

ZÁKLADNÍ POJMY A ZÁKONY MECHANIKY KOSMICKÉHO LETU

2 ZÁKLADNÍ POJMY A ZÁKONY MECHANIKY KOSMICKÉHO LETU

2.1 Gravitační zákon. Newtonovy pohybové zákony

S projevy gravitace se lidé setkávají v běžném životě od nepaměti. Všechny věci nám padají z ruky na zem, nikoliv nahoru. Ne každý si kladl otázku proč tomu tak je. Spokojili se s aristotelovským vysvětlením, platným po mnoho staletí. Díky němu byli lidé přesvědčeni, že těžší tělesa padají k zemi rychleji než tělesa lehká. Až zásluhou G. Galilea (1564-1642) byla objevena skutečnost, že všechna volně padající tělesa v daném centrálním gravitačním poli se pohybují s konstantním zrychlením. O pravdivosti Galileova tvrzení jsme se mohli názorně přesvědčit díky kosmonautovi D. R. Scottovi, veliteli mise Apollo 15 na Měsíc. Ten před zraky mnoha diváků v přímém televizním přenosu z Měsíce dne 2.8.1971 předvedl experiment, při němž současně upustil geologické kladívko a peříčko. Oba předměty dopadly na povrch Měsíce současně. Tímto experimentem na Měsíci se potvrdila pravdivost tvrzení G. Galilea a vyloučily se nepřesnosti Galileových pokusů na Zemi, které byly ovlivňovány odporem vzduchu.

O tom, že se tělesa vzájemně přitahují, se již dříve vyslovili Mikuláš Kusánský (1401-1464) i Leonardo da Vinci (1452-1519). Rovněž i Mikuláš Koperník (1473-1543) a Jan Kepler (1571-1630) ve svých úvahách správně předpokládali, že nebeská tělesa se vyznačují vzájemnou přitažlivostí.

O přitažlivosti (gravitaci) mezi nebeskými tělesy se v roce 1666 zmiňuje také italský učenec G. A. Borelli (1608-1679). Předpokládal, že planety jsou přitahovány ke Slunci a na svých oběžných drahách se udržují díky síle vznikající při kruhovém pohybu kolem Slunce.

Podstatně dále pokročil významný anglický vědec Robert Hook (1635-1703), který v roce 1674 publikoval své představy o pohybu planet. Předpokládá, že nebeská tělesa se vzájemně přitahují ke svým středům. Tvar oběžné dráhy je dán skládáním dvou různých pohybů. Předpokládá, že těleso se pohybuje přímočaře po tečně k dráze a zároveň volně padá na centrální těleso. Oba posledně zmínění badatelé byli svými tvrzeními velmi blízko skutečnosti. Nicméně, jednalo se o nepodložené domněnky. Bylo nezbytné je teprve exaktně prokázat.

Ve stejné době se problémy gravitace a pohybem nebeských těles začal zabývat Isaac Newton (1643-1727) i řada dalších vrstevníků, kteří do nebeské mechaniky významně přispěli. Z nich je třeba se zmínit v první řadě o Ch. Huygensovi (1629-1695), který objevil vztah pro zrychlení tělesa pohybujícího se rovnoměrně po kružnici. Zákon říká, že zrychlení je přímo úměrné kvadrátu rychlosti pohybu V a nepřímo úměrné poloměru kružnice r

$$a = V^2/r.$$

Na základě tohoto poznatku již bylo možno snadno potvrdit zákon o nepřímé úměře zrychlení na kvadrátu vzdálenosti. Uplatněním vztahu pro rychlost (obvod dělený periodou) $V = 2\pi r/T$ je zrychlení dáno vztahem

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

Pak spolu se znalostí třetího Keplerova zákona (viz kap. 3), v němž pro kruhový pohyb dosadíme poloměr r

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k^2}$$

Ize dospět k důležitému poznatku o nepřímé úměře zrychlení pohybu (potažmo síly) na kvadrátu vzdálenosti těles (konstanta k^2 nebyla v té době ještě známa)

$$a = \frac{k^2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Další pokrok v nalezení zákona o všeobecné přitažlivosti těles byl možný až na základě tří fundamentálních Newtonových zákonů o pohybu těles: zákonu setrvačnosti, zákonu o síle a zákonu o akci a reakci. Byť jsou tyto základní zákony klasické mechaniky všeobecně známy, nebude na škodu si je připomenout.

První zákon, zákon o setrvačnosti říká, že každé těleso zůstává v klidu nebo přímočarém rovnoměrném pohybu pokud není nějakou vnější silou přinuceno tento stav změnit.

Druhý zákon vyjadřuje závislost mezi zrychlením a vnější silou působící na těleso. Jinými slovy tento zákon říká, že zrychlení tělesa je přímo úměrné vnější působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa

$$a = \frac{F}{m} \text{ nebo } F = ma. \quad (2.2)$$

Třetí zákon (zákon akce a reakce) říká, jestliže jedno těleso působí na druhé těleso libovolnou silou v jednom směru, pak druhé těleso působí na první těleso stejně velkou silou v opačném směru.

Na základě těchto nových poznatků a díky svým matematickým znalostem byl Newton schopen nejen zpřesnit třetí Keplerův zákon, ale také zformulovat vztah pro gravitační sílu, který říká, že přitažlivá síla dvou těles je přímo úměrná součinu hmotností obou těles a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti

$$F_g \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Na rozdíl od definitivního vztahu tak jak jej známe a používáme nyní, Newton nebyl sto stanovit přímo velikost gravitační síly. Neznal hodnotu konstanty k^2 ve vztahu (2.1). Silové účinky gravitačního působení mohl stanovovat pouze vzájemným porovnáváním.

Definitivní podobu výrazu pro gravitační sílu dal až v roce 1894 další anglický vědec G. V. Boys tím, že zavedl univerzální gravitační konstantu, která se v odborné literatuře označuje nejrůznějšími symboly, nejčastěji G nebo κ . Jelikož zde je symbol G vyhrazen pro tíhovou sílu, budeme výraz pro gravitační sílu zapisovat ve tvaru

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.3)$$

Hodnota univerzální gravitační konstanty byla stanovena na základě experimentů anglického fyzika H. Cavendishe (1731-1810). Poté byla v dalších letech opakovanými pokusy postupně zpřesňována. Posledními pokusy, které provedli J. Gundlach a S.

2. Základní pojmy a zákony mechaniky kosmického letu

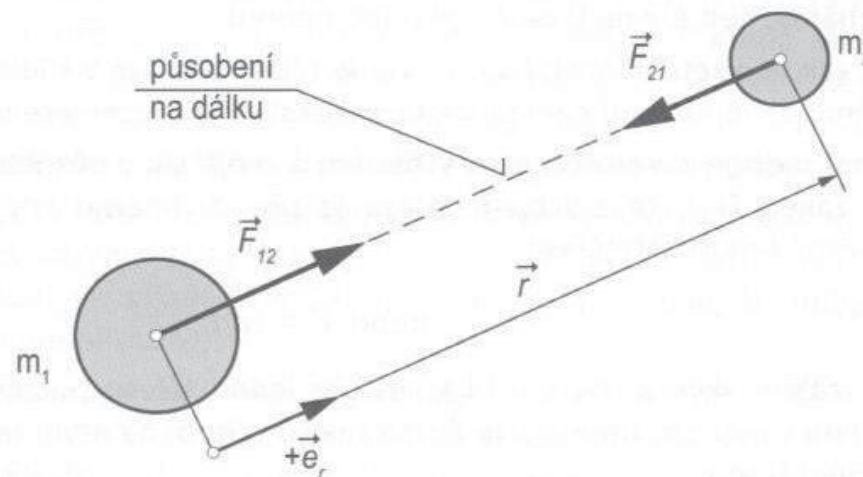
Merkowitz na Washingtonské univerzitě v roce 2000 se dospělo k následující hodnotě univerzální gravitační konstanty

$$\kappa = (6,674215 \pm 0,000092) \cdot 10^{-11} \text{ [Nm}^2\text{kg}^{-2}\text{]}.$$

Dle vztahu (2.3) získáváme sice správné vzájemné gravitační účinky, avšak do dnešní doby nejsme sto vysvětlit fyzikální podstatu gravitace a její působení na dálku. Naději na pochopení a objasnění podstaty gravitace nám může dát až Einsteinova obecná teorie relativity.

Zde se však nadále budeme zabírat Newtonovou klasickou mechanikou a používat ji pro řešení základních úloh mechaniky kosmického letu bez uvažování relativistických efektů.

Uvažujeme dvě tělesa, která v souladu s třetím Newtonovým zákonem o akci a reakci na sebe působí stejně velkými, opačně působícími silami (obr. 2-1). Tyto gravitační síly se obvykle vyjadřují ve vektorovém tvaru.



