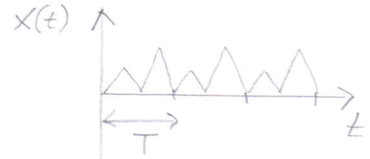
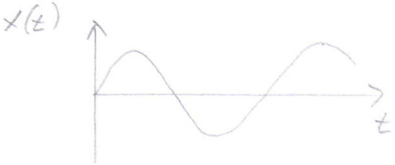
V. MECHANICKÉ KMITÁNÍ

- kmitání (oscilace) – proces, který se s určitým stupněm pravidelnosti opakuje – sledovaná fyz. veličina osciluje kolem určité hodnoty – střední hodnoty
- fyzikální podstata – mechanická, elektromagnetická
- mechanické kmitání – speciální typ mechanického pohybu, při kterém se kmitající tělesa (soustava) – tzv. oscilátor nachází v blízkosti určité polohy – rovnovážného stavu
- příklady mech. oscilátorů – pružinový oscilátor, matematické kyvadlo, fyzické kyvadlo, torzní kyvadlo, lidské srdce, bubínek, ...
- periodické kmitání – splňuje podmínku $\boxed{x(t)=x(t+T)}$, kde x je fce času t, x je sledovaná veličina a T perioda kmitání. Zavádíme zde též další fyz. veličiny
  - $f=\frac{1}{T}$ .... frekvence kmitání (počet kmitů za 1 s)
  - $\omega=2\pi f$ .... kruhová (úhlová) frekvence kmitání

  $[f]=s^{-1}=Hz$; $[\omega]=rad/s$





- harmonické kmitání – $x(t)=x(\sin t)$ nebo samozřejmě $x(t)=x(\cos t)$
- kmitání
  - periodické
    - harmonické
      - vlastní
        - netlumené (volné harm. kmit.)
        - tlumené
      - nucené
    - obecné
  - neperiodické

- tlumené kmitání – při reálných odporech – energie kmitání se zmenšuje
- netlumené (volné) kmitání – ideální případ bez odporu – energie kmitání se zachovává
- vlastní kmitání – frekvence kmitání závisí pouze na vlastnostech oscilátoru (do oscilátoru se nepřivádí energie)
- nucené kmitání – frekvenci určuje vnější budicí síla (do oscilátoru přivádíme energii)

EXKURS – ŘEŠENÍ DIF. ROVNIC 2. ŘÁDU

- při řešení pohybových úloh – řešení úloh dynamiky – II. NPZ se setkáváme s řešením obyčejných skalárních diferenciálních rovnic 2. řádu typu

$\boxed{a y'' + b y' + c y = f(t)}$, kde $y = y(t)$, $y' = y'(t)$, $y'' = y''(t)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

- postup řešení má dva kroky: 1) řešení příslušné homogenní dif. rce

$$\boxed{a y'' + b y' + c y = 0}$$

pomocí řešení příslušné tzv. charakteristické algebraické rovnice s neznámou λ

$$a\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

2) pomocí nalezeného obecného řešení $y_h = y_h(t)$ pak např. metodou variace konstant nalezneme finální řešení původní nehomogenní dif. rce

1) řešení příslušné homogenní dif. rce – řešení charakteristické rce $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

může být: a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

b) $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda \in \mathbb{R}$

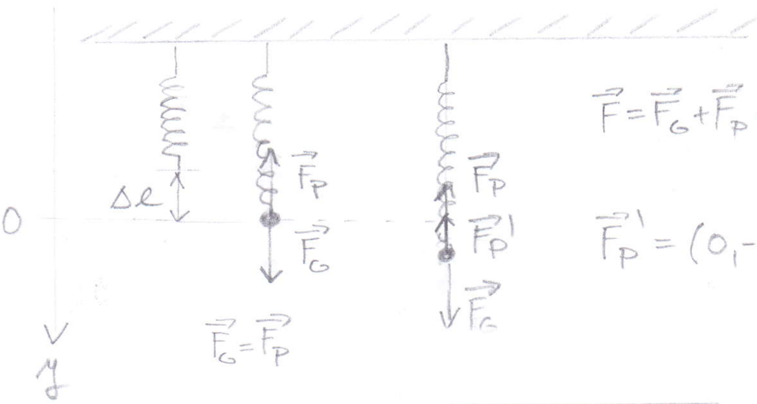
c) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$, kde $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Pak řešení homogenní dif. rce $a y'' + b y' + c = 0$ bude ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} &a) \quad y_h = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \\ &b) \quad y_h = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} \\ &c) \quad y_h = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin \beta t + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t \end{aligned}}$$

