

1 Úvodní poznámky

Teorie volných (neinteragujících) polí, která byla obsahem předmětu Kvantová teorie pole I, nepřinesla ve srovnání s kvantovou mechanikou žádné nové postupy jak vypočítat měřitelné veličiny a porovnat je s experimentem. Největším přínosem teorie volných polí byl popis elektromagnetického záření jako toku částic–fotonů, který se v rámci kvantové mechaniky nezdařil. V kvantové mechanice se interakce kvantověmechanických soustav (atomy, molekuly, částice, pevné látky) s elektromagnetickým zářením popisovala jako interakce s klasickým elektromagnetickým vlněním. I když tento semiklasický popis elektromagnetických jevů slavil určité úspěchy (zřejmě nejvýznamnějším byla předpověď stimulované emise Albertem Einsteinem v roce 1917), nedal se považovat za logicky konzistentní teorii.

U všech polí které jsme doposud zkoumali, komutovaly jejich Hamiltonovy operátory s operátory počtu částic v jednotlivých kvantových stavech. Tyto počty tak byly dobrými kvantovými čísly. Procesy ve kterých dochází k jejich změně (rozptyl částic, vznik částic nebo jejich anihilace, rozpady částic se vznikem částic jiných) jsou tak v kvantové teorii volných (neinteragujících) polí zakázané.

Přidání interakčního hamiltoniánu má za následek, že operátory počtu částic přestávají komutovat s hamiltoniánem. Počty částic, či už v jednotlivých kvantových stavech nebo celkově, se můžou měnit, co umožňuje teoreticky popsat různé procesy.

Jsou různé způsoby volby interakčního hamiltoniánu, od jednoduchých modelů až po moderní kalibrační teorie elektroslabých a silných interakcí, o kterých si řekneme něco později. Teď si ukážeme, jak se získá hamiltonián spinorové elektrodynamiky, tj teorie která popisuje interakci nabitých leptonů (elektrony, pozitrony, miony, tauony) s kvanty elektromagnetického pole, fotony.

2 Hamiltonián spinorové elektrodynamiky

Vycházíme z klasické Lagrangeovy hustoty která vede na Maxwellovy rovnice respektující přítomnost nabitého čtyřproudu j^α [viz vztah (51) v elmagpole.pdf]

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{M,0} + \mathcal{L}' ,$$

kde

$$\mathcal{L}_{M,0} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

je Lagrangeova hustota volného (bez nábojů) elektromagnetického pole a

$$\mathcal{L}' = -j^\alpha A_\alpha$$

popisuje interakci elektromagnetického pole s elektrickými náboji. Ještě použijeme Lagrangeovu hustotu volného spinorového pole [vztah (1) v spinpole.pdf]

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu\psi(x)) - (\partial_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

a výraz pro čtyřvektor hustoty toku náboje pro částici popsanou Diracovou rovnicí

$$j^\alpha(x) = (-e)\bar{\psi}(x)\gamma^\alpha\psi(x) ,$$

který jsme dostali tak, že jsme čtyřvektor hustoty toku pravděpodobnosti [vztah (68) v ktp1_201012.pdf] vynásobili nábojem částice (elektronu).

Lagrangeovu hustotu spojeného elektromagnetického a spinorového pole zapisujeme ve tvaru

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}',$$

kde

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{M,0}$$

je součet Lagrangeových hustot volných polí a

$$\mathcal{L}' = e \bar{\psi}(x) \gamma^\alpha \psi(x) A_\alpha(x)$$

popisuje interakci mezi poli. V dalším kroku najdeme Hamiltonovu hustotu pomocí vztahu (30) z ktp1_201026 pro mnohokomponentní pole ϕ_i ($i = 1, \dots, n$), který tady pro pohodlí čtenáře reprodukuje

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \sum_{i=1}^n \pi_i(x) \dot{\phi}_i(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi). \quad (1)$$

Pro spojené spinorové a elektromagnetické pole je $n = 12$ (osm komponent spinorového pole a čtyři komponenty pole elektromagnetického). Ke každé komponentě pole přísluší odpovídající komponenta konjugovaného pole

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \quad (2)$$

[vztah (29) z ktp1_201026]. Protože interakční Lagrangeova hustota \mathcal{L}' neobsahuje derivace polí podle času, konjugovaná pole se zapnutím interakce mezi poli nezmění. Nezmění se ani suma ve vztahu (1). Hamiltonova hustota je proto rovna

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}',$$

kde \mathcal{H}_0 je součet Hamiltonových hustot spinorového a volného elektromagnetického pole a $\mathcal{H}' = -\mathcal{L}'$, tudíž

$$\mathcal{H}' = -e \bar{\psi}(x) \gamma^\alpha \psi(x) A_\alpha(x) \quad (3)$$

Po přechodu ke kvantové teorii a integraci přes prostor dostáváme pro Hamiltonův operátor soustavy polí

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$

kde

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{p}, s} E_{\vec{p}} \left(\hat{N}_{\vec{p}, s} + \hat{N}_{\vec{p}, s} \right) + \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k}, \lambda}$$

je součet hamiltoniánu volného spinorového pole [vztah (31) v spinpole.pdf] a volného elektromagnetického pole [vztah (68) v elmagpole.pdf]. Dále, ve Schrödingerově obraze píšeme

$$\hat{H}' = \int \hat{\mathcal{H}}'(\vec{x}) d^3x, \quad (4)$$

kde

$$\hat{\mathcal{H}}'(\vec{x}) = -e : \hat{\bar{\psi}}(\vec{x}) \gamma^\alpha \hat{\psi}(\vec{x}) \hat{A}_\alpha(\vec{x}) : . \quad (5)$$

Jako obvykle, i zde jsme předepsali pořadí operátorů ve smyslu normálního součinu.

3 Interakční obraz (Dirac picture)

Mějme Hamiltonův operátor ve tvaru

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$

kde \hat{H}_0 je Hamiltonův operátor volných polí a \hat{H}' je operátor popisující interakci mezi poli. Ve Schrödingerově obraze jsou operátory od času nezávislé a časový vývoj stavu je popsán rovnicí

$$i \partial_t |\psi; t\rangle_S = \hat{H} |\psi; t\rangle_S. \quad (6)$$

Přechod do Diracova obrazu se realizuje unitární transformací stavů a operátorů

$$|\psi; t\rangle_D = \hat{U}(t) |\psi; t\rangle_S \quad (7)$$

$$\hat{O}_D(t) = \hat{U}(t) \hat{O}_S \hat{U}^\dagger(t) \quad (8)$$

s unitárním operátorem

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}_0 t}. \quad (9)$$

Pro časovou derivaci stavového vektoru v novém obraze postupně dostáváme pomocí (7), (9), (6) a (8)

$$i \partial_t |\psi; t\rangle_D = -e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_0 |\psi; t\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H} |\psi; t\rangle_S = \hat{U} \hat{H}' |\psi; t\rangle_S = \hat{U} \hat{H}' \hat{U}^\dagger \hat{U} |\psi; t\rangle_S.$$

Výsledná rovnice

$$i \partial_t |\psi; t\rangle_D = \hat{H}'_D(t) |\psi; t\rangle_D \quad (10)$$

ukazuje, že časový vývoj stavu v Diracově obraze je dán rovnicí Schrödingerova typu, kde však na pravé straně je místo celkového hamiltoniánu jenom interakční hamiltonián. Ten závisí od času, jak plyne ze vztahů (8) a (9), protože s operátorem \hat{H}_0 nekomutuje.

Po vypnutí interakce se dostáváme do Heisenbergova obrazu volných polí, stavový vektor se stává konstantním. Bez ohledu na to, jestli je interakce zapnutá či nikoliv, operátory v Diracově obraze jsou stejné jako v Heisenbergově obraze pro volná pole, jak je vidět ze vztahů (8) a (9). Tyto operátory byly odvozeny v přednáškách z Kvantové teorie pole I a budou beze změny použity i zde.

V dalším budeme pracovat výhradně v interakčním obraze a proto už nebudeme index D u stavů a operátorů explicitně vypisovat.

Uveďme jako příklad hamiltonián interakce mezi spinorovým a elektromagnetickým polem v interakčním obraze. Když se vztahy (4) a (5) přejdeme do interakčního obrazu, dostáváme

$$\hat{H}'(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'(x) d^3x, \quad (11)$$

přičemž

$$\hat{\mathcal{H}}'(x) = -e : \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma^\alpha \hat{\psi}(x) \hat{A}_\alpha(x) : . \quad (12)$$

Operátory polí v interakčním (Diracově) obraze, které závisí od čtyřvektoru x , jsou stejné jako operátory polí v Heisenbergově obraze pro volná pole, jak jsme je odvodili v KTP I.

4 Evoluční operátor a jeho poruchový rozvoj

Časový vývoj stavu se dá popsat jako unitární transformace¹

$$|\psi; t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi; t_0\rangle \quad (13)$$

Operátor zde vystupující musí splňovat podmínku $\hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{U}(t, t_0) = 1$, která zaručuje zachování normy stavového vektoru, jakož i podmínek $\hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t)$, $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$ a $\hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0)$. Po dosazení (13) do (10) dostáváme rovnici

$$\left[i \partial_t \hat{U}(t, t_0) - \hat{H}'(t) \hat{U}(t, t_0) \right] |\psi; t_0\rangle = 0.$$

Aby tato rovnice platila pro libovolný počáteční stavový vektor, pro evoluční operátor musí platit

$$\partial_t \hat{U}(t, t_0) = -i \hat{H}'(t) \hat{U}(t, t_0).$$

Tuto rovnici převedeme na integrální

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}'(t_1) \hat{U}(t_1, t_0),$$

která se dá výhodně řešit iterační metodou postupných aproximací

$$\hat{U}^{(k)}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}'(t_1) \hat{U}^{(k-1)}(t_1, t_0)$$

s $U^{(0)} \equiv 1$. Po n krocích dostáváme

$$\hat{U}^{(n)}(t, t_0) = 1 + \sum_{k=1}^n (-i)^k \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}'(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}'(t_2) \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \hat{H}'(t_k). \quad (14)$$

Zde vystupující k -rozměrný integrál označíme jako I_k a využijeme, že operátory $\hat{H}'(t_1), \hat{H}'(t_2), \dots, \hat{H}'(t_{k-1})$ se vzhledem ke všem po nich následujícím integrálům chovají jako konstanty, takže je můžeme přesunout až do posledního integrálu. Máme tak

$$I_k = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \hat{H}'(t_1) \hat{H}'(t_2) \cdots \hat{H}'(t_k). \quad (15)$$

Pomocí funkce

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

můžeme (15) přepsat na tvar se stejnými horními integračními mezemi ve všech integrálech

$$I_k = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_k} dt_k \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \cdots \theta(t_{k-1} - t_k) \hat{H}'(t_1) \hat{H}'(t_2) \cdots \hat{H}'(t_k). \quad (16)$$

Ted' využijeme, že pro libovolnou integrovatelnou funkci k proměnných t_1, \dots, t_k platí vztah

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_k} dt_k f(t_1, t_2, \dots, t_k) = \frac{1}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_k} dt_k \sum_{perm.} f(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_k}), \quad (17)$$

¹Je to podobná situace jako v klasické mechanice, kde se pohyb dá popsat jako kanonická transformace zobecněných souřadnic a hybností.

kde se sčítá přes všechny permutace argumentů. Vyplývá to z toho, že hodnota integrálu se nezmění, když n proměnných přeznačíme na jejich libovolnou permutaci a pak pořadí integrací změním na původní (meze jsou ve všech integrálech stejné, jedná se o rektangulární oblast). Když jako funkci f teď vybereme integrand integrálu (16), ze vztahu (17) dostáváme

$$I_k = \frac{1}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_k \hat{P}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)\dots\hat{H}'(t_k)], \quad (18)$$

kde jsme zavedli Dysonův chronologický operátor \hat{P} , který uspořádává součin operátorů podle časového argumentu

$$\hat{P}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)\dots\hat{H}'(t_k)] = \sum_{perm.} \theta(t_{\alpha_1}-t_{\alpha_2})\theta(t_{\alpha_2}-t_{\alpha_3})\dots\theta(t_{\alpha_{k-1}}-t_{\alpha_k}) \hat{H}'(t_{\alpha_1})\hat{H}'(t_{\alpha_2})\dots\hat{H}'(t_{\alpha_k}).$$

Tady součet přes všechny permutace obsahuje, díky přítomnosti funkcí θ , jen jeden člen, konkrétně ten, kde jsou operátory uspořádány podle časového argumentu, od největšího po nejmenší.²

Dysonův chronologický operátor \hat{P} můžeme v (18) nahradit Wickovým chronologickým operátorem \hat{T} , který se liší od \hat{P} tím, že při chronologickém uspořádávání se za každou vzájemnou výměnu fermionových operátorů změni znaménko součinu. Interakční hamiltonián spinorového pole s libovolným jiným polem obsahuje dva fermionové operátory [viz např. (12)]. Při použití operátoru \hat{T} se při záměně pořadí dvou hamiltoniánů změni znaménko čtyřikrát, takže výsledek je stejný jako při použití operátoru \hat{P} .

Nahrazení operátoru \hat{P} operátorem \hat{T} ve vztahu (18) nám později umožní používat Wickovu větu, která platí pro \hat{T} operátor, ale ne pro \hat{P} operátor.

V limitě $n \rightarrow \infty$ ze vztahu (14) tak dostáváme evoluční operátor ve tvaru nekonečné řady

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_k \hat{T}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)\dots\hat{H}'(t_k)], \quad (19)$$

nazývané Dysonovou řadou (Dyson series). My z ní budeme využívat jenom první členy (po $k=2$). Dysonova řada se dá kompaktně zapsat vztahem

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \hat{H}'(t') dt' \right\},$$

nazývaném Dysonovým vzorcem (Dyson formula). Doporučujeme čtenáři, aby si napsal první tři členy rozvoje exponenty v Dysonově vzorci a ověřil jejich kompatibilitu s odpovídajícími členy Dysonovy řady.

5 Pravděpodobnost přechodu, amplituda procesu

Předpokládejme, že se soustava interagujících polí v čase t_0 nacházela ve stavu $|i\rangle$, tj, že platilo $|\psi; t_0\rangle = |i\rangle$. Stav $|i\rangle$ ve charakterizován typy částic a jejich hybnostmi.

Jako příklad uveďme stav, ve kterém se nachází jeden elektron s hybností \vec{p}_a ve spinovém stavu s_a a jeden pozitron s hybností \vec{p}_b ve spinovém stavu s_b . Pak bude

$$|i\rangle = \hat{b}_{\vec{p}_a, s_a}^\dagger \hat{d}_{\vec{p}_b, s_b}^\dagger |0\rangle.$$

²Tento způsob úpravy integrálu (15) pochází od F. J. Dysona [Phys. Rev. 75, 486 (1949)] a byl převzat např. do učebnice S. S. Schwebera (An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, p.332). V učebnicích se často dokazuje jen případ $k=2$ a odvolává se na zobecnění, nebo se jednoduše jenom napíše výsledek. Existuje i důkaz ekvivalence vztahů (15) a (18) matematickou indukcí (S. M. Bileňkij, Vvedeniye v diagramy Fejnmana i fiziku elektroslabovo vzaimodejstvija, Moskva, Energoatomizdat 1990), ale ten je mnohem komplikovanější.

Stav soustavy v čase t bude podle (13) dán vztahem

$$|\psi; t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |i\rangle.$$

Tento stav bude superpozicí všech možných stavů, do kterých se stav $|i\rangle$ může vyvinout vlivem uvažované interakce. V našem příkladu by to byly, při uvažování interakce (12), stavy e^-e^+ , $e^-e^+\gamma$ (písmenem γ označujeme foton), $\gamma\gamma$, $\gamma\gamma\gamma$ a mnohé další, méně pravděpodobné. Při uvažování dalších interakcí by to mohly být i stavy $\pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^-\pi^0$, $p\bar{p}$, atd.

Chceme teď zjistit, jaká je pravděpodobnost, že soustava se bude v čase t nacházet v určitém specifickém stavu $|f\rangle$. Amplituda této pravděpodobnosti je rovna skalárnímu součinu

$$\langle f|\psi; t\rangle = \langle f|\hat{U}(t, t_0)|i\rangle = U_{fi}(t, t_0),$$

tj maticovému elementu evolučního operátoru mezi zadaným počátečním (initial) a uvažovaným koncovým (final) stavem. Příslušná pravděpodobnost přechodu ze stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$ je rovna

$$P_{fi}(t, t_0) = |U_{fi}(t, t_0)|^2. \quad (20)$$

Jestliže v našem příkladu zvolíme

$$|f\rangle = \hat{c}_{\vec{k}_1, \lambda_1}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}_2, \lambda_2}^\dagger |0\rangle,$$

vztah (20) nám poskytne pravděpodobnost, že v čase t najdeme místo původního elektron-pozitronového stavu dva fotony, jeden s hybností \vec{k}_1 a polarizací λ_1 , druhý s hybností \vec{k}_2 a polarizací λ_2 . Formulováno jinak, získáme pravděpodobnost, že během časového intervalu $\tau = t - t_0$ dojde k procesu (reakci) $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$.

Maticový element evolučního operátoru parametrizujeme vztahem (o oprávněnosti této parametrizace se přesvědčíme při výpočtu U_{fi} různých konkrétních procesů)

$$U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi} = K \text{iM} D(t, t_0, P_f, P_i). \quad (21)$$

kterým je definována amplituda \mathcal{M} uvažovaného procesu. Význam ostatních symbolů je následující:

- Symbol δ_{fi} je roven jedné, když konečný stav je identický s počátečním, jinak je nulový.
- Veličina K závisí na výběru normalizace jednočásticových stavů. Při našem normování na konečný objem V je rovna

$$K = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2VE_i}}, \quad (22)$$

kde součin probíhá přes všechny zúčastněné částice (v počátečním i koncovém stavu) a E_i je energie *ité* částice v soustavě hmotného středu (cms, center of mass system).

- Funkce $D(t, t_0, P_f, P_i)$ je definována vztahem

$$D(t, t_0, V, P_f, P_i) = \int_{t_0}^t dt' \int_{(V)} d^3x' e^{i(P_f - P_i)x'} \quad (23)$$

kde P_f je celková čtyřhybnost konečného stavu a P_i celková čtyřhybnost stavu počátečního, čtyřvektor $x' \equiv (t', \vec{x}')$. V limitě $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ snadno ve funkci D (23) rozpoznáme jednu z možných reprezentací Diracovy čtyřrozměrné delta funkce

$$D(t, t_0, V, P_f, P_i) \longrightarrow (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i), \quad (24)$$

$$\lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty \\ V \rightarrow \infty}} D(t, t_0, V, P_f, P_i) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)$$

která vyjadřuje zákon zachování energie a hybnosti.

Na druhé straně, když položíme $P_f = P_i$ tak dostáváme

$$D(t, t_0, V, P_i, P_i) = V\tau, \quad (25)$$

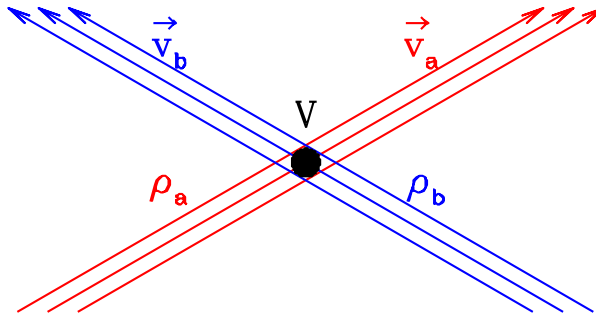
kde $\tau = t - t_0$.

Vztahem (21) definována amplituda \mathcal{M} je funkcí kinematických veličin charakterizujících uvažovaný proces a kvantových čísel participujících částic, které specifikují jejich spinové stavy, resp. polarizace.

Pravděpodobnost přechodu a amplituda procesu představují teoretické veličiny, které jsme schopni pomocí kvantové teorie interagujících polí spočítat. To ale nejsou veličiny které se dají změřit v experimentu. Experimentálně měřitelnými veličinami jsou např. účinné průřezy reakcí vyvolaných srážkou dvou částic, nebo rychlost rozpadu mateřské částice na dvě nebo více částic (související se střední dobou života nebo poločasem rozpadu). Je proto potřebné vybudovat most mezi teorií a experimentem. V dalším si odvodíme vyjádření účinného průřezu binárních reakcí (dvě částice v počátečním stavu, dvě v koncovém) pomocí amplitudy.

6 Účinný průřez

Uvažujme o dvou protínajících se svazcích částic (obr. 1). Ve svazku a je hustota částic ρ_a ,



Obrázek 1: K obecné definici účinného průřezu.

jejich rychlost je \vec{v}_a a hybnost každé z nich \vec{p}_a , podobně i ve svazku b . Střední počet (jedná se o kvantovou střední hodnotu) interakcí mezi částicemi svazku a a svazku b ke kterým dojde za čas τ v objemu V je úměrný hustotám částic ve svazcích, jejich relativní rychlosti (když částice a a b letí vedle sebe se stejnou rychlostí, k interakcím nedochází, k nejvíce interakcím dochází jestliže částice letí přímo proti sobě), objemu a času.

$$n = \sigma(\vec{p}_a, \vec{p}_b) \rho_a \rho_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b| V \tau. \quad (26)$$

Konstantu úměrnosti jsme označili jako σ a vyznačili její závislost na hybnostech částic, ze kterých můžeme určit nejenom jejich rychlosti, ale i jejich energie a celkovou energii srážky. Její fyzikální rozměr je stejný jako fyzikální rozměr obsahu plochy (m^2 , barn= 10^{-28}m^2 , ...), nazývá se účinným průřezem.

Podle výsledku interakcí, tj. koncového stavu, rozlišujeme různé druhy účinného průřezu. Když pod n v definici (26) rozumíme počet všech interakcí, bez ohledu na to, co v nich vzniklo, mluvíme o totálním účinném průřezu, σ_{tot} . Když specifikujeme druhy a počty částic v konečném stavu, ale nezajímají nás jejich kinematické charakteristiky (bereme všechno), jedná se o integrální účinný průřez.

Účinný průřez definovaný vztahem (26) není relativistickým invariantem. Výjimečné postavení má účinný průřez měřený v soustavě hmotného středu, kde platí $\vec{p}_a^* + \vec{p}_b^* = 0$ (veličiny v soustavě hmotného středu se obvykle označují hvězdičkou). Nazývá se invariantním účinným průřezem a je funkcí invariantu $s = (p_a + p_b)^2$, který je v cms roven kvadrátu součtu energií srážejících se částic. Když zapíšeme vztah (26) v soustavě hmotného středu a využijeme, že rychlost je rovna podílu hybnosti a energie, dostáváme (hvězdičky pro jednoduchost nevyznačujeme)

$$n = \sigma(s) \rho_a \rho_b v_{ab} V \tau, \quad (27)$$

kde jsme zavedli označení relativní rychlosti v soustavě hmotného středu

$$v_{ab} = \frac{|\vec{p}_a| \sqrt{s}}{E_a E_b}. \quad (28)$$

Pomocí invariantního účinného průřezu se dá vyjádřit účinný průřez v libovolné souřadné soustavě

$$\sigma(\vec{p}_a, \vec{p}_b) = \frac{v_{ab}}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|} \sigma(s). \quad (29)$$

Studenti kteří absolvovali Úvod do částicové fyziky I si vzpomenou, že relativní rychlost v soustavě cms souvisí s rychlostmi v obecné soustavě vztahem

$$v_{ab} = \sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2}.$$

Pro nás z toho plyne poznatek, že ve všech soustavách kde $\vec{v}_a \times \vec{v}_b = 0$ (takovou je i soustava laboratorní s $v_b = 0$) je účinný průřez rovný invariantnímu.

My se budeme věnovat procesům ve kterých jsou i v konečném stavu dvě částice

$$a + b \rightarrow c_1 + c_2. \quad (30)$$

Může se jednat o pružný rozptyl (např. $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ nebo o binární reakci (např. $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$, $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$).

Při detailnějším popisu reakcí mezi částicemi se nezajímáme jenom o to, jestli k reakci dojde, ale i o to jaké jsou parametry finálního stavu. Můžou se definovat různé diferenciální účinné průřezy.

