Diferenciál a Taylorův polynom

Aproximace funkce v okolí bodu

Danou funkci chceme v okolí daného bodu nahradit (aproximovat) jednodušší funkcí.

- **Lineární aproximace**: Funkci nahradíme lineární funkcí – tečnou v daném bodě.

- **Aproximace pomocí Taylorova polynomu**: Funkci nahradíme polynomem stupně n, který má v daném bodě stejnou funkční hodnotu i hodnotu derivací až do řádu n.

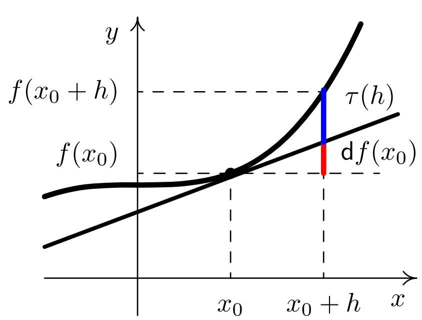
1 Lineární aproximace

- Nechť f má v bodě x_0 vlastní derivaci. Pak nejlepší lineární aproximací funkce f v okolí bodu x_0 je **tečna** ke grafu funkce f v bodě x_0, tj.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

  pro x dostatečně blízká k x_0.

Geometrický význam – diferenciál



Pro funkční hodnotu v bodě $x_0 + h$ platí:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta f(x_0).$$

Přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit:

$$\Delta f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + \tau(h),$$

kde $\mathrm{d}f(x_0)$ je tzv. *diferenciál funkce f v bodě x_0* (= přírůstek na tečně), tedy

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)h.$$

Je-li h dostatečně malé (bod $x_0 + h$ je blízko bodu x_0), pak $\tau(h)$ je mnohem menší než diferenciál. Hodnotu $\tau(h)$ tedy zanedbáme a skutečný přírůstek funkce vyjádříme přibližně pomocí diferenciálu:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h.$$

2 Taylorův polynom

- Nechť f má v bodě x_0 derivace až do řádu n.

- Chceme najít polynom stupně n, který aproximuje co nejlépe funkci f v okolí bodu x_0.

- Požadujeme, aby hledaný polynom měl v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a hodnotu derivací až do řádu n jako funkce f.

Příklad (Motivace). Nechť $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$. Najděte polynom druhého stupně, který má v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu první a druhé derivace jako funkce f.

Hledaný polynom je tvaru:

$$P(x) = a + b(x+2) + c(x+2)^2.$$

Spočítáme derivace:

$$\begin{aligned} P'(x) &= b + 2c(x+2), \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ P''(x) &= 2c \qquad\qquad\quad , \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Porovnáním funkčních hodnot a hodnot derivací polynomu P a funkce f v bodě $x_0 = -2$:

$$-\tfrac{1}{2} = a, \quad -\tfrac{1}{4} = b, \quad -\tfrac{1}{4} = 2c.$$

Tedy
$$P(x) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(x+2) - \tfrac{1}{8}(x+2)^2.$$

Polynom $P(x)$ je tzv. Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ se středem $x_0 = -2$.

Stejným způsobem jako v předchozím příkladu je možné odvodit obecný tvar Taylorova polynomu:

Definice (Taylorův polynom). Nechť f je funkce, která má v bodě x_0 derivace až do řádu n. Pak polynom tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom stupně n funkce f se středem x_0*.

- Připomeňme, že $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

- Střed x_0 je pevně daný, proměnná polynomu je x.
- Pro $n = 1$, dostáváme lineární polynom
$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$
tj. tečnu ke grafu funkce f v bodě x_0.

Poznámka. Polynom T_n a funkce f mají v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu i hodnotu všech derivací až do řádu n, tj.

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ T_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Věta 1 (Taylorova)**.** *Nechť f je funkce, která má v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$. Nechť $T_n(x)$ je Taylorův polynom funkce f se středem x_0. Pak*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{1}$$

pro všechna $x \in O(x_0)$, kde $R_{n+1}(x)$ je tzv. zbytek, který lze vyjádřit ve tvaru

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde c je nějaké číslo mezi x a x_0.

