Proto funkce nemá žádné asymptoty bez směrnice.

Nyní budeme hledat asymptoty se směrnicí. S použitím důsledku 6.35 dostaneme

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} .$$

Tedy funkce má asymptotu se směrnicí $y = \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \pm\infty$. ▲

6.5. Průběh funkce — shrnutí

Při vyšetřování průběhu funkce f postupujeme takto:

1. Stanovíme $D(f)$, $H(f)$, zda je funkce f případně sudá, lichá nebo periodická. Najdeme body nespojitosti a rozhodneme o jejich druhu.
   Určíme nulové body funkce f a intervaly, kde je f kladná a kde záporná.
2. Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:
   - intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   - intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   - lokální extrémy (podle změny znaménka f').
3. Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:
   - intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   - intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   - inflexní body (podle změny znaménka f'').
4. Určíme asymptoty funkce f.
5. Vypočítáme funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body atd.).
6. Nakreslíme graf funkce.

Příklad 6.37. Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = \frac{\ln x^2}{x} .$$

Řešení.

1. Definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Platí $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x)$, proto je daná funkce lichá a vlastnosti musí být jistým způsobem „symetrické“.

   Nulové body funkce určíme z rovnice $f(x) = 0$, odkud dostáváme $x = \pm 1$. Vyšetříme znaménko funkce:

$$f: \quad \begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & & + \\ & & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

2. Určíme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2}\,x - \ln x^2}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}\,.$$

   Odtud zjistíme stacionární body funkce:

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm \mathrm{e}.$$

   Snadno zjistíme znaménko první derivace na jednotlivých intervalech:

$$f': \quad \begin{array}{ccccccc} \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \\ - & & + & & + & & - \\ & -\mathrm{e} & & 0 & & \mathrm{e} & \\ & \text{min} & & & & \text{max} & \end{array}$$

   Funkce nabývá lokálního minima v bodě $x = -\mathrm{e}$ a lokálního maxima v bodě $x = \mathrm{e}$.
3. Druhá derivace je

$$f''(x) = \frac{-\frac{2x}{x^2}\,x^2 - (2 - \ln x^2)2x}{x^4} = \frac{2(\ln x^2 - 3)}{x^3}\,.$$

   Určíme nulové body druhé derivace, protože pouze v nich mohou být inflexní body:

$$f''(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^3}.$$

   Její znaménko je:

$$f'': \quad \begin{array}{ccccccc} \frown & & \smile & & \frown & & \smile \\ - & & + & & - & & + \\ & -\sqrt{\mathrm{e}^3} & & 0 & & \sqrt{\mathrm{e}^3} & \\ & \text{inf} & & & & \text{inf} & \end{array}$$

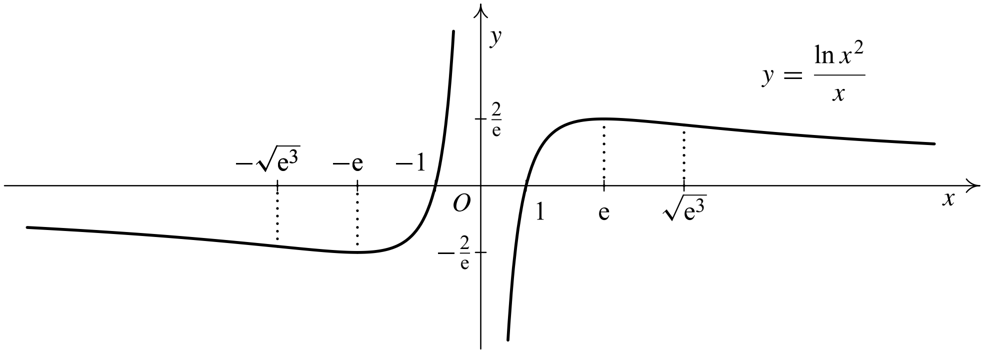
4. Pro určení asymptot funkce počítejme limity

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln x^2}{x} = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\ln x^2}{x} = 0.$$

   Odtud vidíme, že přímka $y = 0$ je asymptotou bez směrnice a přímka $y = 0$ je asymptotou pro $x \to \pm\infty$.
5. Spočítáme hodnoty funkce f ve významných bodech (extrémy, inflexní bod):

$$\text{maximum/minimum: } f(\pm\mathrm{e}) = \pm\frac{2}{\mathrm{e}}\,, \qquad \text{inflexe: } f(\pm\sqrt{\mathrm{e}^3}) = \pm\frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}^3}}\,.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.6. Funkce je lichá, proto je její graf souměrný podle počátku. (Měřítko na ose x je dvakrát větší než na ose y.) ▲



Obr. 6.6

6.6. Řešené příklady na extrémy a průběh funkce

Příklad 6.38. Vyšetřete průběh funkce

$$f: \, y = x - 2 \operatorname{arctg} x.$$

Řešení.