Obr. 2-1 Gravitační síly působící na dvě tělesa, která se vzájemně přitahují.

Dle obr. 2-1 těleso o hmotnosti m_1 působí na druhé těleso o hmotnosti m_2 přitažlivou silou označenou \vec{F}_{21} . Naopak druhé těleso o hmotnosti m_2 působí na první těleso o hmotnosti m_1 přitažlivou silou \vec{F}_{12} . První index vždy označuje těleso, na něž přitažlivá síla působí a druhý index označuje působící těleso. Vzdálenost obou těles je dána vektorem \vec{r} . Zvolme jednotkový vektor $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, jehož kladný smysl směřuje od tělesa o hmotnosti m_1 k druhému tělesu o hmotnosti m_2 . Pak přitažlivá síla \vec{F}_{12} je dána vektorovým výrazem

$$\vec{F}_{12} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.4)$$

a přitažlivá síla $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ je dána vektorovým vztahem

$$\vec{F}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (2.5)$$

Pokud za vztažné těleso zvolíme těleso o hmotnosti m_1 budeme tuto gravitační sílu směřující vždy k přitahujícímu tělesu označovat obecným symbolem pro gravitační sílu \vec{F}_g a výraz (2.5) přepíšeme do následující vektorové formy

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (2.6)$$

2.2 Gravitační pole a jeho popis

2.2.1 Intenzita gravitačního pole

Každé těleso o hmotnosti M je zdrojem gravitačního pole. Uvažujeme sférické těleso, které generuje homogenní centrální gravitační pole. Vložíme-li do gravitačního pole těleso o hmotnosti m působí na něj v souladu s výše uvedeným Newtonovým zákonem o všeobecné přitažlivosti gravitační síla F_g .

Jednou z možností jak popisovat vlastnosti a účinky gravitačního pole v okolí centrálního tělesa je přímé měření gravitační síly vhodnou sondou, tj. nějakým jiným tělesem. Ovšem potíží je v tom, že zjištěná gravitační síla závisí na hmotnosti používané sondy. Nehledě na to, že vložené těleso sondy deformuje gravitační pole, které je předmětem měření. Vliv malé sondy na gravitační pole je však možno prakticky zanedbat. Teoreticky vliv hmotnosti sondy vyloučíme tím, že zjištěnou gravitační sílu dělíme hmotností sondy. Tím se dostáváme k pojmu intenzita gravitačního pole

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}. \quad (2.7)$$

Intenzita gravitačního pole je síla, kterou gravitační pole v daném místě působí na těleso o jednotkové hmotnosti. Použití intenzity gravitačního pole nám lépe poslouží pro popis gravitačního pole než gravitační síla protože již nezávisí na hmotnosti sondy. Intenzita gravitačního pole je vektorová veličina, která je funkcí tří souřadnic, resp. polohového vektoru ve zvolené souřadnicové soustavě

$$\vec{K} = \vec{i}K_x + \vec{j}K_y + \vec{k}K_z. \quad (2.8)$$

Dosadíme-li do definičního výrazu pro intenzitu gravitačního pole (2.7) vztah (2.6) pro gravitační sílu centrálního tělesa M obdržíme

$$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\kappa M}{r^3} \vec{r}. \quad (2.9)$$

Aplikací druhého Newtonova zákona pro gravitační zrychlení libovolného tělesa o hmotnosti m v centrálním poli tělesa o hmotnosti M můžeme nalézt fyzikální význam intenzity gravitačního pole ze vztahu

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{K}(\vec{r}). \quad (2.10)$$

Jak vyplývá z uvedeného vztahu, gravitační zrychlení tělesa m v místě \vec{r} centrálního gravitačního pole se rovná intenzitě gravitačního pole v témže místě a nezávisí na jeho hmotnosti.

2.2.2 Gravitační potenciál

Jak vyplynulo z předchozí části, gravitační pole popsané vektorem intenzity $\vec{K}(\vec{r})$ je vektorové pole. Ve zvolené souřadnicové soustavě intenzita gravitačního pole závisí na třech veličinách (složkách polohového vektoru). Využijme nyní skutečnosti, že homogenní gravitační pole je potenciální pole. V potenciálním gravitačním poli platí, že práci gravitační síly lze popsat změnou potenciální energie. Potenciální energie je skalární veličina a v každém bodě gravitačního pole je určena pouze jednou veličinou na

rozdíl od tří složek intenzity gravitačního pole. A tudíž na gravitační pole můžeme nyní pohlížet jako na skalární pole.

Vycházíme ze známé fyzikální skutečnosti, že práce A v potenciálním poli se rovná změně potenciální energie ΔE_p . V tomto případě práci gravitační síly \vec{F}_g směřující do středu gravitačního pole vyjádříme jako úbytek potenciální energie $A = -\Delta E_p$.

Práci gravitační síly na dráze mezi dvěma vzdálenostmi r_1 a r_2 od středu přitažlivosti můžeme s přihlédnutím k výrazu pro gravitační sílu (2.6) zapsat následovně

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g d\vec{r} = -\kappa Mm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}.$$

Po integraci a dosazení mezí obdržíme pro práci gravitační síly výraz

$$A = \kappa Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.11)$$

Úbytek potenciální energie mezi dvěma různými body v centrálním gravitačním poli můžeme zapsat formálně takto

$$-\Delta E_p = -[E_p(r_2) - E_p(r_1)] = E_p(r_1) - E_p(r_2).$$

Po dosazení uvedených výrazů do fundamentálního vztahu mechaniky $A = -\Delta E_p$ obdržíme

$$A = \kappa Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -[E_p(r_2) - E_p(r_1)]. \quad (2.12)$$

Při popisu gravitačního pole se běžně za nulovou hladinu potenciální energie bere hladina ve vzdálenosti, kde se již prakticky neprojevuje gravitační síla, tj. v nekonečnu. Zvolme tedy za nulovou hladinu vzdálenost $r_1 = \infty$ a nechť $r_2 = r$ je libovolná vzdálenost od středu přitažlivosti. Na základě této volby můžeme dle rov. (2.12) zapsat jak výraz pro práci gravitační síly při přemístění tělesa z nekonečna do vzdálenosti r od středu přitažlivosti

$$A = \frac{\kappa Mm}{r}, \quad (2.13)$$

tak výraz pro potenciální energii na hladině ve vzdálenosti r od středu přitažlivosti

$$E_p(r) = -\frac{\kappa Mm}{r}. \quad (2.14)$$

Povšimněme si, že při této volbě je práce gravitační síly kladná a potenciální energie je záporná. Se vzdáleností klesá záporná hodnota potenciální energie. Naopak, zvyšovat potenciální energii v centrálním gravitačním poli je možno jen působením vnější síly působící v opačném smyslu než síla přitažlivá. Vnější síla pak koná zápornou práci.

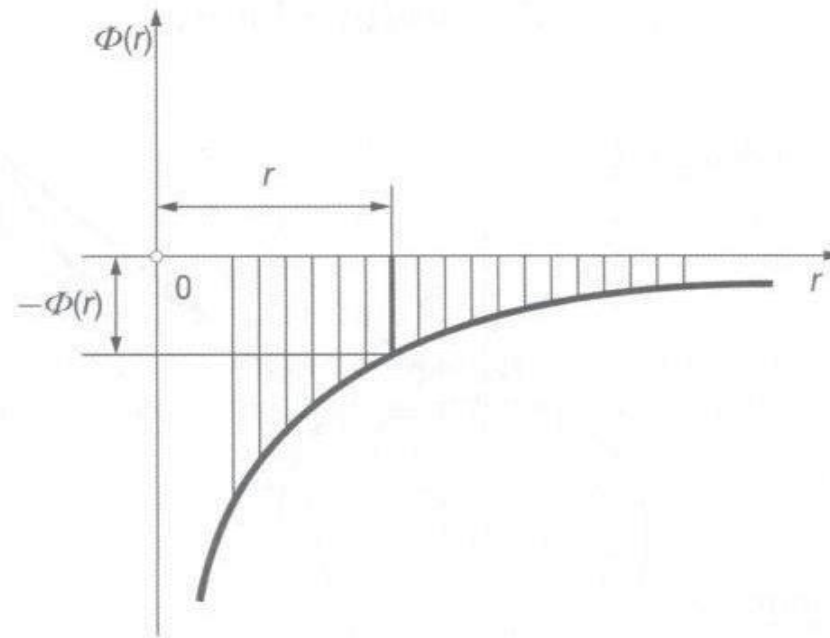
Protože potenciální energie $E_p(r)$ závisí podobně jako gravitační síla na hmotnosti, není tato veličina vhodná v tomto tvaru pro popis vlastností a účinků gravitačního pole. Proto podobně jako u intenzity gravitačního pole vliv hmotnosti vyloučíme. S využitím rov. (2.14) zavedeme novou veličinu, tzv. *gravitační potenciál* $\Phi(r)$, který je definován následovně

$$\Phi(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{\kappa M}{r}. \quad (2.15)$$

Grafické znázornění závislosti gravitačního potenciálu na vzdálenosti od centra přitažlivosti je uvedeno na obr. 2-2. Alternativní definice gravitačního potenciálu je založena na využití vztahu (2.13). V tomto případě je gravitační potenciál definován jako záporný podíl práce gravitační síly a hmotnosti m

$$\Phi(r) = -\frac{A}{m} = -\frac{\kappa M}{r}. \quad (2.16)$$

Fyzikální význam gravitačního potenciálu můžeme vyjádřit tak, že je to potenciální energie, kterou by oplývalo těleso o jednotkové hmotnosti vložené do centrálního gravitačního pole ve vzdálenosti r od středu přitažlivosti. Nebo také lze gravitační potenciál definovat jako záporně vzatou práci gravitační síly při přemístění tělesa o jednotkové hmotnosti z nekonečna do bodu ve vzdálenosti r od středu přitažlivosti.



