 & \cos \Phi \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \\ -\sin \Phi \sin \alpha_0 & \cos \Phi \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \\ \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.290)$$

Poznámka: V letecko-kosmických aplikacích je místo topocentrické horizontální souřadnicové soustavy (x_t, y_t, z_t) častěji používána normálová zemská souřadnicová soustava (x_g, y_g, z_g) . Dle mezinárodní normy ISO 1151, [40], je vůči topocentrické horizontální souřadnicové soustavě pootočena kolem osy $x_t \equiv x_g$ o 90° v kladném smyslu. Takže osa z_g leží ve směru normály s kladným smyslem do středu Země ($z_g \equiv -y_t$). Osa y_g pak směřuje tečně k místní rovnoběžce východním směrem ($y_g \equiv z_t$). V normálové zemské souřadnicové soustavě (x_g, y_g, z_g) se běžně definují polohové úhly atmosférických letadel i kosmických letadel (např. raketoplánů), [26].

Příklad 3.13

Zadání:

Vypočtete azimut χ a elevační úhel ϑ kosmického tělesa v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě, je-li dán jeho polohový vektor \vec{r} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě. Poloha počátku topocentrické horizontální souřadnicové soustavy (poloha pozorovatele) je dána rektascenzí α_0 a geodetickou šířkou Φ .

Potřebná data:

Rektascenze počátku soustavy (x_t, y_t, z_t)	$\alpha_0 = 65^\circ$,
Geodetická šířka	$\Phi = 25^\circ$,
Excentricita Země	$e_z = 0,081821$,
Poloměr Země	$r_z = 6378 \text{ [km]}$,
Polohový vektor	

$$\vec{r} = 2900\vec{I} + 5800\vec{J} + 2300\vec{K} \text{ [km]}.$$

Řešení:

a) Výpočet hodnot goniometrických funkcí pro úhly α_0 a Φ

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \sin 65^\circ = 0,906308, & \cos \alpha_0 &= \cos 65^\circ = 0,422618, \\ \sin \Phi &= \sin 25^\circ = 0,422618, & \cos \Phi &= \cos 25^\circ = 0,906308. \end{aligned}$$

b) Výpočet poloměru r_Φ

$$r_\Phi = \frac{a_z}{\sqrt{1 - e_z^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{6378}{\sqrt{1 - 0,081821^2 \cdot 0,422618^2}} = 6381,817 \text{ [km]}.$$

c) Výpočet polohového vektoru \vec{r}_0 počátku topocentrické horizontální souřadnicové soustavy v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

Pro výpočet použijeme vztah (3.277) pro stanovení polohového vektoru, který definuje počátek topocentrické horizontální souřadnicové soustavy „0“ (obr. 3-42)

$$\vec{r}_0 = r_\Phi \cos \Phi (\cos \alpha_0 \vec{I} + \sin \alpha_0 \vec{J}) + r_\Phi (1 - e_z^2) \sin \Phi \vec{K},$$

$$\vec{r}_0 = 6381,817(0,906308)(0,422618\vec{I} + 0,906308\vec{J}) \\ + 6381,817(1 - 0,081821^2)0,422618\vec{K},$$

$$\vec{r}_0 = 2444,378\vec{I} + 5241,985\vec{J} + 2679,016\vec{K}.$$

- d) Výpočet modulu polohového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

$$r = \sqrt{2900^2 + 5800^2 + 2300^2} = 6880,407 \text{ [km]}.$$

- e) Výpočet polohového vektoru kosmického tělesa \vec{q} v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

Polohový vektor \vec{q} stanovíme vektorovým rozdílem

$$\vec{q} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

$$\vec{q} = (2900\vec{I} + 5800\vec{J} + 2300\vec{K}) - (2444,378\vec{I} + 5241,985\vec{J} + 2679,016\vec{K}),$$

$$\vec{q} = 455,622\vec{I} + 558,015\vec{J} - 379,016\vec{K}.$$

Zapsáno v maticovém tvaru

$$\{q\}_{tr} = \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix}_{tr} = \begin{Bmatrix} 455,622 \\ 558,015 \\ -379,016 \end{Bmatrix}.$$

- f) Výpočet transformační matice dle rov. (3.288)

$$[T_{th/tr}] = \begin{bmatrix} -0,178606 & -0,38302 & 0,906308 \\ 0,383022 & 0,821394 & 0,422618 \\ -0,906308 & 0,422618 & 0 \end{bmatrix}.$$

- g) Transformace vektoru $\{q\}_{tr}$ z topocentrické rovníkové souřadnicové soustavy do topocentrické horizontální souřadnicové soustavy

Pro transformaci použijeme rov. (3.286)

$$\{q\}_{th} = \begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{Bmatrix}_{th} = \begin{bmatrix} -0,178606 & -0,38302 & 0,906308 \\ 0,383022 & 0,821394 & 0,422618 \\ -0,906308 & 0,422618 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 455,622 \\ 558,015 \\ -379,016 \end{Bmatrix},$$

$$\{q\}_{th} = \begin{Bmatrix} -638,614 \\ 472,685 \\ -177,107 \end{Bmatrix}.$$

- h) Výpočet modulu polohového vektoru \vec{q} v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě (jeho velikost je stejná jako v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě)

$$q = \sqrt{(-638,614)^2 + 472,685^2 + (-177,107)^2} = 814,018 \text{ [km]}.$$

- i) Výpočet jednotkového polohového vektoru \vec{e}_q v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě

$$\vec{e}_q = \frac{-638,614\vec{i}_t + 472,685\vec{j}_t - 177,107\vec{k}_t}{814,018},$$

$$\vec{e}_q = -0,784521\vec{i}_t + 0,580681\vec{j}_t - 0,21757\vec{k}_t.$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Porovnáním právě vypočteného jednotkového vektoru \vec{e}_Q s obecným výrazem pro tento jednotkový vektor dle rov. (3.279)

$$\vec{e}_Q = \cos \vartheta \cos \chi \vec{i}_t + \sin \vartheta \vec{j}_t + \cos \vartheta \sin \chi \vec{k}_t$$

stanovíme elevační úhel ϑ a azimut χ kosmického tělesa v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě (x_t, y_t, z_t) .

j) Výpočet elevačního úhlu ϑ

$$\begin{aligned}\sin \vartheta &= 0,580681, \\ \vartheta &= \arcsin 0,580681 = 35,4985 [^\circ].\end{aligned}$$

k) Výpočet azimutu χ

$$\begin{aligned}\cos \vartheta \cos \chi &= -0,784521, \\ \cos \chi &= \frac{-0,784521}{\cos \vartheta} = \frac{-0,784521}{\cos 35,4985^\circ} = -0,96363, \\ \chi &= \arccos(-0,96363), \\ \chi &= 164,5 [^\circ] \quad \text{nebo} \quad \chi = 195,5 [^\circ].\end{aligned}$$

Průzkumem znamének souřadnic složek jednotkového vektoru \vec{e}_Q ve směru os x_t a z_t můžeme stanovit, která z uvedených hodnot azimutu je správná. Obě zmíněné souřadnice jsou záporné. Tudiž kosmické těleso se nachází ve třetím kvadrantu a proto azimut jeho polohy je

$$\chi = 195,5 [^\circ].$$

Druhý způsob, jímž lze potvrdit tuto skutečnost je výpočet hodnoty $\sin \chi$ z podmínky

$$\cos \vartheta \sin \chi = -0,21757,$$

odkud stejným postupem stanovíme hodnotu

$$\sin \chi = -0,26724.$$

Protože $\sin \chi$ má zápornou hodnotu, potvrzuje to skutečnost, že $\chi = 195,5 [^\circ]$.

3.7.5 Stanovení oběžné dráhy z měření úhlů a vzdáleností

Při stanovování parametrů oběžné dráhy z pozorování je třeba uvážit skutečnost, že pozorovatel sleduje kosmický objekt z pozorovací stanice, která se nachází na povrchu zeměkoule a nikoliv ve středu Země. Místo pozorování je dáno polohovým vektorem \vec{r}_0 v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z) . Parametry pozorování jsou obvykle dány v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě (x_t, y_t, z_t) , která rotuje spolu se Zemí úhlovou rychlostí ω_Z . Poloha kosmického objektu v této souřadnicové soustavě je dána lokálním polohovým vektorem \vec{q} . Avšak poloha kosmického tělesa na oběžné dráze, jejíž rovina prochází středem Země je definována v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě polohovým vektorem \vec{r} .

Jak víme z předchozích rozborů, relace mezi lokálním polohovým vektorem sledovaného tělesa \vec{q} , polohovým vektorem místa pozorovatele \vec{r}_0 a geocentrickým polohovým vektorem sledovaného kosmického objektu \vec{r} je dána rovnicí (3.276). Jelikož

modul lokálního polohového vektor ϱ je stejný jak v soustavě (x_t, y_t, z_t) , tak v soustavě (X', Y', Z') vyjádříme polohový vektor kosmického objektu \vec{r} v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě pomocí jednotkového vektoru v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě \vec{e}'_ϱ následovně

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\varrho} = \vec{r}_0 + \varrho \vec{e}'_\varrho, \quad (3.291)$$

kde polohový vektor \vec{r}_0 s uvažováním zploštění Země je dán rovnicí (3.277), ϱ je vzdálenost mezi pozorovatelem a kosmickým objektem a jednotkový vektor \vec{e}'_ϱ je dán výrazem (3.275).