1. Definiční obor dané funkce je $D(f) = \mathbb{R}$. Dále platí

$$f(-x) = -x - 2 \operatorname{arctg}(-x) = -x + 2 \operatorname{arctg} x = -f(x),$$

proto je funkce lichá a její vlastnosti budou „symetrické“.

Pokusíme se určit znaménko funkčních hodnot. Rovnici $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{2}$ však nedokážeme řešit. Jeden kořen je jasný — $x = 0$. Protože funkce $\operatorname{arctg} x$ má v bodě $x = 0$ derivaci rovnu 1 a funkce $\frac{x}{2}$ má derivaci $\frac{1}{2}$, lze z grafů těchto funkcí odhadnout, že existuje jediné číslo $a > 0$ takové, že v $\pm a$ má naše funkce kořeny. Přesněji to uvidíme z výsledného grafu. Tedy:

$$f: \quad \begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -a & & 0 & & a & \end{array}$$

2. Počítejme první derivaci:

$$y' = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}.$$

Odtud dostáváme stacionární body $x = \pm 1$ a znaménko první derivace na jednotlivých intervalech:

$$f': \quad \begin{array}{ccccc} \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \\ & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

Vidíme, že funkce má v bodě $x = 1$ lokální extrém, a to lokální minimum; symetricky v bodě $x = -1$ má lokální maximum.

3. Vypočteme druhou derivaci

$$y'' = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,,$$

odkud $f''(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Určíme znaménko druhé derivace:

$$f'': \quad \overset{\frown}{-} \;\underset{\substack{0 \\ \text{inf}}}{|}\; \overset{\smile}{+}$$

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, nemá proto žádné asymptoty bez směrnice. Vyšetříme, zda má asymptoty se směrnicí:

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - 2\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - 0 = 1,\\
b_+ &= \lim_{x\to+\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x - x) = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi,\\
b_- &= \lim_{x\to-\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x - x) = -2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

Asymptotami funkce jsou tedy přímky $y = x - \pi$ pro $x \to +\infty$ a $y = x + \pi$ pro $x \to -\infty$.

5. Spočtěme funkční hodnoty funkce ve význačných bodech:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}\,, \qquad f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}\,.$$

6. Nakreslíme graf funkce, viz obr. 6.7. ▲

Příklad 6.39. Vyšetřete průběh funkce

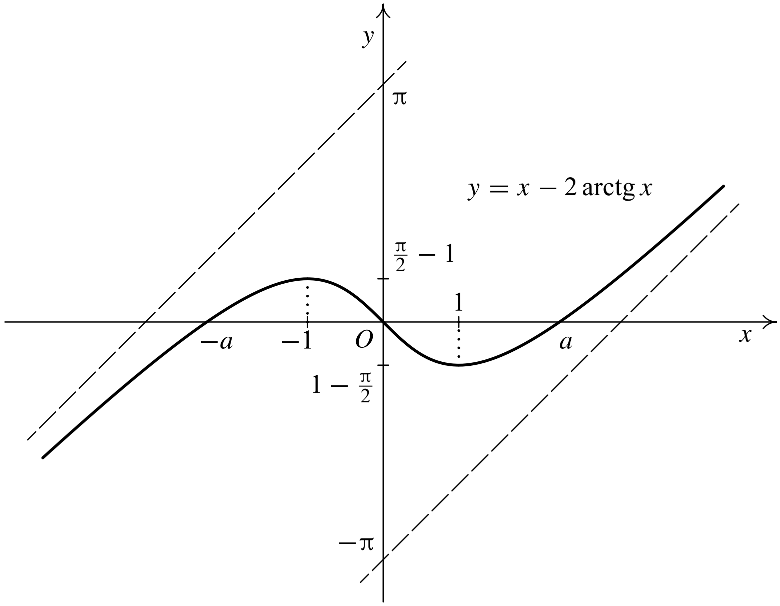
$$f\colon\ y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Řešení.

1. Nejprve určíme definiční obor. Funkce $\arcsin u$ je definována pouze pro hodnoty $u \in [-1, 1]$, proto musí platit $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$. V příkladu 1.31 a) jsme ukázali, že tato nerovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce f je všude spojitá.