Často se používá diferenciální účinný průřez který popisuje úhlové rozdělení jedné z finálních částic ve zvolené vztahné soustavě.

$$dn = \frac{d\sigma}{d\Omega} \rho_a \rho_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b| V \tau d\Omega, \quad (31)$$

kde dn je střední počet interakcí při kterých vyletí částice o kterou se zajímáme do elementu prostorového úhlu $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ (jedná se o diferenciál druhého řádu a proto by se správně mělo psát $d^2\Omega$, d^2n , $d^2\sigma$).

7 S-operátor, S-matice

Evoluční operátor umožňuje stanovit pravděpodobnost přechodu ze stavu $|i\rangle$ v čase t_0 do stavu $|f\rangle$ v čase t . To ale není to, co se měří ve srážkovém experimentu. Počáteční stav je charakterizován hybnostmi a spinovými kvantovými čísly participujících částic dlouho před tím, než

dojde k jejich interakci. Konečný stav částic definujeme pomocí jejich registrace v detektorech, dlouho potom co interakce odezněla. Pro srovnání s experimentem není proto důležitý evoluční operátor $\hat{U}(t, t_0)$, ale operátor, který dostaneme limitním přechodem

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \hat{U}(t, t_0). \quad (32)$$

Tento operátor se nazývá S-operátorem. Jeho působením dostáváme ze stavového vektoru v čase $t_0 = -\infty$, který označíme jako $|i\rangle$, stavový vektor v čase $t = +\infty$

$$|\psi; +\infty\rangle = \hat{S}|i\rangle.$$

Amplituda pravděpodobnosti, že uvažovaná kvantová soustava se bude v čase $t = +\infty$ nacházet v určitém vybraném stavu $|f\rangle$ je rovna

$$\langle f|\psi; +\infty\rangle = \langle f|\hat{S}|i\rangle = S_{fi}.$$

Kvadrát modulu maticového elementu operátoru \hat{S} je roven pravděpodobnosti přechodu soustavy ze stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$

$$P_{fi} = |S_{fi}|^2.$$

Soubor všech maticových elementů S_{fi} se nazývá S-maticí.

8 Vyjádření diferenciálního účinného průřezu (31) v cms soustavě pomocí amplitudy binární reakce

Uvažujme binární reakci

$$a + b \rightarrow c_1 + c_2.$$

Předpokládáme, že v čase t_0 byla soustava interagujících polí ve stavu $|i\rangle$, pozůstávajícím z částice a s hybností p_a a částice b s hybností p_b . Reakci budeme popisovat v soustavě hmotného středu, kde $\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$ a invariantní energie $\sqrt{s} = E_a + E_b$.

Pravděpodobnost, že v čase t se soustava bude nacházet ve stavu $|f\rangle$ (různého od $|i\rangle$), pozůstávajícího z částice c_1 s hybností \vec{p}_1 a částice c_2 s hybností \vec{p}_2 podle (20) a (21) rovna

$$P_{fi}(t, t_0) = K^2 |\mathcal{M}|^2 |D(t, t_0, P_f, P_i)|^2 \quad (33)$$

Zde narážíme na problém. Jak bylo uvedeno v sekci 7, k porovnání s experimentem musíme nakonec učinit limitní přechod (32). Při tomto limitním přechodu z funkce D dostáváme násobek Diracovy delta funkce [viz (24)]. Ale kvadrát delta funkce nemá smysl, ani když delta funkci interpretujeme pomocí teorie distribucí. Pomůžeme si tak, že na jednu D funkci aplikujeme limitní přechod (24) a pak pro výpočet druhé použijeme vztah (25). Když ještě využijeme (22), vztah (33) přechází na

$$P_{fi} = \frac{\pi^4 \tau}{V^3 E_a E_b E_1 E_2} |\mathcal{M}|^2 \delta^{(4)}(P_f - P_i), \quad (34)$$

kde $\tau = t - t_0$ je doba trvání procesu. Argumentem čtyřrozměrné delta funkce je rozdíl čtyřvektoru energie-hybnosti v konečném stavu $P_f = p_1 + p_2$ a toho ve stavu počátečním $P_i = p_a + p_b$.

Počítejme pravděpodobnost, že částice c_1 vyletí s hybností z intervalu $(\vec{p}_1, \vec{p}_1 + d\vec{p}_1)$ a částice c_2 vyletí s hybností z intervalu $(\vec{p}_2, \vec{p}_2 + d\vec{p}_2)$. Tuto pravděpodobnost dostaneme vynásobením pravděpodobnosti přechodu do jednoho stavu (34) počtem stavů

$$d^6 P_{fi} = P_{fi} \frac{V d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p_2}{(2\pi)^3},$$

kde jsme využili, že počet stavů je pro obě finální částice dán objemem fázového prostoru poděleného fázovým objemem který připadá na jeden stav, tj $(2\pi)^3$ (viz ktp1_201912.pdf str. 4). Po dosazení za P_{fi} ze vztahu (34) a rozepsání čtyřrozměrné delta funkce na dvě dostáváme

$$d^6 P_{fi} = \frac{\tau |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 V E_a E_b E_1 E_2} \delta(E_1 + E_2 - \sqrt{s}) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) d^3 p_1 d^3 p_2$$

Integraci přes \vec{p}_2 provedeme s využitím třírozměrné delta funkce (v dalším musíme všude položit $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$) a objemový element $d^3 p_1$ rozepíšeme ve sférických souřadnicích (používáme zjednodušené označení $|\vec{p}_1| = p_1$):

$$d^3 P_{fi} = \frac{\tau |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 V E_a E_b E_1 E_2} \delta(E_1 + E_2 - \sqrt{s}) p_1^2 dp_1 d\Omega$$

V dalším kroku vyintegrujeme přes p_1 . Je to trochu komplikovanější, protože v argumentu delta funkce nemáme přímo p_1 , ale funkci od p_1 . Použijeme proto známý vzorec

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\varphi'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (35)$$

kde funkce $\varphi(x)$ má n uzlů ($\varphi(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$). V našem případě je

$$\varphi(p_1) = \sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - \sqrt{s} \quad \varphi'(p_1) = \frac{p_1 \sqrt{s}}{E_1 E_2}.$$

Funkce $\varphi(p_1)$ má jediný uzel $\tilde{p}_1 = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}/(2\sqrt{s})$, kde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$. Snadno se o tom přesvědčíme řešením rovnice

$$\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} = \sqrt{s}.$$

Vlnovku v dalším opouštíme a máme

$$d^2 P_{fi} = \frac{\tau p_1 |\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 V E_a E_b \sqrt{s}} d\Omega$$

Z druhé strany, když použijeme, že v naší normalizaci je jedna částice v objemu V , t.j. $\rho_a = \rho_b = 1/V$, přechází definiční vztah diferenciálního účinného průřezu (31) na tvar

$$dn = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\tau v_{ab}}{V} d\Omega.$$

Teď využijeme, že pro málo pravděpodobné procesy je pravděpodobnost stejná jako střední hodnota, tj. $d^2 P_{fi} = dn$. Když dáme příslušné formulky do rovnosti a využijeme vyjádření (28) relativní rychlosti v soustavě hmotného středu, dostáváme vzorec

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64 \pi^2 s} \frac{|\vec{p}_1^*|}{|\vec{p}_a^*|} |\mathcal{M}|^2, \quad (36)$$

ve kterém jsme už hvězdičkou zdůraznili, že se jedná o veličiny v soustavě hmotného středu. Z něho se dají odvodit další vzorce. Například, když použijeme, že $t = (p_1 - p_a)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2(E_1 E_a - p_1 p_a \cos \theta)$ a předpokládáme, že diferenciální účinný průřez (36) nezávisí na azimutálním úhlu φ^* , lehce odvodíme vztah

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64 \pi s} \frac{1}{|\vec{p}_a^*|^2} |\mathcal{M}|^2, \quad (37)$$

který použijeme při odvozování vzorce pro diferenciální účinný průřez Comptonova rozptylu v laboratorní soustavě.

9 Vyjádření rychlosti dvoučásticového rozpadu pomocí amplitudy

Uvažujeme rozpad mateřské částice na dvě částice (např. $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$, $W^+ \rightarrow e^+\nu_e$, $H^0 \rightarrow \gamma\gamma$)

$$a \rightarrow c_1 + c_2$$

Volíme klidovou soustavu mateřské částice ($E_a = m_a$, $\vec{p}_a = 0$). Postupujeme podobně jako v případě binární reakce a postupně dostáváme pravděpodobnost přechodu do stavu s hybnostmi vycházejících částic \vec{p}_1 a \vec{p}_2

$$P_{fi} = \frac{V\tau}{8V^3 m_a E_1 E_2} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_a)$$

a pravděpodobnost přechodu do skupiny stavů v intervalech $(\vec{p}_1, \vec{p}_1 + d\vec{p}_1)$ a $(\vec{p}_2, \vec{p}_2 + d\vec{p}_2)$

$$d^6 P_{fi} = \frac{\tau}{32\pi^2 m_a E_1 E_2} |\mathcal{M}|^2 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(E_1 + E_2 - m_a) d^3 p_1 d^3 p_2.$$

Po integraci přes hybnost \vec{p}_2 dostáváme podmínku $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ a

$$d^3 P_{fi} = \frac{\tau}{32\pi^2 m_a E_1 E_2} |\mathcal{M}|^2 \delta(E_1 + E_2 - m_a) p_1^2 dp_1 d\Omega,$$

kde jsme již napsali objemový element $d^3 p_1$ ve sférickém tvaru. Při integraci přes p_1 znovu použijeme vztah (35) s

$$\varphi(p_1) = \sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_a \quad \varphi'(p_1) = \frac{p_1 m_a}{E_1 E_2}.$$

Uvedená integrace vybere ze všech p_1 to s hodnotou

$$\tilde{p}_1 = \frac{\sqrt{\lambda(m_a^2, m_1^2, m_2^2)}}{2m_a},$$

která je jako jediná kompatibilní se zákonem zachování energie. Dostáváme tak (vlnovku už nevyznačujeme)

$$d^2 P_{fi} = \frac{\tau p_1}{32\pi^2 m_a^2} |\mathcal{M}|^2 d\Omega.$$

Rychlost narůstání pravděpodobnosti rozpadu s výletem částice c_1 do elementu prostorového úhlu $d\Omega$ je

$$d\Gamma = \frac{d^2 P_{fi}}{\tau}.$$

Dostáváme tak diferenciální rychlost rozpadu (differential decay rate)

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega^*} = \frac{|\vec{p}_1^*|}{32\pi^2 m_a^2} |\mathcal{M}|^2,$$

kde hvězdička teď označuje klidovou soustavu mateřské částice.

10 Wickova věta (Wick's Theorem)

Jak jsme ukázali, při výpočtu pravděpodobnosti přechodu budeme potřebovat maticový element evolučního operátoru, který je vyjádřen Dysonovou řadou. V ní vystupuje Wickův chronologický součin několika (počet podle uvažovaného členu řady) interakčních hamiltoniánů. Interakční hamiltonián je přitom vyjádřen jako součin několika polních operátorů [např. tři v (12)]. Takže budeme postaveni před úkol spočíst maticový element T-součinu mnoha polních operátorů. Wickova věta vyjadřuje T-součin operátorů jako součet normálních součinů, jejichž maticové elementy ve Fokově prostoru už umíme snadno vyjádřit.

Nejjednodušší podoba Wickovy věty je ta pro dva operátory. Z definice kontrakce dvou operátorů [vztah (73) v ktp1_201026.pdf] plyne

$$\hat{T}(\hat{A}\hat{B}) = :\hat{A}\hat{B}: + \hat{A}\hat{B}.$$

Druhý člen na pravé straně už není operátorem, takže nemusíme normální součin vyznačovat. Wickova věta pro T-součin libovolného počtu operátorů zní (kvůli zjednodušení grafiky už stříšky nad symboly operátorů nevyznačujeme)

$$T(ABC\dots XYZ) = :ABC\dots XYZ: + \sum_{\text{kontrakce}} :ABC\dots XYZ:, \quad (38)$$

kde se sčítá přes všechny možné kontrakce. Přiblížíme si to na příkladě čtyř operátorů:

$$\begin{aligned} T(ABCD) &= :ABCD: + :A^{\bullet}B^{\bullet}CD: + :A^{\bullet}BC^{\bullet}D: + :A^{\bullet}BCD^{\bullet}: + :AB^{\bullet}C^{\bullet}D: \\ &+ :AB^{\bullet}CD^{\bullet}: + :ABC^{\bullet}D^{\bullet}: + A^{\bullet}B^{\bullet}C^{\bullet\bullet}D^{\bullet\bullet} + A^{\bullet}B^{\bullet\bullet}C^{\bullet}D^{\bullet\bullet} + A^{\bullet}B^{\bullet\bullet}C^{\bullet\bullet}D^{\bullet}. \end{aligned}$$

Abychom v případě výskytu dvou kontrakcí v jednom normálním součinu mohli odlišit o který pár operátorů se jedná, museli jsme zavést další symbol pro kontrakci (dva puntíky). Protože kontrakce není operátor, můžeme psát např.

$$:A^{\bullet}B^{\bullet}CD: = A^{\bullet}B^{\bullet}:CD:,$$

ale musíme dávat pozor na záměnu pořadí operátorů při vytváření kontrakcí:

$$:A^{\bullet}BC^{\bullet}D: = \varepsilon A^{\bullet}C^{\bullet}:BD:,$$

kde $\varepsilon = -1$ když oba operátory B a C jsou fermionové a $\varepsilon = 1$ v ostatních případech.

Vzhledem k letošnímu náročnému školnímu roku nebudeme Wickovu větu dokazovat. Případného zájemce odkazujeme na původní Wickův článek [G.C. Wick, Phys. Rev. 80, 268 (1950)]. Důkaz probíhá v rigorózním matematickém stylu—důkaz pomocné věty, potom použití metody matematické indukce.

11 Comptonův rozptyl

Budeme se zabývat rozptylem fotonů na elektronech

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-.$$

Zavedeme následující označení:

- vstupující foton: energie ω_i , hybnost \vec{k}_i , $k_i^\mu \equiv (\omega_i, \vec{k}_i)$, polarizační index λ_i , polarizační čtyřvektor $\varepsilon(\vec{k}_i, \lambda_i)$, kreační operátor $\hat{c}_{\vec{k}_i, \lambda_i}^\dagger \equiv \hat{c}_i^\dagger$

- vstupující elektron: energie E_i , hybnost \vec{p}_i , $p_i^\mu \equiv (E_i, \vec{p}_i)$, spinový index s_i , kreační operátor $\hat{b}_{\vec{p}_i, s_i}^\dagger \equiv \hat{b}_i^\dagger$
- vystupující foton: energie ω_f , hybnost \vec{k}_f , $k_f^\mu \equiv (\omega_f, \vec{k}_f)$, polarizační index λ_f , polarizační čtyřvektor $\varepsilon(\vec{k}_f, \lambda_f)$, kreační operátor $\hat{c}_{\vec{k}_f, \lambda_f}^\dagger \equiv \hat{c}_f^\dagger$
- vystupující elektron: energie E_f , hybnost \vec{p}_f , $p_f^\mu \equiv (E_f, \vec{p}_f)$, spinový index s_f , kreační operátor $\hat{b}_{\vec{p}_f, s_f}^\dagger \equiv \hat{b}_f^\dagger$
- počáteční stav: $|i\rangle = \hat{c}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger |0\rangle$
- konečný stav: $|f\rangle = \hat{c}_f^\dagger \hat{b}_f^\dagger |0\rangle$

Zavedli jsme přitom trochu jiné označení polarizačních vektorů než v KTP 1. Hybnost a polarizační index fotonu neuvádíme jako dolní indexy, ale jako argumenty v závorce, abychom uvolnili místo pro lorentzovský index v případě, že budeme pracovat s kovariantním polarizačním čtyřvektorem.

11.1 Evoluční operátor pro Comptonův rozptyl

Chceme spočítat maticový element evolučního operátoru (19), který vzhledem k naší specifikaci počátečního a koncového stavu můžeme zapsat ve tvaru

$$U_{fi}(t, t_0) = \langle 0 | \hat{b}_f \hat{c}_f \hat{U}(t, t_0) \hat{c}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger | 0 \rangle. \quad (39)$$

Omezíme se přitom jenom na nejnižší člen řady (19) který dá nenulový příspěvek k (39). Nulý člen Dysonova rozvoje (rovný 1) nepřispěje, protože konečný stav je odlišný od počátečního.

V dalším členu ($k = 1$) již vystupuje interakční hamiltonián (11), zapsán jako objemový integrál z hustoty (12), pro kterou po zavedení maticových indexů (abychom mohli měnit pořadí operátorů) máme

$$\hat{\mathcal{H}}'(x_1) = -e \gamma_{ab}^\alpha : \hat{\psi}_a(x_1) \hat{\psi}_b(x_1) \hat{A}_\alpha(x_1) : .$$

Abychom mohli uplatnit normální součin, musíme operátory polí rozepsat jako součty kladně frekvenčních částí (obsahujících anihilační operátory) a záporně frekvenčních částí (obsahujících kreační operátory). Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}'(x_1) &= -e \gamma_{ab}^\alpha \left[\hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1) + \hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1) \right] \\ &\times \left[\hat{\psi}_a^{(+)}(x_1) \hat{\psi}_b^{(+)}(x_1) - \hat{\psi}_b^{(-)}(x_1) \hat{\psi}_a^{(+)}(x_1) + \hat{\psi}_a^{(-)}(x_1) \hat{\psi}_b^{(+)}(x_1) + \hat{\psi}_a^{(-)}(x_1) \hat{\psi}_b^{(-)}(x_1) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Při aplikaci Wickovy věty je důležité si uvědomit, že kontrakce operátorů které pocházejí z téhož hamiltoniánu je rovna nule (jsou již v normálním pořadí a čas mají stejný).

První řád v Dysonově poruchovém rozvoji (19) je

$$\hat{U}^{(1)}(t, t_0) = -i \int d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}'(x_1).$$

U čtyřrozměrného integrálu nevyznačujeme oblast integrace. Je myšleno, že integrace v t_1 probíhá od t_0 po t , prostorová integrace d^3x_1 pokrývá náš normalizační objem V . Příslušný maticový element je

$$U_{fi}^{(1)}(t, t_0) = -i \int d^4x_1 \langle 0 | \hat{b}_f \hat{c}_f \hat{\mathcal{H}}'(x_1) \hat{c}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger | 0 \rangle.$$

Všimněme si strukturu vakuové střední hodnoty tu vystupující z hlediska kreačních a anihilačních operátorů fotonu. Ze (40) plyne, že fotonové operátory přispějí do ní buďto anihilačním operátorem $\hat{c}_{\vec{k},\lambda}$ anebo kreačním operátorem $\hat{c}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$. Setkáme se tak s vakuovými středními hodnotami dvou typů (tečkami vyznačujeme fermionové operátory):

1. První typ (mající původ v členu $\hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1)$ ze vztahu (40)) vede na nulový příspěvek díky působení anihilačního operátoru na pravé vakuuum

$$\langle 0 | \dots \hat{c}_f \hat{c}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{c}_i^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \dots \hat{c}_f (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{\vec{k},\lambda} + \delta_{\vec{k},\vec{k}_i} \delta_{\lambda,\lambda_i}) | 0 \rangle = 0$$

2. Druhý typ (mající původ v členu $\hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1)$ ze vztahu (40)) vede na nulový příspěvek díky působení kreačního operátoru na levé vakuuum

$$\langle 0 | \dots \hat{c}_f \hat{c}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{c}_i^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \dots (\hat{c}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{c}_f + \delta_{\vec{k},\vec{k}_f} \delta_{\lambda,\lambda_f}) \hat{c}_i^\dagger | 0 \rangle = 0$$

Z toho plyne, že první řád Dysonova rozvoje dává v případě Comptonova rozptylu nulový příspěvek k pravděpodobnosti přechodu.

Z výše uvedeného rozboru můžeme udělat i obecnější závěr. K tomu, abychom dostali nenulovou pravděpodobnost určitého procesu, musí být počet kreačních a anihilačních operátorů dodaných do vakuové střední hodnoty operátorem přechodu takový, aby byl pro každý typ částice celkový počet kreačních operátorů roven celkovému počtu anihilačních operátorů.

V případě Comptonova rozptylu to znamená, že nenulový příspěvek dají jenom struktury typu

$$\hat{\psi}^{(-)} \hat{\psi}^{(+)} \hat{A}^{(-)} \hat{A}^{(+)} . \quad (41)$$

Protože součin dvou fotonových operátorů nemůžeme získat v prvním řádu Dysonova rozvoje, musíme přejít do řádu druhého, kde je evoluční operátor vyjádřen vztahem

$$\hat{U}^{(2)}(t, t_0) = \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{T}[\hat{\mathcal{H}}'(x_1) \hat{\mathcal{H}}'(x_2)] . \quad (42)$$

Protože každý operátor $\hat{\mathcal{H}}'$ obsahuje součin dvou operátorů spinorového pole, hranatá závorka v (42) bude obsahovat součin čtyř spinorových operátorů, což je o dva víc než povoluje požadovaná struktura (41). Takže při použití Wickovy věty se uplatní jenom normální součiny ve kterých bude jedna kontrakce mezi spinorovými operátory.

Při úpravě vztahu (42) použijeme vztah (40) pro $\hat{\mathcal{H}}'(x_1)$ a podobný vztah se záměnami $x_1 \rightarrow x_2$, $a \rightarrow c$, $b \rightarrow d$ a $\alpha \rightarrow \beta$ pro $\hat{\mathcal{H}}'(x_2)$. Kvůli zjednodušení zápisu nebudeme v dalším uvádět závislost na čtyřvektorech. Rozumí se, že operátory s indexy a, b, α závisí od x_1 , ty s indexy c, d, β závisí od x_2 .

$$\hat{U}^{(2)}(t, t_0) \doteq \frac{(-i)^2}{2} (-e)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4x_1 \int d^4x_2 [\hat{A}_\alpha^{(-)} \hat{A}_\beta^{(+)} + \hat{A}_\beta^{(-)} \hat{A}_\alpha^{(+)}] \mathcal{X} \quad (43)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \hat{T} \left\{ \left[\hat{\psi}_a^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} - \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_a^{(+)} + \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(+)} + \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} - \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} + \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(+)} + \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \right] \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Ve vztahu (43) jsme místo rovnítky použili symbol \doteq abychom vyjádřili, že rovnost neplatí, protože členy které nemají strukturu (41) zahazujeme. Po obložení operátoru (42) koncovým

a počátečním stavem by nepřispívaly. Aby platila v (43) rovnost, museli bychom do hranaté závorky přidat členy $\hat{A}_\alpha^{(+)}\hat{A}_\beta^{(+)}$ a $\hat{A}_\alpha^{(-)}\hat{A}_\beta^{(-)}$.

