Parciální derivace

Parciální derivace se provádějí u funkcí více proměnných. Derivujeme podle jedné proměnné, ostatní proměnné považujeme za konstanty.

Např.: parciální derivace funkce dvou proměnných
Funkci více proměnných označíme z.

$z = 3\,x^2\,y + 2\,x + y^3$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6\,x\,y + 2$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 3\,x^2 + 3\,y^2$

$$z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Užití parciálních derivací ve fyzice

Nejistota měření při určování tuhosti pružiny

Kmitá-li těleso o hmotnosti m na pružině tuhosti K, můžeme dobu kmitu T vypočítat podle vzorce

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Pro tuhost pružiny pak platí $K = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$

K je funkcí m a T . Můžeme vypočítat parciální derivace podle m a T.

$$\frac{\partial K}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 m}{T^3}$$

Tyto parciální derivace pak dosadíme do vzorce pro výpočet nejistoty u_K tuhosti pružiny. u_m a u_T jsou nejistoty měření hmotnosti tělesa a doby kmitu.

$$u_K = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial m} u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial T} u_T\right)^2}$$

Nejistota měření při určování tíhového zrychlení

Pro dobu kmitu T matematického kyvadla délky l platí $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, kde g je tíhové zrychlení.

Pro tíhové zrychlení g pak platí $g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T^2}$

g je funkcí l a T. Obdobně jako v předchozím příkladě vypočítáme parciální derivace a vypočteme nejistotu u_g tíhového zrychlení.

Nejistota měření při určování dynamické viskozity glycerolu

Dynamickou viskozitu η kapaliny (glycerolu) určíme tak, že kouli o poloměru r a hustotě ρ necháme padat v kapalině o hustotě ρ_K . Určíme rychlost pohybu koule. Pak platí:

$$\eta = \frac{2g}{9v}(\rho - \rho_K)\, r^2 \text{, kde g je tíhové zrychlení}$$

Dynamická viskozita η je funkcí r a v. Můžeme vypočítat parciální derivace podle r a v.

$$\frac{\sigma\eta}{\sigma r} = \frac{4g}{9v}(\rho - \rho_K)\, r$$

$$\frac{\sigma\eta}{\sigma v} = -\frac{2g}{9v^2}(\rho - \rho_K)\, r^2$$

Do vzorce pro výpočet nejistoty dynamické viskozity dosadíme tyto parciální derivace a nejistoty poloměru u_r a rychlosti u_v a provedeme výpočet.

$$u_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial r} u_r\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial v} u_v\right)^2}$$

3 Derivace základních funkcí

Funkce f: $y = f(x)$	Vzorce pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce ($x \in D(f')$)
$y = c \ (c \in \mathbb{R})$	$y' = 0$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$y' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k,\ k \in \mathbb{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^r,\ r \in \mathbb{R}$	$y' = rx^{r-1}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \log_a x \ (a > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$