   Nyní vyšetříme, zda je funkce f sudá nebo lichá:

$$f(-x) = \arcsin\frac{-2x}{1+x^2} = -\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -f(x).$$



Obr. 6.7

Funkce je lichá, a proto jsou její vlastnosti opět „symetrické". Nulové body funkce jsou

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

tj. jediným nulovým bodem je $x = 0$. Vzhledem k průběhu funkce arkussinus platí:

$$f\colon \quad \underset{}{\overset{-}{\longrightarrow}}\ \underset{0}{|}\ \overset{+}{\longrightarrow}$$

2. Počítejme první derivaci funkce. Je nutné si uvědomit, že funkce $\arcsin u$ má derivaci jen pro $u \in (-1, 1)$ a v bodech $u = -1$, $u = 1$ existují pouze jednostranné nevlastní derivace $+\infty$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \cdot \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-1)^2}}\,.$$

Odtud pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(x^2-1)} = -\frac{2}{x^2+1}$$

a pro $x \in (-1, 1)$ je

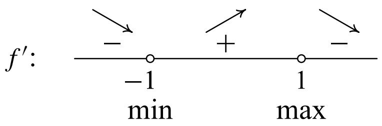
$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2}{x^2+1}\,.$$

(Při výpočtu jsme použili rovnosti $\sqrt{a^2} = |a|$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.) V bodech $-1, 1$ existují pouze jednostranné derivace. S použitím cvičení 9 z kapitoly 5 dostaneme:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} \frac{-2}{1+x^2} = -1, \qquad f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{2}{1+x^2} = 1,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{2}{1+x^2} = 1, \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

Body $x = \pm 1$ jsou tedy tzv. úhlové body.

Dále určíme znaménko první derivace na jednotlivých podintervalech:



Odtud podle věty 6.10 nahlédneme, že v bodě 1 nabývá funkce lokálního maxima (přestože v tomto bodě neexistuje derivace!); symetricky pak v bodě -1 nabývá lokálního minima.

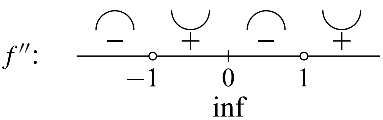
3. Výpočet druhé derivace provedeme na jednotlivých podintervalech:
Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je

$$y'' = \left(\frac{-2}{1+x^2}\right)' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,,$$

pro $x \in (-1, 1)$ je

$$y'' = \left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Nulový bod druhé derivace je tedy pouze $x = 0$ a jen tam může být inflexe. Určíme znaménko f'' a intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní.



V bodech $-1, 1$ inflexe není, protože v nich neexistuje první derivace.

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, zjevně tedy nemá žádné asymptoty bez směrnice. Vyšetříme, zda má asymptotu se směrnicí pro $x \to \pm\infty$. Platí

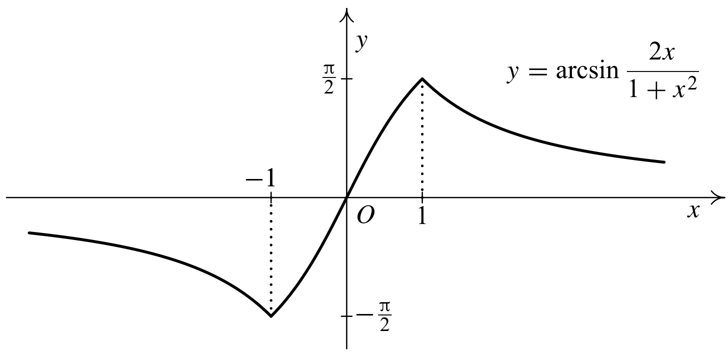
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{x} = \frac{0}{\pm\infty} = 0,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{y\to 0^\pm} \arcsin y = 0,$$

přičemž jsme v posledním kroku použili větu o limitě složené funkce ($y = \frac{2x}{1+x^2}$). Přímka $y = 0$ je asymptotou dané funkce pro $x \to \pm\infty$.

5. Určíme funkční hodnoty ve významných bodech

$$f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.8. ▲



Obr. 6.8

Příklad 6.40. Vyšetřete průběh funkce $f\colon\ y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

Řešení.

1. Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$. Dále snadno určíme nulové body funkce:

$$\sqrt[3]{1-x^3} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-x^3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1.$$

U třetí odmocniny je znaménko funkce f stejné jako znaménko výrazu pod odmocninou:

$$f\colon\quad \overset{+}{}\underset{1}{|}\overset{-}{}$$

Protože $f(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^3} = \sqrt[3]{1+x^3}$, funkce není ani sudá. ani lichá.

2. Funkce $\sqrt[3]{u}$ má konečnou derivaci pouze pro $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proto pro $x \neq 1$ platí

$$y' = \frac{1}{3}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3x^2) = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

odkud plyne $f' = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Dále vyšetříme znaménko derivace:

f':	$-$ ↘	0	$-$ ↘	1	$-$ ↘

Funkce je na celém $\mathbb{R}$ klesající a nemá tudíž lokální extrém ve svém stacionárním bodě $x = 0$.

