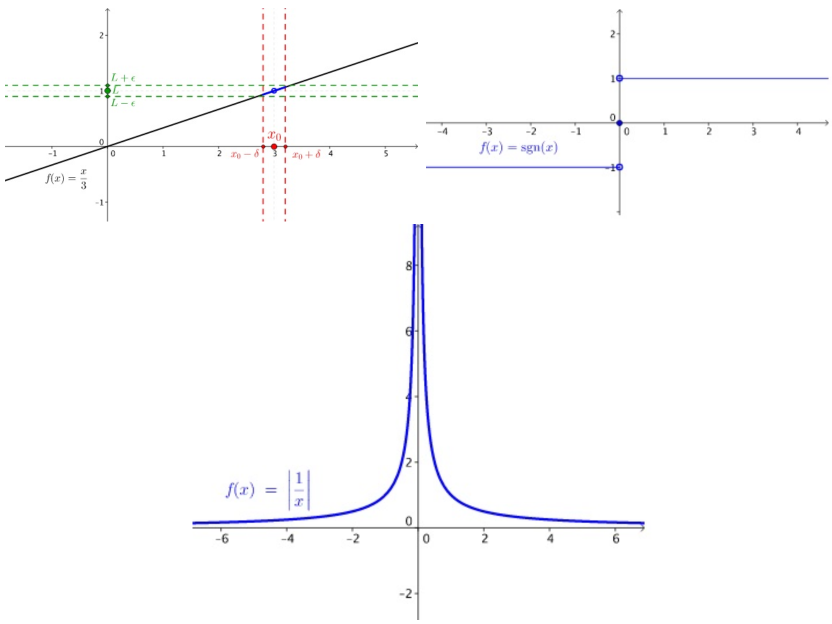
# Limita a spojitost funkce

## Limita funkce

Pokud bereme funkci $f$ jako předpis, který hodnotě $x$ přiřazuje funkční hodnotu $f(x)$, pak $f$ má v bodě $p$ limitu $L$, jestliže pro $x$ v okolí bodu $p$ jsou hodnoty $f(x)$ blízko $L$. Matematická definice, navržená na začátku 19. století, vyžaduje, aby se pro libovolně malou odchylku od $L$ dalo najít okolí bodu $p$, že pro každé $x$ v tomto okolí se $f(x)$ liší od $L$ o méně než povolenou odchylku.

Matematicky zapisujeme, že pro $x$ blížící se k $p$ se hodnota $f(x)$ blíží k $L$ výrazem $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$.




Obrázek 1: Ukázka okolí bodu (vlevo nahoře), ukázka nespojitosti (vpravo nahoře) a nespojitosti ve vlastním bodě (dole).

**Důležité vzorce:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

kde $a$ je kladné reálné číslo a $e$ Eulerovo číslo ($e \doteq 2.718$).

## Spojitost funkce

**Spojitá funkce** je taková matematická funkce, jejíž hodnoty se mění plynule, což si lze intuitivně představit tak, že graf funkce lze nakreslit jedním tahem, aniž by se tužka zvedla z papíru. Funkce, která není spojitá, se označuje jako nespojitá. Funkce má v každém bodě definičního oboru vlastní limitu (reálné číslo, ne nekonečno).

**Funkce, kde není definiční obor celé $R$:**

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{x+2}$$
$$y = \sqrt{x}, \qquad y = \sqrt{x^2 - 4}$$
$$y = \log x, \qquad y = \log(x - 5)$$

**Příklad 3.1**
Určete limitu $\lim_{x\to 3} x^2$.
*Řešení*

- Protože funkce $y = x^2$ je spojitá v bodě $3$, můžeme přímo dosadit a určit limitu díky vztahu mezi limitou a spojitostí.
- $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$

**Příklad 3.2**
Určete limitu $\lim_{x\to 2} x^2 + x - 1$.
*Řešení*

- Použijeme větu o limitě součtu a protože funkce $y = x^2$ a $y = x - 1$ jsou spojité v bodě $2$, můžeme počítat takto:
- $\lim_{x\to 2} x^2 + x - 1 = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x - 1 = 2^2 + 1 = 5$

**Příklad 3.3**
Určete limitu $\lim_{x\to -1}(x-1)(x+3)$.
*Řešení*

- Použijeme větu o limitě součinu a využijeme spojitosti.
- $\lim_{x\to -1}(x-1)(x+3) = \lim_{x\to -1}(x-1)\lim_{x\to -1}(x+3) = (-2)2 = -4$

**Příklad 3.4**
Určete limitu $\lim_{x\to 4} \frac{x-2}{x+4}$.
*Řešení*

- Použijeme větu o limitě podílu a využijeme spojitosti.
- $\lim_{x\to 4} \frac{x-2}{x+4} = \frac{\lim_{x\to 4} x-2}{\lim_{x\to 4} x+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

**Úloha**

$\lim_{x \to -1}(2x+3) =$

*Řešení*

- $= 2(-1) + 3 =$
- $= 1$

**Úloha**

$\lim_{x \to 0}(x^2 - 2x + 3) =$

*Řešení*

- $= 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 =$
- $= 3$

**Úloha**

$\lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{3x-2} =$

*Řešení*

- $= \frac{\lim_{x \to 1}(2x+3)}{\lim_{x \to 1}(3x-2)} =$
- $= \frac{2 \cdot 1 + 3}{3 \cdot 1 - 2} =$
- $= 5$

### Úloha

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

*Řešení*

- $= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} =$
- $= \lim_{x\to 2}(x+2) =$
- $= 4$

### Úloha

$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3} =$

*Řešení*

- $= \lim_{x\to -3} \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} =$
- $= \lim_{x\to -3} \frac{x+2}{x+1} =$
- $= \frac{1}{2}$

**Úloha**

$\lim_{x\to 0}\sin x \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x \lim_{x\to \pi}\sin x$

*Řešení*

- $\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x = 1 \lim_{x\to \pi}\sin x = 0$

**Úloha**

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x} =$

*Řešení*

- $= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}\cdot\frac{3}{3} =$
- $= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5} =$
- $= \frac{3}{5}$