Odpovídající rychlost v inerciální souřadnicové soustavě, kterou zde představuje geocentrická rovníková souřadnicová soustava (X, Y, Z) , je dána derivací rov. (3.291). Pro vektor rychlosti platí vztah

$$\vec{V} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\varrho} \vec{e}'_\varrho + \varrho \dot{\vec{e}}'_\varrho. \quad (3.292)$$

Jelikož vektor \vec{r}_0 je spojen se Zemí, která rotuje vůči inerciální soustavě konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\Omega} = \omega_Z \vec{K}$, bude vektor rychlosti pohybu pozorovatele dán vztahem

$$\dot{\vec{r}}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_0. \quad (3.293)$$

Po dosazení do rov. (3.292), výsledný vektor rychlosti pohybu kosmického objektu v (inerciální) geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě bude dán výrazem

$$\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_0 + \dot{\varrho} \vec{e}'_\varrho + \varrho \dot{\vec{e}}'_\varrho. \quad (3.294)$$

Ve vztahu (3.294) představuje $\dot{\varrho}$ časovou změnu vzdálenosti mezi pozorovatelem a kosmickým objektem a derivaci jednotkového vektoru \vec{e}'_ϱ získáme derivací rov. (3.275)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}'_\varrho = & (-\dot{\delta}' \sin \delta' \cos \alpha' - \dot{\alpha}' \cos \delta' \sin \alpha') \vec{I} \\ & + (-\dot{\delta}' \sin \delta' \sin \alpha' + \dot{\alpha}' \cos \delta' \cos \alpha') \vec{J} + \dot{\delta}' \cos \delta' \vec{K}, \end{aligned} \quad (3.295)$$

respektive v maticovém zápisu

$$\{\dot{e}'_\varrho\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\delta}' \sin \delta' \cos \alpha' - \dot{\alpha}' \cos \delta' \sin \alpha' \\ -\dot{\delta}' \sin \delta' \sin \alpha' + \dot{\alpha}' \cos \delta' \cos \alpha' \\ \dot{\delta}' \cos \delta' \end{Bmatrix}. \quad (3.296)$$

Přepíšeme nyní jednotkový vektor \vec{e}'_ϱ dle rovnice (3.275)

$$\vec{e}'_\varrho = \cos \delta' \cos \alpha' \vec{I} + \cos \delta' \sin \alpha' \vec{J} + \sin \delta' \vec{K}$$

a jednotkový vektor \vec{e}_ϱ dle rov. (3.279)

$$\vec{e}_\varrho = \cos \vartheta \cos \chi \vec{i}_t + \sin \vartheta \vec{j}_t + \cos \vartheta \sin \chi \vec{k}_t$$

do maticové formy

$$\{e'_\varrho\} = \begin{Bmatrix} \cos \delta' \cos \alpha' \\ \cos \delta' \sin \alpha' \\ \sin \delta' \end{Bmatrix}, \quad (3.297)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$\{e_\varrho\} = \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \cos \chi \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \chi \end{Bmatrix}. \quad (3.297)$$

Jednotkový vektor dle rov. (3.297) je zapsán v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě, zatímco jednotkový vektor dle rov. (3.298) je zapsán v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě. Použitím transformační rovnice dle (3.289) mezi oběma souřadnicovými soustavami

$$\{e'_\varrho\}_{tr} = [T_{tr/th}]\{e_\varrho\}_{th}$$

nalezneme relaci mezi deklinací a rektascenzí v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě a azimutem a elevačním úhlem v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě. Po dosazení za transformační matici dle rov. (3.290) a za jednotkové vektory dle rov. (3.297) a (3.298) obdržíme konečnou transformační rovnici ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \cos \delta' \cos \alpha' \\ \cos \delta' \sin \alpha' \\ \sin \delta' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \alpha_0 & \cos \Phi \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \\ -\sin \Phi \sin \alpha_0 & \cos \Phi \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \\ \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \cos \chi \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \chi \end{Bmatrix}. \quad (3.299)$$

Roznásobením pravé strany transformační rovnice obdržíme následující mezivýsledek

$$\begin{Bmatrix} \cos \delta' \cos \alpha' \\ \cos \delta' \sin \alpha' \\ \sin \delta' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \alpha_0 \cos \vartheta \cos \chi + \cos \Phi \cos \alpha_0 \sin \vartheta - \sin \alpha_0 \cos \vartheta \sin \chi \\ -\sin \Phi \sin \alpha_0 \cos \vartheta \cos \chi + \cos \Phi \sin \alpha_0 \sin \vartheta + \cos \alpha_0 \cos \vartheta \sin \chi \\ \cos \Phi \cos \vartheta \cos \chi + \sin \Phi \sin \vartheta \end{bmatrix}$$

Dle uvedené rovnice zapíšeme výrazy pro rektascenzi α' a deklinaci δ' v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

$$\cos \alpha' = \frac{1}{\cos \delta'} (-\sin \Phi \cos \alpha_0 \cos \vartheta \cos \chi + \cos \Phi \cos \alpha_0 \sin \vartheta - \sin \alpha_0 \cos \vartheta \sin \chi) \quad (3.300)$$

$$\sin \alpha' = \frac{1}{\cos \delta'} (-\sin \Phi \sin \alpha_0 \cos \vartheta \cos \chi + \cos \Phi \sin \alpha_0 \sin \vartheta + \cos \alpha_0 \cos \vartheta \sin \chi) \quad (3.301)$$

$$\sin \delta' = \cos \Phi \cos \vartheta \cos \chi + \sin \Phi \sin \vartheta. \quad (3.302)$$

Nyní zavedeme tzv. *hodinový úhel* τ , pomocí něhož vyloučíme z výše uvedených vztahů geocentrickou rektascenzi α_0 . Jak je vidět na obr. 3-41, hodinový úhel je úhel mezi rovinou poledníku pozorovatele a průmětem lokálního polohového vektoru (ϱ) na rovinu (X', Y'). Pokud kosmický objekt leží na západ od poledníku, na němž se nachází pozorovatel, jedná se o kladný hodinový úhel. Pak hodinový úhel je v našem případě definován vztahem

$$\tau = \alpha_0 - \alpha'. \quad (3.303)$$

Pomocí goniometrických relací můžeme nyní pro hodinový úhel zapsat následující vztahy

$$\cos \tau = \cos(\alpha_0 - \alpha') = \cos \alpha_0 \cos \alpha' + \sin \alpha_0 \sin \alpha', \quad (3.304)$$

$$\sin \tau = \sin(\alpha_0 - \alpha') = \sin \alpha_0 \cos \alpha' - \cos \alpha_0 \sin \alpha'. \quad (3.305)$$

Dosadíme-li do těchto goniometrických vztahů za $\sin \alpha'$ a $\cos \alpha'$ dle rovnic (3.301) a (3.300) obdržíme pro hodinový úhel dva výrazy

$$\cos \tau = \frac{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi}{\cos \delta'}, \quad (3.306)$$

$$\sin \tau = -\frac{\cos \vartheta \sin \chi}{\cos \delta'}. \quad (3.307)$$

Pro výpočet hodinového úhlu zbývá ještě určit $\cos \delta'$. Deklinaci v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě určíme z rov. (3.302)

$$\delta' = \arcsin(\cos \Phi \cos \vartheta \cos \chi + \sin \Phi \sin \vartheta). \quad (3.308)$$

Teprve se znalostí deklinace δ' jsme schopni určit hodinový úhel τ . Pro výpočet τ zvolíme první z odvozených vztahů (3.306)

$$\tau = \arccos\left(\frac{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi}{\cos \delta'}\right). \quad (3.309)$$

Druhý vztah pro výpočet hodinového úhlu (3.307) použijeme pro identifikaci znaménka hodinového úhlu. Jelikož elevační úhel ϑ a deklinace δ' mohou nabývat hodnot maximálně $\pm 90^\circ$, pak cosinus obou úhlů je vždy kladný. Díky tomu z rov. (3.307) vyplývá, že znaménko $\sin \tau$ závisí pouze na hodnotě $\sin \chi$. Takže hodnota $\sin \tau$ bude kladná pro $\sin \chi < 0$, tj. pro azimuty v rozsahu $180^\circ \leq \chi \leq 360$, pak hodinový úhel stanovíme přímo ze vztahu (3.309). Avšak pro azimuty v rozsahu $0^\circ < \chi < 180^\circ$ je nutno pro výpočet hodinového úhlu použít výraz

$$\tau = 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi}{\cos \delta'}\right). \quad (3.310)$$

Po ověření správné hodnoty hodinového úhlu můžeme konečně stanovit rektascenzi α' v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle vztahu (3.303), který přepíšeme na tvar

$$\alpha' = \alpha_0 - \tau. \quad (3.311)$$

Protože pozorovaný kosmický objekt mění svou polohu s časem a mění se i poloha pozorovatele díky rotaci Země ω_Z , je třeba obdobně nalézt δ' a α' v závislosti na časové změně azimutu $\dot{\chi}$ a elevačního úhlu $\dot{\vartheta}$.