Výsledkem součinu hranatých závorek je 16 členů, každý je součinem čtyř operátorů. Na každou takovouto čtveřici pak uplatníme Wickovu větu (38), ze které si ponecháme jenom ty normální součiny uvnitř kterých je provedena jedna kontrakce mezi operátory pocházející z různých hamiltoniánů (kontrakce dvou operátorů které pocházejí ze stejného hamiltoniánu je nulová). Pro nás ale budou z hlediska kritéria (41) důležité jenom ty, které obsahují $\hat{\psi}_a^{(-)}$ spolu s $\hat{\psi}_d^{(+)}$ anebo $\hat{\psi}_c^{(-)}$ spolu s $\hat{\psi}_b^{(+)}$. Podle výše uvedených podmínek vybereme z (44) čtveřice, které budou dávat nenulový příspěvek k maticovému elementu. Jsou to (z typografických důvodů umístíme puntík označující kontrakci vedle maticového indexu):

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \doteq & \\ & : \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_{b\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} : + : \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_{b\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_d^{(+)} : + : \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_{b\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} : + : \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_{b\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_d^{(+)} : \\ & + \\ & : \hat{\psi}_{a\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_{d\bullet}^{(+)} : + : \hat{\psi}_{a\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_{d\bullet}^{(-)} : + : \hat{\psi}_{a\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_{d\bullet}^{(+)} : + : \hat{\psi}_{a\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_{d\bullet}^{(-)} : . \end{aligned}$$

Po umístění kontrahovaných operátorů vedle sebe a vytvoření normálních součinů z nektrahovaných (počet potřebných záměn pořadí je vždy sudý, takže znaménka se nemění) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \doteq & \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_d^{(+)} \left[\hat{\psi}_{b\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(+)} + \hat{\psi}_{b\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(-)} + \hat{\psi}_{b\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(+)} + \hat{\psi}_{b\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_{c\bullet}^{(-)} \right] \\ & + \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_b^{(+)} \left[\hat{\psi}_{d\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_{a\bullet}^{(+)} + \hat{\psi}_{d\bullet}^{(+)} \hat{\psi}_{a\bullet}^{(-)} + \hat{\psi}_{d\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_{a\bullet}^{(+)} + \hat{\psi}_{d\bullet}^{(-)} \hat{\psi}_{a\bullet}^{(-)} \right] . \end{aligned}$$

Součet kontrakcí uvnitř hranatých závorek se dá zapsat jako kontrakce mezi úplnými polními operátory. V podrobnějším zápisu máme výsledek

$$\mathcal{X} \doteq \hat{\psi}_c^{(-)}(x_2) \hat{\psi}_b^{(+)}(x_1) \hat{\psi}_{d\bullet}^{(+)}(x_2) \hat{\psi}_{a\bullet}^{(+)}(x_1) + \hat{\psi}_a^{(-)}(x_1) \hat{\psi}_d^{(+)}(x_2) \hat{\psi}_{b\bullet}^{(+)}(x_1) \hat{\psi}_{c\bullet}^{(+)}(x_2) .$$

Při záměně $x_1 \leftrightarrow x_2, a \leftrightarrow c, b \leftrightarrow d$ se dva sčítance v posledním vztahu vzájemně vymění. Protože ostatní součásti vztahu (42) jsou vůči této záměně doplněné záměnou $\alpha \leftrightarrow \beta$ symetrické a na pořadí integrací nezáleží, sčítance samotné dávají stejný příspěvek k (42). Stačí uvažovat jenom jeden z nich (vybíráme ten druhý) a výsledek vynásobit dvojkou.

Kontrakci spinorových operátorů vyjádříme pomocí Feynmanova propagátoru [viz vztah (66) v spinpole.pdf]

$$\hat{\psi}_{b\bullet}^{(+)}(x_1) \hat{\psi}_{c\bullet}^{(+)}(x_2) = i[S_F(x_1 - x_2)]_{bc}$$

S přihlédnutím k (43) píšeme

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(2)}(t, t_0) \doteq & (ie)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \hat{\psi}_a^{(-)}(x_1) \hat{\psi}_d^{(+)}(x_2) [i S_F(x_1 - x_2)]_{bc} \\ & \times \left[\hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1) \hat{A}_\beta^{(+)}(x_2) + \hat{A}_\beta^{(-)}(x_2) \hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1) \right] \end{aligned}$$

Lehce nahlédneme, že teď už můžeme obnovit maticové násobení

$$\begin{aligned} \hat{U}^{(2)}(t, t_0) \doteq & i(ie)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \hat{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma^\alpha S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \hat{\psi}^{(+)}(x_2) \\ & \times \left[\hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1) \hat{A}_\beta^{(+)}(x_2) + \hat{A}_\beta^{(-)}(x_2) \hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Vzhledem tomu, že v hranaté závorce na pravé straně je součet dvou členů, můžeme i operátor na levé straně vyjádřit jako součet dvou operátorů

$$\hat{U}^{(2)}(t, t_0) \doteq \hat{U}^{(2d)}(t, t_0) + \hat{U}^{(2c)}(t, t_0) .$$

11.2 První příspěvek k amplitudě Comptonova rozptylu

Budeme se nejdřív zabývat operátorem

$$\hat{U}^{(2d)}(t, t_0) = i (ie)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma^\alpha S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \hat{\psi}^{(+)}(x_2) \hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1) \hat{A}_\beta^{(+)}(x_2). \quad (46)$$

Pro prvky tu vystupující můžeme psát na základě materiálu spinpole.pdf, vztahy (54), (57) a (69), psát

$$\hat{\psi}^{(+)}(x_2) = \sum_{\vec{p}, s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} e^{-ipx_2} u(\vec{p}, s) \hat{b}_{\vec{p}, s}, \quad (47)$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x_1) = \sum_{\vec{p}', s'} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}'}}} e^{ip'x_1} \bar{u}(\vec{p}', s') \hat{b}_{\vec{p}', s'}^\dagger, \quad (48)$$

$$S_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x_1 - x_2)} d^4p. \quad (49)$$

V materiálu elmagpole.pdf ze vztahů (76) a (77) zase vyčteme

$$\hat{A}_\beta^{(+)}(x_2) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \hat{c}_{\vec{k}, \lambda}^- \varepsilon_\beta(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx_2}, \quad (50)$$

$$\hat{A}_\alpha^{(-)}(x_1) = \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}'}}} \hat{c}_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}', \lambda') e^{ik'x_1}. \quad (51)$$

Počítejme teď maticový element operátoru (46) mezi počátečním a koncovým stavem

$$U_{fi}^{(2d)}(t, t_0) = \langle 0 | \hat{b}_f \hat{c}_f \hat{U}^{(2d)}(t, t_0) \hat{c}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger | 0 \rangle. \quad (52)$$

Po dosazení vztahů (47) až (51) do (52) získáme komplikovaný vztah, který se tady ani nepokoušíme reprodukovat. Dá se však značně zjednodušit díky tomu, že všechny operace (integrace, sumace) a symboly které nejsou operátory (říká se jim c -čísla) můžeme vyjmout z vakuové střední hodnoty. Na té nejhlubší úrovni se nám objeví vakuová střední hodnota, kterou umíme aplikací komutačních a antikomutačních vztahů lehce spočít. Výsledkem jsou Kroneckerovy symboly standardní a i ty pro vektory

$$\langle 0 | \hat{b}_f \hat{c}_f \hat{b}_{\vec{p}', s'}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}, s} \hat{c}_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}, \lambda}^- \hat{c}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\vec{p}f \vec{p}'} \delta_{s_f s'} \delta_{\vec{p}i \vec{p}} \delta_{s_i s} \delta_{\vec{k}f \vec{k}'} \delta_{\lambda_f \lambda'} \delta_{\vec{k}i \vec{k}} \delta_{\lambda_i \lambda}.$$

Z každé sumy nám zůstane jenom jeden člen s hodnotami indexů podle příslušného Kroneckerova symbolu. Snadno tak identifikujeme faktor K , zavedený v (22)

$$K = \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \frac{1}{\sqrt{2VE_f}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_i}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_f}}.$$

Než se pokusíme zapsat výsledek, změníme pořadí integrací. V (42) se má nejdřív provést integrace s čtyřrozměrným elementem d^4p [viz (49)], pak d^4x_2 a nakonec d^4x_1 . Uděláme změnu a integraci d^4p provedeme až nakonec

$$\begin{aligned} U_{fi}^{(2d)}(t, t_0) &= K (ie)^2 \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \varepsilon_\beta(\vec{k}_i, \lambda_i) \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma^\beta u(\vec{p}_i, s_i) \\ &\times \int e^{i(p_f + k_f - p)x_1} d^4x_1 \int e^{i(p - p_i - k_i)x_2} d^4x_2. \end{aligned}$$

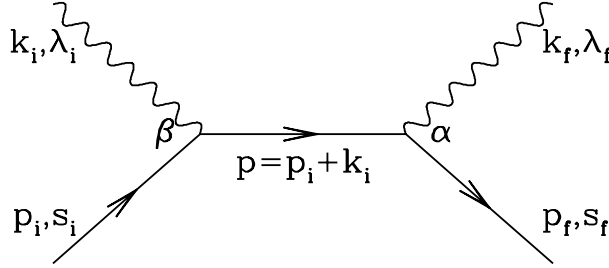
Ted' využijeme, že v limitě $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ se z posledního integrálu stává $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_i - k_i)$, což nám umožní lehce provést integraci přes d^4p tím, že všude položíme $p = p_i + k_i$. Ve zbývajícím integrálu zavedeme čtyřvektor hybnosti konečného stavu $P_f = p_f + k_f$ a čtyřvektor hybnosti počátečního stavu $P_i = p_i + k_i$. Zjistíme, že tento integrál je totožný s funkcí (23). Výsledkem tak je

$$U_{fi}^{(2d)}(t, t_0) = K (ie)^2 \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) \gamma^\alpha \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \Big|_{p=p_i+k_i} \gamma^\beta u(\vec{p}_i, s_i) \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \varepsilon_\beta(\vec{k}_i, \lambda_i) D(t, t_0, P_f, P_i).$$

Porovnáním s definičním vztahem pro amplitudu (21) získáváme první příspěvek k amplitudě Comptonova rozptylu

$$i\mathcal{M}^{(2d)} = \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) (ie\gamma^\alpha) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \Big|_{p=p_i+k_i} (ie\gamma^\beta) u(\vec{p}_i, s_i) \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \varepsilon_\beta(\vec{k}_i, \lambda_i) \quad (53)$$

ve kterém jsme kvadrát součinu (ie) rozhodli mezi matice γ . Pro názornost je této amplitudě přiřazen Feynmanův diagram zobrazený na obr. 2. Lehce najdeme korespondenci mezi částmi amplitudy (53) a prvky diagramu, která je obsahem Feynmanových pravidel. Kompletně je uvedeme později. Vnější čáry (plné se šipkou pro elektrony, vlnovky pro fotony) znázorňují



Obrázek 2: První Feynmanův diagram nejnižšího (druhého) řádu pro Comptonův rozptyl.

vstupující a vystupující částice. Odpovídající prvky amplitudy vynásobené imaginární jednotkou (53) lehce identifikujeme. Vrcholy, ve kterých se setkávají dvě fermionové a jedna fotonová čára, odpovídají interakci (12). V ní kromě dvou fermionových a jednoho fotonového operátoru vystupuje ještě gama matice a konstanta $(-e)$. n -tý člen Dysonova rozvoje obsahuje součin n interakčních hamiltoniánů a n -tou mocninou $(-i)$. Na každý interakční hamiltonián (vrchol v diagramu) tak připadá jedno $(-i)$. Proto se za každý vrchol diagramu ve výrazu (53) nachází faktor $(-i)(-e)\gamma = (ie\gamma)$ s indexem u γ který odpovídá připojenému fotonu. Vnitřní fermionová čára odpovídá výrazu mezi dvěma $(ie\gamma)$ v (53), což je podle (49) Fourierův obraz spinorového propagátoru. Říká se o ní, že představuje virtuální elektron, neboli elektron mimo hmotnostní nadplochu (protože $p^2 \neq m^2$).

Opustíme teď vztah (53), který byl pro nás důležitý tím, že Feynmanova pravidla se formulují pro $i\mathcal{M}^{(2d)}$. Uvedeme si vztah pro $\mathcal{M}^{(2d)}$, nazývané amplitudou přímého kanálu (angl. direct, odtud' to d) ve tvaru ze kterého budeme vycházet při výpočtu Comptonova účinného průřezu. Použijeme $(p_i + k_i)^2 - m^2 = 2(p_i k_i)$. Konstantu ε ve jmenovateli můžeme položit rovnou nule, protože $(p_i k_i)$ je pozitivně definitní. Zavedeme označení $u_i = u(\vec{p}_i, s_i)$, $\bar{u}_f = \bar{u}(\vec{p}_f, s_f)$. Použijeme taky Feynmanovo lomítko, např. $\not{k}_f^* = \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \gamma^\alpha$. Dostáváme tak

$$\mathcal{M}^{(2d)} = -\frac{e^2}{2(p_i k_i)} \bar{u}_f \not{k}_f^* (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \not{k}_i u_i. \quad (54)$$

11.3 Druhý příspěvek k amplitudě Comptonova rozptylu

$$\hat{U}^{(2c)}(t, t_0) = i (ie)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma^\alpha S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \hat{\psi}^{(+)}(x_2) \hat{A}_\beta^{(-)}(x_2) \hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1). \quad (55)$$

Pro úpravu tohoto vztahu použijeme vztahy (47) a (48) beze změny, vztah (49) s nepodstatným přejmenováním integrační proměnné p na q . Vztahy (50) a (51) se nám teď nehodí a musíme je nahradit vztahy

$$\hat{A}_\alpha^{(+)}(x_1) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \hat{c}_{\vec{k}, \lambda} \varepsilon_\alpha(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx_1}, \quad (56)$$

$$\hat{A}_\beta^{(-)}(x_2) = \sum_{\vec{k}', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}'}}} \hat{c}_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger \varepsilon_\beta^*(\vec{k}', \lambda') e^{ik'x_2}. \quad (57)$$

Vakuová střední hodnota která je jádrem vztahu (55) má znovu tvar

$$\langle 0 | \hat{b}_f \hat{c}_f \hat{b}_{\vec{p}', s'}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}, s} \hat{c}_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}, \lambda} \hat{c}_i^\dagger \hat{b}_i | 0 \rangle = \delta_{\vec{p}_f \vec{p}'} \delta_{s_f s'} \delta_{\vec{p}_i \vec{p}} \delta_{s_i s} \delta_{\vec{k}_f \vec{k}'} \delta_{\lambda_f \lambda'} \delta_{\vec{k}_i \vec{k}} \delta_{\lambda_i \lambda}$$

Z každé sumy nám zůstane jenom jeden člen. Snadno taky identifikujeme faktor

$$K = \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \frac{1}{\sqrt{2VE_f}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_i}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_f}}.$$

Než se pokusíme zapsat výsledek, změníme pořadí integrací. V (55) se má nejdřív provést integrace s čtyřrozměrným elementem d^4q [viz (49) s $p \rightarrow q$], pak d^4x_2 a nakonec d^4x_1 . Uděláme změnu a integraci d^4q provedeme až nakonec.

$$\begin{aligned} U_{fi}^{(2c)}(t, t_0) &= K (ie)^2 \varepsilon_\beta^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \varepsilon_\alpha(\vec{k}_i, \lambda_i) \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) \gamma^\alpha (\not{q} + m) \gamma^\beta u(\vec{p}_i, s_i) \\ &\times \int e^{i(p_f - k_i - q)x_1} d^4x_1 \int e^{i(q - p_i + k_f)x_2} d^4x_2, \end{aligned}$$

Teď využijeme, že v limitě $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ se z posledního integrálu stává $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_i + k_f)$, což nám umožní lehce provést integraci přes d^4q tím, že všude položíme $q = p_i - k_f$. Ve zbývajícím integrálu tím nabude argument exponenty hodnotu $p_f - k_i - q = p_f - k_i - p_i + k_f = P_f - P_i$, kde jsme zavedli čtyřvektor hybnosti konečného stavu $P_f = p_f + k_f$ a čtyřvektor hybnosti počátečního stavu $P_i = p_i + k_i$. Tím se ze zbývajících integrálů stává funkce (23). Dostáváme tak

$$U_{fi}^{(2c)}(t, t_0) = K (ie)^2 \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) \gamma^\alpha \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \Big|_{q=p_i - k_f} \gamma^\beta u(\vec{p}_i, s_i) \varepsilon_\beta^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \varepsilon_\alpha(\vec{k}_i, \lambda_i) D(t, t_0, P_f, P_i).$$

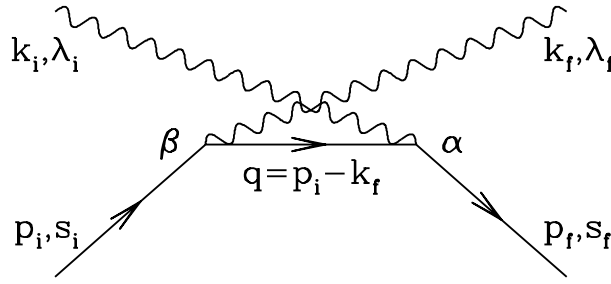
Porovnáním s definičním vztahem pro amplitudu (21) získáváme druhý příspěvek k amplitudě Comptonova rozptylu

$$i\mathcal{M}^{(2c)} = \bar{u}(\vec{p}_f, s_f) (ie\gamma^\alpha) \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \Big|_{q=p_i - k_f} (ie\gamma^\beta) u(\vec{p}_i, s_i) \varepsilon_\beta^*(\vec{k}_f, \lambda_f) \varepsilon_\alpha(\vec{k}_i, \lambda_i) \quad (58)$$

Feynmanův diagram který odpovídá této amplitudě je zobrazen na obr. 3.

Při jednodušším zápisu $\mathcal{M}^{(2c)}$, které se nazývá amplitudou zkříženého kanálu (angl. crossed, odtud to c), použijeme $(p_i - k_f)^2 - m^2 = -2(p_i k_f)$ a dostáváme

$$\mathcal{M}^{(2c)} = \frac{e^2}{2(p_i k_f)} \bar{u}_f \not{\epsilon}_i (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \not{\epsilon}_f^* u_i. \quad (59)$$



Obrázek 3: Druhý Feynmanův diagram nejnižšího (druhého) řádu pro Comptonův rozptyl.

11.4 Účinný průřez Comptonova rozptylu

Rozptyl fotonů na elektronech se nejčastěji vyšetřuje v laboratorní soustavě, kde platí $p_i \equiv (m, \vec{0})$. Protože polarizační vektory fotonů mají nulovou nultou složku, platí $(\varepsilon_i p_i) = (\varepsilon_f p_i) = 0$. Laboratorní energie fotonu vyletujícího při Comptonově rozptylu (CR) je dána vztahem

$$\omega_f = \frac{\omega_i}{1 + \frac{\omega_i}{m}(1 - \cos \theta)}, \quad (60)$$

kde ω_i je laboratorní energie dopadajícího fotonu, m je hmotnost elektronu a θ je úhel v laboratorní soustavě o který se foton odkloní od původního směru. Vztah (60) odvodíme ze zákonů zachování energie a hybnosti

$$\begin{aligned} m + \omega_i &= E_f + \omega_f \\ \vec{k}_i &= \vec{p}_f + \vec{k}_f. \end{aligned}$$

Z nich plynou vztahy

$$\begin{aligned} \vec{p}_f^2 + m^2 &= (m + \omega_i - \omega_f)^2 \\ \vec{p}_f^2 &= \omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i\omega_f \cos \theta. \end{aligned}$$

Jejich odečtením dostaneme po úpravách hledaný vztah (60).

Diferenciální účinný průřez CR v laboratorní soustavě

Diferenciální účinný průřez v laboratorní soustavě odvodíme z diferenciálního účinného průřezu (37) v invariantní proměnné t , která je definovaná jako kvadrát přenesené čtyřhybnosti. Pro pohodlí čtenáře příslušný vzorec připomínáme

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64 \pi s |\vec{p}_a^*|^2} |\mathcal{M}|^2.$$

Proměnná s je definována jako kvadrát čtyřhybnosti v počátečním stavu, v našem případě platí $s = (k_i + p_i)^2 = m^2 + 2m\omega_i$. \vec{p}_a^* je hybnost jedné ze srážejících se částic v cms soustavě. Součin $s|\vec{p}_a^*|^2 = \lambda(s, 0, m^2)/4 = m^2\omega_i^2$ [viz text za vztahem (35)].

V našem případě platí $t = (k_f - k_i)^2 = -2\omega_i\omega_f(1 - \cos \theta)$. Po menším cvičení z derivování s přihlédnutím k (60) určíme

$$\frac{dt}{d \cos \theta} = 2\omega_f^2.$$

Postupně vyjádřujeme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{d \cos \theta} \frac{d\sigma}{dt}$$

Nakonec vychází, že v laboratorní soustavě je diferenciální účinný průřez Comptonova rozptylu vyjádřen pomocí amplitudy vztahem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 |\mathcal{M}|^2. \quad (61)$$

Amplituda Comptonova rozptylu vyjádřena v laboratorní soustavě

Amplituda CR je součtem amplitudy přímého kanálu (54) a zkříženého kanálu (59). Dá se zapsat následovně

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{2} \bar{u}_f \left[-\frac{1}{(p_i k_i)} \not{\epsilon}_f^* (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \not{\epsilon}_i + \frac{1}{(p_i k_f)} \not{\epsilon}_i (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \not{\epsilon}_f^* \right] u_i, \quad (62)$$

kde $u_i = u(\vec{p}_i, s_i)$ a $u_f = u(\vec{p}_f, s_f)$ jsou Diracovy spinory vstupujícího a vystupujícího elektronu.

Při dalších úpravách použijeme obecně platné vztahy: $p_i^2 = p_f^2 = m^2$, $k_i^2 = k_f^2 = 0$, $p_i + k_i = p_f + k_f$, $\epsilon_i^2 = \epsilon_f^2 = -1$, $(\epsilon_i k_i) = (\epsilon_f k_f) = 0$, $(\not{p}_i - m)u_i = 0$, $\bar{u}_f(\not{p}_f - m) = 0$, $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2(ab)$, $\sum_{s_i} u_{i,b} \bar{u}_{i,c} = (p_i + m)_{bc}$, kde b a c jsou maticové indexy.

Díky tomu, že používáme laboratorní soustavu, platí i další vztahy: $(\epsilon_i p_i) = (\epsilon_f p_i) = 0$, $(p_i k_i) = m\omega_i$, $(p_i k_f) = m\omega_f$. Polarizační vektory volíme reálné, popisující lineární polarizaci.