V.1 VOLNÉ HARMONICKÉ KMITÁNÍ – PRUŽINOVÝ OSCILÁTOR
(VLASTNÍ NETLUMENÉ HARMONICKÉ)

- působí síla a kmitání řídí (konzervativní) direkční síla $\vec{F}_d$
- pružinový oscilátor – těleso o hmotnosti m zavěšené na pružině o tuhosti k
- zanedbáme-li vnitřní tření pružiny a odpor prostředí, pak pružinový oscilátor může volně harmonicky kmitat.
- síla pružnosti – natáhneme-li (stlačíme-li) pružinu o vzdálenost Δl, bude tato na nás působit silou o velikosti $\boxed{F_p = k\cdot\Delta l}$
- uvažujme dále pružinový oscilátor zavěšený ve směru osy y vztažné soustavy



$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_p + \vec{F}_p' = \vec{F}_p' \equiv \vec{F}_d \text{, neboť } \vec{F}_G + \vec{F}_p = 0$$

$$\vec{F}_p' = (0, -k\cdot y, 0)$$

- pohybová rovnice – $\boxed{m\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}}$ (II. NPZ)

$$m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \Rightarrow m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -k\cdot y \Rightarrow m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + k\cdot y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \Rightarrow \boxed{y'' + \omega_0^2 y = 0}\text{, kde } \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2 > 0$$

pohybová rce $\qquad y'' \equiv \frac{d^2y}{dt^2}$

- obecné řešení pohybové rce
- charakteristická rovnice příslušná k pohybové rci – $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

rovnice výchylky y

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \Rightarrow \left[y = C_1\cdot\sin\omega_0 t + C_2\cdot\cos\omega_0 t\right]\text{, } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

rovnice rychlosti v_y

$\Rightarrow$ rovnice pro rychlost kmitání $v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \left[v_y = \omega_0 C_1\cos\omega_0 t - C_2\omega_0\sin\omega_0 t\right]$

- partikulární řešení pohybové rce – po určení konstant C_1 a C_2 pomocí počát. podm. $y(t_0) = y_0$, $v_y(t_0) = v_{y0}$, které si volíme
  - počáteční podmínky odpovídají stavu kmitání v daném čase t_0, který známe. Musíme znát tak tzv. počáteční polohu y_0 a počáteční rychlost v_{y0}.

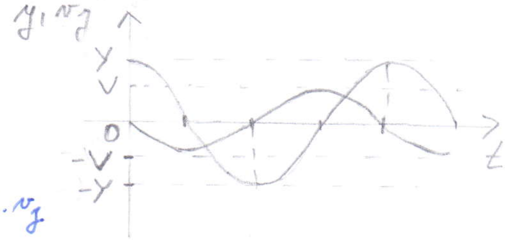
a) volíme $t_0=0$, $y_0=Y$, $v_{y0}=0$ $\Rightarrow$ $Y = C_2\cdot 1 \Rightarrow C_2 = Y$ (z rce výchylky)

$0 = \omega_0 C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 0$ (z rce rychlosti)

$$\boxed{y = Y\cdot\cos\omega_0 t}$$

$$\boxed{v_y = -Y\omega_0\cdot\sin\omega_0 t = -V\cdot\sin\omega_0 t}\,,\quad V \equiv Y\omega_0$$