Časovou změnu deklinace v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě δ' získáme derivací rovnice (3.302), z níž obdržíme

$$\dot{\delta}' = \frac{1}{\cos \delta'} [\dot{\vartheta}(\sin \Phi \cos \vartheta - \cos \Phi \sin \vartheta \cos \chi) - \dot{\chi} \cos \Phi \cos \vartheta \sin \chi]. \quad (3.312)$$

Časovou změnu rektascenze v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě α' nalezneme následujícím postupem. Nejprve derivujeme rovnici (3.307), z níž stanovíme časovou změnu hodinového úhlu

$$\dot{\tau} = -\frac{(\dot{\chi} \cos \chi \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \chi) \cos \delta' + \dot{\delta}' \cos \vartheta \sin \chi \sin \delta'}{\cos \tau \cos^2 \delta'}.$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

V dalším kroku dosadíme za $\cos \tau$ dle rov. (3.306) a po úpravě získáme konečný výraz pro časovou změnu hodinového úhlu

$$\dot{\tau} = - \frac{\dot{\chi} \cos \chi \cos \vartheta + (\dot{\delta}' \cos \vartheta \operatorname{tg} \delta' - \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \chi}{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi}. \quad (3.313)$$

Derivací rov. (3.311) dle času máme k dispozici vztah pro časovou změnu rektascenze α' v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě

$$\dot{\alpha}' = \dot{\alpha}_0 - \dot{\tau}.$$

Uvážíme-li, že $\dot{\alpha}_0 = \omega_Z$, pak po dosazení do předchozího vztahu, včetně rov. (3.313), máme pro výpočet $\dot{\alpha}'$ k dispozici konečný výraz ve tvaru

$$\dot{\alpha}' = \omega_Z + \frac{\dot{\chi} \cos \chi \cos \vartheta + (\dot{\delta}' \cos \vartheta \operatorname{tg} \delta' - \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \chi}{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi}. \quad (3.314)$$

Příklad 3.14

Zadání:

Na pozorovací stanici na Zemi, jejíž poloha je dána geodetickou šířkou Φ a epochou vyjádřenou geocentrickou rektascenzí α_0 je pozorován kosmický objekt. Jsou známy následující parametry v topocentrické horizontální souřadnicové soustavě: vzdálenost, azimut a elevační úhel kosmického objektu, včetně jejich časových změn. Nalezněte dráhu kosmického objektu (elementy dráhy).

Potřebná data:

Geodetická šířka	$\Phi = 50$ [°],
Geocentrická rektascenze	$\alpha_0 = 60$ [°],
Poloměr Země	$r_Z = a_Z = 6378$ [km],
Excentricita Země	$e_Z = 0,0818215$ [1],
Úhlová rychlost rotace Země	$\omega_Z = 7,292 \cdot 10^{-5}$ [s ⁻¹],
Vzdálenost kosmického objektu	$\rho = 3200$ [km],
Časová změna vzdálenosti	$\dot{\rho} = 0$ [kms ⁻¹],
Azimut	$\chi = 30$ [°],
Časová změna azimutu	$\dot{\chi} = 1,973 \cdot 10^{-3}$ [s ⁻¹],
Elevační úhel	$\vartheta = 40$ [°],
Časová změna elevačního úhlu	$\dot{\vartheta} = 0,9864 \cdot 10^{-3}$ [s ⁻¹].

Řešení:

a) Výpočet deklinace v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.308)

$$\delta' = \arcsin(\cos \Phi \cos \vartheta \cos \chi + \sin \Phi \sin \vartheta),$$

$$\delta' = \arcsin(\cos 50^\circ \cos 40^\circ \cos 30^\circ + \sin 50^\circ \sin 40^\circ),$$

$$\delta' = 1,165126 \text{ [rad]} = 66,757 \text{ [°]}.$$

- b) Výpočet hodinového úhlu a rektascenze v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě.

Vzhledem k tomu, že úhel azimutu leží v rozsahu $0^\circ < \chi < 180^\circ$, použijeme pro výpočet hodinového úhlu rov. (3.310)

$$\tau = 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi}{\cos \delta'}\right),$$

$$\tau = 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos 50^\circ \sin 40^\circ - \sin 50^\circ \cos 40^\circ \cos 30^\circ}{\cos 66,757^\circ}\right),$$

$$\tau = 4,469197 \text{ [rad]} = 256,066 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

Rektascenze v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě bude

$$\alpha' = \alpha_0 - \tau = 60^\circ - 256,066 = -196,066 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

- c) Výpočet délky geodetické normály (poloměru) r_Φ dle rov. (3.253)

$$r_\Phi = \frac{a_z}{\sqrt{1 - e_z^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{6378}{\sqrt{1 - 0,0818215^2 \sin^2 50^\circ}} = 6390,565 \text{ [km]}.$$

- d) Výpočet polohového vektoru \vec{r}_0 v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z) dle rov. (3.277)

$$\vec{r}_0 = r_\Phi \cos \Phi (\cos \alpha_0 \vec{I} + \sin \alpha_0 \vec{J}) + r_\Phi (1 - e_z^2) \sin \Phi \vec{K},$$

$$\vec{r}_0 = 6390,565 (\cos 50^\circ) (\cos 60^\circ \vec{I} + \sin 60^\circ \vec{J}) + 6390,565 (1 - 0,0818215^2) \sin 50^\circ \vec{K},$$

$$\vec{r}_0 = 2053,888 \vec{I} + 3557,439 \vec{J} + 4862,683 \vec{K} \text{ [km]}.$$

- e) Výpočet jednotkového vektoru \vec{e}'_q lokálního polohového vektoru v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.275)

$$\vec{e}'_q = \cos \delta' \cos \alpha' \vec{I} + \cos \delta' \sin \alpha' \vec{J} + \sin \delta' \vec{K},$$

$$\vec{e}'_q = \cos 66,757^\circ \cos(-196,066^\circ) \vec{I} + \cos 66,757^\circ \sin(-196,066^\circ) \vec{J} + \sin 66,757^\circ \vec{K},$$

$$\vec{e}'_q = -0,379221 \vec{I} + 0,109214 \vec{J} + 0,91838 \vec{K}.$$

- f) Výpočet lokálního polohového vektoru $(\rho \vec{e}'_q)$ v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.274)

$$\rho \vec{e}'_q = 3200 (-0,379221 \vec{I} + 0,109214 \vec{J} + 0,91838 \vec{K}),$$

$$\rho \vec{e}'_q = -1213,508 \vec{I} + 349,484 \vec{J} + 2940,282 \vec{K}.$$

- g) Výpočet polohového vektoru kosmického objektu v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě \vec{r} dle rov. (3.291)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \rho \vec{e}'_q,$$

$$\vec{r} = (2053,888 \vec{I} + 3557,439 \vec{J} + 4862,683 \vec{K})$$

$$+ (-1213,508 \vec{I} + 349,484 \vec{J} + 2940,282 \vec{K}),$$

$$\vec{r} = 840,380 \vec{I} + 3906,923 \vec{J} + 7802,965 \vec{K} \text{ [km]}.$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

- h) Časová změna polohy pozorovací stanice v inerciální geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě \vec{r}_0 . Složky (X_0, Y_0, Z_0) vektoru \vec{r}_0 jsou již stanoveny v bodě d)

$$\vec{r}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_0 = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \end{vmatrix} = -\omega_z Y_0 \vec{I} + \omega_z X_0 \vec{J} = \omega_z (-Y_0 \vec{I} + X_0 \vec{J}),$$

$$\vec{r}_0 = 7,292 \cdot 10^{-5} (-3557,439 \vec{I} + 2053,888 \vec{J}),$$

$$\dot{\vec{r}}_0 = -0,259408 \vec{I} + 0,149770 \vec{J} \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

- i) Výpočet časové změny deklinace v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.312)

$$\dot{\delta}' = [\dot{\vartheta}(\sin \Phi \cos \vartheta - \cos \Phi \sin \vartheta \cos \chi) - \dot{\chi} \cos \Phi \cos \vartheta \sin \chi] / \cos \delta',$$

$$\dot{\delta}' = [0,9864 \cdot 10^{-3} (\sin 50^\circ \cos 40^\circ - \cos 50^\circ \sin 40^\circ \cos 30^\circ) - 1,973 \cdot 10^{-3} \cos 50^\circ \cos 40^\circ \sin 30^\circ] / \cos 66,757^\circ,$$

$$\dot{\delta}' = -0,6585 \cdot 10^{-3} \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

- j) Výpočet časové změny rektascenze $\dot{\alpha}'$ v topocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.314)

$$\dot{\alpha}' = \omega_z + \frac{\dot{\chi} \cos \chi \cos \vartheta + (\dot{\delta}' \cos \vartheta \operatorname{tg} \delta' - \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \chi}{\cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi} = \omega_z + \frac{A}{B},$$

$$A = \dot{\chi} \cos \chi \cos \vartheta + (\dot{\delta}' \cos \vartheta \operatorname{tg} \delta' - \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \chi,$$

$$A = 1,973 \cdot 10^{-3} \cos 30^\circ \cos 40^\circ + (-0,6585 \cdot 10^{-3} \cos 40^\circ \operatorname{tg} 66,757^\circ - 0,9864 \cdot 10^{-3} \sin 40^\circ) \sin 30^\circ = 0,40464 \cdot 10^{-3},$$

$$B = \cos \Phi \sin \vartheta - \sin \Phi \cos \vartheta \cos \chi,$$

$$B = \cos 50^\circ \sin 40^\circ - \sin 50^\circ \cos 40^\circ \cos 30^\circ = -95,0287 \cdot 10^{-3},$$

$$\dot{\alpha}' = \omega_z + \frac{A}{B} = 7,292 \cdot 10^{-5} + \frac{0,40464 \cdot 10^{-3}}{-95,0287 \cdot 10^{-3}} = -4,1852 \cdot 10^{-3} \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

