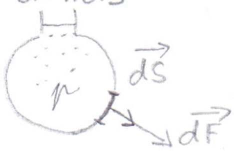
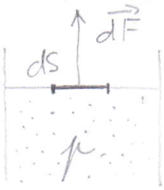
VII HYDROMECHANIKA

- tekutiny – kapaliny a plyny – společná vlastnost je tekutost – částice se mohou od sebe snadno oddělovat a po sobě posouvat – nemají stálý tvar, jen tvar nádoby, kterou vyplňují.
- dokonalá (ideální) tekutina – nemá vnitřní tření – viskozitu
- tekutiny – stlačitelné ($\rho \neq konst$) – plyny – aeromechanika
  nestlačitelné ($\rho \approx konst$) – kapaliny – hydromechanika
  (dokonalá kapalina – $\rho = konst.$ a bez viskozity)
- tlak – p – vyjadřuje silové působení v tekutinách

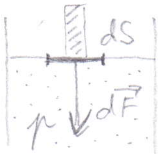
– $\boxed{p = \frac{dF}{dS}}$

$d\vec{F} \parallel d\vec{S}$

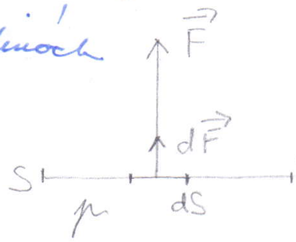




silové působení díky tlaku



tlak díky silovému působení



$d\vec{F}$... elementární síla
$d\vec{S}$... elementární orientovaná plocha

– je-li $p = konst$ podél celé S $\Rightarrow p = \frac{F}{S}$

– $[p] = N.m^{-2} \equiv Pa$ (Pascal – 1623–1662)

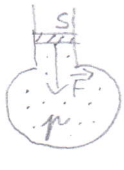
– další jednotky tlaku – technická atmosféra – $at = 98066{,}5\,Pa \doteq 10^5\,Pa$
(hydrostat. tlak 10 m pod hladinou vody)
– fyzikální atmosféra – $atm = 101\,325\,Pa \doteq 10^5\,Pa$
(normální tlak vzduchu)
– torr $= 133{,}322\,Pa$ (hydrostatický tlak 1 mm pod hladinou rtuti – rtuťový sloupec – Torricelli)
– bar $= 100\,000\,Pa$

– lze interpretovat jako objemovou hustotu energie – $p = \frac{F \cdot ds}{S \cdot ds} = \frac{dW}{dV}$

$[p] = \frac{J}{m^3}$

VII.1 HYDROSTATIKA

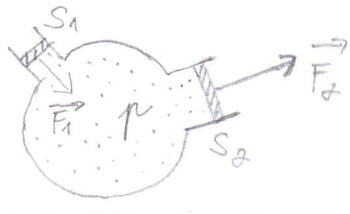
- Pascalův zákon (1650) – tlak v uzavřené nádobě vyvolaný působením vnější síly je ve všech místech nádoby stejný.



– změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny, když před změnou i po změně je kapalina v rovnováze.

- hydraulické zařízení – využití Pascalova zákona

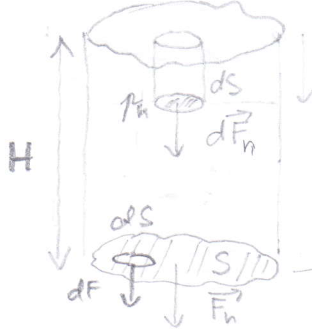
$$\boxed{\frac{F_1}{S_1} = p = \frac{F_2}{S_2}} \qquad S_1 < S_2 \Rightarrow F_2 > F_1$$



– elementární síla na elem. plošku dS, v které je p = konst

– hydrostatický tlak (tíhový) – $p_h = \frac{dF_h}{dS} = \frac{dm\cdot g}{dS} = \rho\frac{dV g}{dS} = \rho\frac{h\,dS\,g}{dS} = h\rho g$ (*)

viz též síla – resp. rovnice hydrostatiky

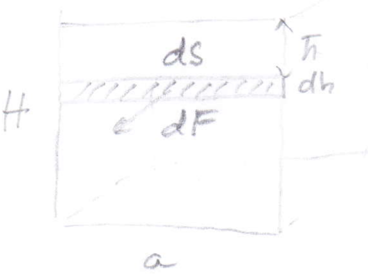


síla na vodorovné dno (dno v hloubce H)

$p_h = \frac{dF_h}{dS} \Rightarrow dF_h = p_h\, dS$

$F_h = \int_S p_h\, dS = p_h\int_S dS = h\cdot\rho\cdot g\cdot S$ (p = konst podél plochy, neb ta je vodorovná)