Obr. 2-2 Změna gravitačního potenciálu se vzdáleností o středu přitažlivosti.

Intenzita gravitačního pole $\vec{K}(\vec{r})$ a gravitační potenciál $\Phi(r)$ popisující stejné gravitačního pole mezi sebou úzce souvisí. Relace mezi skalárním popisem gravitačního pole a vektorovým popisem je dána vztahem známým z vektorové analýzy

$$\vec{K} = -\left(\vec{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -\text{grad } \Phi. \quad (2.17)$$

2.2.3 Tíhová síla a tíhové zrychlení

Na kosmické letadlo v blízkosti Země působí nejen gravitační pole Země, ale také pole odstředivých sil v důsledku rotace Země kolem vlastní osy. Gravitační síla je v souladu s Newtonovým všeobecným gravitačním zákonem dána výrazem (2.3), který si přepíšeme na tvar

$$F_g = \frac{\kappa M m}{(r_z + h)^2}, \quad (2.18)$$

kde $r = r_z + h$ je vzdálenost od středu centrálního gravitačního pole Země, r_z je smluvní poloměr Země a h je výška nad zemí.

Kromě uvedené gravitační síly působí na kosmické letadlo v důsledku rotace Země úhlovou rychlostí ω_z určitá odstředivá síla. Pro konstantní úhlovou rychlost rotace Země můžeme odstředivou sílu obecně vyjádřit ve vektorovém zápisu takto

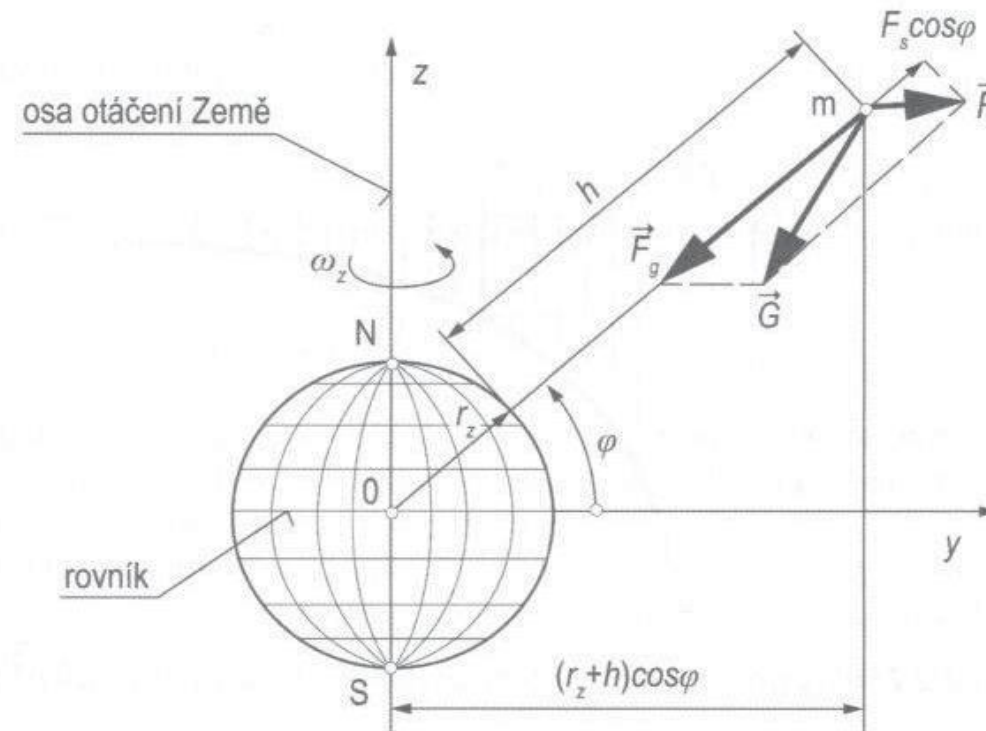
$$\vec{F}_s = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (2.19)$$

Po provedení vektorových součinů a s uvážením, že $\vec{\Omega} = \omega_z \vec{k}$ a $\vec{r} = y\vec{j} + z\vec{k}$ můžeme velikost (modul) odstředivé síly zapsat následovně

$$F_s = m\omega_z^2 y.$$

A po dosazení souřadnice $y = (r_z + h) \cos \varphi$ dle obr. 2-3, kde φ je zeměpisná šířka, na níž se kosmické letadlo nachází, obdržíme výraz pro odstředivou sílu působící na kosmické letadlo v důsledku rotace Země

$$F_s = m\omega_z^2 (r_z + h) \cos \varphi. \quad (2.20)$$



Obr. 2-3 Definice tíhové síly.

Exaktně je tíhová síla \vec{G} definována jako vektorový součet gravitační síly \vec{F}_g a odstředivé síly \vec{F}_s v souladu s obr. 2-3

$$\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_s. \quad (2.21)$$

Jako každé síle i tíhové síle odpovídá zrychlení, které v tomto případě nazýváme tíhové zrychlení. Uvážíme-li druhý Newtonův zákon pro vztah mezi silou a zrychlením, můžeme tíhové zrychlení vyjádřit v souladu s rov. (2.2) následovně

$$g = \frac{G}{m}. \quad (2.22)$$

Dosazením za modul gravitační síly dle rov. (2.18) a za složku modulu odstředivé síly ve směru normály výraz $-F_s \cos \varphi = -m\omega_z^2 (r_z + h) \cos^2 \varphi$ obdržíme vztah pro stanovení tzv. normálového tíhového zrychlení v závislosti na výšce a zeměpisné šířce ve tvaru

$$g_n = \frac{\kappa M}{(r_z + h)^2} - \omega_z^2 (r_z + h) \cos^2 \varphi. \quad (2.23)$$

Ve vztahu (2.23) je uplatněna pouze normálová složka F_s a je zanedbána tečná složka odstředivé síly (kolmá na normálu). V dalším textu budeme index „n“ i přídomek „normálové“ vynechávat, nicméně bude se vždy jednat o normálové tíhové zrychlení ($g \equiv g_n$), jehož vektor směřuje do středu Země. Z výrazu je zřejmé, že v důsledku závislosti na zeměpisné šířce φ a výšce h je maximální hodnota tíhového zrychlení na pólech Země v nulové výšce a nejmenší pak bude na rovníku.

V praktických aplikacích mechaniky letu atmosférických a kosmických letadel se vliv odstředivé síly obvykle zanedbává. Takže tíhové zrychlení je dáno pouze prvním členem v rov. (2.23), který závisí jen na výšce

$$g(h) = \frac{\kappa M}{(r_z + h)^2}. \quad (2.24)$$

Tíhové zrychlení na povrchu sférické Země (v nulové výšce $h = 0 \text{ m}$) je pak dáno vztahem