- k) Derivace jednotkového vektoru \vec{e}'_0 dle rov. (3.295)

$$\vec{e}'_0 = (-\dot{\delta}' \sin \delta' \cos \alpha' - \dot{\alpha}' \cos \delta' \sin \alpha') \vec{I} + (-\dot{\delta}' \sin \delta' \sin \alpha' + \dot{\alpha}' \cos \delta' \cos \alpha') \vec{J} + \dot{\delta}' \cos \delta' \vec{K},$$

$$\vec{e}'_0 = [-(-0,6585 \cdot 10^{-3}) \sin 66,757^\circ \cos(-196,066^\circ) - (-4,1852 \cdot 10^{-3}) \cos 66,757^\circ \sin(-196,066^\circ)] \vec{I}$$

$$+ [-(-0,6585 \cdot 10^{-3}) \sin 66,757^\circ \sin(-196,066^\circ) + (-4,1852 \cdot 10^{-3}) \cos 66,757^\circ \cos(-196,066^\circ)] \vec{J}$$

$$+ (-0,6585 \cdot 10^{-3}) \cos 66,757^\circ \vec{K},$$

$$\vec{e}'_0 = -0,124346 \cdot 10^{-3} \vec{I} + 1,75455 \cdot 10^{-3} \vec{J} - 0,259868 \cdot 10^{-3} \vec{K}.$$

- l) Vektor rychlosti pohybu kosmického objektu v (inerciální) geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě dle rov. (3.292)

$$\vec{V} = \dot{r}_0 + \dot{\varrho} \vec{e}'_{\varrho} + \varrho \dot{e}'_{\varrho}$$

$$\vec{V} = (-0,259408\vec{i} + 0,149770\vec{j}) + 0(-0,379221\vec{i} + 0,109214\vec{j} + 0,91838\vec{k}) + 3200(-0,124346 \cdot 10^{-3}\vec{i} + 1,75455 \cdot 10^{-3}\vec{j} - 0,259868 \cdot 10^{-3}\vec{k}),$$

$$\vec{V} = -0,657317\vec{i} + 5,764338\vec{j} - 0,831576\vec{k}.$$

- m) Poslední krok spočívá ve výpočtu elementů dráhy, který provedeme dle nám již známého postupu uvedeného v příkladu 3.8. Výpočtem pro výše určený polohový vektor \vec{r} a vektor rychlosti \vec{V} obdržíme následující hodnoty elementů dráhy:

délka vzestupného uzlu	$\Omega = 275,248$ [°],
hlavní poloosa eliptické dráhy	$a = 7044,526$ [km],
excentricita eliptické dráhy	$e = 0,380930$ [1],
sklon oběžné dráhy	$i = 81,298$ [°],
argument perigea	$\omega = 29,481$ [°],
pravá anomálie kosmického objektu	$\theta = 145,267$ [°].

3.7.6 Stanovení dráhy ze dvou poloh a času. Lambertův problém

Lambertovým problémem se rozumí úloha nalezení dráhy, jsou-li dány dva body a doba přeletu mezi nimi. J. H. Lambert (1728-1777) byl německý astronom a matematik, který prokázal, že doba přeletu Δt mezi dvěma body na dráze nezávisí na její excentricitě. Závisí pouze na modulech polohových vektorů, délce hlavní poloosy a úhlové vzdálenosti mezi oběma body. Připomeňme, že také celková specifická mechanická energie kosmického tělesa a perioda je rovněž nezávislá na excentricitě. Obě uvedené veličiny v daném centrálním gravitačním poli závisí toliko na délce hlavní poloosy a , viz rov. (3.94) a (3.86).

Lambertův problém je znázorněn na obr. 3-43, kde jsou zadány dva body B_1 a B_2 hledané dráhy pomocí polohových vektorů \vec{r}_1 a \vec{r}_2 . Době letu mezi oběma body Δt odpovídá rozdíl pravých anomálií $\Delta\theta$. Tento úhel můžeme stanovit z definice skalárního součinu obou polohových vektorů, odkud platí

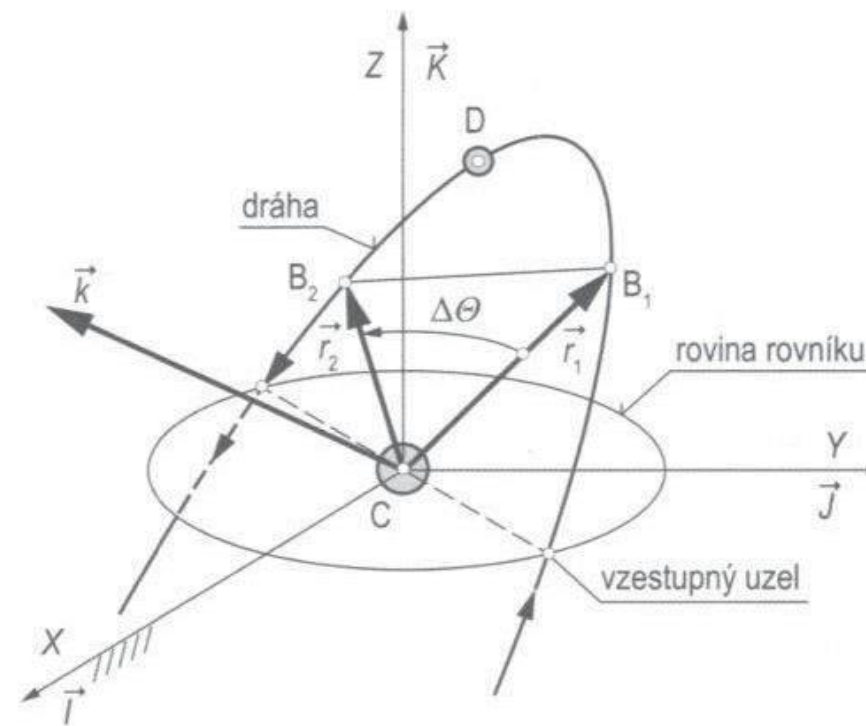
$$\cos \Delta\theta = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}. \quad (3.315)$$

Stanovení úhlu $\Delta\theta$ z uvedené rovnice je nejednoznačné, neboť jedné hodnotě $\cos \Delta\theta > 0$ (srovnej s obr. 3-14) odpovídají dvě hodnoty argumentu $\Delta\theta$. Jedna se nachází v prvním kvadrantu a druhá ve čtvrtém. A obdobně pro $\cos \Delta\theta < 0$ obdržíme dva argumenty, ve druhém a třetím kvadrantu.

Ovšem máme ještě další problém, znalost obou vektorů a úhlu mezi nimi ještě nic neříká o tom, zda hledaná dráha je prográdní ($0^\circ < i < 90^\circ$) nebo retrográdní ($90^\circ < i < 180^\circ$). Tuto otázku můžeme zodpovědět pomocí polohy jednotkového

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

vektoru \vec{k} perifokální souřadnicové soustavy. Pokud tento vektor leží nad rovinou rovníku, jedná se o prográdní dráhu, jak je právě naznačeno na obr. 3-43, a naopak, pokud směřuje pod rovinu rovníku, jedná se o retrográdní dráhu.



Obr. 3-43 Dráha je dána dvěma body a rozdílem jejich pravých anomálií. Lambertův problém.

Matematicky to můžeme posuzovat dle znaménka složky vektoru $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_Z$ ve směru vertikální osy Z

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_Z = \vec{K} \cdot [r_1 r_2 \sin(\Delta\theta) \vec{k}] = r_1 r_2 \sin(\Delta\theta) (\vec{K} \cdot \vec{k}),$$

kde skalární součin vektorů $(\vec{K} \cdot \vec{k}) = \cos i$. Tím máme vertikální složku vektoru $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_Z$ vyjádřenu v závislosti jak na úhlu $\Delta\theta$, tak na sklonu dráhy i ve tvaru

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_Z = r_1 r_2 \sin(\Delta\theta) \cos i. \quad (3.316)$$

Z výše uvedeného je známo, že pro přímé (prográdní) dráhy platí $\cos i > 0$ a pro nepřímé (retrográdní) dráhy platí $\cos i < 0$.