$h = H$
$\Rightarrow$ $\boxed{F_h = p_h\cdot S = S\cdot H\cdot\rho\cdot g}$



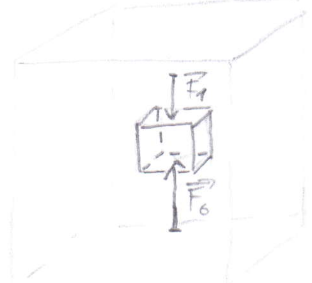
síla na svislé stěny kvádrové nádoby (spodní hrana v hloubce H)

$dF_h = p_h\, dS = h\cdot\rho\cdot g\cdot dS = h\cdot\rho\cdot g\cdot a\cdot dh$

$$\boxed{F_h = \int_0^H h\cdot\rho\cdot g\cdot a\, dh = a\cdot g\cdot\rho\int_0^H h\, dh = a\cdot\rho\cdot g\left[\frac{h^2}{2}\right]_0^H = \frac{1}{2}H^2 a\rho g = \frac{1}{2}S H\rho\cdot g}$$

– archimédova síla

$\vec{F}_{vz} = \sum_{i=1}^{6}\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_6 = \vec{F}_1 + \vec{F}_6$, neb $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$, $\vec{F}_4 = -\vec{F}_5$



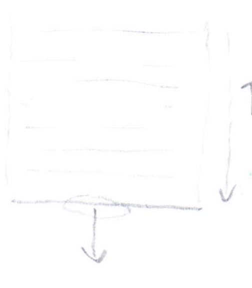
$$\boxed{F_{vz} = F_6 - F_4 = p_6\cdot S - p_4\cdot S = S\cdot(h_6\rho g - h_4\rho g) = S\cdot\rho\cdot g\cdot(h_6 - h_1) = S\cdot\rho\cdot g\cdot b = V_T\rho_k g}$$

krychle o S a straně b – platí obecně $\boxed{F_{vz} = V_T\,\rho_k\cdot g}$ pro libovolné těleso

obecněji: $F_{vz} = V_T'\rho_k\cdot g$

„Těleso ponořené do kap. o hust. ρ_k je nadlehč. silou o velikosti F_{vz}“

– vzduchu – aerostatický tlak – podobně jako hydrostat. tlak, avšak [illegible] plynu $\Rightarrow \rho \neq$ konst



$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{F}{S} = \frac{g\cdot S\cdot\int_0^h \rho\, dh}{S} = g\int_0^h \rho\, dh$$

$F = m\cdot g = \int\rho\, dV\, g = g\cdot\int\rho\, dV$, je-li $\rho = \rho(h)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\rho\, dV = \underbrace{\int_S dS}_{=S}\int_0^h\rho\, dh$, neb $dV = dS\, dh$

$\Rightarrow dp = g\cdot\rho\cdot dh$, $dH = -dh$ $\Rightarrow dp = -g\cdot\rho\cdot dH$

- základní rce hydrostatiky

- mějme kapalinu o hustotě ρ nacházející se v silovém poli s potenciálem φ, které v kapalině vyvolává tlak p – hydrostatický tlak

základní rce hydrostatiky

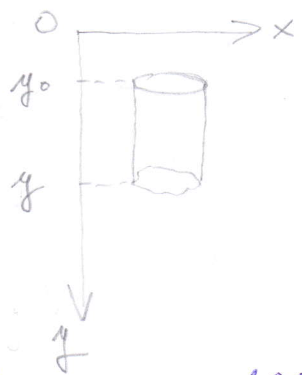
- platí rce $\boxed{\operatorname{grad} p = -\rho \operatorname{grad} \varphi}$, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$

$$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} \varphi \qquad = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} f$$

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{K}$$

(nabla operátor $\vec{\nabla}$)

- speciální případ – kapalina v tíhovém poli Země – hydrostatický tlak tíhový



$\vec{K} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{m\cdot\vec{g}}{m} = \vec{g}$ ... intenzita tíhového pole.

$$\vec{K} = -\operatorname{grad} \varphi = (0, g, 0)$$

$$\vec{K} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\left[\vec{K} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}\right]$$

$$\operatorname{grad} p = \vec{K} \cdot \rho \Rightarrow$$

$$\operatorname{grad} p = -\rho \cdot \operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \rho \cdot (0, g, 0)$$

$$\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot (\vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot g + \vec{k}\cdot 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = g \cdot \rho \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

[úplný diferenciál $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$
$\Rightarrow dp = 0 + \frac{\partial p}{\partial y}dy + 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y}$]

$$\Rightarrow \frac{dp}{dy} = \rho \cdot g$$

$$\int_0^p dp = \int_{y_0}^{y} \rho \cdot g \, dy \Rightarrow p = \rho g (y - y_0)$$, kde $p_0 = 0$ je tlak pro $y = y_0$, tedy na hladině

. . . . . .

