Opakování

1. Vyřešte integrál $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$ (úpravy)
2. Vyřešte integrál $\int \sqrt[3]{6x-7}\,dx$ (substituce)
3. Vyřešte integrál $\int \sin x \cos x\,dx$ (substituce)

Určitý integrál

Řešení určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ spočívá ve dvou krocích:

a výpočet odpovídajícího neurčitého integrálu (zápis bez horní a dolní meze)

b dosazení mezí $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$

Např.:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

GEOMETRICKÉ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

- Obsah rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\ a\le x\le b,\ \ g(x)\le y\le f(x)\}$:

  $$P=\int_a^b [\,f(x)-g(x)]\,dx \quad [m^2]$$

  - Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $\gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in\langle\alpha,\beta\rangle$:

    $$P=\int_\alpha^\beta |\,\psi(t)\ \varphi'(t)\,|\,dt \quad [m^2]$$

- Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy $A=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\ a\le x\le b,\ \ g(x)\le y\le f(x)\}$ kolem osy x:

  $$V=\pi\int_a^b [\,f^2(x)-g^2(x)]\,dx \quad [m^3]$$

  - Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkou $\gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in\langle\alpha,\beta\rangle$ kolem osy x:

    $$V=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\,|\,\varphi'(t)\,|\,dt \quad [m^3]$$

- Délka křivky $\gamma: y=f(x),\ x\in\langle a,b\rangle$:

  $$L=\int_a^b \sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\ dx \quad [m]$$

  - Délka křivky $\gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in\langle\alpha,\beta\rangle$:

    $$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt \quad [m]$$

- Obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $\gamma: y=f(x),\ x\in\langle a,b\rangle$ kolem osy x:

  $$S=2\pi\int_a^b |\,f(t)\,|\sqrt{1+[\,f'(x)]^2}\ dx \quad [m^2]$$

  - Obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $\gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in\langle\alpha,\beta\rangle$ kolem osy x:

    $$S=2\pi\int_\alpha^\beta |\,\psi(t)\,|\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt \quad [m^2]$$

Příklady

a Vypočtěte obsah útvaru mezi přímkou $y = 5$ a parabolou $y = x^2 + 1$.

b Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro obsah kruhu o poloměru r.