Rozeberme nejprve *případ prográdních drah*. Z rovnice (3.316) pro tento případ ($\cos i > 0$) vyplývá, že:

- a) Pro $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_Z \geq 0$ je $\sin(\Delta\theta) > 0$, což je splněno když $(0^\circ < \Delta\theta < 180^\circ)$, pak je dle rov. (3.315) platný výsledek pro první kvadrant

$$\Delta\theta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}\right). \quad (3.317)$$

- b) Pro $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_Z < 0$ je $\sin(\Delta\theta) < 0$, což je splněno když $(180^\circ < \Delta\theta < 360^\circ)$, pak je dle v souladu s rov. (3.315) platný výsledek pro čtvrtý kvadrant, který stanovíme dle vztahu

$$\Delta\theta = 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}\right). \quad (3.318)$$

Případ retrográdních drah. Postup je zcela analogický, dle rov. (3.316) pro tento případ ($\cos i < 0$) vyplývá, že:

- a) Pro $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_z \geq 0$ je $\sin(\Delta\theta) < 0$, což je splněno když ($180^\circ < \Delta\theta < 360^\circ$), pak je dle rov. (3.315) platný výsledek pro čtvrtý kvadrant

$$\Delta\theta = 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}\right). \quad (3.319)$$

- b) Pro $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_z < 0$ je $\sin(\Delta\theta) > 0$, což je splněno když ($0^\circ < \Delta\theta < 180^\circ$), pak je dle v souladu s rov. (3.315) platný výsledek pro třetí kvadrant, který stanovíme dle vztahu

$$\Delta\theta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}\right). \quad (3.320)$$

Vraťme se k rovnicím (3.154) a (3.155) odvozeným v podkapitole 3.5.3

$$\vec{r}_2 = f\vec{r}_1 + g\vec{V}_1,$$

$$\vec{V}_2 = \dot{f}\vec{r}_1 + \dot{g}\vec{V}_1.$$

Z uvedených rovnic vyplývá, že pro řešení Lambertova problému stačí nalézt vektor rychlosti \vec{V}_1 v bodě B_1 . Ten nalezneme z první rovnice

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{g}(\vec{r}_2 - f\vec{r}_1), \quad (3.321)$$

který dosadíme do druhé rovnice, odkud získáváme výraz

$$\vec{V}_2 = \dot{f}\vec{r}_1 + \frac{\dot{g}}{g}(\vec{r}_2 - f\vec{r}_1) = \frac{\dot{g}}{g}\vec{r}_2 - \frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{g}\vec{r}_1.$$

Čitatel v posledním zlomku uvedené rovnice je v souladu s rovnicí (3.174) roven jedné ($f\dot{g} - \dot{f}g = 1$). Pak vektor rychlosti v bodě B_2 je dán vztahem

$$\vec{V}_2 = \frac{1}{g}(\dot{g}\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (3.322)$$

Pro další řešení Lambertova problému budeme používat univerzální proměnné. Zde se přidržíme metody řešení uváděné v literatuře [11], [15], kde jsou zavedeny následující univerzální proměnné χ [$km^{1/2}$] a $\alpha = 1/a$ [km^{-1}]. Pro další řešení si upravíme dříve odvozené výrazy pro Lagrangeovy koeficienty, rov. (3.167), (3.172), (3.176) a (3.173). Z uvedených rovnic vyloučíme parametr pomocí vztahu $p = h^2/\mu$ a zavedeme místo něj specifický moment hybnosti. Lagrangeovy koeficienty pak budeme používat ve tvaru

$$f = 1 - \frac{\mu}{h^2} r_2 (1 - \cos \Delta\theta), \quad (3.323)$$

$$g = \frac{r_1 r_2}{h} \sin \Delta\theta, \quad (3.324)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$\dot{f} = \frac{\mu}{h} \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\sin \Delta\theta} \left[\frac{\mu}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right], \quad (3.325)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\mu}{h^2} r_1 (1 - \cos \Delta\theta). \quad (3.326)$$

Využitím univerzálních proměnných lze Lagrangeovy koeficienty zapsat ve tvaru

$$f = 1 - \frac{\chi^2}{r_1} C(z), \quad (3.327)$$

$$g = \Delta t - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \chi^3 S(z), \quad (3.328)$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \chi [z S(z) - 1], \quad (3.329)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\chi^2}{r_2} C(z). \quad (3.330)$$

V těchto rovnicích byla pro zkrácení zápisu zavedena bezrozměrová proměnná

$$z = \alpha \chi^2. \quad (3.331)$$

V uvedených výrazech pro Lagrangeovy koeficienty jsou veličiny $\Delta\theta$, Δt , r_1 a r_2 zadány, neznámými veličinami jsou χ , h a z . Funkce $C(z)$ a $S(z)$ jsou tzv. Stumpffovy funkce, které jsou definovány pomocí následujících nekonečných řad

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{z}{24} + \frac{z^2}{720} - \frac{z^3}{40320} + \dots \quad (3.332)$$

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+3)!} = \frac{1}{6} - \frac{z}{120} + \frac{z^2}{5040} - \frac{z^3}{362880} + \dots \quad (3.333)$$

Relaci mezi $\Delta\theta$ a Δt nalezneme z rovnosti výrazů pro koeficienty g

$$\frac{r_2 r_1}{h} \sin \Delta\theta = \Delta t - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \chi^3 S(z). \quad (3.334)$$

Specifický moment hybnosti h určíme buď z rovnosti součinitelů f nebo \dot{f} . Z rovnosti rovnic (3.323) a (3.327) obdržíme

$$h = \sqrt{\frac{\mu r_1 r_2 (1 - \cos \Delta\theta)}{\chi^2 C(z)}}. \quad (3.335)$$

Dosazením uvedeného vztahu pro h do rov. (3.334) a úpravě obdržíme

$$\sqrt{\mu} \Delta t = \chi^3 S(z) + \chi \sqrt{C(z)} \left(\sin \Delta\theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta\theta}} \right). \quad (3.336)$$

Pro zkrácení zápisu označíme výraz v kulaté závorce rov. (3.336) symbolem A

$$A = \sin \Delta\theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta\theta}}. \quad (3.337)$$

Pak rov. (3.336) zapíšeme v jednodušší formě takto

$$\sqrt{\mu}\Delta t = \chi^3 S(z) + A\chi\sqrt{C(z)}. \quad (3.338)$$

Protože $z = \alpha\chi^2 = \chi^2/a$ je vlastně funkcí dvou proměnných, z nichž a představuje hlavní poloosu neznámé dráhy, která je předmětem hledání, je třeba nalézt přímou vazbu mezi bezrozměrovou proměnnou z a univerzální proměnnou χ , která nezahrnuje hlavní poloosu a . Za tímto účelem použijeme rovnost výrazů pro součinitele f dle rov. (3.325) a (3.329)

$$\frac{\mu(1 - \cos \Delta\theta)}{h \sin \Delta\theta} \left[\frac{\mu}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \chi [zS(z) - 1]. \quad (3.339)$$

Opět za specifický moment hybnosti dosadíme dle rov. (3.335) a celou rovnici přenásobíme výrazem $(r_1 r_2)$. Postupnou úpravou obdržíme mezivýsledek

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 - \cos \Delta\theta}}{\sqrt{r_1 r_2} \sin \Delta\theta} \sqrt{C(z)} [\chi^2 C(z) - r_1 - r_2] &= zS(z) - 1, \\ \frac{\sqrt{C(z)}}{A} [\chi^2 C(z) - r_1 - r_2] &= zS(z) - 1, \\ \chi^2 C(z) &= r_1 + r_2 + A \frac{zS(z) - 1}{\sqrt{C(z)}}. \end{aligned} \quad (3.340)$$

Nyní jsme na pravé straně rovnice obdrželi funkci, která je již závislá pouze na jedné proměnné z . Označíme-li ji jako samostatnou funkci

$$y(z) = r_1 + r_2 + A \frac{zS(z) - 1}{\sqrt{C(z)}}, \quad (3.341)$$

pak rovnici (3.340) můžeme zapsat ve velmi jednoduchém tvaru

$$\chi = \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}}. \quad (3.342)$$

Nyní můžeme získanou relaci (3.342) mezi bezrozměrovou proměnnou z a univerzální proměnnou χ dosadit do rov. (3.338). Po dosazení obdržíme

$$\sqrt{\mu}\Delta t = \left[\frac{y(z)}{C(z)} \right]^{\frac{3}{2}} S(z) + A\sqrt{C(z)}. \quad (3.343)$$

Řešení uvedené rovnice pro neznámou z je možné pouze iteračním postupem. Použijeme Newton-Raphsonovou metodu, [56], pro niž si rovnici přeformulujeme na funkci

$$F(z) = \left[\frac{y(z)}{C(z)} \right]^{\frac{3}{2}} S(z) + A\sqrt{C(z)} - \sqrt{\mu}\Delta t. \quad (3.344)$$

Derivaci uvedené funkce obdržíme ve tvaru

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\sqrt{y(z)C(z)^5}} \left\{ [2C(z)S'(z) - 3C'(z)S(z)]y(z)^2 \right. \\ &\left. + [AC(z)^{\frac{5}{2}} + 3C(z)S(z)y(z)]y'(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.345)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

kde funkce $C'(z)$ a $S'(z)$ jsou derivace Stumffových funkcí, které jsou dány rovnicemi (3.332), (3.333) a funkce $y'(z)$ je získána derivací rov. (3.341) ve tvaru

$$y'(z) = \frac{A}{2C(z)^{3/2}} \{ [1 - zS(z)]C'(z) + 2[S(z) + zS'(z)]C(z) \},$$

což lze upravit na jednoduchý tvar

$$y'(z) = \frac{A}{4} \sqrt{C(z)}. \quad (3.346)$$

Dosazením do rov. (3.345) a dalšími postupy uvedenými ve výše zmíněné literatuře autoři dospěli k následujícímu vyjádření výrazu pro derivaci $F'(z)$ pro případ $z \neq 0$

$$F'(z) = \left[\frac{y(z)}{C(z)} \right]^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{2z} \left[C(z) - \frac{3S(z)}{2C(z)} \right] + \frac{3S(z)^2}{4C(z)} \right\} + \frac{A}{8} \left[3 \frac{S(z)}{C(z)} \sqrt{y(z)} + A \sqrt{\frac{C(z)}{y(z)}} \right] \quad (3.347)$$

a pro případ $z = 0$ je třeba použít výraz

$$F'(z) = \frac{\sqrt{2}}{40} y(0)^{\frac{3}{2}} + \frac{A}{8} \left[\sqrt{y(0)} + A \sqrt{\frac{1}{2y(0)}} \right]. \quad (3.348)$$

Takto získané funkce jsou pak použity pro iteraci Newton-Raphsonovou metodou [56] dle rekurentního vztahu

$$z_{i+1} = z_i + \frac{F(z_i)}{F'(z_i)}. \quad (3.349)$$

Nyní je třeba vhodně zvolit počáteční hodnotu z_0 . Jelikož dopředu neznáme typ oběžné dráhy, můžeme jednoduše začít od nulové hodnoty $z_0 = 0$ nebo si vypomoci vykreslením funkce $F(z)$ a na základě grafu zvolit počáteční hodnotu v místě kde funkce $F(z)$ mění znaménko.