V bodě $x = 1$ s pomocí cvičení 9 z kapitoly 5 určíme derivaci v bodě $x = 1$:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\infty.$$

3. Pro $x \neq 1$ je druhá derivace

$$y'' = -\left(\frac{2x(1-x^3)^{\frac{2}{3}} - x^2\frac{2}{3}(1-x^3) - \frac{1}{3}(-3x^2)}{(1-x^3)^{\frac{4}{3}}}\right) =$$

$$= -\frac{2x(1-x^3) + 2x^2 \cdot x^2}{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-x^3)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}},$$

odkud plyne, že $f'' = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Znázorníme znaménko druhé derivace:

f'':	$+$ ∪	0 inf	$-$ ∩	1 inf	$+$ ∪

Funkce má inflexní body $x = 0$ a $x = 1$.

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, proto nemá žádné asymptoty bez směrnice. Počítejme asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1,$$

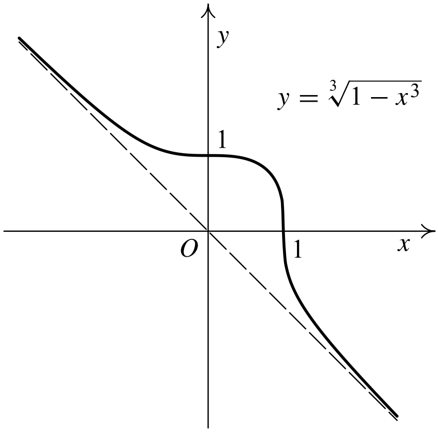
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3-1}\right) \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{(x^3-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{(x^3-1)^2}} = \frac{1}{+\infty + \infty + \infty} = 0.$$

Tedy přímka $y = -x$ je asymptotou funkce pro $x \to \pm\infty$.

5. Spočítáme funkční hodnoty ve významných bodech: $f(0) = 1$, $\quad f(1) = 0$.
6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.9. ▲



Obr. 6.9

Příklad 6.41. Vyšetřete průběh funkce

$$f:\ y = x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}\,.$$

Řešení.

1. Je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože

$$f(-x) = -x \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -x\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)\right] = -x\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) =$$
$$= -x\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}\right) = -\pi x + x \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}\,,$$

funkce není ani sudá, ani lichá. Dále vidíme, že $f \neq 0$ na celém $D(f)$. Funkce je kladná pro $x > 0$ a záporná pro $x < 0$:

$$f:\quad \underset{}{-}\ \overset{}{\circ}_{0}\ +$$

2. Vypočteme první derivaci:

$$y' = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} + x \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{x^2}{1 + x^2}\,\frac{1}{x} = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{x}{1 + x^2}\,.$$

Určení znaménka derivace nelze provést klasickým způsobem, musíme použít menší úvahu.

- Ze znalosti funkce arccotg u jednoduše zjistíme, že

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} > 0, \\ x < 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

- S použitím výsledku příkladu 1.31 a) dále určíme, že

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} > 0, \\ x < 0 \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

- Z těchto úvah již snadno vyplývá, že

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Rightarrow \quad y' > 0, \\ x < 0 \quad &\Rightarrow \quad y' > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Takže funkce nemá žádný stacionární bod a je na celém $D(f)$ rostoucí:

$$f'\colon\quad \begin{array}{ccc} \nearrow & & \nearrow \\ + & & + \\ \hline & \circ & \\ & 0 & \end{array}$$

3. Vypočteme druhou derivaci:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2+1+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}\,, \end{aligned}$$

odkud vidíme, že $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in D(f)$:

$$f'\colon\quad \begin{array}{ccc} \smile & & \smile \\ + & & + \\ \hline & \circ & \\ & 0 & \end{array}$$

Funkce je na obou intervalech definičního oboru konvexní.

4. Spočtěme jednostranné limity funkce f v bodě $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} x \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\operatorname{arccotg} y}{y} = \frac{0}{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to0^-} x \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{y\to-\infty}\frac{\operatorname{arccotg} y}{y} = \frac{\pi}{-\infty} = 0.$$

(Při výpočtu jsme použili větu o limitě složené funkce, kde $y = \frac{1}{x}$.) Proto funkce nemá v bodě $x = 0$ asymptotu bez směrnice.

Vyšetříme asymptoty se směrnicí:

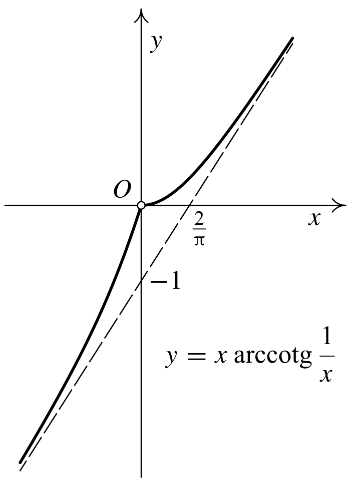
$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{y\to0^\pm}\operatorname{arccotg} y = \frac{\pi}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} x\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0^\pm}\frac{\operatorname{arccotg} y - \frac{\pi}{2}}{y} = \frac{0}{0} = \lim_{y\to0^\pm}\frac{\frac{-1}{1+y^2}}{1} = -1.$$

Přímka $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ je asymptotou funkce pro $x \to \pm\infty$.