Y.... amplituda výchylky y, V.... amplituda rychl. v_y

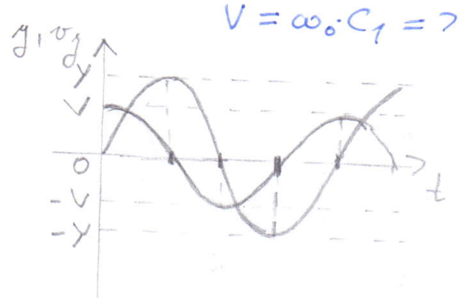


b) volíme $t_0=0$, $y_0=0$, $v_{y0}=V$ $\Rightarrow$ $0=C_2$

$V = \omega_0\cdot C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{V}{\omega_0} = Y$ $(V\equiv Y\omega_0)$

$$\boxed{y = Y\cdot\sin\omega_0 t}$$

$$\boxed{v_y = V\cdot\cos\omega_0 t}$$



- souvislost $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a periody T

- periodické kmitání – $x(t+T) = x(t) \Rightarrow \sin\omega_0 t = \sin\omega_0(t+T)$
- periodičnost fce sin – $\sin(x+2\pi) = \sin x \Rightarrow \sin\omega_0 t = \sin(\omega_0 t + 2\pi)$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\omega_0(t+T) = \sin(\omega_0 t+2\pi) \Rightarrow \sin(\omega_0 t+\omega_0 T) = \sin(\omega_0 t + 2\pi) \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi$

$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

- počáteční fáze kmitání – $y = Y\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$; φ_0.... počát. fáze kmitání, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ .... fáze kmitání

- $y = Y\sin(\omega_0 t+\varphi_0) = Y\cdot\sin\omega_0 t\cdot\cos\varphi_0 + Y\cdot\cos\omega_0 t\,\sin\varphi_0 = C_1\cdot\sin\omega_0 t + C_2\cdot\cos\omega_0 t$

  $C_1 = Y\cos\varphi_0$, $C_2 = Y\sin\varphi_0$ $\Rightarrow$ Y a φ_0 určují integrační konstanty místo y_0 a v_{y0}

- $y_0 = C_1\sin\omega_0 t_0 + C_2\cos\omega_0 t_0 \Rightarrow y_0 = Y\cos\varphi_0\cdot\sin\omega_0 t_0 + Y\sin\varphi_0\cdot\cos\omega_0 t_0 = Y\cdot\sin(\omega_0 t_0+\varphi_0)$

  $v_{y0} = \omega_0 C_1\cos\omega_0 t_0 - C_2\omega_0\sin\omega_0 t_0 \Rightarrow v_{y0} = \omega_0 Y\cos\varphi_0\cos\omega_0 t_0 - \omega_0 Y\sin\varphi_0\cdot\sin\omega_0 t_0 = \omega_0 Y\cos(\omega_0 t_0+\varphi_0)$

- výše uvedený případ – $y_0 = Y$, $v_{y0} = 0$, $t_0 = 0$ $\Rightarrow \omega_0 Y\cos(\omega_0 t_0+\varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t_0+\varphi_0) = 0$

  $\Rightarrow \omega_0 t_0 + \varphi_0 = \pi/2, 3\pi/2 \Rightarrow \varphi_0 = -\omega_0 t_0 + \pi/2 = +\pi/2$

  $\varphi_0 = -\omega_0 t_0 + 3\pi/2 = +3\pi/2$

  $\Rightarrow y = Y\cdot\sin(\omega_0 t_0+\varphi_0)$

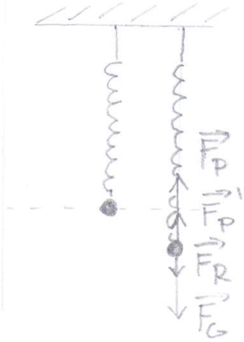
  $\Rightarrow \sin(\omega_0 t_0+\varphi_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 t_0+\varphi_0 = \pi/2 \Rightarrow \varphi_0 = \pi/2$

- $y_0 = 0$, $v_{y0} = V \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varphi_0 = 0$

- komplexní vyjádření – $y = Y\cdot e^{i(\omega_0 t+\varphi_0)}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, uvažujeme buď reálnou anebo imag. část