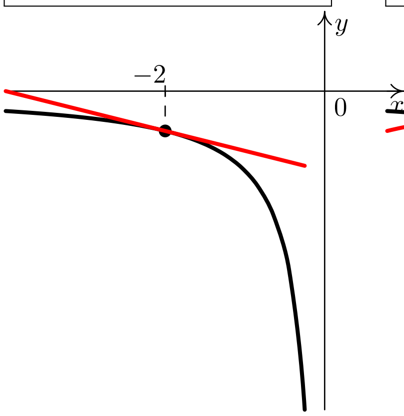
- Zbytek $R_{n+1}(x)$ lze vyjádřit i v jiných tvarech. Tvar zbytku uvedený v předchozí větě je tzv. *Lagrangeův tvar zbytku.*
- Vzorec (1) se nazývá *Taylorův vzorec.*
- Polynom $T_n(x)$ aproximuje funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 s chybou $R_{n+1}(x)$. Pokud je x dostatečně blízko k x_0, píšeme $f(x) \approx T_n(x)$.
- Pokud $n = 1$, pak $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. funkci f aproximujeme její tečnou v bodě x_0.
- Čím menší je okolí bodu x_0 a čím větší je n, tím je aproximace lepší.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$

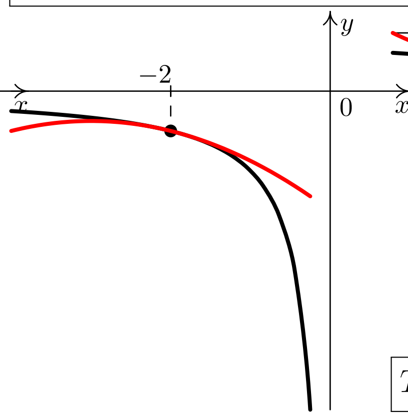
$$\begin{aligned} f(-2) &= -\frac{1}{2} \\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(-2) &= -\frac{1}{4} \\ f''(x) = \quad \frac{2}{x^3}, \quad f''(-2) &= -\frac{1}{4} \\ f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f'''(-2) &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

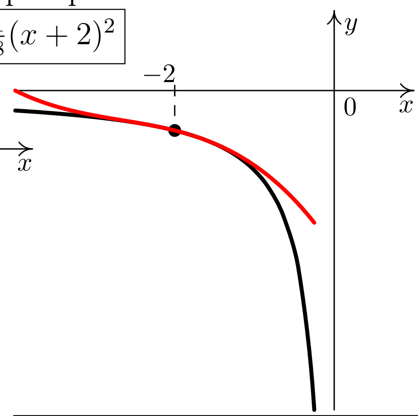
S rostoucím stupněm Taylorova polynomu dostáváme lepší aproximaci ve větším okolí bodu.

$\boxed{T_1(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2)}$



$\boxed{T_2(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2}$





$\boxed{T_3(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2 - \frac{1}{16}(x+2)^3}$

Příklady

1. V okolí bodu $a_0 = 0$ aproximujte funkci $y = \cos x$ Taylorovým polynomem 2. a 3. řádu
2. Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sqrt{382}$
3. Napište Taylorův vzorec pro $n = 2$, $x_0 = 1$ a $f(x) = x \ln x$

Primitivní funkce a neurčitý integrál funkce jedné reálné proměnné

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. přednáška

V předcházejícím studiu jste se seznámili s důležitým pojmem, a to derivací funkce. Funkci f byla přiřazena jistým způsobem definovaná nová funkce f'. Přitom pro konkrétní hodnotu x číslo $f'(x)$ mohlo mít různou interpretaci podle toho, co vyjadřovala funkce f.

Úloha, kterou se budeme zabývat nyní, je v podstatě opačná. K zadané funkci f budeme hledat funkci F takovou, aby platilo $F' = f$. Budeme se tedy ptát, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci f. Tudíž ze znalosti směrnic tečen ke grafu funkce budeme chtít najít tuto funkci, ze znalosti okamžité rychlosti bodu budeme chtít zjistit polohu tohoto bodu, ze znalosti okamžitého zrychlení bodu budeme chtít určit jeho okamžitou rychlost apod.. Poznáme, že tato úloha je podstatně složitější než derivování, protože neexistuje obecný algoritmus výpočtu.

Podíváme-li se do dnešních učebnic diferenciálního a integrálního počtu, většinou výklad začíná seznámením s reálnými čísly, následuje pojem limita, pomocí limity se definuje derivace, pak neurčitý integrál a nakonec integrál určitý.

Historicky ovšem tyto pojmy nevznikaly v tomto pořadí. Ve skutečnosti se nejdříve vyvíjel pojem určitého integrálu (výpočty obsahů a objemů), pak derivace a neurčitý integrál (v 17. stol.), které byly založeny na intuitivním chápání nekonečně malé a velké veličiny a tudíž limitního procesu, a o 100 let později se upřesňoval pojem limity a teprve v 19. století byla vybudována teorie reálných čísel.