Ukažme si podrobně úpravu čitatele prvního členu v (62).

$$\begin{aligned} -\bar{u}_f \not{\epsilon}_f (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \not{\epsilon}_i u_i &= -\bar{u}_f \not{\epsilon}_f (\not{p}_i \not{\epsilon}_i + \not{k}_i \not{\epsilon}_i + m \not{\epsilon}_i) u_i = -\bar{u}_f \not{\epsilon}_f (-\not{\epsilon}_i \not{p}_i - \not{\epsilon}_i \not{k}_i + m \not{\epsilon}_i) u_i \\ &= \bar{u}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i (\not{p}_i - m + \not{k}_i) u_i = \bar{u}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i u_i. \end{aligned}$$

Při záměně pořadí jsme využili vztah $\not{a}\not{b} = 2(ab) - \not{b}\not{a}$ a to, že v obou případech je skalární součin roven nule. Podobně upravíme i druhý člen a dostáváme

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{2m} \bar{u}_f Q u_i, \quad (63)$$

kde

$$Q = \frac{1}{\omega_i} \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i + \frac{1}{\omega_f} \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f. \quad (64)$$

Ve vzorci pro účinný průřez vystupuje kvadrát modulu amplitudy $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$. Z maticového hlediska je \mathcal{M} číslo, v jehož vyjádření vystupují součiny γ matic. Při stanovování \mathcal{M}^* se nám objeví matice komplexně sdružené ke γ maticím, o kterých toho moc nevíme. Využijeme, že amplituda je matice 1×1 a že pro ní tedy platí $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^\dagger$. Kvadrát amplitudy vyjádříme raději vztahem

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger,$$

ve kterém budou vystupovat matice hermitovskky sdružené ke γ maticím, se kterými umíme pracovat. Použitím (63) dostáváme

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4m^2} \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i Q' u_f, \quad (65)$$

kde

$$Q' = \gamma^0 Q^\dagger \gamma^0.$$

Mírné pocvičení s algebrou γ matic nám dá výsledek

$$Q' = \frac{1}{\omega_i} \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f + \frac{1}{\omega_f} \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i. \quad (66)$$

Předpokládáme, že elektrony na kterých dochází k rozptylu fotonů jsou nepolarizované. Pro každý elektron jsou jeho dva možné spinové stavy stejně pravděpodobné. Dále se rozhodneme, že na spinovém stavu vycházejícího elektronu nám nezáleží, budeme brát všechno. Odpovídající diferenciální účinný průřez dostaneme tak, že namísto jednoduchého kvadrátu amplitudy do (61) dosadíme kvadrát amplitudy (62) sečtený přes spinové stavy konečného elektronu a zprůměrovaný přes spinové stavy počátečního elektronu

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\mathcal{M}|^2 \quad (67)$$

Za kvadrát amplitudy sem dosadíme ze vztahu (65). Maticová násobení v něm obsažená rozepíšeme zavedením maticových indexů, abychom mohli prvky matic přemísťovat

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{8m^2} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}_{f,a} Q_{ab} u_{i,b} \bar{u}_{i,c} Q'_{cd} u_{f,d}.$$

Poslední člen součinu za sumačním znaménkem můžeme přesunout k prvnímu a využít vztahy [viz (113) v ktp1_201012.pdf] $\sum_{s_f} u_{f,d} \bar{u}_{f,a} = (p_f + m)_{da}$ a $\sum_{s_i} u_{i,b} \bar{u}_{i,c} = (p_i + m)_{bc}$. Máme tak

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{8m^2} (p_f + m)_{da} Q_{ab} (p_i + m)_{bc} Q'_{cd}.$$

Vidíme, že maticové indexy na sebe plynule navazují, takže můžeme obnovit maticové násobení. Výsledkem je prvek dd součinu čtyř matic. Přes opakující se d se ale počítá, takže dostáváme součet diagonálních prvků výsledné matice, tj její stopu (trace)

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{8m^2} \text{Tr} [(\not{p}_f + m) Q (\not{p}_i + m) Q'] .$$

Po dosazení za Q z (64) a za Q' z (66) dostáváme

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{8m^2} \left[\frac{T_1}{\omega_i^2} + \frac{T_2 + T_3}{\omega_i \omega_f} + \frac{T_4}{\omega_i^2} \right], \quad (68)$$

kde

$$T_1 = \text{Tr} [(\not{p}_f + m) \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f], \quad (69)$$

$$T_2 = \text{Tr} [(\not{p}_f + m) \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i], \quad (70)$$

$$T_3 = \text{Tr} [(\not{p}_f + m) \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f], \quad (71)$$

$$T_4 = \text{Tr} [(\not{p}_f + m) \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i]. \quad (72)$$

Začneme úpravou T_1 , které můžeme díky tomu, že stopa ze součinu lichého počtu gama matic je rovna nule, napsat jako součet stopy ze součinu osmi matic a výrazu $m^2 \text{Tr}(\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f)$. Objevuje se v něm součin $\not{k}_i \not{k}_i$, který je roven nule. Proto máme jenom $T_1 = \text{Tr}[\not{p}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f]$. Použijeme $\not{p}_i \not{k}_i = 2(p_i k_i) - \not{k}_i \not{p}_i$ a součin se dvěma \not{k}_i vedle sebe zahodíme. Takže zůstává

$$T_1 = 2(p_i k_i) \text{Tr}(\not{p}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f) = 2(p_i k_i) \text{Tr}(\not{p}_f \not{\epsilon}_f \not{k}_i \not{\epsilon}_f)$$

Při poslední úpravě se vykompenzovala změna znaménka při $\not{\epsilon}_i \not{k}_i = -\not{k}_i \not{\epsilon}_i$ s $\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_i = -1$. Na poslední stopu ze součinu čtyř gama matic už můžeme uplatnit známý vzorec

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)] \quad (73)$$

a po úpravě, při které využijeme i vztah $(k_i p_f) = (k_f p_i)$, plynoucí ze zákona zachování čtyřhybnosti, dostáváme

$$T_1 = 8m\omega_i [m\omega_f + 2(k_i \varepsilon_f)^2] . \quad (74)$$

Ve vztahu (70) pro T_2 nejdřív použijeme $p_f = p_i + k_i - k_f$ a pak hledáme výsledek ve tvaru součtu tří členů³

$$T_2 = \text{Tr} [(\not{p}_i + \not{k}_i - \not{k}_f + m)\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m)\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i] = T_{2a} + T_{2b} + T_{2c} ,$$

kde

$$\begin{aligned} T_{2a} &= \text{Tr} [(\not{p}_i + m)\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m)\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i] , \\ T_{2b} &= \text{Tr} (\not{k}_i \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i) , \\ T_{2c} &= -\text{Tr} (\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i) . \end{aligned}$$

Využili jsme přitom, že stopa ze součinu lichého počtu gama matic je rovna nule. Uvedené tři stopy se dají spočítat různými způsoby, postupy které uvádíme níže nejsou jediné možné.

Při úpravě T_{2a} nejdřív využijeme, že \not{p}_i antikomutuje (a m komutuje) s $\not{\epsilon}_f$ i $\not{\epsilon}_i$ a přesuneme první závorku o dvě místa doprava

$$T_{2a} = \text{Tr} [\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i (\not{p}_i + m)\not{k}_i (\not{p}_i + m)\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i] .$$

Do tohoto vztahu pak dosadíme $(\not{p}_i + m)\not{k}_i = 2(p_i k_i) - \not{k}_i (\not{p}_i - m)$, čímž se vztah rozpadne na dva členy. Ve druhém z nich se objeví součin $(\not{p}_i - m)(\not{p}_i + m) = p_i^2 - m^2 = 0$. Zůstane tak opět jenom jeden člen, ve kterém pak přesuneme poslední dvě matice na začátek

$$T_{2a} = 2m\omega_i \text{Tr} (\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i) = 2m\omega_i \text{Tr} (\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{p}_i \not{k}_f) .$$

Použitím vztahů $\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i = 2(\varepsilon_i \varepsilon_f) - \not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_f$ a $\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_i = -1$ dostáváme

$$T_{2a} = 2m\omega_i [2(\varepsilon_i \varepsilon_f) \text{Tr} (\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{p}_i \not{k}_f) - \text{Tr} (\not{p}_i \not{k}_f)] .$$

Po vyčíslení stop máme výsledek

$$T_{2a} = 8m^2 \omega_i \omega_f [2(\varepsilon_i \varepsilon_f)^2 - 1] .$$

Při hledání výsledku pro T_{2b} použijeme nejdřív vztah $\not{k}_i \not{\epsilon}_f = 2(k_i \varepsilon_f) - \not{\epsilon}_f \not{k}_i$, čímž dostaneme T_{2b} jako součin dvou členů. Ve druhém z nich použijeme $\not{k}_i \not{\epsilon}_i = -\not{\epsilon}_i \not{k}_i$. Tím dostaneme vedle sebe $\not{k}_i \not{k}_i = 0$, v důsledku čeho druhý člen odpadne. Zůstane nám tak jenom první člen

$$T_{2b} = 2(k_i \varepsilon_f) \text{Tr} (\not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i)$$

V něm přesuneme poslední $\not{\epsilon}_i$ na začátek a využijeme $\not{\epsilon}_i \not{\epsilon}_i = -1$. V získaném vztahu

$$T_{2b} = -2(k_i \varepsilon_f) \text{Tr} (\not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f)$$

už stačí jenom aplikovat vzorec (73) a máme výsledek

$$T_{2b} = -8m\omega_f (k_i \varepsilon_f)^2 .$$

Při výpočtu T_{2c} můžeme např. postupovat tak, že nejdřív přesuneme poslední tři matice na začátek

$$T_{2c} = -\text{Tr} (\not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i)$$

³Tuto část uvádíme kvůli úplnosti, odvození T_2 nebude na zkoušce vyžadováno.

a pak vyměníme pořadí prvních dvou

$$T_{2c} = \text{Tr}(\not{\epsilon}_f \not{k}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i).$$

Když využijeme vztah $\not{k}_f \not{\epsilon}_i = 2(k_f \epsilon_i) - \not{\epsilon}_i \not{k}_f$ a po něm i $\not{k}_f \not{k}_f = 0$, vyjde nám

$$T_{2c} = 2(k_f \epsilon_i) \text{Tr}(\not{\epsilon}_f \not{k}_f \not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i) = 2(k_f \epsilon_i) \text{Tr}(\not{k}_f \not{\epsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i).$$

Při poslední úpravě jsme využili $\not{\epsilon}_f \not{k}_f = -\not{k}_f \not{\epsilon}_f$ a $\not{\epsilon}_f \not{\epsilon}_f = -1$. Pomocí vzorce (73) dostáváme výsledek

$$T_{2c} = 8m\omega_i(k_f \epsilon_i)^2.$$

Spojením výše získaných výsledků dostáváme pro stopu T_2 , zavedenou ve vztahu (70) výsledek

$$T_2 = 8m^2\omega_i\omega_f [2(\epsilon_i \epsilon_f)^2 - 1] - 8m\omega_f(k_i \epsilon_f)^2 + 8m\omega_i(k_f \epsilon_i)^2. \quad (75)$$

Výrazy T_3 (71) a T_4 (72) už nemusíme počítat. Všimněme si, že při transformaci

$$\epsilon_i \longleftrightarrow \epsilon_f \quad \wedge \quad k_i \longleftrightarrow (-k_f)$$

[tato zahrnuje samozřejmě i transformaci nultých komponent $\omega_i \longleftrightarrow (-\omega_f)$] přechází T_1 (69) na T_4 (72) a T_2 (70) na T_3 (71). Stačí proto stejnou transformaci udělat ve výsledcích (74) a (75) a dostáváme⁴

$$T_3 = T_2 \quad (76)$$

$$T_4 = 8m\omega_f [m\omega_i - 2(k_f \epsilon_i)^2] \quad (77)$$

Po dosazení našich výsledků do (68) vychází

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = e^4 \left[\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} + 4(\epsilon_i \epsilon_f)^2 - 2 \right].$$

Když ještě použijeme $e^2 = 4\pi\alpha$ [viz ods. 1.4 v ktp1_201012.pdf] a výsledek dosadíme do (61), dostáváme vzorec Kleina a Nishiny (Oskar Klein & Yoshio Nishina, 1929)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 \left[\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} + 4(\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_f)^2 - 2 \right], \quad (78)$$

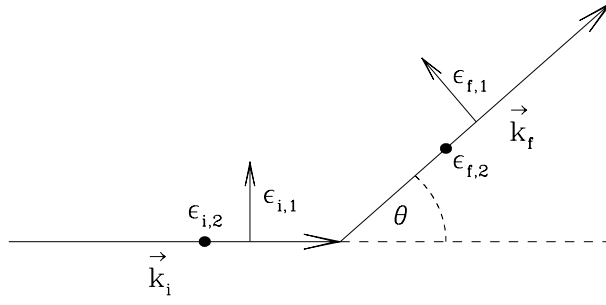
který udává diferenciální účinný průřez Comptonova rozptylu s nepolarizovanými elektrony v laboratorní soustavě. V limitě měkkých fotonů ($\omega_i \rightarrow 0$) vztah (78) přechází na klasický vzorec Thompsonův

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} (\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_f)^2.$$

Když uvažujeme svazek nepolarizovaných fotonů a nezajímá nás polarizace vycházejících fotonů, dostaneme příslušný diferenciální účinný průřez tak, že účinný průřez (78) sečteme přes polarizace vycházejícího fotonu a zprůměrujeme přes polarizace počátečního fotonu. Jeden polarizační vektor vstupujícího fotonu volíme v rovině rozptylu, druhý je na ni kolmý (viz obr. 4). Stejně volíme i polarizační vektory vycházejícího fotonu. Lehce nahlédneme, že platí

$$\vec{\epsilon}_{i,1} \cdot \vec{\epsilon}_{f,1} = \cos \theta, \quad \vec{\epsilon}_{i,1} \cdot \vec{\epsilon}_{f,2} = 0, \quad \vec{\epsilon}_{i,2} \cdot \vec{\epsilon}_{f,1} = 0, \quad \vec{\epsilon}_{i,2} \cdot \vec{\epsilon}_{f,2} = 1,$$

⁴Kdybychom použili jinou zdánlivě vhodnou transformaci $\{\epsilon_i \leftrightarrow \epsilon_f \wedge k_i \leftrightarrow k_f\}$ dostaneme zlé výsledky, protože tato transformace narušuje zákon zachování $k_f + p_f = k_i + p_i$.



Obrázek 4: Volba polarizačních vektorů u Comptonova rozptylu.

takže

$$\sum_{\lambda_i, \lambda_f} (\vec{\epsilon}_{i, \lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{f, \lambda_f})^2 = 1 + \cos^2 \theta. \quad (79)$$

Když využijeme (79) dostaneme Kleinův a Nishinův vzorec pro Comptonův rozptyl nepolarizovaných fotonů na nepolarizovaných elektronech v laboratorní soustavě, který zní

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - \sin^2 \theta \right), \quad (80)$$

Celkový účinný průřez

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

je jako funkce $\nu = \omega_i/m$ dán vztahem

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{m^2\nu^2} \left[\frac{\nu^2 - 2\nu - 2}{2\nu} \ln(1 + 2\nu) + \frac{\nu^3 + 9\nu^2 + 8\nu + 2}{(1 + 2\nu)^2} \right], \quad (81)$$

kterého odvození nebude na zkoušce vyžadováno.

Pro ilustraci uvádíme, že pro $\omega_i = 100$ MeV vychází $\sigma = 8,20$ mb. Abychom ale tento výsledek dostali, musíme opustit námi používanou soustavu jednotek $\hbar = c = 1$ a doplnit do vzorce (81) \hbar a c v příslušných mocninách. Modifikovaný vzorec je výhodné zapsat ve tvaru

$$\sigma = (\hbar c)^2 \frac{2\pi\alpha^2}{(mc^2)^2\nu^2} \left[\frac{\nu^2 - 2\nu - 2}{2\nu} \ln(1 + 2\nu) + \frac{\nu^3 + 9\nu^2 + 8\nu + 2}{(1 + 2\nu)^2} \right]$$

s bezrozměrnou proměnou $\nu = \omega_i/(mc^2)$. Potřebné číselné hodnoty jsou $mc^2 = 0.5110$ MeV, $(\hbar c)^2 = 0.3894$ mb MeV², $\alpha = 1/137.04$.

Pokud by si někdo chtěl ověřit, že vztah (81) přechází v limitě $\nu \rightarrow 0$ na klasický Thompsonův vzorec

$$\sigma_0 = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}, \quad (82)$$

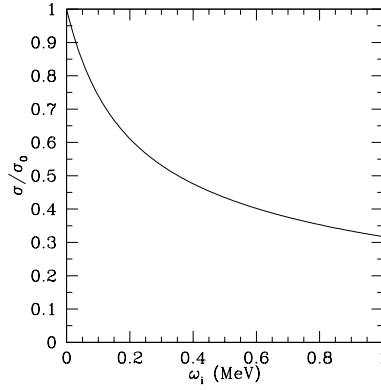
musel by použít Maclaurinův rozvoj funkce $\ln(1 + x)$ až po člen x^3 .

12 Rozptyl elektronů na pozitronech

$$e^-(\vec{p}_1, s_1) + e^+(\vec{p}_2, s_2) \rightarrow e^-(\vec{p}_3, s_3) + e^+(\vec{p}_4, s_4)$$

Počáteční stav $|i\rangle = \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_i^\dagger |0\rangle$, konečný stav $|f\rangle = \hat{b}_f^\dagger \hat{d}_f^\dagger |0\rangle$, kde $\hat{b}_i = \hat{b}_{\vec{p}_1, s_1}$, $\hat{d}_i = \hat{d}_{\vec{p}_2, s_2}$, $\hat{b}_f = \hat{b}_{\vec{p}_3, s_3}$, $\hat{d}_f = \hat{d}_{\vec{p}_4, s_4}$.

$$U_{fi}(t, t_0) = \langle 0 | \hat{d}_f \hat{b}_f \hat{U}(t, t_0) \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_i^\dagger | 0 \rangle$$



Obrázek 5: Podíl účinného průřezu Comptonova rozptylu (81) k jeho klasické limitě (82) jako funkce energie dopadajícího fotonu.

Podle pravidla, které jsme si zdůvodnili při Comptonově rozptylu, aby byl maticový element evolučního operátoru nenulový, musí evoluční operátor dodat součin jednoho kreačního operátoru elektronu (které jsou obsaženy v $\hat{\psi}^{(-)}$), jednoho kreačního operátoru pozitronu ($\hat{\psi}^{(-)}$), jednoho anihilačního operátoru pozitronu ($\hat{\bar{\psi}}^{(+)}$) a jednoho anihilačního operátoru elektronu ($\hat{\psi}^{(+)}$). Požadovaná operátorová struktura příspěvku evolučního operátoru je tedy

$$\hat{\bar{\psi}}^{(-)}\hat{\psi}^{(-)}\hat{\bar{\psi}}^{(+)}\hat{\psi}^{(+)} \quad (83)$$

Abychom dostali potřebný počet operátorů spinorového pole, musíme použít druhý řád poruchového rozvoje evolučního operátoru. Ten ale poskytuje i součin dvou operátorů elektromagnetického pole, které v požadované struktuře (83) nevystupují. Proto si z rozvoje podle Wickovy věty ponecháme jenom členy, ve kterých jsou operátory elektromagnetického pole kontrahovány.

Když vyjdeme ze vztahu (42) pro evoluční operátor ve druhém řádu a upravujeme ho s přihlédnutím ke specifikám procesu který uvažujeme zde, tak namísto vztahu (43) dostaneme vztah velice podobný, ve kterém však budou fotonové operátory kontrahovány⁵

$$\hat{U}^{(2)}(t, t_0) \doteq \frac{(-i)^2}{2} (-e)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta \mathcal{X} \quad (84)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = & \hat{T} \left\{ \left[\hat{\bar{\psi}}_a^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} - \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\bar{\psi}}_a^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \right] \right. \\ & \times \left. \left[\hat{\bar{\psi}}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} - \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\bar{\psi}}_c^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \right] \right\} \quad (85) \end{aligned}$$

Výraz který jsme si označili jako \mathcal{X} je stejný jako v případě Comptonova rozptylu. Teď si z něj však ponecháme jiné členy než tenkrát, a to ty, které po uplatnění normálního součinu povedou na strukturu (83), tj součiny, ve kterých jsou všechny čtyři operátory různé. Protože členy s kontrakcemi podle Wickovy věty by teď vedly k menšímu počtu operátorů než potřebujeme, můžeme operátor \hat{T} rovnou nahradit normálním součinem

$$\mathcal{X} \doteq : \hat{\bar{\psi}}_a^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{\bar{\psi}}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} - \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\bar{\psi}}_a^{(+)} \hat{\bar{\psi}}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(+)} - \hat{\bar{\psi}}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\bar{\psi}}_c^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\bar{\psi}}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} : .$$

⁵Připomeňme, že závislost na čtyřvektorech x explicitně nevypisujeme. Operátory s indexy a, b a α závisí od x_1 , ty s indexy c, d a β od x_2 .

Po uplatnění normálního součinu se změnil pořadí operátorů

$$\mathcal{X} \doteq \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_a^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} - \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_a^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} - \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} + \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)}.$$

Při změně pořadí operátorů ke změně znaménka nedošlo, protože počet výměn pořadí byl všude sudý. Změňme ještě pořadí sčítanců a zavedme ozávkování

$$\mathcal{X} \doteq \left[\hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_a^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} - \hat{\psi}_c^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_a^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} \right] + \left[\hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} - \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \right].$$

Teď je jasné vidět, že při transformaci $\{a \leftrightarrow c \wedge b \leftrightarrow d \wedge x_1 \leftrightarrow x_2 \wedge \alpha \leftrightarrow \beta\}$ si dva výrazy v závorkách vzájemně vymění místa. Protože (84) je vůči této transformaci symetrická, ty dva výrazy v závorkách přispívají stejně. Stačí proto uvažovat jeden z nich (vybereme si ten druhý) a výsledek vynásobit 2.

$$\hat{U}^{(2)}(t, t_0) \doteq (ie)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \hat{A}_\alpha^\bullet \hat{A}_\beta^\bullet \left[\hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} - \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \right]. \quad (86)$$

Maticový element mezi počátečním a koncovým stavem tohoto operátoru si vzhledem ke struktuře výrazu v hranaté závorce můžeme napsat jako součet dvou maticových elementů. Prvním je

$$U_{fi}^{(2d)}(t, t_0) = (ie)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \hat{A}_\alpha^\bullet \hat{A}_\beta^\bullet \langle 0 | \hat{d}_f \hat{b}_f \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_b^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_d^{(+)} \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_i^\dagger | 0 \rangle \quad (87)$$

a druhým

$$U_{fi}^{(2c)}(t, t_0) = -(ie)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \hat{A}_\alpha^\bullet \hat{A}_\beta^\bullet \langle 0 | \hat{d}_f \hat{b}_f \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_i^\dagger | 0 \rangle. \quad (88)$$

Věnujme se nejdřív výpočtu prvního maticového elementu. K tomu budeme potřebovat operátory

$$\hat{\psi}_a^{(-)}(x_1) = \sum_{\vec{p}, s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} e^{ipx_1} \bar{u}_a(\vec{p}, s) \hat{b}_{\vec{p}, s}^\dagger, \quad (89)$$

$$\hat{\psi}_b^{(-)}(x_1) = \sum_{\vec{p}', s'} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}'}}} e^{ip'x_1} v_b(\vec{p}', s') \hat{d}_{\vec{p}', s'}^\dagger, \quad (90)$$

$$\hat{\psi}_c^{(+)}(x_2) = \sum_{\vec{q}, r} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{q}}}} e^{-iqx_2} \bar{v}_c(\vec{q}, r) \hat{d}_{\vec{q}, r}, \quad (91)$$

$$\hat{\psi}_d^{(+)}(x_2) = \sum_{\vec{q}', r'} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{q}'}}} e^{-iq'x_2} u_d(\vec{q}', r') \hat{b}_{\vec{q}', r'}. \quad (92)$$

Po dosazení operátorů (89–92) do (87) dostaneme komplikovaný vztah, jádrem kterého bude vakuová střední hodnota ze součinu kreačních a anihilačních operátorů. Její hodnotu lehce určíme pomocí antikomutačních vztahů mezi těmito operátory. Dostaneme

$$\langle 0 | \hat{d}_f \hat{b}_f \hat{b}_{\vec{p}, s}^\dagger \hat{d}_{\vec{p}', s'}^\dagger \hat{d}_{\vec{q}, r} \hat{b}_{\vec{q}', r'} \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_i^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\vec{p}_3 \vec{p}} \delta_{s_3 s} \delta_{\vec{p}_4 \vec{p}'} \delta_{s_4 s'} \delta_{\vec{p}_1 \vec{q}'} \delta_{s_1 r'} \delta_{\vec{p}_2 \vec{q}} \delta_{s_2 r}. \quad (93)$$

Díky Kroneckerovým symbolům z každé sumy, mající původ ve vztazích (89–92), jenom jeden člen. Například operátor (89) bude do výsledného výrazu přispívat faktorem

$$\frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}_3}}} e^{ip_3 x_1} \bar{u}_a(\vec{p}_3, s_3).$$

Ve vzniklém vztahu můžeme lehce identifikovat faktor

$$K = \prod_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}_i}}}.$$

V dalším použijeme vztah pro kontrakci fotonových operátorů [str. 17 materiálu elmagpole.pdf z 3.4.2021, kombinace vztahů (85) a (87)]

$$\hat{A}_\alpha^\bullet(x_1)\hat{A}_\beta^\bullet(x_2) = \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (94)$$

Když vytkneme konstantní výrazy před integrál a obnovíme maticové násobení, z (87) dostáváme

$$U_{fi}^{(2d)}(t, t_0) = K(ie)^2 \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\alpha v(\vec{p}_4, s_4) \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\beta u(\vec{p}_1, s_1) \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{(2\pi)^4} \mathcal{Y}, \quad (95)$$

kde jsme označili

$$\mathcal{Y} = \int d^4x_1 e^{i(p_3+p_4)x_1} \int d^4x_2 e^{-i(p_1+p_2)x_2} \int d^4k \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 + i\varepsilon}.$$

Změníme pořadí integrací a máme

$$\mathcal{Y} = \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \int d^4x_1 e^{i(p_3+p_4-k)x_1} \int d^4x_2 e^{i(k-p_1-p_2)x_2}.$$

V limitě $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ se z posledního integrálu stává $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2)$, což nám umožní lehce provést integraci přes d^4k tím, že všude položíme $k = p_1 + p_2$. Zůstane nám tak

$$\mathcal{Y} = \frac{(2\pi)^4}{k^2 + i\varepsilon} \int d^4x_1 e^{i(p_3+p_4-p_1-p_2)x_1},$$

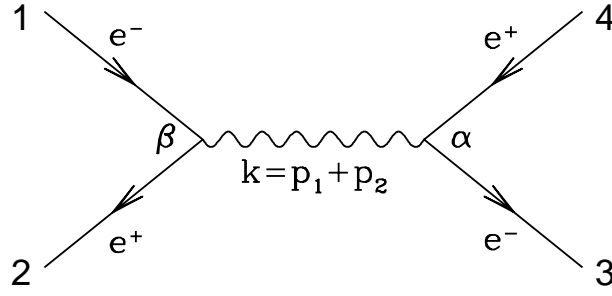
kde $k = p_1 + p_2$. Po zavedení označení $P_f = p_3 + p_4$ a $P_i = p_1 + p_2$ se ze zbývajících integrálů stává funkce (23). Po dosazení do (95) dostáváme

$$U_{fi}^{(2d)}(t, t_0) = K(ie)^2 \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\alpha v(\vec{p}_4, s_4) \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\beta u(\vec{p}_1, s_1) \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{k^2 + i\varepsilon} \Big|_{k=p_1+p_2} D(t, t_0, V, P_i, P_f). \quad (96)$$

Porovnáním s definičním vztahem pro amplitudu (21) získáváme první příspěvek k amplitudě rozptylu elektronů na pozitronech

$$i\mathcal{M}^{(2d)} = \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) (ie\gamma^\alpha) v(\vec{p}_4, s_4) \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{k^2 + i\varepsilon} \Big|_{k=p_1+p_2} \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) (ie\gamma^\beta) u(\vec{p}_1, s_1). \quad (97)$$

Této amplitudě přiřazen Feynmanův diagram, nazývaný přímým (angl. direct, odtud to d v označení amplitudy), je uvedený na obr. 6. Vstupující a vycházející pozitron jsou v něm vyznačeny plnými čarami, ale šipkami orientovanými opačně jako u elektronů. V amplitudě (97) nalézáme tři nové prvky: příspěvek za vstupující pozitron $\bar{v}(\vec{p}_2, s_2)$, příspěvek za vycházející pozitron $v(\vec{p}_4, s_4)$ a příspěvek za vnitřní fotonovou čáru (virtuální foton) se čtyřhybností k spojující dva vrcholy s indexy α a β , rovnající se $(-ig_{\alpha\beta})/(k^2 + i\varepsilon)$. Feynmanovy diagramy, které tady používáme, nejsou diagramy v prostoročase, ale v hybnostním prostoru. Nicméně svádějí k představě, že v určitém bodě (prvním vrcholu) dojde k anihilaci elektronu a pozitronu na masivní foton, který se po určitém čase (ve druhém vrcholu) rozpadne zpátky na elektron a pozitron.