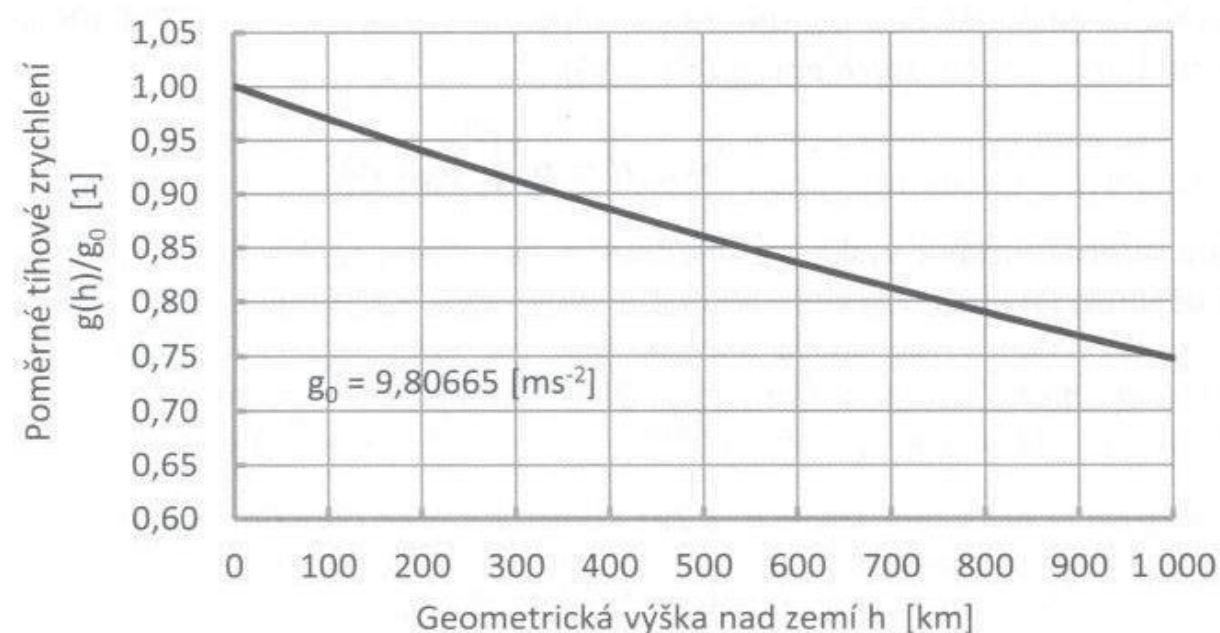
$$g_0 = \frac{\kappa M}{r_z^2}. \quad (2.25)$$

Vyjádříme-li si z této rovnice výraz pro součin univerzální gravitační konstanty a hmotnosti Země

$$\kappa M = g_0 r_z^2 \quad (2.26)$$

a dosadíme jej do rov. (2.24), můžeme vyjádřit výraz pro tíhové zrychlení v libovolné vzdálenosti od středu gravitačního pole Země $r = r_z + h$ ve tvaru

$$g(h) = g_0 \frac{r_z^2}{(r_z + h)^2} = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{r_z}\right)^2} \doteq g_0 \left(1 - 2\frac{h}{r_z}\right). \quad (2.27)$$

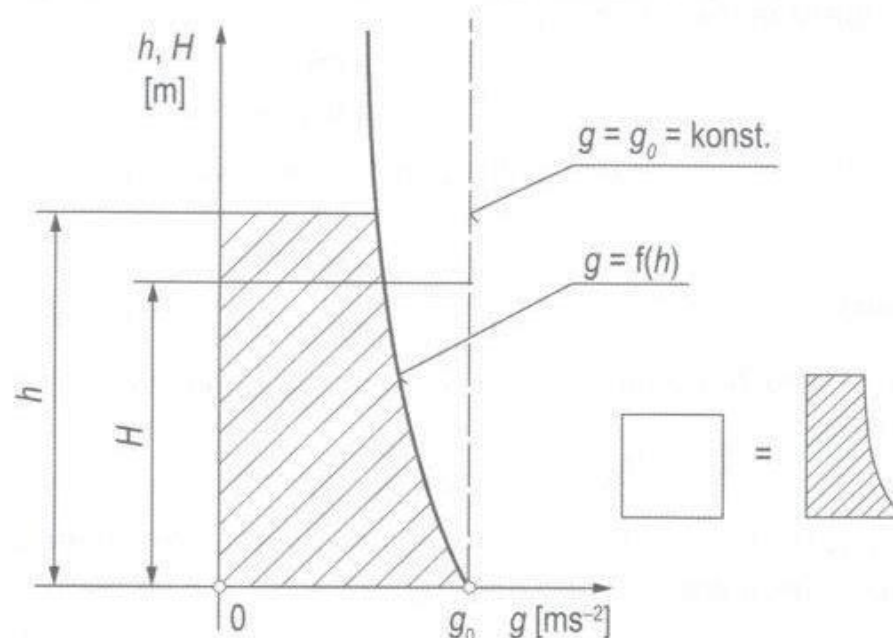


Obr. 2-4 Závislost poměrného tíhového zrychlení na výšce nad zemí.

Posledně uvedený výraz v rov. (2.27) je přibližný vztah stanovený použitím prvních dvou členů binomického rozvoje. Za standardní smluvní hodnotu tíhového zrychlení Země v $h = 0 \text{ m}$ se bere tíhové zrychlení, jehož hodnota je $g_0 = 9,80665 \text{ [ms}^{-2}\text{]}$, která odpovídá smluvnímu tíhovému zrychlení v nulové výšce na zeměpisné šířce $\varphi = 45^\circ$.

Na obr. 2-4 je uvedena závislost poměrného tíhového zrychlení Země v závislosti na geometrické výšce. Z uvedeného diagramu můžeme vidět, že ve výškách odpovídajících nízkým oběžným dráhám kolem $h = 500$ [km] poklesla hodnota tíhového zrychlení o necelých 15%.

V řadě úloh se používá konstantní smluvní tíhové zrychlení $g = g_0$. To znamená, že uvažujeme tíhové pole, v němž sledované veličiny závislé na výšce vyjadřujeme v jiné transformované výšce. Této výšce říkáme geopotenciální výška. Na rozdíl od geometrické výšky h ji obvykle označujeme velkým písmenem H .



Obr. 2-5 Relace mezi geometrickou a geopotenciální výškou letu.

Geopotenciální výška H je určena na základě rovnosti potenciálních energií ve skutečném tíhovém poli s proměnným tíhovým zrychlením $g(h)$ a tíhovém poli o konstantním tíhovém zrychlení g_0 (obr. 2-5)

$$mg_0H = m \int_0^h g(h)dh, \quad (2.28)$$

odkud geopotenciální výška s přihlédnutím ke vztahu (2.27) bude dána následujícím definičním vztahem

$$H = \frac{1}{g_0} \int_0^h g(h)dh = \int_0^h \frac{dh}{\left(1 + \frac{h}{r_Z}\right)^2}. \quad (2.29)$$

Po integraci pravé strany rovnice (2.29) a dosazení mezi obdržíme výraz

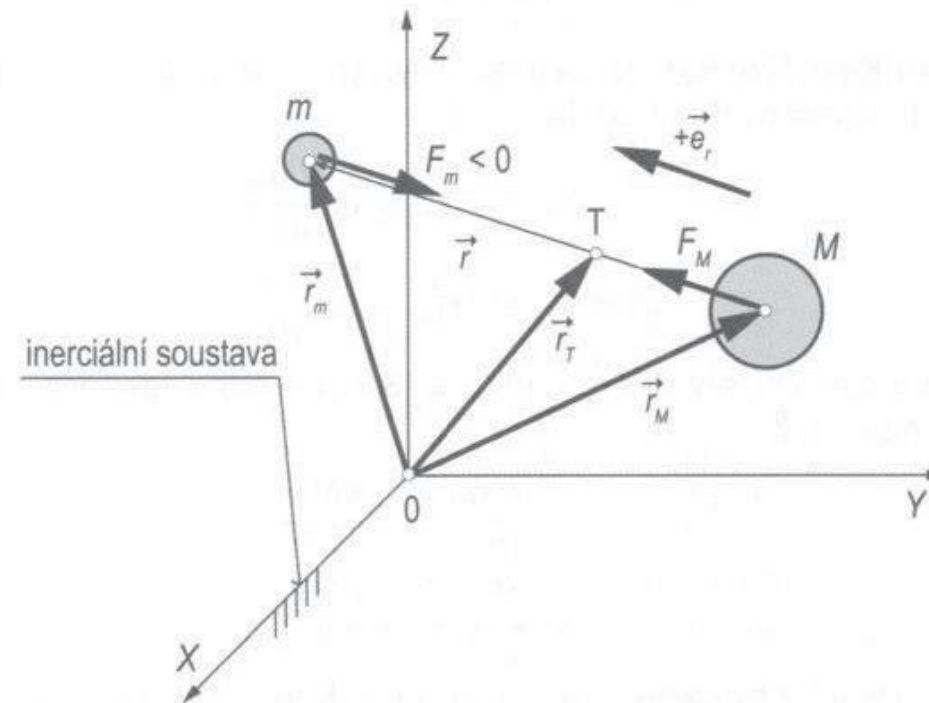
$$H = r_Z \left(1 - \frac{r_Z}{r_Z + h}\right), \quad (2.30)$$

z něhož můžeme přímo určit geopotenciální výšku pro zvolenou geometrickou výšku h . Jak je patrné z obr. 2-5 i uvedeného vztahu (2.30) geopotenciální výška je vždy menší a rozdíl roste s výškou. Pro relativně malé výšky ve srovnání s poloměrem Země je možno rozdíl zanedbat $H \doteq h$. Ve výšce $h = 100$ [km] je chyba cca (-1,5 %).