PRIMITIVNÍ FUNKCE A NEURČITÝ INTEGRÁL

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu *I*. Funkce $F(x)$ se nazývá ***primitivní*** k funkci $f(x)$ na *I*, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Věta: Nechť funkce $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na *I*, pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na *I* má tvar $F(x)+c$, kde $c \in R$.

Definice: Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na *I* se nazývá *neurčitý integrál* funkce $f(x)$ a značí se symbolem $\int f(x)dx$. Tedy

$$\int f(x)dx = F(x)+c\,,\ x \in I\,.$$

Poznámka:

1. Integrační znak $\int$ vznikl protažením písmene S, kterým začíná slovo *suma*

2. Funkci $f(x)$ nazýváme *integrandem*

3. Výraz dx je diferenciál proměnné x a v tuto chvíli je jeho význam jen v tom, že nám říká, jak je označená proměnná.

4. Číslo c nazýváme *integrační konstanta*

Zkusme nyní najít nějakou primitivní funkci např. k funkci $\cos x$, $x \in R$. Ze znalostí derivací není těžké odhadnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$ nebo také $F(x) = \sin x + 3$, atd.. Tzn. že všechny funkce $\sin x + c$, kde $c \in R$, jsou primitivní k funkci $\cos x$
$\Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + c$, $c \in R$.

Věta: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu *I*, pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce.

Na závěr uvedeme jednoduchou (ale důležitou) větu, kterou budeme při výpočtu neurčitých integrálů neustále používat.

Věta: Nechť na intervalu *I* existují integrály $\int f(x)dx$ a $\int g(x)dx$, pak na *I* existuje rovněž integrál jejich součtu, rozdílu a násobku konstantou:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in R.$$

Tato věta plyne přímo ze základních vlastností derivace. Stručně říkáme, že neurčitý integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) neurčitých integrálů a že konstantu, kterou se násobí, smíme z neurčitého integrálu vytknout.

Poznámka: Z definice neurčitého integrálu vyplývá platnost rovností:

1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$
2. $\int F'(x)dx = F(x) + c$, $c \in R$,

takže operace derivování a integrace jsou navzájem komplementární. O správnosti výsledku integrace se můžeme vždy přesvědčit derivací výsledku.

Tabulkové integrály

První skupinu vzorců (1-10,12,13) dostaneme, obrátíme-li základní vzorce pro derivování. Tu doplníme o dva užitečné vzorce 11 a 14.

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ obecněji $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$ obecněji $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \neq 1,\ a > 0;$

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$ obecněji $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$ obecněji $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

9. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C;$ obecněji $\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ obecněji $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$ obecněji $\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C$

13. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$ obecněji $\int \frac{1}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a}\operatorname{cotg} ax + C$

14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$

Poznámka:

1. Vzorec 2. je zkráceným zápisem pro $\int 1 dx$, podobně se ve vzorci 4. a dalších obdobných integrálech používá místo $\int \frac{1}{x} dx$ zápis $\int \frac{dx}{x}$

2. Vzorec 3. umožňuje integraci obecné mocniny, tj. i nejrůznějších odmocnin

3. Protože derivace funkcí arkustangens a arkuskotangens se liší pouze znaménkem (totéž platí pro arkussinus a arkuskosinus) je možné ve vzorci 9. (resp.10.) psát $\int \frac{1}{x^2+1} dx = -\operatorname{arccotg} x + C$ (resp. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$)

Příklad: Vypočtěte následující neurčité integrály:

a) $\int x^2 dx$ = (použijeme 3. vzorec, n=2) = $\frac{x^3}{3} + c$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-1/3} dx$ = (použijeme 3. vzorec, n=-1/3) = $\frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

c) $\int e^{-2x} dx$ = (použijeme 5. vzorec, a=-2)= $\frac{e^{-2x}}{-2} + c = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$

d) $\int \frac{1}{x^2+5} dx$ = (použijeme 9. vzorec, a= $\sqrt{5}$)= $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c$

e) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5} dx$ = (použijeme 14. vzorec)= $\ln\left|x^3+x+5\right| + c$

f) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3\sin 5x + 3^x + \frac{4}{3-x}\right)dx$ = (integrál rozdělíme na jednodušší a použijeme potřebné vzorce) $= 2\int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 3\int \sin 5x dx + \int 3^x dx - 4\int \frac{1}{x-3} dx = 2\operatorname{tg} x - 3\frac{-\cos 5x}{5} + \frac{3^x}{\ln 3} -$

$-4\ln|x-3| + c$

Domácí úkol

1. Napište Taylorův vzorec pro $n = 2$, $x_0 = 1$ a $f(x) = x \ln x$
2. Vyřešte integrály e) a f) z příkladů ve druhé sekci