5. Nakreslíme graf — viz obr. 6.10. ▲



Obr. 6.10

Příklad 6.42. Vyšetřete průběh funkce

$$f:\ y = \ln \cos x .$$

Řešení.

1. Určíme definiční obor dané funkce. Funkce $\ln u$ je definovaná pouze pro hodnoty $u \in (0, \infty)$, proto musí být $\cos x > 0$. Zřejmě platí

$$\cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Odtud plyne

$$D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Dále se nabízí ověřit, zda je daná funkce periodická. Jelikož funkce $\cos x$ je periodická s periodou 2π, platí $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, odkud $\ln\cos(x + 2\pi) = \ln\cos x$, takže je funkce f periodická s periodou 2π. Proto stačí se omezit při vyšetřování průběhu pouze na jeden z intervalů tvořících $D(f)$, např. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ověřme sudost/lichost funkce. Platí

$$f(-x) = \ln\cos(-x) = \ln\cos x = f(x),$$

neboť funkce $\cos x$ je sudá. Odtud je vidět, že je daná funkce sudá a její graf bude osově souměrný podle osy y.

Vyšetříme znaménko funkce f. Víme, že $\ln u > 0$ právě tehdy, když $u > 1$ a dále $\cos x \le 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Odtud snadno plyne

$$f(x) \le 0 \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 1,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Tedy

$$f:\quad \begin{array}{ccccc} & - & & - & \\ -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

2. Počítejme první derivaci:

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Odtud plyne $y' = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Znaménko první derivace je

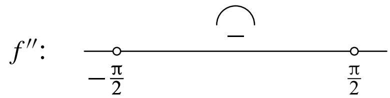
$$f':\quad \begin{array}{ccccc} & \nearrow & & \searrow & \\ & + & & - & \\ -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} \\ & & \text{max} & & \end{array}$$

Vidíme, že funkce má v bodě $x = 0$ lokální maximum.

3. Počítejme druhou derivaci:

$$y'' = -(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x} < 0 \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tedy:



Funkce je na celém intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ konkávní.

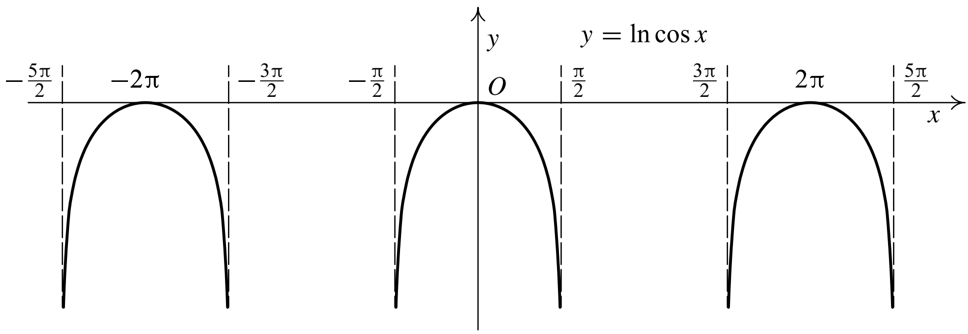
4. Jelikož funkce není definovaná na žádné polopřímce $(a, +\infty)$ ani $(-\infty, a)$, nemá smysl vyšetřovat asymptoty pro $x \to \pm\infty$. Spočítejme limity v krajních bodech vyšetřovaného intervalu:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \ln \cos x = \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty.$$

Analogický výsledek vychází pro limitu $x \to \frac{\pi}{2}^-$, takže funkce má asymptoty bez směrnice v bodech $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

5. Spočítáme funkční hodnoty ve významných bodech: $f(0) = 0$.

6. Nakreslíme graf — viz obr. 6.11. ▲



Obr. 6.11

Příklad 6.43. Vyšetřete průběh funkce

$$f: y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Řešení.

1. Jedná se o racionální funkci, která není definovaná pouze v kořenech jmenovatele. Tedy $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Funkce $f(x)$ je spojitá na $D(f)$. Protože

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x),$$

je funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku.