3 PASIVNÍ POHYB KOSMICKÝCH TĚLES V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI

3.1 Problém dvou těles. Pohybové rovnice

Problém dvou těles spočívá v řešení úlohy pohybu dvou těles pod účinky vzájemně na sebe působících sil v souladu s Newtonovým zákonem o všeobecné přitažlivosti těles.



Obr. 3-1 Definice poloh a působících sil na dvě tělesa v inerciální souřadnicové soustavě.

Uvažujme dvě tělesa o hmotnostech M a m v inerciální souřadnicové soustavě (X, Y, Z) , jejichž pohyb je ovlivňován pouze vzájemnými centrálními gravitačními silami (obr. 3-1).

Obě tělesa považujeme za homogenní koule, jejichž těžiště jsou shodná s geometrickými středy. Gravitační síly tudíž působí přímo ve středech obou těles ve směru spojnice obou středů, ale v opačných smyslech. Gravitační síla F_m je síla, kterou na těleso m působí těleso M . A naopak gravitační síla F_M je síla, kterou na těleso M působí těleso m .

Polohy středů obou těles v dané inerciální souřadnicové soustavě vzhledem k jejímu počátku jsou dány polohovými vektory \vec{r}_m a \vec{r}_M . Zavedeme ještě polohový vektor \vec{r} , který stanovuje vzájemnou polohu obou těles. Kladný smysl je definován jednotkovým vektorem \vec{e}_r směřujícím od tělesa M k tělesu m . Vektor \vec{r}_T definuje polohu společného těžiště obou těles „T“ v dané soustavě. Hmotnosti těles budeme označovat shodně s označením kosmického tělesa. Těleso označené jako m má hmotnost m a podobně to platí i pro druhé těleso, těleso označené jako M má hmotnost M .

3.1.1 Obecné pohybové rovnice dvou těles

V souladu s rov. (2.6) můžeme pro sílu, kterou působí těleso M na těleso m psát výraz ve tvaru

$$\vec{F}_m = -\frac{\kappa M m}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.1)$$

A podobně vztah pro sílu, kterou působí těleso m na těleso M ($\vec{F}_M = -\vec{F}_m$) můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{F}_M = +\frac{\kappa M m}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.2)$$

Dále dle druhého Newtonova zákona, rov. (2.2), lze obě síly vyjádřit následovně (tečkami jsou označeny derivace dle času)

$$\vec{F}_m = m\ddot{\vec{r}}_m = m \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2}, \quad (3.3)$$

$$\vec{F}_M = M\ddot{\vec{r}}_M = M \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Dosadíme-li gravitační síly dle rov. (3.1) a (3.2) do odpovídajících pohybových rovnic (3.3) a (3.4) obdržíme

$$m \frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} = -\frac{\kappa M m}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.5)$$

$$M \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2} = +\frac{\kappa M m}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.6)$$

Nejprve první rov. (3.5) dělíme hmotností m a druhou rov. (3.6) dělíme hmotností M . Následně odečteme druhou rovnici od první. Tímto krokem obdržíme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{d^2 \vec{r}_m}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2} = -\kappa(M + m) \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

S přihlédnutím k definici vektoru $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$ dle obr. 3-1 můžeme uvedenou rovnici přepsat na tvar

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \kappa(M + m) \frac{\vec{e}_r}{r^2} = 0. \quad (3.7)$$

Doplňme i alternativní vztah zavedením výrazu pro jednotkový vektor $\vec{e}_r = \vec{r}/r$

$$\ddot{\vec{r}} + \kappa(M + m) \frac{\vec{r}}{r^3} = 0. \quad (3.8)$$

Na tomto místě zavedeme další důležitý pojem a to *gravitační parametr*, který je definován vztahem

$$\mu = \kappa(M + m). \quad (3.9)$$

Zavedeme-li gravitační parametr μ do výše odvozené pohybové rovnice (3.7), můžeme ji přepsat na jednodušší tvar

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^2} \vec{e}_r = 0. \quad (3.10)$$

Posledně uvedená výsledná vektorová pohybová rovnice vyjadřuje relativní pohyb tělesa m vůči tělesu M . Přenásobíme-li rov. (3.10) mínus jedničkou (-1), obdržíme de facto fyzikálně stejnou rovnici s tím, že změnou znaménka se vlastně změnilo místo „pozorovatele“. A rovnice bude vyjadřovat relativní pohyb tělesa M vůči tělesu m .

3.1.2 Pohyb společného těžiště dvou těles

Podívejme se nyní na pohyb společného těžiště obou těles. Jeho poloha v naší inerciální souřadnicové soustavě je dána vztahem

$$\vec{r}_T = \frac{M\vec{r}_M + m\vec{r}_m}{M + m}. \quad (3.11)$$

Derivací rov. (3.11) stanovíme nejprve absolutní rychlost a absolutní zrychlení těžiště v inerciální souřadnicové soustavě

$$\dot{\vec{r}}_T = \frac{M\dot{\vec{r}}_M + m\dot{\vec{r}}_m}{M + m}, \quad (3.12)$$

$$\ddot{\vec{r}}_T = \frac{M\ddot{\vec{r}}_M + m\ddot{\vec{r}}_m}{M + m}. \quad (3.13)$$

Provedeme-li součet rov. (3.5) a (3.6), obdržíme

$$M\ddot{\vec{r}}_M + m\ddot{\vec{r}}_m = +\frac{\kappa Mm}{r^2}\vec{e}_r - \frac{\kappa Mm}{r^2}\vec{e}_r = 0. \quad (3.14)$$

Po dosazení uvedené skutečnosti do rov. (3.13) vidíme, že zrychlení společného těžiště je nulové ($\ddot{\vec{a}}_T = \ddot{\vec{r}}_T = 0$). Z toho plyne, že společné těžiště se buď pohybuje konstantní rychlostí ($\vec{V}_T = \dot{\vec{r}}_T = konst.$) a tudíž přímočaře, nebo je v klidu. Polohový vektor v libovolném čase je dán vztahem

$$\vec{r}_T = \vec{r}_{T0} + \vec{V}_T t, \quad (3.15)$$

kde první člen vyjadřuje polohový vektor společného těžiště v čase $t = 0$.

3.1.3 Relativní pohyb v soustavě s počátkem v těžišti obou těles

Pokud jsme v předchozí podkapitole prokázali, že společné těžiště se pohybuje přímočaře konstantní rychlostí nebo je v klidu, můžeme tento bod také považovat za počátek jiné inerciální souřadnicové soustavy (nerotující) dle obr. 3-2.

To znamená, že polohový vektor $\vec{r}_T = 0$, z čehož dle rov. (3.11) vyplývá, že

$$M\vec{r}_M + m\vec{r}_m = 0,$$

odkud polohový vektor tělesa M bude

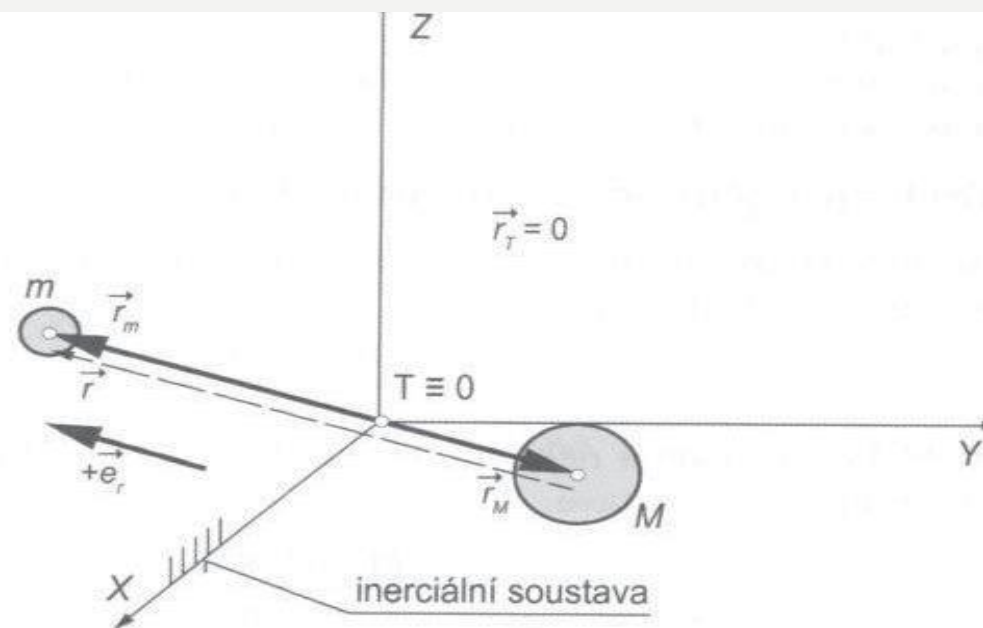
$$\vec{r}_M = -\frac{m}{M}\vec{r}_m.$$

Pro polohový vektor \vec{r} pak můžeme psát následující relaci

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M = \vec{r}_m + \frac{m}{M}\vec{r}_m = \frac{M + m}{M}\vec{r}_m = \frac{M + m}{M}r_m\vec{e}_r.$$

Modul tohoto polohového vektoru zapíšeme jednoduše ve tvaru

$$r = \frac{M + m}{M}r_m. \quad (3.16)$$



Obr. 3-2 Pohyb dvou těles v inerciální souřadnicové soustavě s počátkem společném těžišti.