Obrázek 6: Přímý Feynmanův diagram pro rozptyl elektronů na pozitronech.

Věnujme se teď druhému maticovému elementu, danému vztahem (88), který tu pro pohodlí čtenáře znovu uvádíme

$$U_{fi}^{(2c)}(t, t_0) = -(ie)^2 \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \int d^4x_1 \int d^4x_2 A_\alpha^\bullet A_\beta^\bullet \langle 0 | \hat{d}_f \hat{b}_f \hat{\psi}_a^{(-)} \hat{\psi}_d^{(-)} \hat{\psi}_c^{(+)} \hat{\psi}_b^{(+)} \hat{b}_i^\dagger \hat{d}_i^\dagger | 0 \rangle$$

spolu s potřebnými polními operátory

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_a^{(-)}(x_1) &= \sum_{\vec{p}, s} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}}}} e^{ipx_1} \bar{u}_a(\vec{p}, s) \hat{b}_{\vec{p}, s}^\dagger, \\ \hat{\psi}_d^{(-)}(x_2) &= \sum_{\vec{p}', s'} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}'}}} e^{ip'x_2} v_d(\vec{p}', s') \hat{d}_{\vec{p}', s'}^\dagger, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_c^{(+)}(x_2) &= \sum_{\vec{q}, r} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{q}}}} e^{-iqx_2} \bar{v}_c(\vec{q}, r) \hat{d}_{\vec{q}, r}, \\ \hat{\psi}_b^{(+)}(x_1) &= \sum_{\vec{q}', r'} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{q}'}}} e^{-iq'x_1} u_b(\vec{q}', r') \hat{b}_{\vec{q}', r'}, \end{aligned} \quad (99)$$

Číslovíme jenom nové operátory, které se při výpočtu prvního maticového elementu nevyskytly. Vakuová střední hodnota která se na nejhlubší úrovni vztahu pro druhý maticový element objeví je stejná jako v případě prvního příspěvku (93) a tudíž implikuje stejná pravidla pro výběr sumačních indexů ve výrazech pro polní operátory. Pro hybnosti jsou to:

$$\vec{p} = \vec{p}_3, \quad \vec{p}' = \vec{p}_4, \quad \vec{q}' = \vec{p}_1, \quad \vec{q} = \vec{p}_2.$$

Analogické vztahy platí i pro spinové indexy. Po ponechání jenom odpovídajících členů ze sum v polních operátorech a využití vztahu pro kontrakci fotonových operátorů (94), ve kterém opatříme integrační proměnnou čárkou, dostáváme

$$U_{fi}^{(2c)}(t, t_0) = -K (ie)^2 \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\alpha u(\vec{p}_1, s_1) \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\beta v(\vec{p}_4, s_4) \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{(2\pi)^4} \mathcal{Z}, \quad (100)$$

kde

$$\mathcal{Z} = \int d^4x_1 e^{i(p_3 - p_1)x_1} \int d^4x_2 e^{i(p_4 - p_2)x_2} \int d^4k' \frac{e^{-ik'(x_1 - x_2)}}{k'^2 + i\epsilon}.$$

Změníme pořadí integrací a máme

$$\mathcal{Z} = \int \frac{d^4k'}{k'^2 + i\epsilon} \int d^4x_1 e^{i(p_3 - p_1 - k')x_1} \int d^4x_2 e^{i(k' + p_4 - p_2)x_2}.$$

V limitě $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ se z posledního integrálu stává $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p_4 - p_2)$, což nám umožní lehce provést integraci přes $d^4 k'$ tím, že všude položíme $k' = p_2 - p_4$. Zůstane nám tak

$$\mathcal{Z} = \frac{(2\pi)^4}{k'^2 + i\varepsilon} \int d^4 x_1 e^{i(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)x_1},$$

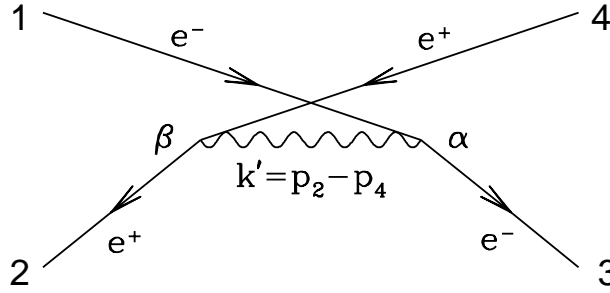
kde $k' = p_2 - p_4$. Po zavedení označení $P_f = p_3 + p_4$ a $P_i = p_1 + p_2$ se ze zbývajících integrálů stává funkce (23). Po dosazení do (100) dostáváme

$$U_{fi}^{(2c)}(t, t_0) = -K(i\varepsilon)^2 \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\alpha u(\vec{p}_1, s_1) \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\beta v(\vec{p}_4, s_4) \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{k'^2 + i\varepsilon} \Big|_{k'=p_2-p_4} D(t, t_0, V, P_i, P_f). \quad (101)$$

Porovnáním s definičním vztahem pro amplitudu (21) získáváme druhý příspěvek k amplitudě rozptylu elektronů na pozitronech

$$i\mathcal{M}^{(2c)} = (-1) \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) (ie\gamma^\alpha) u(\vec{p}_1, s_1) \frac{(-ig_{\alpha\beta})}{k'^2 + i\varepsilon} \Big|_{k'=p_2-p_4} \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) (ie\gamma^\beta) v(\vec{p}_4, s_4). \quad (102)$$

V této amplitudě se objevil nový prvek, faktor (-1) za zkřížené fermionové nohy⁶. Amplitudě (102) přiřazený Feynmanův diagram, nazývaný zkříženým (crossed, proto c), je zobrazen na obr. 7.



Obrázek 7: Zkřížený Feynmanův diagram pro rozptyl elektronů na pozitronech.

Než půjdeme dále, musíme se vypořádat s tím, že jsme pro kontrakci fotonových operátorů použili zjednodušený vztah (94) namísto správného

$$\hat{A}_\alpha^\bullet(x_1) \hat{A}_\beta^\bullet(x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 + i\varepsilon} P_{\alpha\beta}(k),$$

kde

$$P_{\alpha\beta}(k) = -g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{(nk)^2} + \frac{k_\alpha n_\beta + n_\alpha k_\beta}{(nk)}$$

je polarizační tenzor v případě Coulombovy kalibrace. Zjednodušení spočívalo v tom, že ve vztahu pro polarizační tenzor jsme neuvažovali členy obsahující čtyřvektor k . Teď si ukážeme, že i kdybychom je uvažovali, dostaneme stejné výsledky pro amplitudy rozptylu elektronů na pozitronech, protože příspěvky dodatečných členů jsou nulové. Použijeme přitom vztahy (čísla ukazují na vztahy v ktp1.201012.pdf) $\not{p}u = mu$ (92), $\bar{v}\not{p} = m\bar{v}$ (93), $\not{p}v = -mv$ (98) a $\bar{v}\not{p} = -m\bar{v}$ (99).

⁶Ještě jsme neprozradili, že čarám označujícím externí (tj vstupující a vystupující) částice se říká nohy (legs) diagramu.

Když použijeme $k = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ a $k' = p_2 - p_4 = p_3 - p_1$, lehce dokážeme, že příspěvky od čtyřvektoru k k amplitudě (97) a od čtyřvektoru k' k amplitudě (102) by byly nulové i v případě použití kompletního polarizačního tenzoru:

$$\begin{aligned} k_\alpha \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\alpha v(\vec{p}_4, s_4) &= \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) (\not{p}_3 + \not{p}_4) v(\vec{p}_4, s_4) = \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) (m - m) v(\vec{p}_4, s_4) = 0, \\ k_\beta \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\beta u(\vec{p}_1, s_1) &= \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) (\not{p}_1 + \not{p}_2) u(\vec{p}_1, s_1) = \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) (m - m) u(\vec{p}_1, s_1) = 0, \\ k'_\alpha \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\alpha u(\vec{p}_1, s_1) &= \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) (\not{p}_3 - \not{p}_1) u(\vec{p}_1, s_1) = \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) (m - m) u(\vec{p}_1, s_1) = 0, \\ k'_\beta \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\beta v(\vec{p}_4, s_4) &= \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) (\not{p}_2 - \not{p}_4) v(\vec{p}_4, s_4) = \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) [-m - (-m)] v(\vec{p}_4, s_4) = 0. \end{aligned}$$

12.1 Diferenciální účinný průřez rozptylu elektronů na pozitronech

Pro reakce se dvěma částicemi (1 a 2) v počátečním a dvěma částicemi (3 a 4) v konečném stavu Mandelstam zavedl tři invarianty: $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_3 - p_1)^2$ a $u = (p_3 - p_2)^2$. Nejsou nezávislé, ale splňují vztah $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$.

Proces budeme popisovat v soustavě hmotného středu (cms), kde platí $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ a $\vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0$. Protože všechny zúčastněné částice mají stejnou hmotnost, budou mít všechny i stejnou energii E a platí $s = 4E^2$. Invariant t souvisí s úhlem rozptylu θ vztahem

$$t = -2(E^2 - m^2)(1 - \cos \theta). \quad (103)$$

Pro amplitudu rozptylu elektronů na pozitronech platí vztah

$$\mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{M}^{(2d)} + \mathcal{M}^{(2c)}, \quad (104)$$

kde amplituda přímého diagramu $\mathcal{M}^{(2d)}$ je dána vztahem (97) a amplituda zkříženého diagramu je dána vztahem (102). Tyto vztahy si nejdřív upravíme na jednodušší tvar. Kromě triviálních úprav které se přímo nabízejí, vyjádříme kvadráty čtyřhybností virtuálních fotonů pomocí Mandelstamových proměnných, $k^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$ a $k'^2 = (p_2 - p_4)^2 = t$. Dále v obou dvou vztazích můžeme položit $\varepsilon = 0$. Ve vztahu (97) proto, že $s \geq 4m^2$, ve vztahu (102) proto, že $t < 0$ kromě případu rozptylu na nulový úhel, který nebudeme uvažovat. Pomocí metrického tenzoru zavedeme do vztahů gama matice s dolním indexem $\gamma_\alpha = g_{\alpha\beta} \gamma^\beta$. Pro Diracovy bispinory použijeme zjednodušené označení, např. $u_1 = u(\vec{p}_1, s_1)$. Nakonec přejmenujeme lorentzovský index z α na μ a pro amplitudu (104) dostáváme

$$\mathcal{M}^{(2)} = e^2 \left(\frac{1}{s} \bar{u}_3 \gamma^\mu v_4 \bar{v}_2 \gamma_\mu u_1 - \frac{1}{t} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{v}_2 \gamma_\mu v_4 \right). \quad (105)$$

Při výpočtu účinného průřezu budeme potřebovat kvadrát modulu amplitudy, který budeme počítat, podobně jako u Comptonova rozptylu, pomocí vztahu

$$|\mathcal{M}^{(2)}|^2 = \mathcal{M}^{(2)} \mathcal{M}^{(2)\dagger}.$$

Určíme proto matici 1×1 hermitovscky sdruženou k (105) a z důvodů jejího příštího násobení s (105), změníme v ní označení sčítacího indexu na ν

$$\mathcal{M}^{(2)\dagger} = e^2 \left(\frac{1}{s} \bar{u}_1 \gamma_\nu v_2 \bar{v}_4 \gamma^\nu u_3 - \frac{1}{t} \bar{v}_4 \gamma_\nu v_2 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_3 \right). \quad (106)$$

V dalším budeme určovat účinný průřez pro nepolarizované elektrony a pozitrony, tj součet přes spinové stavy částic v konečném stavu a průměr přes spinové stavy částic v počátečním stavu.

Proto teď počítejme součet kvadrátů amplitud pro různé spinové stavy. Parametrizujeme ho formulí

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}^{(2)}|^2 = e^4 \left(\frac{Y_1}{s^2} - \frac{Y_2 + Y_3}{st} + \frac{Y_4}{t^2} \right) \quad (107)$$

První člen v závorce dostaneme vynásobením prvního členu ze závorky v (105) prvním členem ze závorky v (106). Proto máme

$$Y_1 = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \bar{u}_3 \gamma^\mu v_4 \bar{v}_2 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma_\nu v_2 \bar{v}_4 \gamma^\nu u_3 = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \bar{u}_{3a} \gamma_{ab}^\mu v_{4b} \bar{v}_{2c} \gamma_{\mu cd} u_{1d} \bar{u}_{1e} \gamma_{\nu ef} v_{2f} \bar{v}_{4g} \gamma_{gh}^\nu u_{3h}$$

Ve druhém kroku jsme maticové násobení rozepsali pomocí prvků matic, maticové indexy kterých označujeme latinkou. Rozumí se sumace přes opakuující se indexy, které nabývají hodnoty od 1 po 4. Pořadí prvků můžeme libovolně měnit, uspořádáme je tak, abychom mohli využít vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{s_4} v_{4b} \bar{v}_{4g} &= (\not{p}_4 - m)_{bg} \\ \sum_{s_3} u_{3h} \bar{u}_{3a} &= (\not{p}_3 + m)_{ha} \\ \sum_{s_2} v_{2f} \bar{v}_{2c} &= (\not{p}_2 - m)_{fc} \\ \sum_{s_1} u_{1d} \bar{u}_{1e} &= (\not{p}_1 + m)_{de} \end{aligned}$$

plynoucí ze vztahů (113) v ktp1_201012.pdf. Jednotlivé členy potom uspořádáme tak, aby maticové indexy na sebe plynule navazovaly. Celý výraz se dá napsat jako součin dvou skupin, v rámci každé ze skupin budeme moci obnovit maticové násobení. Skupiny zvýrazňujeme zavedením hranatých závorek

$$Y_1 = [(\not{p}_4 - m)_{bg} \gamma_{gh}^\nu (\not{p}_3 + m)_{ha} \gamma_{ab}^\mu] \times [(\not{p}_2 - m)_{fc} \gamma_{\mu cd} (\not{p}_1 + m)_{de} \gamma_{\nu ef}] .$$

V první závorce máme součin čtyř čtvercových matic. Jeho výsledkem je prvek bb výsledné matice. Protože přes b se počítá, dostáváme stopu výsledné matice. Podobně je to i ve druhé hranaté závorce. Výsledkem tedy je

$$Y_1 = \text{Tr} [(\not{p}_4 - m) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m) \gamma^\mu] \text{Tr} [(\not{p}_2 - m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu] \quad (108)$$

Když vynásobíme první člen ze závorky v (105) druhým členem ze závorky v (106) dostáváme (znaménko minus je zohledněno v (107))

$$Y_2 = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \bar{u}_3 \gamma^\mu v_4 \bar{v}_2 \gamma_\mu u_1 \bar{v}_4 \gamma_\nu v_2 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_3 = \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \bar{u}_{3a} \gamma_{ab}^\mu v_{4b} \bar{v}_{2c} \gamma_{\mu cd} u_{1d} \bar{v}_{4e} \gamma_{\nu ef} v_{2f} \bar{u}_{1g} \gamma_{gh}^\nu u_{3h} .$$

Kromě předešlých zaangažujeme i další dva vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{s_4} v_{4b} \bar{v}_{4e} &= (\not{p}_4 - m)_{be} \\ \sum_{s_1} u_{1d} \bar{u}_{1g} &= (\not{p}_1 + m)_{dg} \end{aligned}$$

a dostaneme

$$Y_2 = (\not{p}_3 + m)_{ha} \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_4 - m)_{be} \gamma_{\nu ef} (\not{p}_2 - m)_{fc} \gamma_{\mu cd} (\not{p}_1 + m)_{dg} \gamma_{gh}^\nu$$

Na rozdíl od případu Y_1 tady maticové indexy na sebe navazují po celé délce výrazu. Výsledkem je prvek hh matice která je součinem osmi matic. Po sčítání přes h dostáváme stopu

$$Y_2 = \text{Tr} [(\not{p}_3 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m)\gamma_\nu(\not{p}_2 - m)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] . \quad (109)$$

Podobně určíme i Y_3 a Y_4 . Pro snazší porovnání zde uvádíme všechny výsledky:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{Tr} [(\not{p}_4 - m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^\mu] \text{Tr} [(\not{p}_2 - m)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu] , \\ Y_2 &= \text{Tr} [(\not{p}_3 + m)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m)\gamma_\nu(\not{p}_2 - m)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu] , \\ Y_3 &= \text{Tr} [(\not{p}_3 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{p}_2 - m)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m)\gamma^\nu] , \\ Y_4 &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma^\mu] \text{Tr} [(\not{p}_2 - m)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m)\gamma_\nu] . \end{aligned}$$

Všimněme si, že když v Y_1 uděláme záměnu $p_1 \leftrightarrow -p_4$ (nebo $p_2 \leftrightarrow -p_3$) dostaneme Y_4 . Při této záměně dojde i k záměně Mandelstamových invariantů $s \leftrightarrow t$ a invariant u zůstane nezměněn. To má za následek, že když si vyjádříme Y_1 pomocí s a t , k určení Y_4 stačí ve vztahu pro Y_1 přejmenovat s na t a *vice versa*. Okamžitě, bez dalšího počítání, tak dostaneme Y_4 .

Stejnou úvahu můžeme aplikovat i na Y_2 a Y_3 se stejným výsledkem.

Speciálním důsledkem výše uvedeného je invariance součtu kvadrátů modulů amplitud (107) při transformaci $s \leftrightarrow t$. Tento jev je speciálním případem křížové symetrie (*angl.* crossing symmetry). Dá se aplikovat i na amplitudy samotné, jenom $p_1 \leftrightarrow -p_4$ musíme doplnit transformací polarizačních vektorů $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_4^*$.

Křížová transformace $p_1 \leftrightarrow -p_4$ se dá ilustrovat i diagramaticky. Když na přímém diagramu (obr. 6) přejde elektron z počátečního stavu s čtyřhybností p_1 do konečného stavu jako pozitron s čtyřhybností $p_4 = -p_1$ a pozitron z konečného stavu s čtyřhybností p_4 přejde do počátečního stavu jako elektron s čtyřhybností $p_1 = -p_4$, získáváme zkřížený diagram (obr. 7). Při křížové transformaci se přímý a zkřížený diagram vzájemně vymění.

Experimenty které zkoumají srážky elektronů s pozitrony probíhají na zařízeních nazývaných akumulární prstence (storage rings). V nich obíhají proti sobě svazky elektronů a pozitronů a v několika navržených místech se protínají. První takovéto zařízení, AdA, bylo navrženo a konstruováno počátkem 60. let minulého století. Elektrony i pozitrony v něm měly energii $E=200$ MeV, obvod prstence byl 4 metry. Doposud největší zařízení tohoto druhu, LEP v CERN, které bylo v provozu v letech 1989-2000, mělo obvod 27 km a celková energie srážejícího se elektronu a pozitronu byla $2E=209$ GeV. Dlužno říci, že pružný rozptyl elektronů na pozitronech, který tady vyšetřujeme, má v současných experimentech malý význam a pozornost se soustřeďuje na produkci a zkoumání nových částic.