Dále určíme znaménko $f(x)$. Je to racionální lomená funkce, kořen čitatele $x = 0$ je trojnásobný, kořeny jmenovatele $x = -1$ jsou jednoduché. Tedy

$$f:\quad \begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

2. Vypočteme první derivaci:

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1}\right)' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}\,.$$

Kořeny čitatele $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$ jsou $x = 0$ (dvojnásobný) a $x = \pm\sqrt{3}$ (jednoduché). V nich jsou stacionární body. Dále určíme znaménko y':

$$f':\quad \begin{array}{ccccccccccc} \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow \\ + & & - & & - & & - & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & \sqrt{3} & \\ & \text{max} & & & & & & & & \text{min} & \end{array}$$

Tedy v bodě $x = -\sqrt{3}$ je lokální maximum a v bodě $x = \sqrt{3}$ je lokální minimum.

3. Vypočteme druhou derivaci:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 1)[(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)]}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}\,. \end{aligned}$$

Čitatel $2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3)$ má jednoduchý kořen $x = 0$, v němž může být inflexe (komplexní kořeny nás nezajímají). Dále určíme znaménko y''. Nesmíme zapomenout, že kořeny $x = \pm 1$ ve jmenovateli jsou trojnásobné. Dostaneme:

$$f'':\quad \begin{array}{ccccccc} \frown & & \smile & & \frown & & \smile \\ - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \\ & & & \text{inf} & & & \end{array}$$

V bodě $x = 0$ má funkce inflexi.

4. Nyní máme najít asymptoty bez směrnice a se směrnicí. Protože funkce je spojitá na svém definičním oboru, asymptoty bez směrnice mohou být jen v bodech $x = -1$ a $x = 1$. Vypočteme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Asymptoty bez směrnice jsou $x = -1$ a $x = 1$.

Dále určíme asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Asymptota pro $x \to \pm\infty$ tedy existuje a má rovnici $y = x$.

5. Spočítáme funkční hodnoty ve významných bodech: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ a

$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{(\pm\sqrt{3})^3}{(\pm\sqrt{3})^2-1} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

6. Nakreslíme graf funkce — viz obr. 6.12. ▲

Příklad 6.44. Určete hodnotu reálného parametru a tak, aby funkce

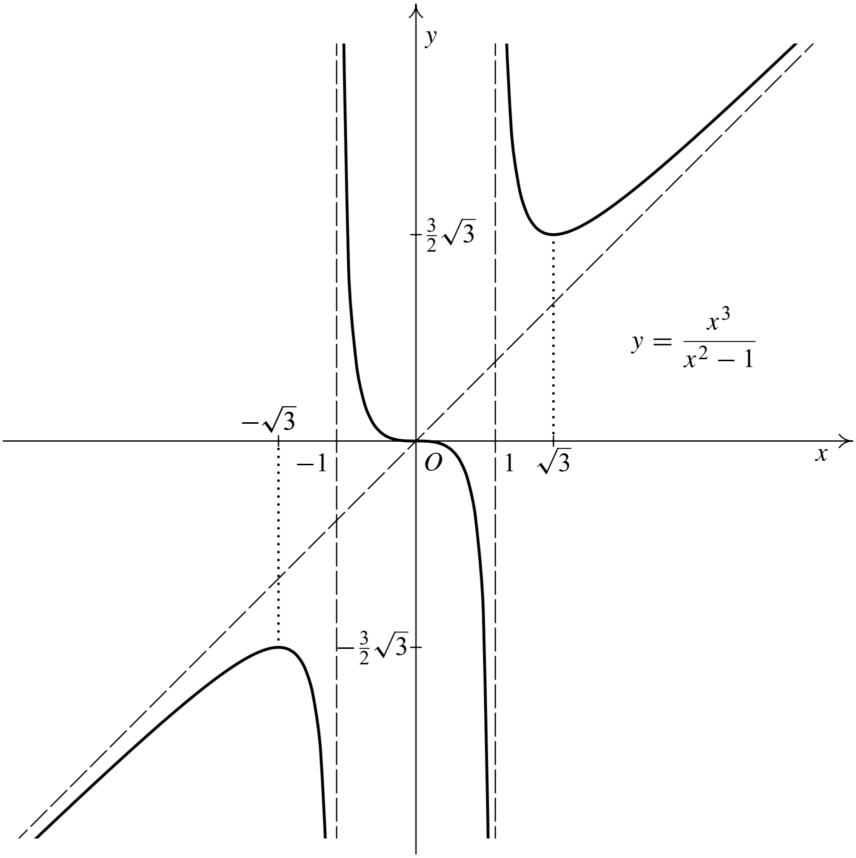
$$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

měla v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ extrém.

Řešení. Nejprve určíme první derivaci: $f'(x) = a\cos x + \cos 3x$. Odtud

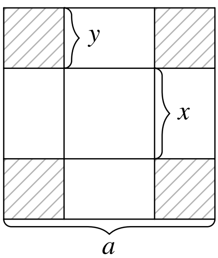
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\cos\frac{\pi}{3} + \cos 3\,\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} - 1.$$

Má-li nastat v bodě $\frac{\pi}{3}$ extrém, musí být $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$, a tedy $a = 2$. Ještě musíme ověřit, že extrém opravdu nastane. Při $a = 2$ je $f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x$ a $f''(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} - 0 < 0$, takže je zde lokální maximum. ▲



Obr. 6.12

Příklad 6.45. Ze čtverce papíru o straně a vystřihněte v rozích čtverce tak, aby krabice složená ze zbytku papíru měla co největší objem.