Vraťme se nyní k pohybové rovnici (3.5), kterou dělíme hmotností m a zavedeme výraz pro jednotkový vektor $\vec{e}_r = \vec{r}_m / r_m$. Rovnice nabude tvar

$$\ddot{\vec{r}}_m = -\kappa \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}_m}{r_m}$$

Po dosazení za modul r dle rov. (3.16) obdržíme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}}_m = -\kappa \frac{M^3}{(M+m)^2} \frac{\vec{r}_m}{r_m^3}$$

Čitatele i jmenovatele na pravé straně rovnice přenásobíme výrazem $(M+m)$ a zavedeme výraz pro gravitační parametr $\mu = \kappa(M+m)$. Po malé úpravě obdržíme

$$\ddot{\vec{r}}_m = -\mu \left(\frac{M}{M+m} \right)^3 \frac{\vec{r}_m}{r_m^3}$$

Zavedením nového gravitačního parametru ve tvaru

$$\mu_M = \mu \left(\frac{M}{M+m} \right)^3$$

a zavedením $\vec{r}_m = r_m \vec{e}_r$ můžeme pohybovou rovnici (3.18) přepsat na konečný

$$\ddot{\vec{r}}_m + \frac{\mu_M}{r_m^2} \vec{e}_r = 0.$$

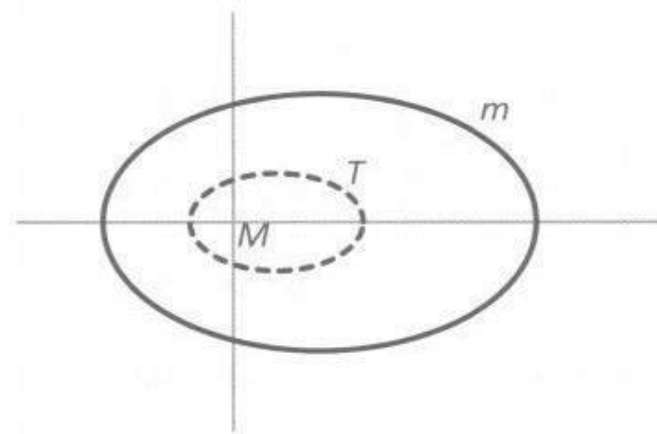
Stejným způsobem můžeme odvodit pohybovou rovnici pro druhé těleso o hmotnosti M pohybující se kolem společného těžiště ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}}_M + \frac{\mu_m}{r_M^2} \vec{e}_r = 0,$$

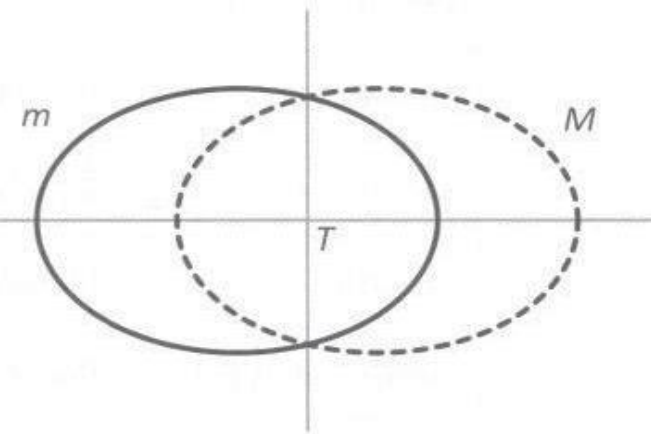
kde nový gravitační parametr je dán výrazem

$$\mu_m = \mu \left(\frac{m}{M+m} \right)^3. \quad (3.22)$$

Jak můžeme vidět, obě pohybové rovnice tělesa m i M vzhledem ke společnému těžišti mají podobný tvar jako výše odvozené pohybové rovnice pro vzájemný pohyb jednoho tělesa vůči druhému. Z toho vyplývá, že tvary drah jsou si podobné. Na obr. 3-3 je znázorněna dráha tělesa m vzhledem k tělesu M , které jsme umístili do počátku inerciální souřadnicové soustavy. Čárkovaně je znázorněn relativní pohyb společného těžiště T vůči tělesu M . Tak vidí pozorovatel z tělesa M pohyb tělesa m , resp. pohyb těžiště T . Na obr. 3-4 je pak znázorněn relativní pohyb obou těles vzhledem k těžišti T . Tak by viděl pohyb jednotlivých těles pozorovatel umístěný ve společném těžišti T .



Obr. 3-3 Pohyb tělesa m a společného těžiště T vůči tělesu M .



Obr. 3-4 Pohyb obou těles vzhledem ke společnému těžišti T .

3.1.4 Restringovaný problém dvou těles

Při řešení pohybu umělých družic a různých sond se obvykle uvažuje ta skutečnost, že hmotnost těchto kosmických těles je mnohonásobně menší než hmotnost centrálního tělesa, v jehož sféře vlivu se toto těleso pohybuje. Uvážíme-li tedy $m \ll M$, můžeme přistoupit ke zjednodušenému (restringovanému) řešení problému dvou těles. Těleso M umístíme do počátku inerciální souřadnicové soustavy. Z toho plyne, že polohový vektor tělesa M je nulový ($\vec{r}_M = 0$) a polohový vektor \vec{r}_m je totožný s polohovým vektorem \vec{r} . Zanedbáním hmotnosti tělesa m můžeme původní společné těžiště ztotožnit s těžištěm tělesa M a tedy s počátkem souřadnicové soustavy ($\vec{r}_T = 0$). To znamená, že pro řešení takto formulovaného problému, můžeme použít výsledky odvozené v předchozí podkapitole, kde jsme odvodili pohybové rovnice pro pohyb tělesa vůči společnému těžišti.

Pro nalezení pohybové rovnice použijeme jednoduše rovnici (3.17), v níž uplatníme totožnost polohových vektorů $\vec{r}_m \equiv \vec{r}$. Po dosazení této skutečnosti a zavedení jednotkového vektoru $\vec{r} = r\vec{e}_r$, obdržíme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\hat{\mu}}{r^2} \vec{e}_r = 0. \quad (3.23)$$

Do rov. (3.23) jsme zavedli restringovaný gravitační parametr příslušející samotnému centrálnímu tělesu M ve tvaru

$$\hat{\mu} = \kappa M \doteq \mu, \quad (3.24)$$

který v dalším textu budeme nadále označovat v souladu s tímto zápisem symbolem μ .

Rovnice (3.23) představuje pohybovou rovnici v podobném tvaru jako v předchozích případech s tím, že se změnil pouze gravitační parametr, v němž jsme zanedbali hmotnost m . Metoda je aplikovatelná pro řešení pohybu jak umělých družic a sond, tak také planet. Hodnoty gravitačního parametru pro některá nebeská tělesa jsou uvedeny v tab. 3-1, [28].

Tab. 3-1

Kosmické těleso	$\mu = \kappa M [km^3s^{-2}]$	Kosmické těleso	$\mu = \kappa M [km^3s^{-2}]$
Slunce	132 712 438 000	Mars	42 828
Merkur	22 032	Jupiter	126 710 000
Venuše	324 860	Saturn	37 940 000
Země	398 600	Uran	5 781 600
Měsíc Země	4 903	Neptun	6 871 300

3.2 Keplerovy zákony

3.2.1 První Keplerův zákon – tvar oběžné dráhy

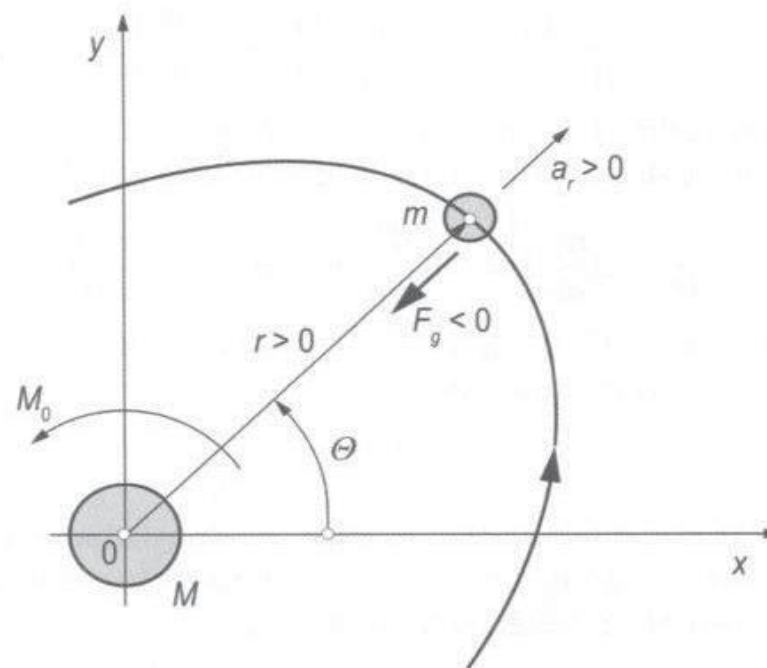
Kepler dospěl k poznání, že dráhy planet jsou elipsy a my zde budeme pouze teoreticky verifikovat, že tomu tak je, pokud neuvažujeme žádné rušivé vlivy. Proto následující odvození rovnice dráhy provedeme pro pohyb kosmického tělesa po eliptické dráze. Navíc pak provedeme zobecnění platnosti rovnice dráhy i pro jiné typy drah (kuželoseček).