V.2 VLASTNÍ TLUMENÉ HARMONICKÉ KMITÁNÍ – PRUŽINOVÝ OSCILÁTOR

- Kromě direkční síly $\vec{F_d}$ zde působí i tlumící odporová síla $\vec{F_R}$ (odpor prostředí či vnitřní tření v pružině)



$$\vec{F} = \vec{F_G} + \vec{F_p} + \vec{F_p}' + \vec{F} = \vec{F_p}' + \vec{F_R} = \vec{F_d} + \vec{F_R}$$

$$\vec{F_p}' = (0, -ky, 0)$$

$\vec{F_R} = (0, -r \cdot v_y, 0)$, r … koef. odporu , $\vec{F_R}$ … působí proti směru $\vec{v}$

- pohybová rovnice – $\boxed{m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}}$ (II. NPZ)

odporový člen

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \Rightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - r \cdot v_y \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + ky + rv_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0 \Rightarrow \boxed{y'' + \frac{1}{\tau}y' + \omega_0^2 \cdot y = 0}$$

pohybová rce

, kde $\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2 > 0$

$\frac{r}{m} \equiv \frac{1}{\tau} > 0$

$v_y = \frac{dy}{dt} \equiv y'$)

- obecné řešení pohybové rce
- charakteristická rovnice příslušná k pohybové rci – $\lambda^2 + \frac{1}{\tau}\lambda + \omega_0^2 = 0$

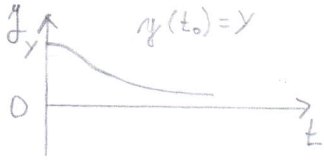
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}_{D}}$$

$\Rightarrow$ a) $\left[y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\right]$ když $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tedy $D > 0$

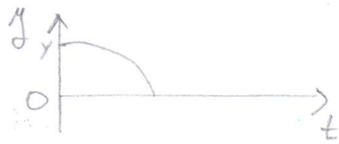
b) $\left[y = c_1 e^{\lambda t} + c_2 \cdot \lambda e^{\lambda t}\right]$ když $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda \in \mathbb{R}$, tedy $D = 0$

c) $\left[y = c_1 e^{\alpha t} \sin\beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos\beta t\right]$ když $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, tedy $D < 0$

a) silné tlumení – tlumené aperiodické kmitání
- kmitání se utlumí pro $t \to \infty$, nepřejde rovn. polohu



b) kritické tlumení – aperiodické kmitání
- kmitání se utlumí pro konečné t, těleso se zastaví v rovnovážné poloze



c) slabé tlumení – tlumené periodické kmitání
- kmitání se utlumí pro $t \to \infty$, přechází rovn. polohou

- slabé tlumení podrobněji – $y = C_1 \cdot e^{\alpha t} \sin\beta t + C_2 e^{\alpha t}\cos\beta t$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega \equiv \alpha + i\beta$$

$$\omega^2 \equiv \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} > 0$$

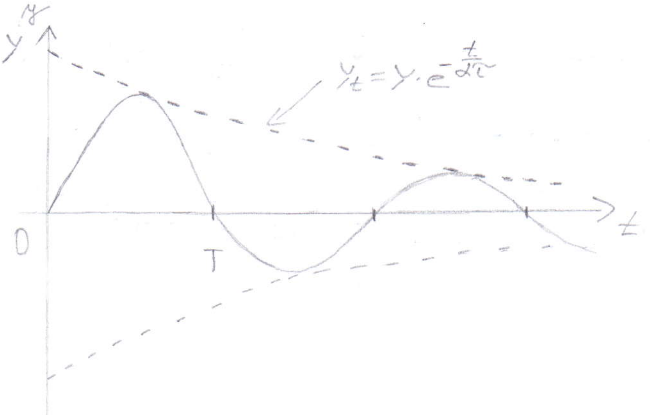
– $v_y = C_1 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} \sin\beta t + C_1 e^{\alpha t} \beta\cos\beta t + C_2 \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t -$
$- C_2 \cdot e^{\alpha t} \beta \cdot \sin\beta t$