Dosazením rovnic (3.342) a (3.343) do výrazů (3.327) až (3.330) získáme výsledné vztahy pro Lagrangeovy koeficienty

$$f = 1 - \frac{\left(\sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}} \right)^2}{r_1} C(z) = 1 - \frac{y(z)}{r_1}, \quad (3.350)$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\left(\frac{y(z)}{C(z)} \right)^{\frac{3}{2}} S(z) + A \sqrt{y(z)} \right] - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{y(z)}{C(z)} \right)^{\frac{3}{2}} S(z) = A \sqrt{\frac{y(z)}{\mu}}, \quad (3.351)$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_2 r_1} \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}} [zS(z) - 1], \quad (3.352)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\left(\sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}}\right)^2}{r_2} C(z) = 1 - \frac{y(z)}{r_2}. \quad (3.353)$$

Jakmile na základě iteračního procesu získáme hodnotu proměnné z s vyhovující přesností můžeme ji dosadit do rov. (3.341) a stanovit hodnotu y . V dalším kroku vypočteme hodnoty Lagrangeových koeficientů dle rov. (3.350) až (3.353).

Nyní můžeme na základě známých hodnot Lagrangeových koeficientů přistoupit k výpočtu vektorů rychlosti \vec{V}_1 a \vec{V}_2 dle dříve uvedených rov. (3.321) a (3.322). Konečně můžeme použitím vektorů \vec{r}_1 a \vec{V}_1 nebo \vec{r}_2 a \vec{V}_2 určit elementy dráhy nám již známým postupem uvedeným v kap. 3.6 (příklad 3.8).

3.8 Vliv nesféřičnosti Země na oběžnou dráhu

Doposud jsme probírali pohyb kosmických těles v homogenním centrálním gravitačním poli bez uvažování jakýchkoliv vnějších rušivých vlivů. Skutečnost je však poněkud jiná a výsledky uvedených ideálních řešení je třeba víceméně korigovat dle aktuálních podmínek. Problematika pohybu kosmického tělesa na oběžné dráze s uvážením všech doposud známých rušivých vlivů je však úloha značně obtížná. Výklad těchto vlivů by si vyžadoval samostatnou monografii. Proto čtenáře odkazujeme na speciální literaturu, např. [17], [20]. Zde si uvedeme jen vliv nesféřičnosti Země na pohyb kosmického objektu na oběžné dráze Země.

Jak již bylo uvedeno v kap. 3.7.2, Země má tvar rotačního elipsoidu. Gravitační síla v tomto případě nepůsobí na obíhající objekt ve směru geocentrické normály, nýbrž působí ve směru lokální geodetické normály, která nesměřuje do středu centrálního tělesa. Z toho vyplývá, že tato síla nezávisí jen na vzdálenosti od středu přitažlivosti, ale závisí ještě na zeměpisné šířce. Tento vliv je standardně vyjadřován pomocí bezrozměrových parametrů, které nazýváme zonálními harmonickými koeficienty. Speciálně vliv zploštění Země je vyjádřen tzv. druhým zonálním harmonickým koeficientem označeným symbolem J_2 . Pro každé centrální těleso (planetu) má jinou, avšak konstantní hodnotu. Pro Zemi byla stanovena hodnota druhého harmonického zonálního koeficientu $J_2 = 1,08263 \cdot 10^{-3}$ [1].

Výsledné zrychlení, které platí pro keplerovské dráhy je nyní nutno doplnit o další člen \vec{p} , který vyjadřuje poruchové zrychlení. V tomto duchu upravíme rov. (3.88) na tvar

$$\vec{r} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{p}. \quad (3.354)$$

Složky poruchového zrychlení vyvolané nesféřičností Země závisí na parametrech dráhy a zmíněném druhém harmonickém zonálním koeficientu J_2 . Složky vektoru poruchového zrychlení byly odvozeny např. v lit. [55]. Moduly těchto složek ve směrech radiálním, transverzálním a ve směru normály k oběžné dráhy jsou dány výrazy

$$p_r = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^2} J_2 \left(\frac{r_Z}{r}\right)^2 [1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \Theta)], \quad (3.355)$$

$$p_{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^2} J_2 \left(\frac{r_Z}{r}\right)^2 \sin^2 i \sin[2(\omega + \theta)], \quad (3.356)$$

$$p_n = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^2} J_2 \left(\frac{r_Z}{r}\right)^2 \sin 2i \sin(\omega + \theta). \quad (3.357)$$

Vliv nesféřičnosti Země se sice projeví změnami všech parametrů oběžné dráhy, mezi hlavní důsledky patří stáčení uzlové přímky a změna argumentu perigea oběžné dráhy.

3.8.1 Stáčení (regrese) uzlových bodů oběžné dráhy

Kromě vlivů na různé parametry oběžných drah, je v uvedeném zdroji [55] odvozen výše uvedeného normálového zrychlení p_n na časovou změnu délky vzestupného uzlu ve tvaru

$$\dot{\Omega} = \frac{h}{\mu (1 + e \cos \theta) \sin i} p_n. \quad (3.358)$$

Další složky poruchového zrychlení se na tomto parametru oběžné dráhy neprojeví. Pokud budeme uvažovat průměrnou časovou změnu délky vzestupného uzlu za jednu celou periodu lze po úpravách dospět ke konečnému výrazu pro průměrné pootáčení uzlové přímky ve tvaru

$$\dot{\Omega} = -\left[\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 r_Z^2}{(1 - e^2)^2 a^{7/2}} \right] \cos i. \quad (3.359)$$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že pro přímé (prográdní) oběžné dráhy ($0 \leq i < 90^\circ$) obdržíme zápornou hodnotu $\dot{\Omega} < 0$. To znamená, že v tomto případě se uzlová přímka stále pootáčí západním směrem. U nepřímých (retrográdních) oběžných drah je tomu naopak. A v případě polární oběžné dráhy se sklonem $i = 90^\circ$ se poloha uzlové přímky nemění.

3.8.2 Změna argumentu perigea oběžné dráhy

Na rozdíl od vlivu poruchového zrychlení v důsledku nesféřičnosti Země na stáčení uzlových bodů je časová změna argumentu perigea oběžné dráhy závislá na všech složkách poruchového zrychlení dle vztahu

$$\dot{\omega} = -\frac{r \cos \theta}{eh} p_r + \frac{(2 + e \cos \theta) \sin \theta}{eh} p_{\theta} - \frac{r \sin(\omega + \theta)}{h \operatorname{tg} i} p_n. \quad (3.360)$$

Obdobně jako v předchozím případě může být rov. (3.360) upravena na konečný tvar vyjadřující časovou změnu argumentu perigea oběžné dráhy na tvar

$$\dot{\omega} = -\left[\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 r_Z^2}{(1 - e^2)^2 a^{7/2}} \right] \left(\frac{5}{2} \sin^2 i - 2 \right). \quad (3.361)$$

Můžeme si povšimnout jedné zajímavé situace, která vyplývá z rov. (3.361). Existují dvě kritické hodnoty sklonu oběžné dráhy, pro něž je časová změna argumentu perigea nulová. Tyto hodnoty lze nalézt z podmínky, kdy hodnota výrazu v kulatých závorkách nabývá nulové hodnoty. To nastává pro $i = 63,43^\circ$ a $i = 116,57^\circ$. Při těchto hodnotách sklonu oběžné dráhy nedochází ke změně argumentu perigea. Dochází však ke změně smyslu pohybu perigea. V rozsahu sklonů $0^\circ \leq i < 63,43^\circ$ a $116,57^\circ < i \leq 180^\circ$ dochází ke změně smyslu pohybu perigea.

180° je $\dot{\omega} > 0$. Perigeum se pohybuje ve směru oběhu kosmického tělesa. Naopak v rozsahu sklonů mezi těmito kritickými hodnotami $63,43^\circ < i \leq 116,57^\circ$ je $\dot{\omega} < 0$. Perigeum se pohybuje proti směru pohybu kosmického objektu.

3.9 Speciální typy oběžných drah

Významné místo mezi různými typy oběžných drah zaujímají synchronní a stacionární dráhy umělých družic. Synchronní oběžné dráhy jsou ty, u nichž je siderická doba oběhu stejná, jako je doba rotace nebeského tělesa, kolem něhož obíhá nebo je v poměru celých čísel. V tomto případě kosmický objekt v pravidelných intervalech přelétá nad stejnými místy na povrchu nebeského tělesa. Zatímco stacionární oběžné dráhy jsou ty, které leží v rovině rovníku nebeského tělesa, a jejich siderická oběžná doba se rovná době rotace nebeského tělesa, kolem něhož obíhá. V tomto případě se pak kosmický objekt stále nachází nad jedním místem na rovníku. Ze synchronních drah uvedeme heliosynchronní a geosynchronní oběžnou dráhu. Jako zástupce stacionárních drah probereme geostacionární oběžnou dráhu Země. Přehled ještě doplníme o speciální oběžnou dráhu typu Molnija, [17].