Uvažujme oběh kosmického tělesa (planety, družice) m kolem tělesa M v jeho centrálním gravitačním poli. Těleso M spojíme s počátkem nerotující ($\Omega = 0$) vztažné souřadnicové soustavy (x, y, z) . Centrální těleso považujeme za dokonalou homogenní kouli. V tomto případě lze centrální těleso nahradit hmotným bodem v jeho středu. Sledujme nyní pohyb kosmického tělesa m pod účinkem pouze centrální gravitační síly $F_g \equiv F_m$, směřující neustále do středu tělesa M . Okamžitá poloha tělesa m nechť je dána průvodičem r a polohovým úhlem θ dle obr. 3-5.

Pro řešení dané úlohy se jako nejvhodnější nabízí použití polárních souřadnic. Pohybové rovnice v polárních souřadnicích (r, θ) pro konstantní hmotnost obíhajících tělesa ($m = \text{konst.}$) jsou dostatečně známy z obecné mechaniky, např. [38]. Pro náš případ je zapíšeme ve tvaru

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_g, \quad (3.25)$$

$$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = M_0. \quad (3.26)$$



Obr. 3-5 Pohyb tělesa v centrálním gravitačním poli popsany polárními souřadnicemi (r, θ) .

Dle druhého Newtonova zákona je síla dána součinem hmotnosti a zrychlení. V našem případě je touto silou gravitační síla, která je dána vztahem

$$F_g = m \left(-\frac{\mu}{r^2} \right), \quad (3.27)$$

kde radiální relativní zrychlení jsme stanovili z rov. (3.10). Moment centrální gravitační síly k počátku je nulový ($M_0 = 0$). Dosadíme-li na pravé strany pohybových rovnic uvedené skutečnosti a zkrátíme-li obě rovnice hmotností obíhajícího tělesa m obdržíme dvě pohybové rovnice

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (3.29)$$

Posledně uvedenou rovnicí (3.29) můžeme po provedení derivace ještě přepsat na jednodušší tvar

$$r^2\dot{\theta} = h = konst, \quad (3.30)$$

kde h je časově nezávislá konstanta, jejíž geometrický i fyzikální význam si objasníme později.

Pro řešení uvedených pohybových rovnic použijeme substituční metodu. Zavedeme následující substituci

$$r = \frac{1}{u}. \quad (3.31)$$

Nejprve stanovíme první derivaci průvodiče \dot{r} , kterou s přihlédnutím k rovnici (3.30) po substituci $\dot{\Theta}/u^2 = h$ upravíme následovně

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \frac{d\Theta}{d\Theta} = -\frac{\dot{\Theta}}{u^2} \frac{du}{d\Theta} = -h \frac{du}{d\Theta}. \quad (3.32)$$

Druhá derivace průvodiče \ddot{r} je dána derivací rov. (3.32) a opět upravena s přihlédnutím k substituovanému výrazu (3.30). Po naznačené úpravě obdržíme

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\Theta} \right) = -h \frac{d^2u}{d\Theta^2} \frac{\dot{\Theta}}{h} = -h^2 \frac{\dot{\Theta}}{h} \frac{d^2u}{d\Theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\Theta^2}. \quad (3.33)$$

Po dosazení do rovnice (3.28) a využitím vztahu (3.30) obdržíme po malé úpravě diferenciální rovnici v proměnné u ve tvaru

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (3.34)$$

Řešení takové klasické diferenciální rovnice předpokládáme ve standardním tvaru, který sestává z řešení homogenní diferenciální rovnice a partikulárního integrálu. V našem případě je řešení v proměnné u dáno ve tvaru

$$u = A \cos(\Theta - \Theta_0) + \frac{\mu}{h^2}. \quad (3.35)$$

Po zpětné substituci obdržíme řešení pro dráhu definovanou průvodičem r ve tvaru

$$r = \frac{1}{A \cos(\Theta - \Theta_0) + \frac{\mu}{h^2}}. \quad (3.36)$$

Řešení pohybové rovnice obsahuje jisté konstanty, které mají svůj geometrický význam. Přepišme si uvedenou rovnici dráhy na alternativní vztah, který získáme přenásobením čitatele i jmenovatele na pravé straně poměrem (h^2/μ)

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + A \frac{h^2}{\mu} \cos(\Theta - \Theta_0)}. \quad (3.37)$$

Jelikož Kepler ve svém prvním zákonu stanovil, že se planety pohybují po elipsách, objasníme si geometrické souvislosti na této nejdůležitější kuželosečce. Protože konstanty v dané rovnici musí platit v libovolném bodě oběžné dráhy, zvolme si pro objasnění konstanty (h^2/μ) okamžik, ve kterém je úhel $(\Theta = 90^\circ + \Theta_0)$. To odpovídá situaci, kdy průvodič r je kolmý na osu apsid (obr. 3-6).

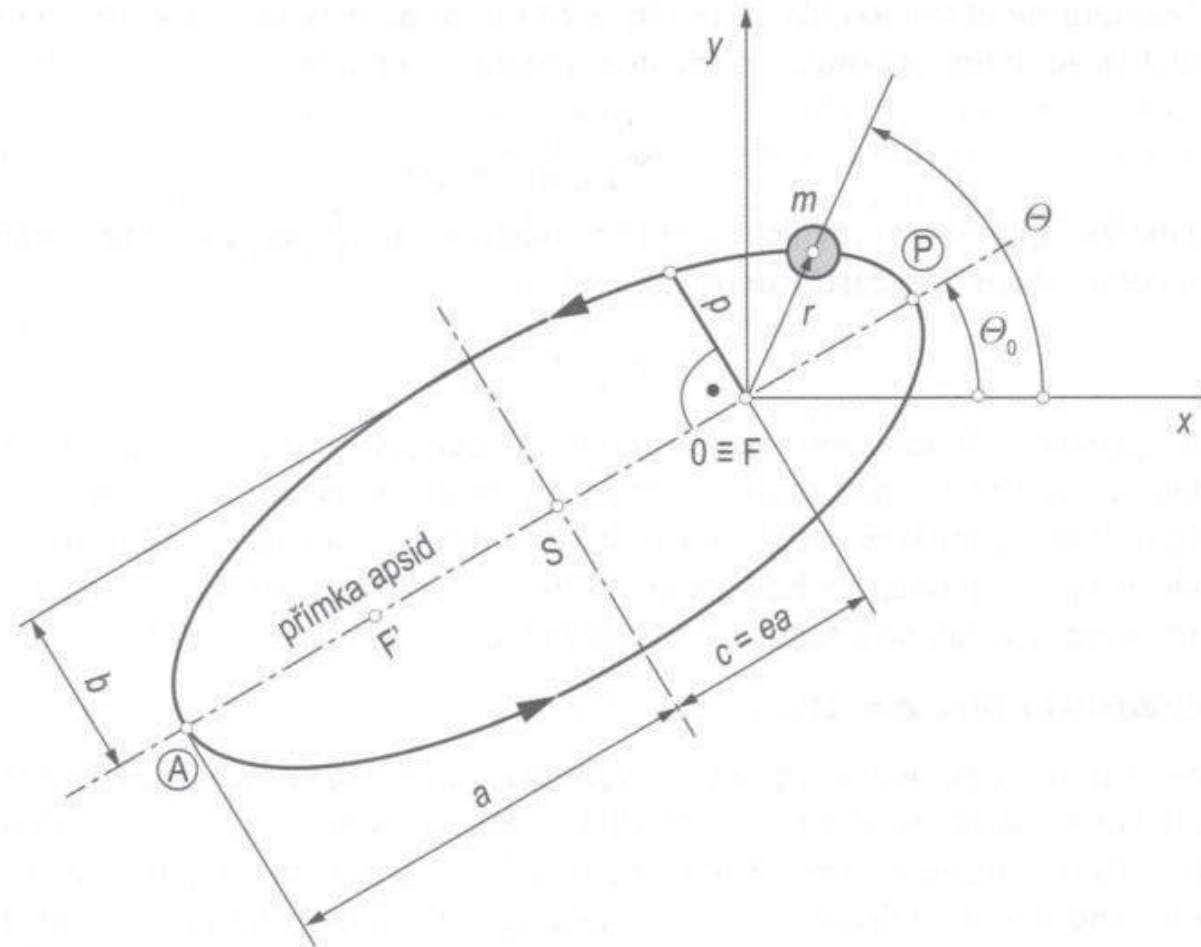
Z geometrie elipsy je známo, že tento průvodič je totožný s tzv. parametrem elipsy p