Při energiích srážky mezi elektrony a pozitrony které vysoce převyšují klidovou energii elektronu ($mc^2 = 0,511$ MeV) můžeme položit $m = 0$, čímž se nám výpočty značně zjednoduší. Začneme výpočtem Y_1 , které je po zanedbaní hmotnosti dáno vztahem

$$Y_1 = \text{Tr} (\not{p}_4\gamma^\nu\not{p}_3\gamma^\mu) \text{Tr} (\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu) .$$

Začneme výpočtem první stopy, při kterém použijeme známý vzorec pro stopu součinu čtyř gama matic

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\mu) = 4 \left(g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\nu\mu} \right) \quad (110)$$

a dostaneme

$$Y_{1a} = 4 [p_4^\nu p_3^\mu + p_4^\mu p_3^\nu - (p_3 p_4) g^{\nu\mu}] . \quad (111)$$

Pro druhou stopu podobně dostáváme

$$Y_{1b} = 4 [p_{2\nu} p_{1\mu} + p_{2\mu} p_{1\nu} - (p_1 p_2) g_{\nu\mu}] . \quad (112)$$

Vzájemným vynásobením stop dostáváme

$$Y_1 = 32[(p_1 p_3)(p_2 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3)]$$

Ted' použijeme vyjádření součinů čtyřhybností pomocí Mandelstamových proměnných v případě nulových hmotností: $(p_1 p_3) = (p_2 p_4) = -t/2$ a $(p_1 p_4) = (p_2 p_3) = -u/2 = (s+t)/2$ a dostáváme

$$Y_1 = 8(s^2 + 2st + 2t^2). \quad (113)$$

Vztah pro Y_2 vypadá při nulové hmotnosti následovně:

$$Y_2 = \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\nu].$$

Nejdřív při úpravě součinu pěti posledních matic použijeme vzorec

$$\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\nu = -2 \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \quad (114)$$

a dostáváme

$$Y_2 = -2 \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_4 \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2].$$

Když použijeme vztah

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4 g^{\alpha\beta} \quad (115)$$

tak nám vyjde

$$Y_2 = -8(p_1 p_4) \text{Tr} [\not{p}_3 \not{p}_2] = -32(p_1 p_4)(p_2 p_3) = -8u^2,$$

takže jako výsledek dostáváme

$$Y_2 = -8(s+t)^2. \quad (116)$$

S využitím křížové symetrie dostaneme další výsledky

$$Y_3 = -8(s^2 + 2st + t^2), \quad (117)$$

$$Y_4 = 8(t^2 + 2st + 2s^2). \quad (118)$$

a podle (107) i

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}^{(2)}|^2 = 16 e^4 \left(\frac{s}{t} + 1 + \frac{t}{s} \right)^2$$

Při výpočtu účinného průřezu nepolarizovaného rozptylu musíme do obvyklého vzorce pro účinný průřez místo kvadrátu amplitudy dosadit kvadrát amplitudy sčítaný přes spinové stavy finálních částic a zprůměrovaný přes spinové stavy iniciálních částic, což v našem případě znamená

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}^{(2)}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}^{(2)}|^2 \\ \overline{|\mathcal{M}^{(2)}|^2} &= 4e^4 \left(\frac{s}{t} + 1 + \frac{t}{s} \right)^2. \end{aligned} \quad (119)$$

Pro úpravu členů v závorce ted' použijeme vztah

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta),$$

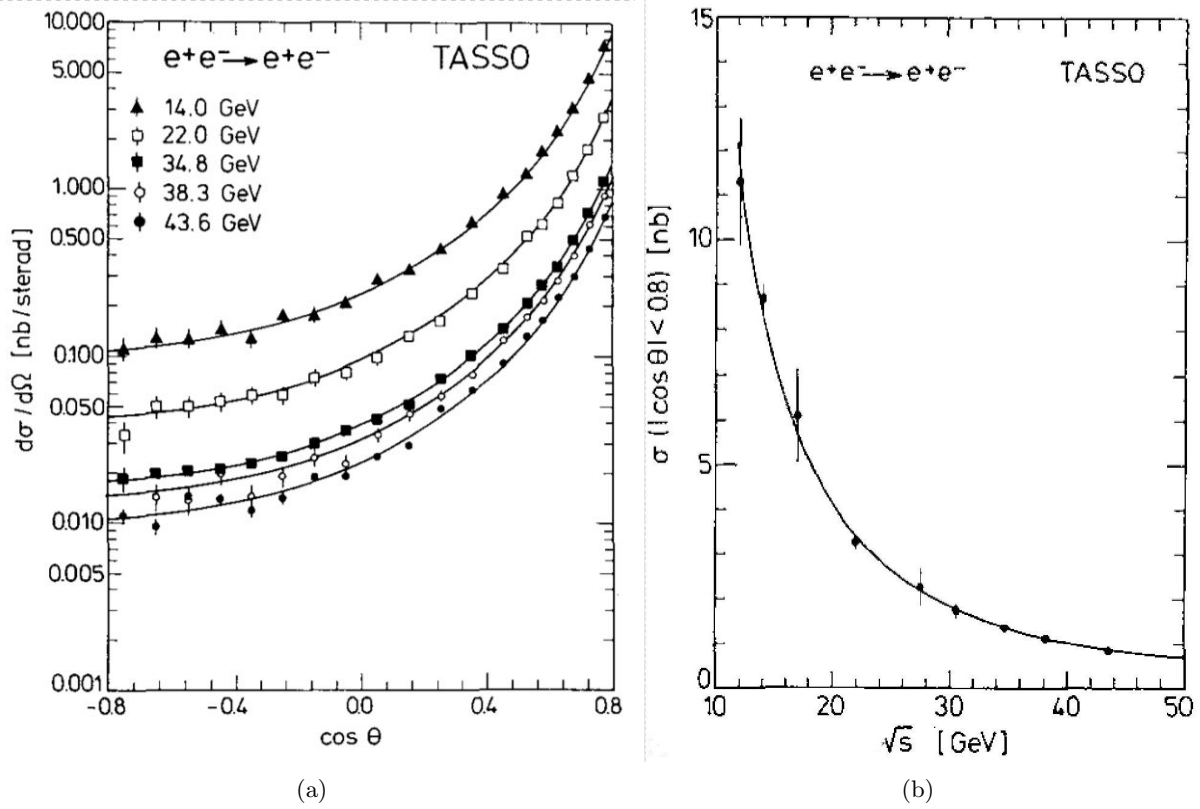
kde θ je úhel rozptylu elektronu v soustavě cms.

$$\overline{|\mathcal{M}^{(2)}|^2} = \frac{e^4}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (3 + \cos^2 \theta)^2$$

Dosadíme do obecného vzorce pro diferenciální účinný průřez v soustavě hmotného středu (36) a využijeme vztah $s = 4E^2$, kde E je cms energie jednoho z elektronů nebo pozitronů. Dále vyjádříme kvadrát náboje elektronu pomocí konstanty jemné struktury $e^2 = 4\pi\alpha$ a zavedeme konstantu $(\hbar c)^2 = 0.38938 \times 10^6 \text{ GeV}^2 \text{nbarn}$, která zajistí, že jestli na pravé straně dosadíme E v gigaelektronvoltech, účinný průřez dostaneme v nanobarnech.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{64E^2} \frac{(3 + \cos^2 \theta)^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (120)$$

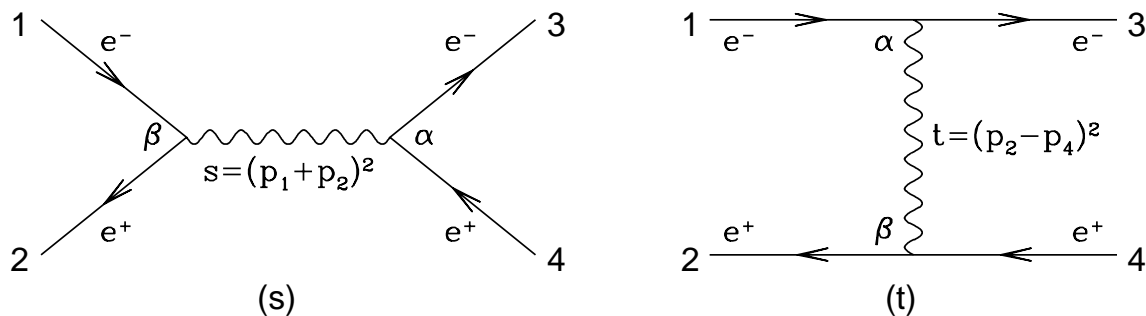
Porovnání vzorečku (120) s experimentálními údaji je na obr. 8.



Obrázek 8: Porovnání výpočtů s použitím vzorce (120) s daty experimentu TASSO u kolajdru PETRA v ústavu DESY u Hamburgu. (a) Diferenciální účinný průřez pro různé energie $\sqrt{s} = 2E$; (b) Účinný průřez získaný integrací přes úhlové proměnné.

Feynmanovy diagramy se často používají v alternativní formě zobrazené na obr. 9. Co se hlavně liší, je diagram zkříženého kanálu. Teď je mnohem jednodušší a umožňuje jednoduchou, i když trochu naivní interpretaci. Interakce mezi elektronem a pozitronem je způsobena výměnou fotonu. Během interakce dojde ke změně pohybového stavu částic, výměně čtyřhybnosti mezi nimi. Můžeme se na to dívat dvěma způsoby: a) elektron odevzdá čtyřhybnost $k_a = p_1 - p_3$ pozitronu, kterého čtyřhybnost tak nadobude hodnotu $p_4 = p_2 + (p_1 - p_3)$; b) pozitron odevzdá čtyřhybnost $k_b = p_2 - p_4$ elektronu, kterého čtyřhybnost tak nadobude hodnotu $p_3 = p_1 + (p_2 - p_4)$. Čtyřhybnosti virtuálního fotonu se při těchto dvou náhledech liší: $k_b = -k_a$. Příspěvek virtuálního fotonu k amplitudě závisí od kvadrátu čtyřhybnosti, které jsou stejné a rovny Mandelstamově proměnné $t = k_a^2 = k_b^2$, takže nejednoznačnost v našich představách o průběhu procesu se neprojeví na výsledku.⁷

⁷V procesech s virtuálním fermionem je situace jiná, jeho příspěvek závisí od "směru" čtyřhybnosti. Tam se za



Obrázek 9: Jiná forma Feynmanových diagramů procesu $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$.

Při nízkých energiích je příspěvek anihilačního kanálu, který je na obr. 9 označen jako (s), zanedbatelný. Kvantověpolní výsledek, reprezentovaný již jenom výměnným diagramem (t), se blíží ke kvantověmechanickému (oba počítané s nenulovou hmotností elektronu). V kvantové mechanice anihilační diagram neexistuje.

Rozptyl pozitronů s elektrony se někdy nazývá Bhabhovým rozptylem, protože první odvození diferenciálního účinného průřezu $d\sigma/d\cos\theta$ (s nezanedbanou hmotností) publikoval indický fyzik H. J. Bhabha v Proc. Roy. Soc. A154 (1936) 195. O třicet let později zahynul při havárii letu 101 společnosti Air India blízko Mont Blancu.

13 Feynmanova pravidla spinorové elektrodynamiky

Na základě našich dosavadních výpočtů, založených na poruchovém rozvoji evolučního operátoru, můžeme usoudit, jak jednotlivé prvky Feynmanových diagramů přispívají k $i\mathcal{M}$, tj amplitudě procesu vynásobené imaginární jednotkou:

- $\varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)$ za vcházející foton
- $\varepsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda)$ za vycházející foton
- $u(\vec{p}, s)$ za vcházející lepton
- $\bar{u}(\vec{p}, s)$ za vycházející lepton
- $\bar{v}(\vec{p}, s)$ za vcházející antilepton
- $v(\vec{p}, s)$ za vycházející antilepton
- $ie\gamma^\mu$ za vertex spojený s fotonem, kterého polarizační vektor má Lorentzovský index μ
- za virtuální foton:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$

- za virtuální lepton, kterým protéká čtyřhybnost p ve směru šipky:

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

- (-1) za "skřížené leptonové nohy"

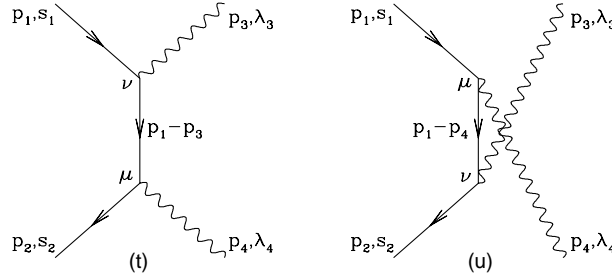
správnou čtyřhybnost považuje ta, která "teče" ve směru šipky, kterou je virtuální fermion v příslušném diagramu opatřen.

14 Anihilace elektronu s pozitronem na dva fotony

Jako první příklad aplikace Feynmanových pravidel budeme uvažovat anihilaci elektronu s pozitronem na dva fotony

$$e^-(\vec{p}_1, s_1) + e^+(\vec{p}_2, s_2) \rightarrow \gamma(\vec{p}_3, \lambda_3) + \gamma(\vec{p}_4, s_4) \quad (121)$$

Příslušné Feynmanovy diagramy jsou zobrazeny na obr. 10. Kvadrát čtyřhybnosti tekoucí přes virtuální fermion na prvním diagramu je $t = (p_1 - p_3)^2$, na druhém $u = (p_1 - p_4)^2$.



Obrázek 10: Feynmanovy diagramy nejnižšího (druhého) řádu pro e^-e^+ anihilaci na dva fotony.

Zavedeme označení $u_1 = u(\vec{p}_1, s_1)$, $v_2 = v(\vec{p}_2, s_2)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon(\vec{p}_3, \lambda_3)$, $\varepsilon_4 = \varepsilon(\vec{p}_4, \lambda_4)$, $p = p_1 - p_3$ a $q = p_1 - p_4$. S využitím Feynmanových pravidel pak můžeme psát

$$i\mathcal{M}^{(2t)} = \varepsilon_{3\nu}^* \varepsilon_{4\mu}^* \bar{v}_2 (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} (ie\gamma^\nu) u_1 \quad (122)$$

a

$$i\mathcal{M}^{(2u)} = \varepsilon_{3\nu}^* \varepsilon_{4\mu}^* \bar{v}_2 (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} (ie\gamma^\mu) u_1. \quad (123)$$

Než postoupíme dále, zavedme dva nové invarianty $t' = t - m^2$ a $u' = u - m^2$ a vyjádřeme je pomocí veličin v soustavě hmotného středu, kde je energie každé ze zúčastněných částic stejná, $E = \sqrt{s}/2$. Úhel mezi \vec{p}_1 a \vec{p}_3 nechť je θ , úhel mezi \vec{p}_1 a \vec{p}_4 tak bude $(\pi - \theta)$. Podíl hybnosti a energie elektronu je roven jeho rychlosti v . Můžeme psát

$$t' = (p_1 - p_3)^2 - m^2 = -2(p_1 p_3) = -2(E_1 E_3 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3) = -2E^2(1 - v \cos \theta),$$

$$u' = (p_1 - p_4)^2 - m^2 = -2(p_1 p_4) = -2(E_1 E_4 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4) = -2E^2(1 + v \cos \theta).$$

Protože $v < 1$, jsou veličiny t' a u' negativně definitní. Takže můžeme v menovatelích pocházejících z Fourierova obrazu Feynmanova spinorového propagátoru položit $\varepsilon = 0$. Sečteme (122) s (123) a po úpravách dostáváme amplitudu anihilace e^- a e^+ na dva fotony

$$\mathcal{M} = -e^2 \varepsilon_{3\nu}^* \varepsilon_{4\mu}^* \bar{v}_2 Q^{\mu\nu} u_1, \quad (124)$$

kde

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{t'} \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u'} \gamma^\nu (\not{q} + m) \gamma^\mu. \quad (125)$$

K výpočtu kvadrátu amplitudy budeme potřebovat i amplitudu komplexně združenou, kterou výhodněji získáme hermitovským združením výrazu (124). Současně ale změníme označení sumačních indexů $\mu \rightarrow \rho$ a $\nu \rightarrow \sigma$, aby nedošlo ke konfuzi při výpočtu součinu $\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$.

$$\mathcal{M}^\dagger = -e^2 \varepsilon_{3\sigma} \varepsilon_{4\rho} \left(v_2^\dagger \gamma^0 Q^{\rho\sigma} u_1 \right)^\dagger = -e^2 \varepsilon_{3\sigma} \varepsilon_{4\rho} u_1^\dagger Q^{\rho\sigma \dagger} \gamma^0 v_2$$

$$\mathcal{M}^\dagger = -e^2 \varepsilon_{3\sigma} \varepsilon_{4\rho} \bar{u}_1 \tilde{Q}^{\rho\sigma} v_2, \quad (126)$$

kde jsme zavedli označení

$$\tilde{Q}^{\rho\sigma} = \gamma^0 Q^{\rho\sigma\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \left[\frac{1}{t'} \gamma^{\sigma\dagger} (\not{p}^\dagger + m) \gamma^{\rho\dagger} + \frac{1}{u'} \gamma^{\rho\dagger} (\not{q}^\dagger + m) \gamma^{\sigma\dagger} \right] \gamma^0$$

Když využijeme, že $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, dostaneme

$$\tilde{Q}^{\rho\sigma} = \frac{1}{t'} \gamma^\sigma (\not{p} + m) \gamma^\rho + \frac{1}{u'} \gamma^\rho (\not{q} + m) \gamma^\sigma. \quad (127)$$

Kvadrát modulu amplitudy je roven

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \varepsilon_{3\nu}^* \varepsilon_{3\sigma} \varepsilon_{4\mu}^* \varepsilon_{4\rho} \bar{u}_1 \tilde{Q}^{\rho\sigma} v_2 \bar{v}_2 Q^{\mu\nu} u_1. \quad (128)$$

Pro určení účinného průřezu anihilace nepolarizovaných elektronů a pozitronů na nepolarizované fotony budeme potřebovat součet kvadrátů amplitud (128) přes polarizace fotonů λ_3 a λ_4 a spinové stavy elektronu s_1 a pozitronu s_2 , pro který zavedeme označení

$$\sum_{s_1, s_2, \lambda_3, \lambda_4} |\mathcal{M}|^2 = e^4 Y. \quad (129)$$

Nejdřív využijeme zjednodušené vztahy pro polarizační tenzory, které dostaneme tak, že v kompletním vyjádření [vztah (48) v elmagpole.pdf] zanedbáme členy obsahující hybnosti fotonů⁸

$$\sum_{\lambda_3} \varepsilon_{3\nu}^* \varepsilon_{3\sigma} = -g_{\nu\sigma},$$

$$\sum_{\lambda_4} \varepsilon_{4\mu}^* \varepsilon_{4\rho} = -g_{\mu\rho},$$

na základě kterých dostaneme

$$Y = \sum_{s_1, s_2} (\bar{u}_1 \tilde{Q}_{\mu\nu} v_2) (\bar{v}_2 Q^{\mu\nu} u_1).$$

Abychom mohli využít známý postup při sumování přes spinové stavy, rozepíšeme dvě maticová násobení vyznačená závorkami pomocí maticových indexů

$$Y = \sum_{s_1, s_2} \bar{u}_{1a} (\tilde{Q}_{\mu\nu})_{ab} v_{2b} \bar{v}_{2c} Q^{\mu\nu}_{cd} u_{1d} = \sum_{s_1, s_2} u_{1d} \bar{u}_{1a} (\tilde{Q}_{\mu\nu})_{ab} v_{2b} \bar{v}_{2c} Q^{\mu\nu}_{cd}.$$

Teď použijeme vztah pro elektron

$$\sum_{s_1} u_{1d} \bar{u}_{1a} = (\not{p}_1 + m)_{da}$$

a pro pozitron

$$\sum_{s_2} v_{2b} \bar{v}_{2c} = (\not{p}_2 - m)_{bc},$$

čímž dostaneme

$$Y = (\not{p}_1 + m)_{da} (\tilde{Q}_{\mu\nu})_{ab} (\not{p}_2 - m)_{bc} Q^{\mu\nu}_{cd}$$

⁸V případě $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ jsme ukázali na str. 28, že tyto členy by dávaly nulový příspěvek k přímému i zkříženému diagramu. V případě $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ je situace komplikovanější, předmětné členy dávají nenulové příspěvky k individuálním diagramům, v součtu se však vyruší. Jedná se o projev Wardovy identity, která je důsledkem kalibrační invariance. Příslušné výpočty zde neuvádíme.

Navázanost maticových indexů nám říká, že se jedná o součin čtyř čtvercových matic, vedoucí na prvek dd součinu. Protože přes d se počítá, výsledkem je stopa

$$Y = \text{Tr} \left[(\not{p}_1 + m) \tilde{Q}_{\mu\nu} (\not{p}_2 - m) Q^{\mu\nu} \right]. \quad (130)$$

Napišme si (127) s dolními indexy

$$\tilde{Q}_{\mu\nu} = \frac{1}{t'} \gamma_\nu (\not{p} + m) \gamma_\mu + \frac{1}{u'} \gamma_\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu$$

a připomeňme si i to, jak vypadá $Q^{\mu\nu}$ (125)

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{t'} \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u'} \gamma^\nu (\not{q} + m) \gamma^\mu.$$

Z výše uvedených vztahů je vidět, že (130) můžeme zapsat ve tvaru

$$Y = \frac{Y_1}{t'^2} + \frac{Y_2 + Y_3}{t'u'} + \frac{Y_4}{u'^2}, \quad (131)$$

kde

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu], \\ Y_2 &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \gamma^\mu], \\ Y_3 &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu], \\ Y_4 &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \gamma^\mu]. \end{aligned}$$

Abychom si výpočty zjednodušili, položíme $m = 0$, čímž omezíme platnost našich výsledku na energie mnohem vyšší než klidová energie elektronu. Použijeme vztah (114) a

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \quad (132)$$

a postupně dostáváme

$$Y_1 = \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu) = -2 \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p} \not{p}_2 \not{p} \gamma^\nu) = 4 \text{Tr}(\not{p}_1 \not{p} \not{p}_2 \not{p}).$$

Teď použijeme vztah (110) pro stopu součinu čtyř gama matic, což nám dá

$$Y_1 = 16 [2(p p_1)(p p_2) - p^2(p_1 p_2)]$$

Z definic p, q, s, t' a u' plynou při $m = 0$ vztahy $(p p_1) = -(p_1 p_3) = t'/2$, $(p p_2) = (p_2 p_4) = -t'/2$, $p^2 = t'$, $(p_1 p_2) = s/2 = -(t' + s)/2$. Jejich použitím dostáváme

$$Y_1 = 8t'u'$$

a taky

$$Y_2 = \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu) = -2 \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p} \not{q} \gamma^\nu \not{p}_2) = -8(p q) \text{Tr}(p_1 p_2).$$

Při poslední úpravě jsme použili vztah (115). Dál nemusíme počítat, protože $(p q) = (p_1 - p_3)(p_1 - p_4) = p_3 p_4 - p_1(p_3 + p_4 - p_1) = p_3 p_4 - p_1 p_2 = s/2 - s/2 = 0$ a tudíž

$$Y_2 = 0.$$

Další veličiny určíme použitím křížové symetrie $t \leftrightarrow u$, a to $Y_3 = 0$, $Y_4 = 8t'u'$. Po dosazení do (131) nakonec dostáváme

$$Y = 8 \left(\frac{t'}{u'} + \frac{u'}{t'} \right).$$

Když sem dosadíme $t' = -2E^2(1 - \cos \theta)$ a $u' = -2E^2(1 + \cos \theta)$ tak vychází

$$Y = 16 \left(\frac{2}{\sin^2 \theta} - 1 \right).$$

S přihlédnutím k významu Y (129) můžeme pro kvadrát amplitudy sečtený přes polarizace finálních fotonů a zprůměrovaný přes spinové stavy počátečního elektronu a pozitronu psát

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} e^4 Y$$

a po zavedení konstanty jemné struktury $e^2 = 4\pi\alpha$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64\pi^2 \alpha^2 \left(\frac{2}{\sin^2 \theta} - 1 \right)$$

Po dosazení do obecného vzorce pro diferenciální účinný průřez v soustavě hmotného středu (36) dostáváme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{s} \left(\frac{2}{\sin^2 \theta} - 1 \right), \quad (133)$$

kde θ je úhel mezi hybností elektronu a hybností fotonu. Vložili jsme tam i konstantu $(\hbar c)^2 = 0.38938 \times 10^9 \text{ GeV}^2 \text{ pbarn}$, která zajistí, že jestli na pravé straně dosadíme \sqrt{s} v gigaelektronvoltech, tak účinný průřez dostaneme v pikobarnech.

Pro ilustraci uveďme, že experiment CELLO u e^+e^- kolajdru PETRA v DESY (Hamburg) měřil účinný průřez anihilace elektronu a pozitronu na dva fotony pro $|\cos \theta| < 0.85$ při $\sqrt{s} = 34.2 \text{ GeV}$. Jejich výsledek 178.1 pb , zatížený statistickou chybou 5.5% a systematickou chybou 5.3%, souhlasí s tím co vychází integrací vztahu (133) (185.2 pb).

Naše formulka (133) dobře souhlasí i s naměřenou závislostí diferenciálního účinného průřezu na $|\cos \theta|$ (obr. 14).

15 Anihilace e^- a e^+ na pár opačně nabitých fermionů

Uvažujeme elementární nabitě fermiony, tj. miony μ^\pm s hmotností $m_\mu \approx 207m_e$ nebo tauony τ^\pm s hmotností $m_\tau \approx 3477m_e$. Pro určitost budeme mluvit o e^+e^- anihilaci na pár $\mu^+\mu^-$.

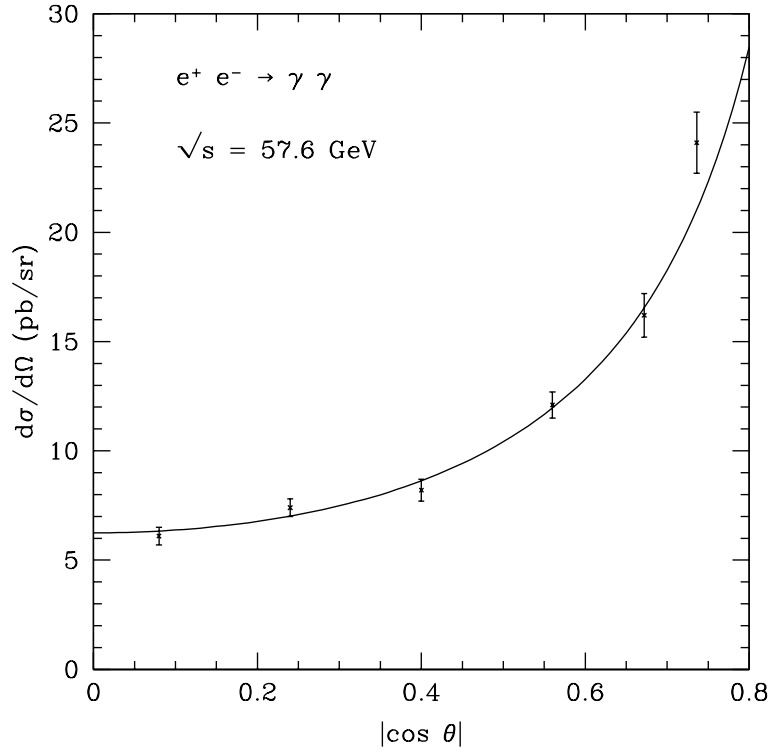
$$e^-(p_1, s_1) + e^+(p_2, s_2) \rightarrow \mu^-(p_3, s_3) + \mu^+(p_4, s_4). \quad (134)$$

Miony, jako elementární částice se spinem $\frac{1}{2}$ jsou popsány Diracovou rovnicí. Protože je ale budeme uvažovat současně s elektronem a pozitronem, musíme pro miony volit jiné označení spinorů a gama matic. Použijeme velká písmena $\Psi(x), \Gamma^\mu, U(\vec{p}, s), V(\vec{p}, s)$. Přitom maticový prostor pro miony je odlišný od toho pro elektrony, takže např. výrazy $\Gamma^\mu \gamma^\nu$ nebo $\bar{\psi}(x)\Psi(x)$ nemají smysl.