$$\operatorname{grad} p = \vec{K} \rho$$

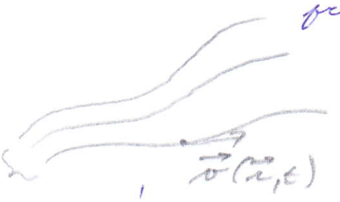
$$\left[\operatorname{grad} p = \frac{\vec{F}_G}{m}\rho = \frac{\vec{F}_G}{m}\frac{m}{V} = \frac{\vec{F}_G}{V}\right]$$ objemová hustota síly

VII.2 HYDRODYNAMIKA

- proudění kapalin charakterizujeme pomocí vektorového pole rychlostí $\vec{v}$

$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ ... nestacionární proudění

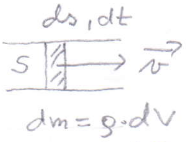
$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ .... stacionární proudění



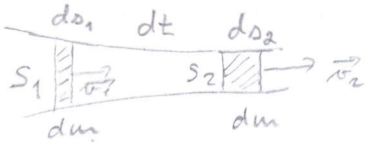
(pro stacionární proudění dokonalé kapaliny)

- rovnice kontinuity - zákon zachování hmotnosti

⊛ a plocha S se posune rychlostí $\vec{v}$ o ds.



za dt proteče průřezem S elem. hmotnost dm*



$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot S \cdot ds$$

$$\boxed{\frac{dm}{dt} \equiv \Phi_m \text{ ... hmotnostní tok = konst}}$$

$$\rho \cdot S \cdot \frac{ds}{dt} = \boxed{\rho\, S \cdot v = \text{konst}} \underset{\rho = \text{konst}}{\Rightarrow} \boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

$S \cdot v \equiv \Phi_V$ ... objemový tok

- pohybová rce - Eulerova rce (pro dokonalou kapalinu)

$$\boxed{\rho \cdot \vec{a} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \varphi} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \ldots + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \; v_y = \frac{dy}{dt}, \; v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \varphi}$$

$$(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \vec{K}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{i} v_x + \vec{j} v_y) \cdot (\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- spec. případ - stac. proudění $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right)$
  - tíhové pole země $\vec{K} = \vec{g}$ $(\varphi = g \cdot h)$
  - dokonalá kapalina $\rho = \text{konst}$ + nulová viskozita
  - nevíří se víry $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ $(\text{rot}\, \vec{v} = 0)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = \text{konst}}$$ Bernoulliho rce (zákon zach. energie)

hustota kinetické energie (dynamický tlak)

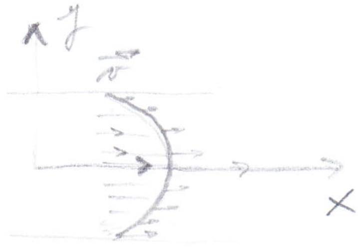
hydro

hustota potenciální energie tíhové (hydrostat. tlak tíhový)

hustota polohové energie tlakové (hydro statický tlak)

- reálná kapalina - nenulová viskozita (vnitřní tření)

- proudění reálné kapaliny



[laminární
turbulentní

$\tau_t = \eta \frac{dv}{dy}$ ... tečné napětí mezi vrstvami proudící kapaliny

η ... koeficient dynamické viskozity

$\eta = 0{,}001$ ... voda
$\eta = 0{,}0005$ ... benzín
$\eta = 0{,}1$ ... olivový olej
$\eta = 1$ ... olej ricinový

- odpor prostředí - obtékání tělesa kapalinou

$$F_o = 6\pi\eta R v$$

- pád kuličky v kapalině -

$$\vec{F} = \vec{F_G} + \vec{F_o} + \vec{F_{vz}}$$

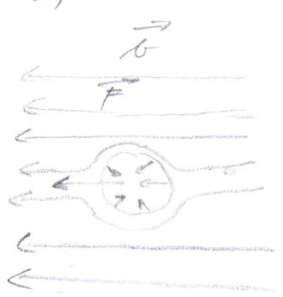
$$F = F_G - F_o - F_{vz} = m \cdot g - 6\pi\eta R v - V \cdot \rho_K g =$$

$$= V \rho_T g - 6\pi\eta R v - \tfrac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_K g$$

je-li v = konst $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_T g = \tfrac{4}{3}\pi\pi R^3 \rho_K g + 6\pi\eta R v$

$$\Rightarrow v = \frac{2R^2}{9\eta} g \cdot (\rho_T - \rho_K)$$

a)



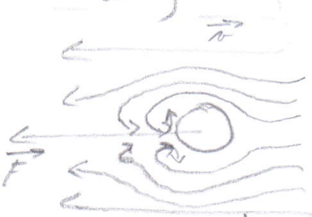
$F = 6\pi\eta R v$

Stokesův vztah

b)

Newtonův vztah (turbulentní proudění, obtékání)

$$\boxed{F = \tfrac{1}{2} C S \rho v^2}$$



C = 1	0,5
0,4	0,3
0,2	1,3
0,04	

Pro kouli víceméně laminární proudění ve viskózní kapalině