- partikulární řešení – $y(t_0) = 0$, $v_y(t_0) = V$, $t_0 = 0$

$\overset{y}{\Rightarrow} 0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$\overset{v_y}{\Rightarrow} V = C_1 \cdot \beta \Rightarrow C_1 = \frac{V}{\beta}$ $\quad \Rightarrow y = \frac{V}{\beta} \cdot e^{\alpha t} \sin\beta t = \frac{V}{\beta} e^{-\frac{1}{2\tau} t} \sin\omega t =$
$= Y e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\omega t = Y_t \sin\omega t$

$Y_t \equiv Y e^{-\frac{t}{2\tau}}$ .... časově závislá amplituda kmitání



- perioda tlumeného kmitání – $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad ; \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} > 0 \Rightarrow \omega^2 < \omega_0^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} < \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Rightarrow T > T_0$

ω .... kruhová frekvence tlumen. km.

- relaxační doba – τ

- $Y_t = Y e^{-\frac{t}{2\tau}} \Rightarrow \tau \ll 1$ .... velké tlumení, $\tau \gg 1$ .... malé tlumení

$\Rightarrow$ pro $t = 0$ je $Y_t = Y$, tedy $Y_t(0) = Y$
pro $t = \tau$ je $Y_t = Y e^{-1/2}$, tedy $Y_t(\tau) = Y e^{-1/2} \Rightarrow Y_t^2(\tau) = Y^2 e^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_t^2(\tau) = \frac{Y^2}{e} \Rightarrow \tau$ je doba, kdy čtverec amplitudy Y klesne na $1/e \doteq 1/3$.

V.3 NUCENÉ HARMONICKÉ KMITÁNÍ

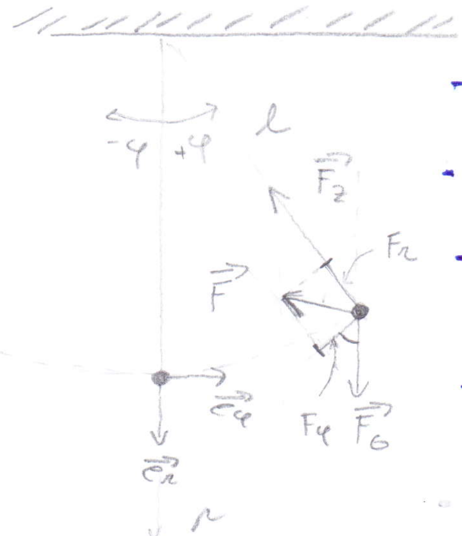
- v případě nuceného kmitání působí na oscilátor kromě síly direkční a tlumící ještě síla budící

- pohybová rce $\quad m\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_D + \vec{F}_R + \vec{F}_B$

$$m\cdot\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - r v_y + F_0\cdot\cos\omega t \quad \text{(pohyb podél osy z)}$$

V.4 VOLNÉ HARMONICKÉ KMITÁNÍ (matematické kyvadlo)

- matematické kyvadlo – hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na tenkém vlákně délky l zanedbatelné hmotnosti
- výchylku (změnu polohy) matem. kyvadla můžeme popisovat (reprezentovat) několika veličinami – φ, s, x, y
- kmitání způsobuje direkční síla se směrem tečny k trajektorii (oblouku) pohybu hmotného bodu



- $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_Z = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi = (F_r, F_\varphi)$
- $\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\cdot(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi) = m(a_r, a_\varphi)$
- $F_\varphi = -|\vec{F}_G|\cdot\sin\varphi = -mg\cdot\sin\varphi$
- těleso se pohybuje jen ve směru φ => můžeme sledovat jeho pohyb pouze

$$\Rightarrow \boxed{m\cdot a_\varphi = -mg\cdot\sin\varphi}$$ POHYBOVÁ RCE

$$m\cdot\frac{dv_\varphi}{dt} = -mg\sin\varphi\ ,\quad v_\varphi = \omega\cdot l = \frac{d\varphi}{dt}\cdot l$$

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\cdot\sin\varphi\ ,\quad \sin\varphi\approx\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\ ,\ \sin\varphi\approx\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega_0^2\varphi=0}$$

POHYBOVÁ RCE

$$\boxed{\varphi = \Phi\cdot\sin\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- nelineární mimo GP