3.9.1 Heliosynchronní oběžná dráha Země

Přehled speciálních oběžných drah začneme heliosynchronní oběžnou dráhou Země, neboť její princip bezprostředně navazuje na skutečnosti uvedené v předchozí části pojednávající o poruchách v důsledku zploštění Země. Jestliže na tyto poruchy oběžných drah běžně nahlížíme jako na nežádoucí a komplikující, u heliosynchronních oběžných drah jich naopak smysluplně využíváme.

Heliosynchronní oběžná dráha kosmického objektu kolem Země je typická tím, že časová změna (rychlost regrese) polohy uzlové přímky $\dot{\Omega}$ se rovná střední úhlové rychlosti pohybu Země (obecně planety) kolem Slunce. Země obíhá téměř po kruhové dráze s periodou 365,25 (středních) slunečních dní. Úhlová rychlost rotace Země kolem Slunce je dána poměrem

$$\frac{360^\circ}{365,25 \text{ dní}} = 0,9856 \text{ [}^\circ/\text{den]}.$$

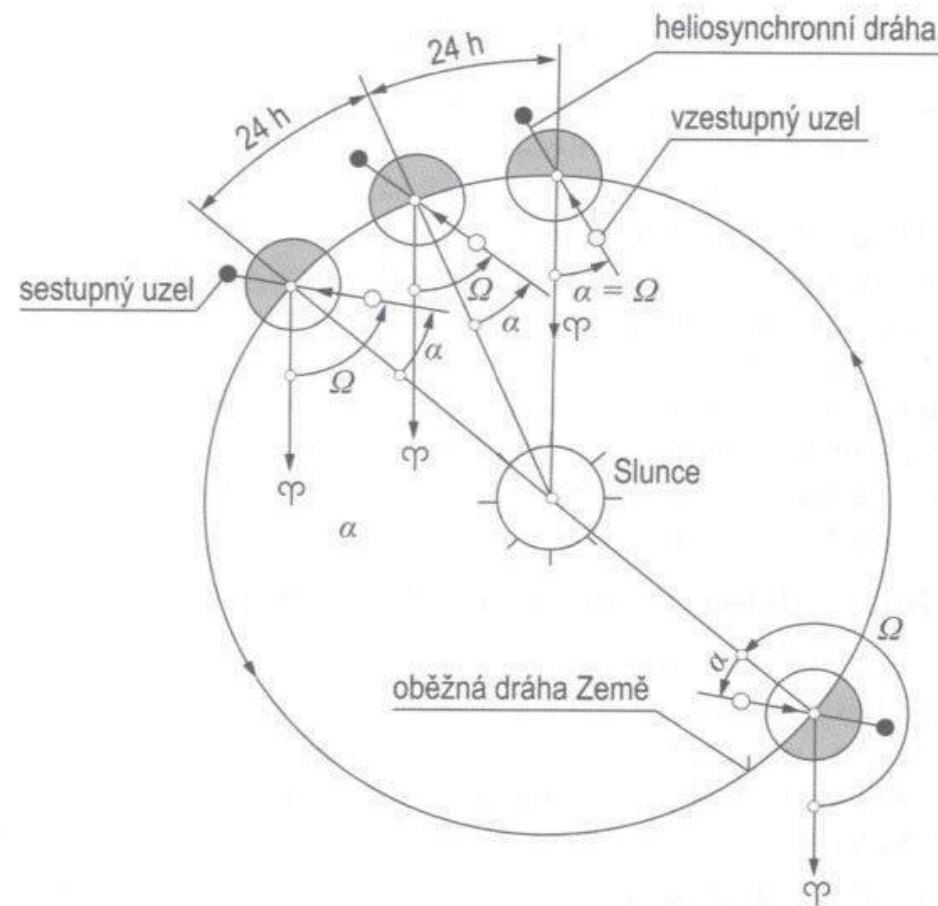
Touto úhlovou rychlostí se musí zároveň pootáčet uzlová přímka ve směru rotace Země kolem Slunce. Pak pomocí rov. (3.359) zapíšeme tuto podmínku ve tvaru

$$\dot{\Omega} = -2,06464 \cdot 10^{14} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2 a^{7/2}} = 0,9856 \text{ [}^\circ/\text{den]}. \quad (3.362)$$

Konstanta má rozměr $[\text{km}^{7/2}/\text{den}]$. Proto je třeba délku velké poloosy a dosazovat v $[\text{km}]$. Vhodnou volbou sklonu oběžné dráhy i , excentricity e a délky hlavní poloosy a můžeme uvedenou podmínku splnit. Z rov. (3.362) jasně vyplývá, že hodnota $\cos i$ musí být záporná, což je splněno pro sklony oběžných drah $i > 90^\circ$. Z tohoto poznatku vyplývá, že heliosynchronní oběžné dráhy Země jsou dráhy nepřímé (retrográdní). Popsaný mechanismus synchronní rotace uzlové přímky oběžné dráhy během jednoho siderického dne (23 h 56 m 4 s) při pohybu Země kolem Slunce je znázorněn na obr. 3-44. Z obrázku vyplývá, že kosmický objekt v tomto případě přelétává danou oblast

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

planety za stejných podmínek osvětlení povrchu planety Sluncem. Úhel α mezi spojnicí středů Slunce-Země a uzlovou přímkou vzestupného a sestupného uzlu oběžné dráhy zůstává konstantní.



Obr. 3-44 Heliosynchronní oběžná dráha Země.

V době psaní této učebnice byla vypuštěna umělá družice Země VZLUSAT-1. Je to první česká nanodružice typu CubeSat. Byla vypuštěna na heliosynchronní oběžnou dráhu Země pomocí indické nosné rakety PSLV-C38. Realizační tým poskytl autorovi základní informace pro edukační účely, které jsou použity v následujícím příkladu 3.15.

Příklad 3.15

Zadání:

Stanovte periodu a sklon oběžné dráhy české nanodružice Země VZLUSAT-1 vypuštěné na heliosynchronní kruhovou oběžnou dráhu v zadané výšce.

Potřebná data:

Výška oběžné dráhy

$$h = 510 \text{ [km]},$$

Gravitační parametr Země

$$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]},$$

Excentricita

$$e \doteq 0,$$

Úhlová rychlost pootáčení uzlové přímky

$$\dot{\Omega} = 0,9856 \text{ [}^\circ\text{/den]}.$$

Řešení:

- a) Výpočet oběžné doby dle rov. (3.86), kam místo délky hlavní poloosy dosadíme poloměr kruhové oběžné dráhy ($a = r_z + h$)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6378 + 510)^3}{398600}} = 5689,2 \text{ [s]} = 1,580 \text{ [h]} = 1 \text{ h } 34 \text{ m } 49 \text{ s.}$$

- b) Výpočet sklonu oběžné dráhy z podmínky definované rov. (3.362)

$$\dot{\Omega} = -2,06464 \cdot 10^{14} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2 a^{7/2}},$$

odkud získáme výraz pro

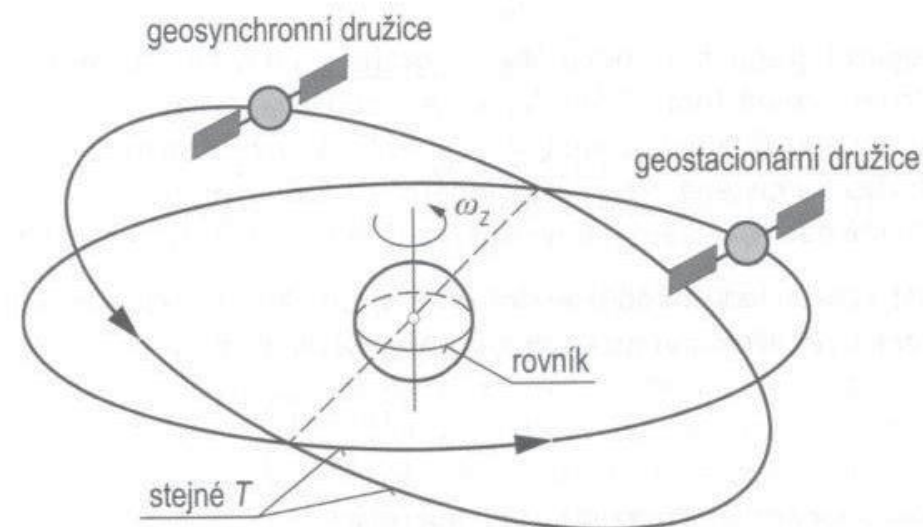
$$\cos i = \frac{\dot{\Omega} (1 - e^2)^2 a^{7/2}}{-2,06464 \cdot 10^{14}} = \frac{0,9856(6378 + 510)^{3,5}}{-2,06464 \cdot 10^{14}} = -0,12947 \text{ [1]},$$

$$i = \arccos(-0,12947) = 97,4 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

Na tomto jednoduchém příkladu je potvrzeno, že heliosynchronní družice Země se pohybují po retrográdních oběžných dráhách se sklonem $i > 90^\circ$.