Obr. 6.13

Řešení. Snadno nahlédneme, že vzniklá krabice bude kvádr se čtvercovou podstavou. Označme x, y její rozměry — viz obr. 6.13. Objem krabice je pak dán vzorcem $V = x^2 y$. Dále z obrázku snadno odhalíme závislost $2y + x = a$, odkud $y = \frac{a-x}{2}$ a tudíž platí

$$V = x^2 \, \frac{a-x}{2}\,.$$

Hledejme maximum funkce V na intervalu $[0, a]$. Funkce je spojitá a má derivaci, takže podle Weierstrassovy věty existuje absolutní maximum a je buď ve vnitřním stacionárním bodě, nebo v krajních bodech.

Vyjádříme první derivaci

$$V'(x) = x(a-x) - \frac{x^2}{2} = x\left(a - \frac{3}{2}x\right),$$

odkud $V'(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$ nebo $x = \frac{2}{3}a$. Lehce zjistíme, že v bodě $x_0 = \frac{2}{3}a$ nabývá funkce globálního maxima (v krajních bodech je $V(0) = V(a) = 0$, takže jsou to absolutní minima). Hledané rozměry jsou tedy

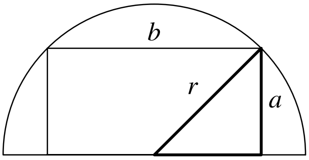
$$x_0 = \frac{2}{3}a, \quad y_0 = \frac{a}{6}, \qquad V_{\max} = x_0^2 \cdot y_0 = \frac{2}{27}a^3.$$

▲

Příklad 6.46. Do půlkruhu o poloměru r vepište obdélník největšího obsahu.

Řešení. Označme si strany obdélníku a, b. Z obrázku 6.14 vidíme, že podle Pythagorovy věty platí:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = r^2,$$



Obr. 6.14

odkud

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}},$$

jelikož uvažujeme pouze $a \geq 0$. Pro obsah obdélníku platí $S = a \cdot b$, a tedy v našem konkrétním případě

$$S = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot b.$$

Vyjádřili jsme obsah vepsaného obdélníku jakožto funkci jedné proměnné b. Budeme hledat extrémy této funkce na intervalu $[0, 2r]$. Podle Weierstrassovy věty absolutní extrémy existují. Vyjádřeme nejprve první derivaci:

$$S'(b) = \frac{-\frac{b}{4}}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}} \cdot b + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{r^2 - \frac{2b^2}{4}}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}}.$$

Nyní

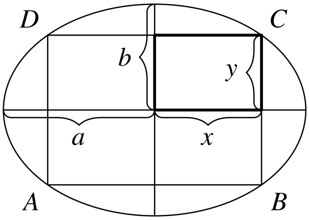
$$S'(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - \frac{b^2}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{2}r.$$

Funkce S je v krajních bodech intervalu $[0, 2r]$ nulová, na celém intervalu je nezáporná (obsah obdélníku nemůže být záporné číslo) a tedy je zřejmé, že v bodě $b_0 = \sqrt{2}r$ nabývá svého maxima ($b = 0$ a $b = 2r$ dávají minimum). Odtud již snadno určíme hledaný maximální obsah vepsaného obdélníku:

$$a_0 = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad S_{\max} = a_0 \cdot b_0 = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}r = r^2.$$

▲

Příklad 6.47. Do elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b vepište obdélník se stranami rovnoběžnými s poloosami tak, aby obsah obdélníku byl maximální.



Obr. 6.15

Řešení. Rovnice elipsy se středem v bodě $(0, 0)$ má tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Označme si vrcholy obdélníku dle obrázku 6.15. Bod C má souřadnice $C = (x, y)$, kde $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. Ze symetrie je jasné, že obsah obdélníku určíme jako $S = 4xy$. Jelikož bod C leží na elipse, určíme jeho y-ovou souřadnici z rovnice elipsy:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

jelikož uvažujeme $y \geq 0$. Nyní již můžeme vyjádřit obsah vepsaného obdélníku jako funkci jedné proměnné:

$$S(x) = 4bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Hledejme nyní absolutní maximum funkce $S(x)$ na intervalu $[0, a]$. To podle Weierstrassovy věty existuje. Stacionární bod S určíme z rovnice

$$S'(x) = 4b\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + x\,\frac{\left(-\frac{2x}{a^2}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\right) = 4b\,\frac{1 - 2\,\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = 0,$$

odkud

$$1 - \frac{2x^2}{a^2} = 0, \quad \text{takže} \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