Reakce je popsána v nejnižším řádu jedním Feynmanovým diagramem (obr. 12). Výměnný diagram, jak jsme ho poznali v procesu $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ tady chybí, protože v elektromagnetickém vertexu se nemůže elektron změnit na mion.

Definujeme obvyklé invarianty $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$ a označíme jako m hmotnost elektronu a jako M hmotnost mionu. Pro mionové bispinory zavedeme označení $U_3 = U(\vec{p}_3, s_3)$, $V_4 = V(\vec{p}_4, s_4)$ a pro elektronové $u_1 = u(\vec{p}_1, s_1)$, $v_2 = v(\vec{p}_2, s_2)$. S využitím Feynmanových pravidel píšeme

$$i\mathcal{M} = \bar{U}_3(ie\Gamma^\nu)V_4 \frac{(-ig_{\nu\mu})}{k^2 + i\varepsilon} \Big|_{k=p_1+p_2} \bar{v}_2(ie\gamma^\mu)u_1,$$



Obrázek 11: Porovnání vzorce (133) s experimentálními daty skupiny TOPAZ u e^+e^- kolajdru TRISTAN v ústavu KEK (Japonsko).

což můžeme upravit do jednodušší formy

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{s} \bar{U}_3 \Gamma^\nu V_4 \bar{v}_2 \gamma_\nu u_1. \quad (135)$$

Kvadrát modulu amplitudy budeme znovu počítat jako $\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$, přičemž v jednoduše odvozeném výrazu pro \mathcal{M}^\dagger změním sčítací index na μ

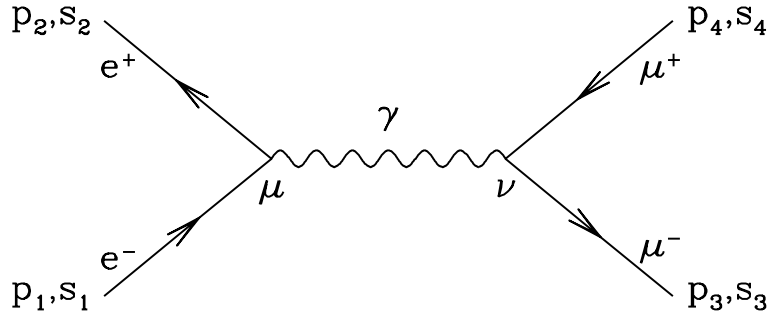
$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{e^2}{s} \bar{V}_4 \Gamma^\mu U_3 \bar{u}_1 \gamma_\mu v_2. \quad (136)$$

Vynásobíme pravou stranu (136) pravou stranou (135) a čtyři součiny tří matic, které se tam vyskytují, rozepíšeme pomocí maticových indexů A, B, C, D, a, b, c, d . Pro kvadrát modulu amplitudy tak dostáváme

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \bar{V}_{4A} \Gamma_{AB}^\mu U_{3B} \bar{U}_{3C} \Gamma_{CD}^\nu V_{4D} \bar{u}_{1a} \gamma_{\mu ab} v_{2b} \bar{v}_{2c} \gamma_{\nu cd} u_{1d}.$$

Budeme se znovu zabývat případem nepolarizovaných částic, takže budeme potřebovat součet kvadrátů modulů amplitud přes spinové indexy. Při jeho výpočtu použijeme vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{s_1} u_{1d} \bar{u}_{1a} &= (p_1 + m)_{da} \\ \sum_{s_2} v_{2b} \bar{v}_{2c} &= (p_2 - m)_{bc} \\ \sum_{s_3} U_{3B} \bar{U}_{3C} &= (p_3 + M)_{BC} \\ \sum_{s_4} V_{4D} \bar{V}_{4A} &= (p_4 - M)_{DA} \end{aligned}$$



Obrázek 12: Feynmanův diagram nejnižšího (druhého) řádu pro e^-e^+ anihilaci na pár opačně nabitých mionů.

Po obnovení maticového násobení zjistíme, že se tam vytvořily dva nezávislé maticové součiny čtyř čtvercových matic (jeden v elektronovém, druhý v mionovém maticovém prostoru) a že výsledkem obou jsou stopy výsledných matic. Součet kvadrátů modulů amplitud zapisujeme na základě toho ve tvaru

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{s^2} A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (137)$$

kde

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &= \text{Tr} [(\not{p}_4 - M)\Gamma^\mu(\not{p}_3 + M)\Gamma^\nu] = \text{Tr} (\not{p}_4\Gamma^\mu\not{p}_3\Gamma^\nu) - M^2\text{Tr}(\Gamma^\mu\Gamma^\nu), \\ B_{\mu\nu} &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m)\gamma_\nu] = \text{Tr} (\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu) - m^2\text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu). \end{aligned}$$

Jednoduchý výpočet s využitím (110) dá

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &= 4 [p_3^\nu p_4^\mu + p_4^\nu p_3^\mu - g^{\nu\mu}(p_3 \cdot p_4 + M^2)], \\ B_{\mu\nu} &= 4 [p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu} - g_{\mu\nu}(p_1 \cdot p_2 + m^2)]. \end{aligned}$$

Lehce spočteme i

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 32[(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m^2(p_3 p_4) + M^2(p_1 p_2) + 2m^2 M^2]$$

Při další upravě využijeme vztahy $2(p_1 p_2) = s - 2m^2$, $2(p_3 p_4) = s - 2M^2$, $2(p_1 p_3) = 2(p_2 p_4) = m^2 + M^2 - t$, $2(p_1 p_4) = 2(p_2 p_3) = m^2 + M^2 - u$ a nakonec i $u + t = 2M^2 + 2m^2 - s$. Po chvílce trápení dostáváme

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 8[4s(m^2 + M^2) - 2(m^2 + M^2)^2 + u^2 + t^2]. \quad (138)$$

Zbývá nám ještě vyjádřit invarianty t a u jako funkce nějaké měřitelné veličiny. Jako takovou si vybereme úhel mezi \vec{p}_1 a \vec{p}_3 v soustavě hmotného středu, který označíme jako θ . Úhel mezi \vec{p}_1 a \vec{p}_4 je $(\pi - \theta)$. Protože pracujeme v soustavě hmotného středu, jsou energie všech částic stejné a rovny $\sqrt{s}/2$. Mandelstamův invariant t je roven

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m^2 + M^2 - 2(p_1 p_3) = m^2 + M^2 - \frac{s}{2}(1 - v_1 v_3 \cos \theta),$$

kde v_i je rychlost i -té částice v soustavě hmotného středu, $v_1 = \sqrt{1 - 4m^2/s}$, $v_3 = \sqrt{1 - 4M^2/s}$. Podobně máme

$$u = (p_1 - p_4)^2 = m^2 + M^2 - 2(p_1 p_4) = m^2 + M^2 - \frac{s}{2}(1 + v_1 v_3 \cos \theta).$$

Do (138) potřebujeme dosadit

$$t^2 + u^2 = 2 \left(m^2 + M^2 - \frac{s}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{s}{2} v_1 v_3 \cos \theta \right)^2 .$$

Když to učiníme, tak dostáváme

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 4s^2 \left[1 + \frac{4}{s}(m^2 + M^2) + \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{s} \right) \cos^2 \theta \right] . \quad (139)$$

Jestliže chceme získat diferenciální účinný průřez pro nepolarizované částice, musíme do obecného vzorce (36) dosadit kvadrát modulu amplitudy sečtený přes spinové stavy částic v konečném stavu a zprůměrovat přes spinové stavy částic v počátečním stavu. To znamená vydělit součet (137) čtyřmi. Navíc ještě vyjádříme kvadrát náboje elektronu pomocí konstanty jemné struktury, $e^2 = 4\pi\alpha$. S přihlédnutím k (139) tak získáme

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 16\pi^2\alpha^2 \left[1 + \frac{4}{s}(m^2 + M^2) + \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{s} \right) \cos^2 \theta \right] ,$$

což po dosazení do (36) dá diferenciální účinný průřez reakce $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{4s} \sqrt{\frac{s-4M^2}{s-4m^2}} \left[1 + \frac{4}{s}(m^2 + M^2) + \left(1 - \frac{4m^2}{s} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{s} \right) \cos^2 \theta \right] . \quad (140)$$

Do vzorce jsme zavedli i konstantu $(\hbar c)^2 = 0.38938 \times 10^6 \text{ GeV}^2 \text{nbarn}$, která zajistí, že když na pravé straně dosadíme s v $(\text{GeV})^2$, účinný průřez dostaneme v nanobarnech. Integrací přes $d\Omega$ dostáváme

$$\sigma = (\hbar c)^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{\frac{s-4M^2}{s-4m^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{s} \right) \left(1 + \frac{2M^2}{s} \right) . \quad (141)$$

Při vysokých energiích můžeme zanedbat hmotnosti a vzorečky nabývají jednoduchý tvar

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) , \quad (142)$$

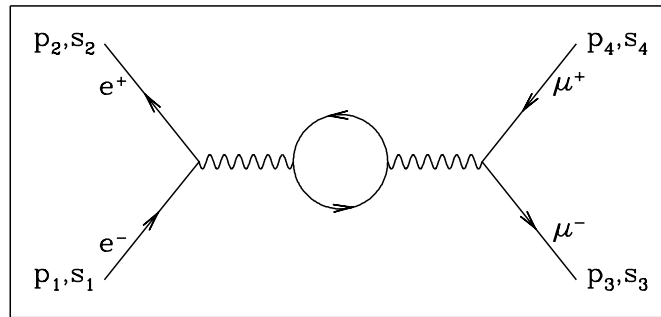
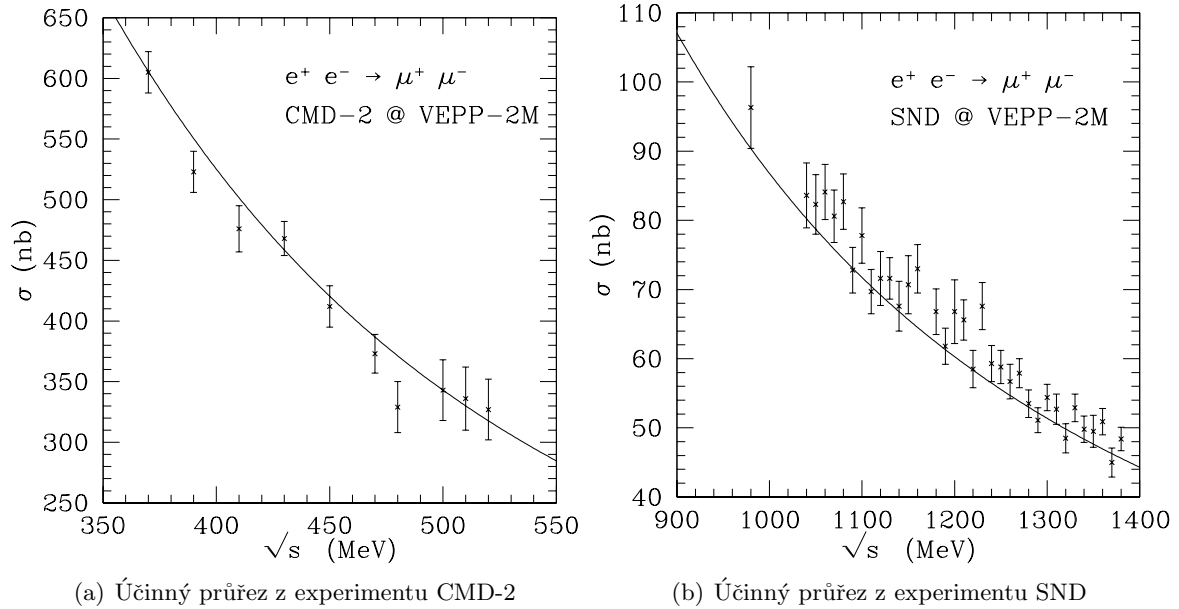
$$\sigma = (\hbar c)^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} .$$

Porovnání účinného průřezu získaného ze vztahu (141) s experimentálními daty najdeme na obr. 13. Při součtu energií srážejících se částic do 550 MeV [podobrázek (a)] je souhlas výpočtu s daty uspokojivý. Avšak při energiích nad 900 MeV [podobrázek (b)] je patrné, že naměřený účinný průřez systematicky převyšuje vypočtené hodnoty. Experimentátoři to zdůvodnili tak, že při vyšších energiích přispívá i Feynmanův diagram čtvrtého řádu s fermionovou smyčkou [obr. 13c].

Podle kvarkového modelu je produkce hadronů (silně interagujících částic) v anihilacích elektronů s pozitrony iniciovaná reakcí $e^- + e^+ \rightarrow \text{kvark} + \text{antikvark}$. Kvark a antikvark nemůžou existovat volné, říká se tomu uvěznění kvarků (*angl.* quark confinement). Vzniknutý kvark a antikvark proto fragmentují na spršky (jets) hadronů. Tato představa byla podpořena experimentálním sledováním závislosti účinného průřezu reakce $e^- + e^+ \rightarrow \text{hadrony}$ na energii. Při překročení energetického prahu pro produkci určitého typu kvarků hadronový účinný průřez narůstá skoro skokově [v souladu se vzorcem (141)].⁹ Takto byly získány první indicie o existenci c-kvarků.

Ukazuje se taky, že úhlové rozložení spršek zhruba kopíruje úhlové rozložení kvarků podle vzorce (142), viz obr. ??.

⁹Musí se vzít do úvahy, že kvarky mají zlomkový náboj, ne celočíselný, a že existují ve třech modifikacích, tzv. barvách.



(c) Diagram čtvrtého řádu který je podle SND kolaborace odpovědný za převis dat nad vztahem (141)

Obrázek 13: Porovnání hodnot získaných ze vztahu (141) s experimentálními daty z experimentů u kolajdru VEPP-2M v institutu INP (Novosibirsk).

Anihilace elektronu a pozitronu na dva těžší leptony se řídí zákony elektrodynamiky, která je invariantní vůči zrcadlení prostoru. To je vidět i na vzorcích (140) a (142) pro diferenciální účinný průřez, které se nezmění při transformaci $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$. Naproti tomu, slabé interakce, odpovědné hlavně za převážnou část rozpadů částic a jader, nejsou vůči zrcadlení invariantní. Slabé interakce se změnou náboje a jiných kvantových čísel jsou zprostředkovány výměnou kalibračních bozonů W^\pm mezi participujícími částicemi. Další kalibrační bozon, Z^0 , nemůže přenášet náboj ani jiná kvantová čísla. Je zodpovědný např. za rozptyl neutrin na elektronech, který byl pozorován poprvé v roce 1973 v bublinové komoře Gargamelle v CERN.¹⁰ Může taky přispívat k anihilaci elektronu a pozitronu na dva těžší leptony, jak je znázorněno Feynmanovým diagramem na obr. ??c. Protože $m_{Z^0} = 91,19$ GeV (skoro desetinásobek hmotnosti protonu), tento diagram se projeví až při velmi vysokých energiích. Jeho interference s elektromagnetickým diagramem (obr. 12) vede k narušení invariance vůči zrcadlení a k předozadní asymetrii. Je to ilustrováno experimentálními výsledky na obr. ??.

¹⁰Tento objev přispěl k důvěře v existenci kalibračních bozonů a ulehčil schválení trochu riskantního projektu, jakým byla proměna urychlovače SPS na kolajdru $Spp\bar{p}$ v CERN. Na něm pak byly bozony W a Z skutečně v roce 1983 objeveny.

„„„„„

16 Rozptyl elektronů na elektronech

Jako ilustraci použití křížové symetrie si ukážeme, jak se dají vztahy odvozené pro rozptyl elektronů na pozitronech využít na určení diferenciálního účinného průřezu rozptylu nepolarizovaných elektronů na nepolarizovaných elektronech

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(p_4). \quad (143)$$

Tato cesta je mnohem snazší než opětovné určování maticového elementu evolučního operátoru a i snazší než použití Feynmanových pravidel. Dá se ovšem použít jenom tehdy, když už máme spočtenou jednu z reakcí které jsou svázány křížovou symetrií.

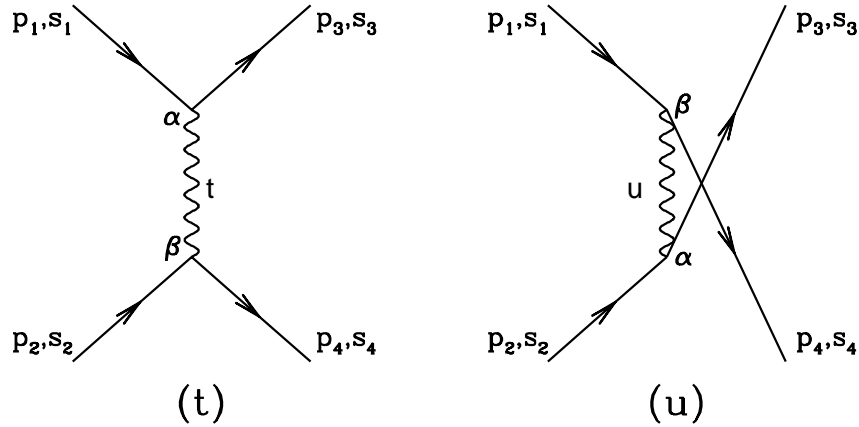
Pro jednoduchost budeme, jako v případě e^-e^+ rozptylu, klást $m=0$. Vycházíme z toho, že z rozptylu elektronů na pozitronech

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4)$$

dostaneme rozptyl elektronů na elektronech tak, že pozitron z počátečního stavu převedeme do konečného a naopak

$$e^-(p_1) + e^-(-p_4) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(-p_2) \quad (144)$$

Feynmanovy diagramy pro elektron-elektronový rozptyl jsou ukázány na obr. 16. Výše zmíněnou transformací je dostaneme z diagramů pro elektron-pozitronový rozptyl (obr. 9). Diagram (t) z obr. 9 přechází na diagram (t) na obr. 16, diagram (s) na diagram (u). Porovnáním (144) s (143)



Obrázek 16: Feynmanovy diagramy pro rozptyl elektronů na elektronech [$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$].

zjistujeme, že součet přes spinové proměnné kvadrátů amplitud pro rozptyl elektronů na elektronech můžeme dostat z obdobného součtu pro rozptyl elektronů na pozitronech transformací $-p_4 \rightarrow p_2$ a $-p_2 \rightarrow p_4$. Při této transformaci se z původního $s = (p_1 + p_2)^2$ stane $u = (p_1 - p_4)^2$ a naopak. Invariant $t = (p_3 - p_1)^2 = (p_2 - p_4)^2$ se přitom nezmění.

Kvadrát amplitudy rozptylu elektronů na elektronech zprůměrovaný přes spinové stavy počátečních elektronů a sečtený přes spinové stavy konečných dostaneme tak, že obdobnou veličinu pro e^-e^+ rozptyl [vztah (119)] vyjádříme pomocí s a u , které pak navzájem vyměníme. Takže vycházíme ze vztahu (119), který zapisujeme tak, aby bylo jasné o který proces se jedná

$$|\overline{\mathcal{M}_{e^-e^+}}|^2 = 4e^4 \left(1 + \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right)^2.$$

Díky tomu, že předpokládáme nulové hmotnosti, platí $t = -(s + u)$. Po dosazení za t do předchozího vztahu po úpravách dostáváme

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-e^+}|^2} = 4e^4 \left(1 - \frac{u}{u+s} + \frac{u}{s} \right)^2.$$

Po záměně $s \leftrightarrow u$ máme

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-e^-}|^2} = 4e^4 \left(1 - \frac{s}{s+u} + \frac{s}{u} \right)^2.$$

Po nahrazení $u + s = -t$ to prepíšeme na tvar

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-e^-}|^2} = 4e^4 \left(1 + \frac{s}{t} + \frac{s}{u} \right)^2.$$

Při nulových hmotnostech platí vztahy $t = -s(1 - \cos\theta)/2$ a $u = -s(1 + \cos\theta)/2$, kde θ je úhel mezi \vec{p}_1 a \vec{p}_3 . Pomocí nich dostáváme

$$\overline{|\mathcal{M}_{e^-e^-}|^2} = 4e^4 \frac{(3 + \cos^2\theta)^2}{\sin^4\theta}. \quad (145)$$

Po použití $e^2 = 4\pi\alpha$ a dosazení do obecného vztahu pro diferenciální účinný průřez v soustavě hmotného středu (36) nakonec vychází

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{(3 + \cos^2\theta)^2}{\sin^4\theta}, \quad (146)$$

kde E je energie jednoho z elektronů. Rozptyl elektronů na elektronech se nazývá Møllerovým rozptylem, podle dánského fyzika Christiana Møllera, který jako první publikoval vzorec pro diferenciální účinný průřez (s nenulovými hmotnostmi). Pro zajímavost (a jako výzvu pro zdatné počtáře) ho uvádíme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(E^2 + p^2)^2}{4E^2p^4} \left[\frac{4}{\sin^4\theta} - \frac{3}{\sin^2\theta} + \left(\frac{p^2}{E^2 + p^2} \right)^2 \left(1 + \frac{4}{\sin^2\theta} \right) \right].$$

Zde, $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Lehce se přesvědčíme, že pro $m=0$ přechází Møllerův vzorec na náš vztah (146).

17 Rozptyl elektronů na stojících kladných mionech nebo bodových protonech

Z experimentálního hlediska je rozptyl elektronů na mionovém terčíku

$$e^-(p_1) + \mu^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \mu^+(p_4) \quad (147)$$

nerealizovatelný. Budeme se jím přesto zabývat, protože získaný diferenciální účinný průřez je stejný jako pro rozptyl elektronů na protonech za předpokladu, že proton je bodová částice bez vnitřní struktury. Tím slouží jako výchozí bod pro složitější vztahy, které strukturu protonu berou do úvahy. Avšak ani při vysokých energiích teď nemůžeme hmotnost mionu zanedbat, protože pak by neexistovala soustava, ve které je mion v klidu (laboratorní soustava).

Když zanedbáme hmotnost elektronu, kinematika rozptylu elektronů na hmotných mionech je stejná jako kinematika Comptonova rozptylu, tj. rozptylu fotonů na hmotných elektronech. Proto můžeme využít vztah (60) s tím, že energii dopadajícího (vyletujícího) fotonu ω_i (ω_f)

nahradíme energií dopadajícího (vyletujícího) elektronu E_1 (E_3) a pro energii vyletujícího elektronu v laboratorní soustavě píšeme

$$E_3 = \frac{E_1}{1 + 2\frac{E_1}{M} \sin^2 \theta/2}. \quad (148)$$

Podobně můžeme převzít vztah (61) pro diferenciální účinný průřez Comptonova rozptylu v laboratorní soustavě, ve kterém nahradíme hmotnost elektronu hmotností mionu M

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 M^2} \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^2 \overline{|\mathcal{M}|^2}. \quad (149)$$

Namísto kvadrátu amplitudy z původního vzorečku jsme napsali $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, což je kvadrát amplitudy sečtený přes spinové stavy konečných částic a zprůměrovaný přes spinové stavy počátečních částic. Vyznačili jsme tak, že se budeme zajímat o rozptyl nepolarizovaných částic na nepolarizovaném terčíku a budeme akceptovat všechny vycházející částice bez ohledu na jejich spinový stav.