3.9.2 Geosynchronní oběžná dráha

Geosynchronní oběžnou dráhu, např. Země, můžeme definovat obdobně, jak již bylo uvedeno výše v obecné definici synchronní dráhy. V tomto případě je nebeské těleso nahrazeno planetou Země. Takže geosynchronní oběžná dráha je dráha kosmického objektu obíhajícího Zemi, u kterého je siderická doba oběhu stejná, jako je doba rotace Země, nebo je v poměru celých čísel.



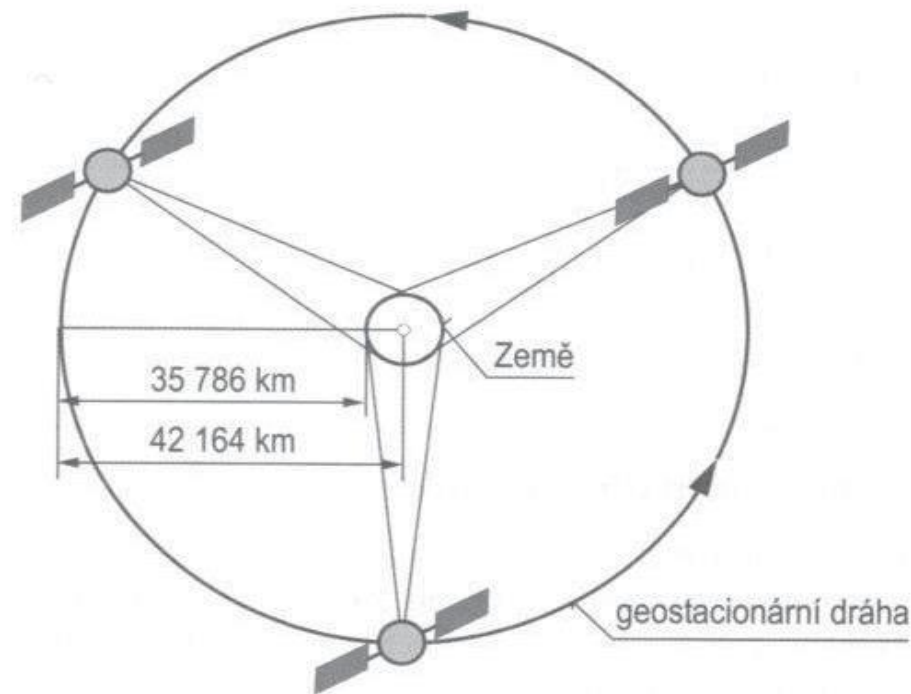
Obr. 3-45 Porovnání geosynchronní a geostacionární umělé družice Země.

Kosmický objekt v pravidelných intervalech přelétá nad stejnými místy na povrchu Země (neuvažujeme rušivé vlivy). Sklon oběžné dráhy je nenulový, avšak relativně malý. Pokud je sklon oběžné dráhy nulový, pak se již jedná o geostacionární oběžnou dráhu. Takže geostacionární oběžná dráha je vlastně speciálním případem geosynchronní

oběžné dráhy s nulovým sklonem. Popis geostacionární oběžné dráhy následuje. Porovnání obou zmíněných oběžných drah je znázorněno na obr. 3-45.

3.9.3 Geostacionární oběžná dráha

Mezi často využívané speciální typy oběžných drah patří geostacionární oběžná dráha. Jak již bylo řečeno, ve své podstatě se vlastně jedná o speciální případ geosynchronní oběžné dráhy Země. Na těchto drahách se nejčastěji pohybují telekomunikační nebo meteorologické umělé družice Země.



Obr. 3-46 Geostacionární umělé družice Země.

Geostacionární dráha je kruhová oběžná dráha s nulovým sklonem ve specifické výšce nad povrchem Země (obr. 3-46). Výška je odvozena z podmínky, aby úhlová rychlost pohybu umělé družice byla stejná, jako je úhlová rychlost rotace Země kolem své osy. Umělé družice umístěná na geostacionární oběžnou dráhu se pak nachází stále na stejném místě nad rovníkem (neuvažujeme-li žádné vnější rušivé vlivy).

Vzdálenost geostacionární oběžné dráhy od středu Země určíme z III. Keplerova zákona (3.86), který s využitím rovnosti $a = r_{GEO}$ přepíšeme na tvar

$$r_{GEO} = \left(\frac{T_{GEO} \sqrt{\mu}}{2\pi} \right)^{2/3} \quad (3.363)$$

Výška geostacionární oběžné dráhy je dána relací

$$h_{GEO} = r_{GEO} - r_Z.$$

Perioda geostacionární umělé družice musí být rovna jednomu siderickému dni (vůči stálícím) $T_{GEO} = 23 \text{ h } 56 \text{ m } 4 \text{ s} = 86164 \text{ s}$. Z toho dle rov. (3.363) vyplývá vzdálenost

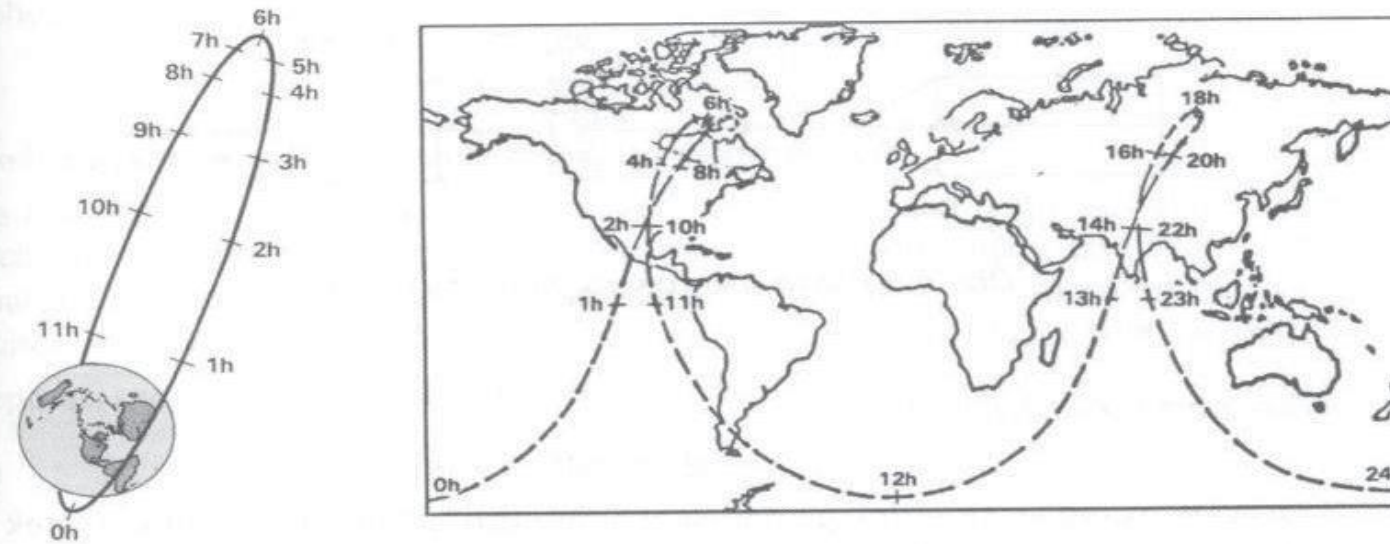
$$r_{GEO} = \left(\frac{86164 \sqrt{398600}}{2\pi} \right)^{2/3} = 42164 \text{ [km]}.$$

Výška geostacionární oběžné dráhy

$$h_{GEO} = r_{GEO} - r_Z = 42164 - 6378 = 35786 \text{ [km]}.$$

3.9.4 Oběžná dráha typu Molnija

V podkapitole 3.8.2 jsme dospěli k poznatku, že existují dvě kritické hodnoty sklonu oběžné dráhy $i = 63,43^\circ$ a $i = 116,57^\circ$, při nichž nedochází ke stáčení perigea oběžné dráhy v důsledku nesféricnosti Země. Této skutečnosti využívají oběžné dráhy typu Molnija, jejichž typové označení pochází od ruských telekomunikačních družic stejného jména. Ruské telekomunikační družice Molnija jsou vypouštěny na velmi protáhlou prográdní eliptickou oběžnou dráhu se sklonem $i = 63,43^\circ$ s periodou 12 hodin nad severní polosférou Země z kosmodromu Plesetsk ($\varphi = 62,8^\circ$). Tyto oběžné dráhy byly zvoleny proto, že poloha uvedeného kosmodromu není vhodná pro vypouštění družic na geostacionární oběžné dráhy. Přechod na geostacionární dráhu by totiž vyžadoval energeticky náročnou změnu roviny oběžné dráhy ($i = 0$). Navíc, z geostacionární dráhy nejsou dosažitelné oblasti nacházející se v severních částech Ruska.



Obr. 3-47 Protáhlá eliptická oběžná dráha družice typu Molnija (vlevo). Průmět dráhy na zemský povrch (vpravo). Obrázek převzat z lit. [17].

Na obr. 3-47 vlevo je znázorněna typická protáhlá oběžná dráha družice Molnija, jejíž velmi vzdálené apogeum zůstává fixováno v prostoru. Na témže obrázku vpravo je pak znázorněn průmět dráhy na zemský povrch, z čehož je zřejmé, že jednou telekomunikační družicí tohoto typu lze pokrýt po dlouhou dobu značnou část severoamerického a ruského území. Vyvedení družice sestává ze dvou kroků. Družice je nejprve vypuštěna na parkovací kruhovou dráhu a odsud je převedena na konečnou eliptickou oběžnou dráhu.