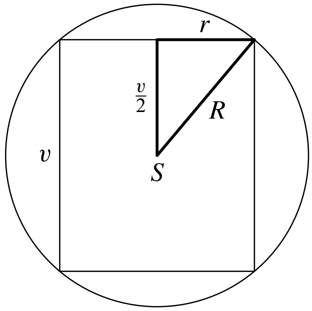
jelikož opět uvažujeme pouze $x \geq 0$. Je zřejmé, že v krajních bodech intervalu $[0, a]$ je funkce $S(x)$ nulová (vytvořený obrazec je úsečka), je proto na celém intervalu $[0, a]$ nezáporná, a tedy je zřejmé, že v bodě $x_0 = a/\sqrt{2}$ nabývá svého absolutního maxima. Nyní již snadno určíme hledaný maximální obsah:

$$y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad S_{\max} = 4x_0y_0 = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab.$$

▲

Příklad 6.48. Do koule o poloměru R vepište válec s největším obsahem.

Řešení. Při řešení těchto „prostorových" úloh je vždy základem úspěchu nakreslit si vhodný obrázek. Na našem obrázku 6.16 vidíme středový řez danou koulí. Označme r poloměr základny a v výšku vepsaného válce. Podle Pythagorovy věty platí:



Obr. 6.16

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + r^2 = R^2,$$

odkud

$$v = 2\sqrt{R^2 - r^2},$$

jelikož uvažujeme pouze nezápornou výšku. Nyní můžeme vyjádřit objem vepsaného válce jakožto funkci jedné proměnné r:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot v = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Budeme hledat absolutní extrém této funkce na intervalu $[0, R]$. Podle Weierstrassovy věty existuje. Nejprve vyjádříme první derivaci:

$$V'(r) = 2\pi\left(2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) = 2\pi\,\frac{2r(R^2 - r^2) - r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

tedy

$$V'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(2R^2 - 3r^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \text{ nebo } r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R.$$

V krajních bodech je $V(0) = V(R) = 0$, takže jde o absolutní minima. Absolutní maximum je v bodě $r_0 = \sqrt{2/3}R$. Nyní již snadno dokončíme výpočet:

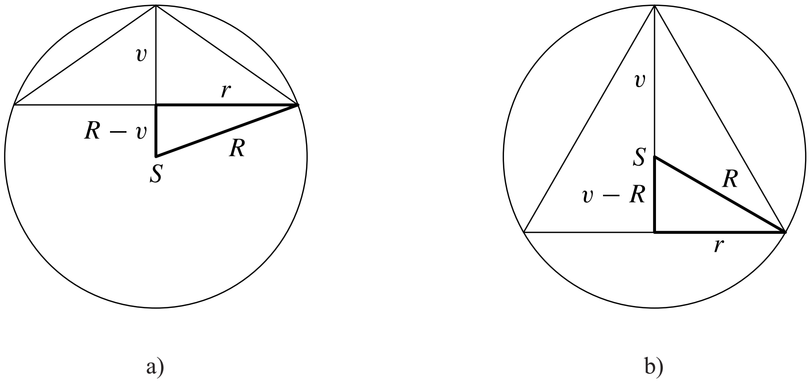
$$v_0 = 2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}\,R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

takže

$$V_{\max} = \pi r_0^2 \cdot v_0 = \pi\,\frac{2}{3}\,R^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,R^3.$$

▲

Příklad 6.49. Do koule o poloměru R vepište kužel s největším objemem.



Obr. 6.17

Řešení. Nakresleme si středový řez koulí a označme v výšku kuželu a r poloměr základny. Situace vypadá následovně. V prvním případě (pro $v \leq R$ — viz obr. 6.17 a)) platí dle Pythagorovy věty

$$(R-v)^2 = R^2 - r^2,$$

v druhém případě (pro $v \geq R$ — viz obr. 6.17 b))

$$(v-R)^2 = R^2 - r^2.$$

V obou případech získáváme

$$r = \sqrt{2vR - v^2}.$$

Nyní již můžeme vyjádřit objem vepsaného kužele pouze v závislosti na v:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi v(2vR - v^2) = \frac{2}{3}\pi v^2 R - \frac{1}{3}\pi v^3.$$

Hledejme absolutní maximum funkce $V(v)$ na intervalu $[0, 2R]$. Podle Weierstrassovy věty existuje. Vyjádříme si první derivaci:

$$V'(v) = \frac{4}{3}\pi v R - \pi v^2 = \pi v\left(\frac{4}{3}R - v\right),$$

odkud

$$V'(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0 \text{ nebo } v = \frac{4}{3}R.$$