Při určování účinného průřezu rozptylu (147) využijeme to, že tento proces je spřízněn křížovou symetrií s procesem (134)

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4).$$

Když provedeme křížovou transformaci $p_2 \leftrightarrow -p_3$, které odpovídá záměna $s \leftrightarrow t$, přejde jeden proces na druhý. Kvadrát amplitudy procesu (134) sečten přes koncové a zprůměrovaný přes počáteční spinové stavy dostaneme spojením vztahů (137) a (138) a je roven

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} [4s(m^2 + M^2) - 2(m^2 + M^2)^2 + u^2 + t^2].$$

Když položíme hmotnost elektronu m nule a použijeme $u = 2M^2 - s - t$ dostáváme

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} [2M^4 - 4M^2t + s^2 + 2st + 2t^2].$$

Po křížové transformaci $s \leftrightarrow t$ vyjde

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+}|^2 = \frac{8e^4}{t^2} [2M^4 - 4M^2s + t^2 + 2st + 2s^2].$$

Po vydělení počtem spinových stavů počátečních částic a zavedení konstanty jemná struktury $\alpha = e^2/(4\pi)$ vychází

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{32\pi^2\alpha^2}{t^2} [2M^4 - 4M^2s + t^2 + 2st + 2s^2],$$

Při úpravě výrazu v hranatých závorkách použijeme nejdřív vyjádření Mandelstamovy proměnné $s = (p_1 + p_2)^2$ pomocí veličin v počátečním stavu $s = M(M + 2E_1)$ a dostáváme

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{32\pi^2\alpha^2}{t^2} [8M^2E_1^2 + t^2 + 2M(M + 2E_1)t]. \quad (150)$$

Abychom nám vyšel diferenciální účinný průřez v zaužívané formě, definujeme prostorupodobný čtyřvektor $q = p_1 - p_3$, který je roven čtyřhybnosti přenesené z elektronu na terčík. Platí $q^2 = t$ a uvnitř hranaté závorky v posledním vztahu nahradíme t^2 součinem tq^2 . V dalším kroku

použijeme vztah pro Mandelstamovou proměnnou $t = (p_3 - p_1)^2$, který díky tomu, že hmotnost elektronu klademe rovnou nule, nabývá jednoduchý tvar

$$t = -4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Z hranaté závorky vytkneme výraz $8M^2 E_1 E_3$, čímž se z prvního členu v závorce stane E_1/E_3 , pro což ze vztahu (148) máme

$$\frac{E_1}{E_3} = 1 + \frac{2E_1}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Výraz v hranaté závorce se tím značně zjednoduší a dostáváme

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16\pi^2 \alpha^2 M^2}{E_1 E_3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Po dosazení do (149) nakonec získáváme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (151)$$

Dlužno podotknouti, že závislost na úhlu rozptylu není tak jednoduchá, jak by se na první pohled ze vztahu (151) mohlo zdát. Musíme si uvědomit, že závislost na θ je ukrytá i v dalších členech, a sice

$$\begin{aligned} \frac{E_3}{E_1} &= \frac{M}{M + 2E_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \\ q^2 &= -\frac{4E_1^2 M \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M + 2E_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

V případě rozptylu elektronů na protonech se struktura protonu bere do úvahy zavedením dvou funkcí kvadrátu přenesené čtyřhybnosti, nazývaných formfaktory

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left[G_1(q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} G_2(q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

Formfaktory se určují fitováním experimentálních údajů o diferenciálním účinném průřezu rozptylu elektronů. Ze známých formfaktorů se dá určit rozložení náboje a magnetického momentu protonu. Za určování elektromagnetické struktury jader a nukleonů získal Robert Hofstadter Nobelovu cenu za rok 1961.

18 Odvození vztahů s γ maticemi

Na tomto místě podáváme odvození vztahů s γ maticemi, které jsme při aplikaci spinorové elektrodynamiky na konkrétní procesy používali. I když se jedná v podstatě o látku ze zimního semestru, při nedávných konzultacích jsem zjistil, že bude užitečné si ji zopakovat.

Vycházíme ze základního antikomutátoru γ matic

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I. \quad (152)$$

Protože stopa součinu dvou matic na jejich pořadí nezáleží a $\text{Tr} I = 4$, ihned máme

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (153)$$

Ted' dokážeme vzorec

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}). \quad (154)$$

Upravujeme postupně sučin čtyř matic, abychom tu původně první dostali až na konec:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu (2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu) \gamma^\sigma \\ &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho (2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu). \end{aligned}$$

Takže jsme dostali

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu.$$

Ted' součin čtyř matic převedeme z pravé strany na levou

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho$$

a vypočteme stopy levé a pravé strany, přičemž využijeme, že dva součiny čtyř matic na levé straně mají stejnou stopu. Použijeme vzorec pro stopu součinu dvou matic (153) a po vydělení celé rovnosti dvěma dostáváme vztah (154).

Při výpočtech nepolarizovaných účinných průřezu jsme se setkali s výrazy typu $\gamma_\alpha \dots \gamma^\alpha$, kde mezi dvěma γ maticemi se stejnými indexy v různých polohách (tedy sčítacími), se nacházela jedna, dvě, nebo tři další γ matice. Začněme úpravou prvního z nich

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha = \gamma_\alpha (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) = 2\gamma^\mu - \gamma_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\mu$$

Ted' použijeme vztah $\gamma_\alpha \gamma^\alpha = 4I$, který dostaneme kontrahováním vztahu (152) s $g_{\nu\mu}$, a máme výsledek

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha = -2\gamma^\mu. \quad (155)$$

Dalším případem je

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = \gamma_\alpha \gamma^\mu (2g^{\nu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\nu) = 2\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu$$

Na úpravu druhého členu použijeme vztah (155) a dostáváme

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = 2(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu)$$

Za výraz v závorce dosadíme ze vztahu (152) a vyjde nám

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = 4g^{\mu\nu} I. \quad (156)$$

Nakonec uvažujme

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\alpha = \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\rho) = 2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\rho = 2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - 4g^{\mu\nu} \gamma^\rho.$$

Poslední člen jsme upravovali s pomocí (156). Ted' už můžeme $2\gamma^\rho$ vytknout

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\alpha = 2\gamma^\rho (\gamma^\mu \gamma^\nu - 2g^{\mu\nu} I).$$

Když za druhý člen v závorce dosadíme z (152), součin $\gamma^\mu \gamma^\nu$ se vyruší a zůstane

$$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\alpha = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu. \quad (157)$$

Nakonec ještě připomeňme, že stopa ze součinu lichého počtu γ matic je rovna nule. Důkaz probíhá s využitím matice $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, která antikomutuje se všemi γ maticemi a proto platí

$$\underbrace{\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega}_{n}\gamma_5 = (-1)^n\gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega.$$

Kvadrát matice γ_5 je jednotková matice a proto můžeme psát

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega) = \text{Tr}(\gamma_5^2\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega) = \text{Tr}(\gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega\gamma_5) = (-1)^n\text{Tr}(\gamma_5^2\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega)$$

Po nahrazení kvadrátu γ_5 jednotkovou maticí získáváme vztah

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega) = (-1)^n\text{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega),$$

který pro sudé n představuje identitu a pro liché n vede na

$$\text{Tr}\underbrace{(\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\omega)}_{n \text{ liché}} = 0.$$

19 Symetrie a zákony zachování v teorie pole

Emmy Noether v rámci Lagrangeovy formulace klasické mechaniky ukázala v článku publikovaném v roce 1918, že každá spojitá transformace souřadnic a/nebo času vůči které je Lagrangeova funkce invariantní generuje zákon zachování určité mechanické veličiny. Invariance vůči jednoparametrické transformaci (parametrem je $t_0 \in \mathcal{R}$) $t \rightarrow t' = t - t_0$ má za následek zákon zachování energie, invariance vůči posunutí v prostoru $x^k \rightarrow x'^k = x^k - x_0^k$ generuje zákon zachování odpovídající složky hybnosti. Invariance Lagrangeovy funkce vůči rotacím kolem určité osi $\theta_k \rightarrow \theta'_k = \theta_k - \theta_{0k}$ má za následek zákon zachování průmětu momentu hybnosti na onu osu.

Základní článek¹¹ o souvislosti transformačních vlastností polních rovnic (pro bezspinové částice i částice se spiny $\frac{1}{2}$ a 1) se zákony zachování publikoval Wolfgang Pauli v době kdy již byl profesorem v Institute for Advanced Study v USA. Jednalo se o vylepšenou verzi referátu který Pauli připravoval pro Solvayův kongres v roce 1939, ten se však už kvůli situaci v Evropě neuskutečnil. Pauliho článek byl publikován v době, kdy mnoho států v Evropě již bylo okupováno, ani ne měsíc před vpádem Německa do Sovětského svazu a sedm měsíců před přepadením Pearl Harbor Japonci, které mělo za následek vstup USA do války. Takže Pauliho článek bohužel zapadl a ani v dnešní době se v souvislosti se zákony zachování v teorii pole často nezmiňuje.

Případ klasického K rozměrného pole s komponentami $\phi_1(x), \dots, \phi_K(x)$ se liší od případu klasické mechanické soustavy v těchto aspektech:

- Centrálním objektem není Lagrangeova funkce, ale Lagrangeova hustota $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, která nezávisí na časoprostorových souřadnicích explicitně, ale přes takovou závislost komponent pole a jejich derivací.
- Invariantnost Lagrangeovy hustoty vůči spojitě transformaci nemá za následek přímo existenci zachovávaných se veličiny, ale existenci zachovávaných se (splňujících rovnici kontinuity) čtyřproudu. Zachovávanou veličinou je pak prostorový integrál z nulté komponenty tohoto čtyřproudu.
- Pro mnohokomponentní pole (s výjimkou skalárního pole) z invariance Lagrangeovy hustoty vůči prostorovým rotacím neplyne zákon zachování orbitálního momentu hybnosti, ale celkového, tj součtu orbitálního a spinového (který v klasické mechanice neexistuje) momentu hybnosti.

¹¹Vyšel 8. května 1941 v Reviews of Modern Physics 13, 203 (1941).

- V teorii pole jsou důležité i transformace při kterých se časoprostorové souřadnice nemění, transformační předpis je zadán přímo pro komponenty pole. Tyto transformace se nazývají interní a v klasické mechanice nemají analog. V poslední době nabývají na důležitosti ve spojení s kalibračními teoriemi pole, které umožňují exaktně popisovat i interakce, které se v klasické fyzice nevyskytují.

Zákony zachování při interních transformacích

Uvažujme K -komponentní pole $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_K(x)$ a N -parametrickou spojitou transformaci s parametry $\alpha_i, i = 1, \dots, N$, přičemž při identické transformaci jsou všechny α nulové. Každá komponenta pole po transformaci může obecně záviset od všech komponent pole před transformací. Pro b -tou komponentu pole po transformaci píšeme

$$\phi'_b(x, \alpha) = \sum_{a=1}^K A_{ba}(\alpha) \phi_a(x), \quad (158)$$

kde A je čtvercová matice $K \times K$. Změnu komponenty pole při transformaci (158) s infinitezimálně malými hodnotami parametrů $\delta\alpha$ zapíšeme jako

$$\delta\phi_b(x) = i \sum_{i=1}^N \delta\alpha_i \sum_{a=1}^K D_{ba}^{(i)} \phi_a(x), \quad (159)$$

kde $D^{(a)}$ jsou čtvercové matice $K \times K$ s komponentami

$$D_{ba}^{(i)} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial A_{ba}(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right)_0. \quad (160)$$

Změna Lagrangeovy hustoty při infinitezimálně malých změnách komponent pole je rovna

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{b=1}^K \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_b} \delta\phi_b + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_b)} \delta(\partial_\mu\phi_b) \right].$$

V prvním členu z hranaté závorky nahradíme derivaci pomocí Lagrangeovy rovnice a v druhém členu použijeme $\delta(\partial_\mu\phi_b) = \partial_\mu\delta\phi_b$. Po použití pravidla pro derivaci součinu dostáváme

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{b=1}^K \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_b)} \delta\phi_b \right]$$

Ted' použijeme vyjádření (159) pro variaci komponent pole a po úpravách vychází

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \delta\alpha_i \partial_\mu \sum_{a,b=1}^K i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_b)} D_{ba}^{(i)} \phi_a.$$

Když ted' naložíme podmínku invariantnosti Lagrangeovy hustoty $\delta\mathcal{L} = 0$ vůči transformaci¹² (158) při nezávisle volených hodnotách parametrů α , dostáváme N rovnic kontinuity ($i = 1, \dots, N$)

$$\delta_\mu j_i^\mu = 0, \quad (161)$$

¹²Tyto transformace tvoří grupu, takže bychom přesněji měli mluvit o invarianci vůči příslušné grupě transformací.

příčemž

$$j_i^\mu = i \sum_{a,b=1}^K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_b)} D_{ba}^{(i)} \phi_a \quad (162)$$

jsou Pauliho čtyřproudy, pro které se vžil název proudy Noetherové. Jejich počet je roven počtu parametrů grupy transformací, vůči které je Lagrangeova hustota invariantní.

20 Spinorová elektrodynamika pozpátku

20.1 Úvod

Při formulování spinorové elektrodynamiky jsme využívali to, co známe z klasické fyziky o elektromagnetickém poli a o jeho interakci s nabitými částicemi. V klasické elektrodynamice se dokazuje kalibrační invariance, která znamená, že existuje grupa transformací čtyřpotenciálu elektromagnetického pole při kterých se pozorovatelné veličiny (intenzita elektrického pole \vec{E} a indukce magnetického pole \vec{B}). Základní rovnice elektrodynamiky jsou kalibračně kovariantní. V kvantové mechanice požadujeme, aby byly kovariantní vlnové rovnice pro nabitou částici v obecném elektromagnetickém poli. Z toho plyne jak se při kalibračních transformacích musí transformovat vlnové funkce. Při přechodu od kvantové mechaniky ke klasické teorii pole docházíme k tomu, že Lagrangeova hustota je při kalibračních transformacích invariantní.

V dalším si ukážeme, že se dá postupovat i obráceně:

1. Najdeme globální (stejnou v každém časoprostorovém bodě x) transformaci vůči které je Lagrangeova hustota \mathcal{L}_0 volného spinorového pole invariantní a odvodíme příslušný zachovávající se proud $j^\mu(x)$.
2. Nahradíme parametr α globální transformace funkcí $\alpha(x)$ a zjistíme, že vůči této (tzv. lokální) transformaci Lagrangeova hustota \mathcal{L}_0 již není invariantní.
3. Z tvaru členu narušujícího invarianci při lokálních transformacích usoudíme, jaký člen musíme k \mathcal{L}_0 přidat, abychom dostali Lagrangeovu hustotu \mathcal{L}_1 , která má šanci stát se invariantní při lokálních transformacích. Tento dodatečný člen obsahuje nové pole A_μ , které se váže na proud j^μ .
4. Z požadavku invariance Lagrangeovy hustoty \mathcal{L}_1 při lokálních transformacích dostaneme, jak se při lokálních transformacích transformuje pole A_μ .
5. Nakonec najdeme Lagrangeovu hustotu volného pole A_μ .

Ted' si jednotlivé kroky probereme podrobněji.

20.2 Globální kalibrační transformace

Budeme používat jednodušší verzi Lagrangeovy hustoty volného spinorového pole

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (163)$$

která se od verze kterou jsme používali v přednáškách z Kvantové pole I [soubor spinpole.pdf, rovnice (1)] liší o čtyřdivergenci $\frac{1}{2} \partial_\mu [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)]$, tudíž vede přes Lagrangeovy rovnice na stejné pohybové rovnice (Diracovy rovnice pro ψ a $\bar{\psi}$).

Spinorové pole je polem osmikomponentním, jeho komponenty stotožňujeme s maticovými elementy spinorových polí $\psi(x)$ a $\bar{\psi}(x)$ takto: $\phi_a = \psi_a$, $\phi_{a+4} = \bar{\psi}_a$, kde $a = 1, 2, 3, 4$. Kvůli pozdějšímu použití si připravíme derivace

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} = i(\bar{\psi} \gamma^\mu)_a \quad (164)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)} = 0. \quad (165)$$

Lagrangeova hustota (163) je zjevně invariantní vůči grupě spojitých jednoparametrických transformací

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha} \psi(x), \quad (166)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{iq\alpha} \bar{\psi}(x), \quad (167)$$

kde reálné číslo α je parametrem grupy a q je náboj elektronu (který jsme tam zavedli kvůli snadné pozdější interpretaci získaného zachovávaného se proudy). Tuto transformaci¹³ nazýváme globální, protože je stejná v každém bodě časoprostoru. Derivace pole se transformuje stejně jako pole samotné

$$[\partial_\mu \psi(x)] \rightarrow [\partial_\mu \psi(x)]' = e^{-iq\alpha} [\partial_\mu \psi(x)] \quad (168)$$

a Lagrangeova hustota se nemění

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0, \quad (169)$$

Protože se každá komponenta ψ_a transformuje stejně a komponenty se nemíchají, pro transformační matici zavedenou ve vztahu (158) můžeme napsat

$$A_{ba}(\alpha) = e^{-iq\alpha} \delta_{ba},$$

pro $b, a = 1, 2, 3, 4$ a pak i podle (160)

$$D_{ba} = -q\delta_{ba}. \quad (170)$$

Koeficienty D_{ba} pro hodnoty indexů $b, a = 5, 6, 7, 8$ pro účely určování zachovávaného se proudy (162) nepotřebujeme, protože díky nulovosti derivace (165) přispívat nebudou. Po dosazení vztahů (164) a (170) do (162) dostáváme pro zachovávaný se proud generovaný globální kalibrační transformací (166)

$$j^\mu(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad (171)$$

který známe z kapitoly 2 jako čtyřvektor hustoty toku náboje.

20.3 Lokální kalibrační transformace

Nahradme teď parametr α v transformaci (166-167) reálnou funkcí¹⁴ $\alpha(x)$. Při takto vzniklé transformaci se fáze polí změní různě v různých časovoprostorových bodech, mluvíme proto o lokální transformaci.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)} \psi(x), \quad (172)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{iq\alpha(x)} \bar{\psi}(x), \quad (173)$$

¹³Na komplexní číslo kterým pole $\psi(x)$ násobíme, můžeme nahlížet jako na unitární matici rozměru 1×1 , která je prvkem grupy $U(1)$. Grupu transformací generovaných těmito maticemi označujeme stejně, tj. jako $U(1)$. Jedná se o grupu komutativní (abelovskou).

¹⁴S funkcí $\chi(x)$, kterou jsme při úvahách o kalibrační transformaci používali dříve, souvisí vztahem $\alpha(x) = -\chi(x)$.

Pro derivaci pole po transformaci máme

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)} [-iq\psi(x)\partial_\mu\alpha(x) + \partial_\mu\psi(x)]$$

Při této transformaci se \mathcal{L}_0 změní na

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi}'(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi'(x) = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \partial_\mu\alpha(x),$$

co s přihlédnutím k (163) a (171) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + j^\mu(x) \partial_\mu\alpha(x). \quad (174)$$

20.4 Zavedení kalibračního pole, jeho interakce s proudem

Lagrangeova hustota volného spinorového pole (163) není invariantní vůči lokální transformaci (172-173). Abychom našli Lagrangeovu hustotu která bude kalibračně invariantní musíme předpokládat, že existuje pole $A_\mu(x)$ které se váže na čtyřproud $j^\mu(x)$ tak, že vykompenzuje¹⁵ nežádoucí příspěvek ve vztahu (174). Píšeme proto

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 - j^\mu(x)A_\mu(x). \quad (175)$$

Protože čtyřproud (171) je invariantní i vůči lokální transformaci, pro novou Lagrangeovu hustotu po lokální transformaci máme

$$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}'_0 - j^\mu(x)A'_\mu(x) = \mathcal{L}_0 + j^\mu(x) \partial_\mu\alpha(x) - j^\mu(x)A'_\mu(x)$$

a s využitím (175) taky

$$\mathcal{L}'_1 - \mathcal{L}_1 = j^\mu(x) [\partial_\mu\alpha(x) - A'_\mu(x) + A_\mu(x)].$$

Aby byl námi zvolená Lagrangeova hustota kalibračně invariantní, tj aby platilo $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1$, musí se kompenzační pole transformovat při kalibrační transformaci podle vztahu

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \quad (176)$$

Když zavedeme kalibračně kovariantní derivaci

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu,$$

můžeme Lagrangeovu hustotu (175) zapsat ve tvaru

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x).$$

20.5 Materializace kalibračního pole

Pokud chceme kompenzační pole učinit integrální součástí dynamického systému a umožnit jeho kvantování, musíme do Lagrangeovy hustoty přidat taky část která popisuje volné kompenzační pole (tzv. kinetický člen) a to kalibračně invariantním způsobem. Při její konstrukci využijeme tenzor elektromagnetického pole (field strength tensor, Faraday tensor, Maxwell bivector)

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (177)$$

¹⁵Takováto pole se nazývají kalibračními nebo kompenzačními (gauge fields, kompensirujuščije polja).

který je kalibračně invariantní, protože $\partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) = \partial_\nu \partial_\mu \alpha(x)$. Kvadrát tohoto tensoru $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ musí do kompletní Lagrangeovy hustoty vstupovat s negativním multiplikačním faktorem, závislým od výběru jednotek. V Heavisideově soustavě jednotek jej klademe roven $-\frac{1}{4}$. je kompletní Lagrangeova hustota rovna

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu(x)A_\mu(x).$$

Rozeznáváme tu postupně Lagrangeovu hustotu volného spinorového pole, volného elektromagnetického pole a člen popisující interakci elektromagnetického pole se spinorovým, jak jsme jej jiným způsobem odvodili v kapitole 2.

20.6 Kalibrační teorie silných a slabých interakcí

Při formulaci kvantových teorií které popisují procesy a interakce nemající analog v klasické fyzice nemáme samozřejmě žádný vzor ze kterého bychom mohli vycházet. Jedná se při tom o tak důležité interakce jako je silná interakce (díky které např. drží pohromadě jádra atomů) a slabé, nejznámějším projevem které jsou rozpady jader a částic. Tady přicházejí ke slovu kalibrační teorie pole, ve kterých se interakce zavádí z požadavku lokální kalibrační invariance Lagrangeovy hustoty.

Jako příklad uveďme kvantovou chromodynamiku, která je kandidátem na objasnění silných interakcí. Ta vychází z poznatku, že kvarky mají další kvantové číslo, které může nabývat tři hodnoty. Říká se mu barva. Vlnová funkce kvarku je s ohledem na barvu trojkomponentní. Lagrangeova hustota kvarkového pole je invariantní vůči globálním transformacím, při kterých vlnovou funkci násobíme maticí z grupy SU(3), která je osmiparametrická a nekomutativní. Z globální invariance plyne existence osmi zachovávajících se proudů. K dosažení invariance vůči lokálním transformacím je nutné zavést osm kalibračních polí. Jejich kvanta, kterým se říká gluony, se liší od sebe barvou, která je u gluonů dána různými kombinacemi kvarkové barvy a antibarvy. Tvoří osmirozměrnou reprezentaci grupy SU(3), zatímco silně interagující částice (hadrony) jsou barevně neutrální, tudíž patří do reprezentace jednorozměrné. Gluony mají, podobně jako kvanta elektromagnetického pole, nulovou klidovou hmotnost. Ve výsledné Lagrangeově hustotě se kromě členu popisujícího interakci kvarků s gluony, se jako důsledek nekomutativnosti kalibrační grupy objeví i členy, popisující interakci gluonů mezi sebou. To je zásadní rozdíl vůči kvantové elektrodynamice, ve které fotony mezi sebou přímo neinteragují (fotony se na fotonech mohou rozptylovat až ve čtvrtém řádu poruchového rozvoje, kde se ve Feynmanovém diagramu objeví spinorový čtvereček do rohů kterého jsou napojeny fotony).

Co se slabých interakcí týče, jejich popis je komplikovanější, protože kvanta kalibračního pole (W^\pm a Z^0 bosony, objevené v CERNu v roce 1983) mají nenulové hmotnosti, přibližně stokrát větší než proton. Tam už se musí zapojit do hry skalární pole, kvantum kterého (Higgsův boson) bylo objeveno v roce 2012.