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \quad (3.38)$$

Dosazením zjištěné skutečnosti do rovnice (3.37), nabývá řešení pohybové rovnice následující tvar

$$r = \frac{p}{1 + Ap \cos(\Theta - \Theta_0)}. \quad (3.39)$$

V dalším kroku nalezneme výraz pro geometrickou konstantu Ap . Tuto konstantu lze nalézt ze dvou poloh průvodiče r , a to pro polohu v pericentru ($\Theta = \Theta_0$) a pro polohu v apocentru ($\Theta = 180^\circ + \Theta_0$).



Obr. 3-6 Obecná poloha elipsy v rovině oběžné dráhy a základní charakteristiky elipsy.

V prvním případě obdržíme

$$r_P = \frac{p}{1 + Ap} \quad (3.40)$$

Ve druhém případě platí

$$r_A = \frac{p}{1 - Ap} \quad (3.41)$$

Vyjádřením parametru p z obou rovnic lze psát následující rovnost

$$r_P(1 + Ap) = r_A(1 - Ap).$$

Po dosazení vzdáleností pericentra $r_P = a - c$ a apocentra $r_A = a + c$ od ohniska dle obr. 3-6 obdržíme rovnici

$$(a - c)(1 + Ap) = (a + c)(1 - Ap),$$

z níž nalezneme konstantu, která vyjadřuje excentricitu (obr. 3-6), což je bezrozměrová veličina

$$Ap = \frac{c}{a} = e. \quad (3.42)$$

Zavedeme-li tyto relace do řešení pohybové rovnice (3.39), můžeme rovnici pro dráhu zapsat např. ve tvaru

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos(\Theta - \Theta_0)}. \quad (3.43)$$

A jelikož úhlová konstanta Θ_0 je libovolnou počáteční integrační konstantou, můžeme její hodnotu zvolit rovnu nule ($\Theta_0 = 0$). V tomto případě bude osa x totožná s přímkou apsid. Výsledné řešení pohybové rovnice zapíšeme ve tvaru

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \Theta}. \quad (3.44)$$

Respektive, uplatněním rovnice (3.38) pro parametr můžeme rovnici pro dráhu uvádět v nejjednodušším a nejčastěji používaném tvaru

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \Theta}. \quad (3.45)$$

Přestože jsme celé odvození rovnice dráhy provedli pro eliptickou dráhu, výše uvedené vztahy (3.44) a (3.45) představují rovnice platné pro obecnou kuželosečku v polárních souřadnicích s ohniskem v počátku naší souřadnicové soustavy. O tom, o jaký typ kuželosečky se jedná, rozhoduje *excentricita (výstřednost) kuželosečky* e , což je bezrozměrová vzdálenost fokusu F od středu kuželosečky S .

Eliptická dráha ($0 < e < 1$)

Eliptické dráhy jsou nejrozšířenějšími tvary drah, po nichž se pohybují nebeská tělesa i umělá kosmická tělesa (kosmická letadla). Eliptická dráha patří mezi uzavřené oběžné dráhy, které můžeme jednoznačně definovat excentricitou a parametrem. Polohu kosmického tělesa na dráze pak určujeme polární souřadnicí (argumentem) Θ , která se nazývá *skutečná (pravá) anomálie*. Je to úhel mezi průvodičem r a přímkou apsid. Měří se od bodu, který se nazývá *pericentrum*, což je bod dráhy, který je nejbližší k ohnisku. Protilehlý, nejvzdálenější bod od ohniska se nazývá *apocentrum*. Výše uvedené názvy jsou obecné názvy těchto charakteristických bodů na uzavřené oběžné dráze – elipse. Pokud se jedná o oběžnou dráhu kolem nějakého konkrétního centrálního tělesa používají se pro tyto body přiléhavější speciální názvy. Pro oběžnou dráhu kolem Země je to *perigeum* a *apogeum*. Pro oběžné dráhy kolem Slunce se tyto odpovídající body nazývají *perihel* a *afel*.

Výše jsme podrobně probrali tvary rovnice dráhy pro eliptické oběžné dráhy. Nicméně pro eliptické oběžné dráhy můžeme ještě uvést další alternativní tvar. Za tímto účelem odvodíme jiný výraz pro parametr elipsy p , tentokrát v závislosti na hlavní poloose a a excentricitě elipsy e . Pro hlavní poloosu elipsy platí

$$2a = r_p + r_A. \quad (3.46)$$

Nejprve stanovíme dle rov. (3.45) vztah pro polohu pericentra $r_p(\Theta = 0^\circ)$ a dle též rovnice stanovíme výraz pro vzdálenost apocentra $r_A(\Theta = 180^\circ)$. Takto získané vztahy dosadíme do rovnice (3.46) a po jednoduché úpravě máme k dispozici další výraz pro parametr elipsy

$$p = a(1 - e^2). \quad (3.47)$$

Dosadíme-li uvedený výraz pro parametr do rov. (3.45) obdržíme alternativní rovnici dráhy v závislosti na excentricitě a hlavní poloose elipsy ve tvaru

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.48)$$

Elipsa je definována jako množina geometrických bodů, pro něž platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevných bodů, tzv. ohnisek, je konstantní. Tato vzdálenost se rovná dvojnásobku délky hlavní poloosy elipsy ($2a$). Hlavní geometrické charakteristiky elipsy jsou již uvedeny na obr. 3-6. Doplňme bez odvození některé další potřebné vztahy, známé z geometrie elipsy. Mezi nejdůležitější geometrické parametry elipsy patří excentricita (e), hlavní poloosa (a), vzdálenosti pericentru (r_P) a apocentra (r_A) od hlavního ohniska (fokusu).

Pro excentricitu a hlavní poloosu elipsy platí vztahy:

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}, \quad (3.49) \quad a = \frac{r_A + r_P}{2}, \quad (3.50)$$

$$e = \frac{r_A}{a} - 1, \quad (3.51) \quad a = \frac{r_A}{1 + e}, \quad (3.52)$$

$$e = 1 - \frac{r_P}{a}, \quad (3.53) \quad a = \frac{r_P}{1 - e}. \quad (3.54)$$

Pro vzdálenost apocentra a pericentra od hlavního ohniska elipsy platí vztahy:

$$r_A = 2a - r_P, \quad (3.55) \quad r_P = 2a - r_A, \quad (3.56)$$

$$r_A = a(1 + e), \quad (3.57) \quad r_P = a(1 - e), \quad (3.58)$$

$$r_A = r_P \frac{1 + e}{1 - e}, \quad (3.59) \quad r_P = r_A \frac{1 - e}{1 + e}. \quad (3.60)$$

Vazby mezi dalšími základními rozměry elipsy jsou dány vztahy:

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (3.61) \quad b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (3.62)$$

Příklad 3.1

Zadání:

Stanovte následující parametry eliptické dráhy kosmického tělesa obíhajícího kolem Země: vzdálenosti perigea r_P a apogea r_A od centra gravitačního pole, specifický moment hybnosti h , délku hlavní a vedlejší poloosy a, b .

Potřebná data:

Výška kosmického tělesa v perigeu	$H_P = 450 \text{ [km]},$
Excentricita	$e = 0,5 \text{ [1]},$
Poloměr Země	$r_Z = 6378 \text{ [km]},$
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}.$

Řešení:

a) Výpočet vzdálenosti perigea

$$r_P = r_Z + H_P = 6378 + 450 = 6828 \text{ [km]}.$$

- b) Výpočet specifického momentu hybnosti provedeme dle rov. (3.44), kterou upravíme s uvážením podmínky v perigeu $\theta = 0^\circ$ na tvar

$$h = \sqrt{\mu r_p(1 + e)} = \sqrt{(398600) 6828 (1 + 0,5)} = 63894,14 [km^2 s^{-1}].$$

- c) Výpočet vzdálenosti apogea provedeme rovněž pomocí rov. (3.44), kde nyní uvážíme podmínku pro apogeum $\theta = 180^\circ$

$$r_A = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e} = \frac{63894,14^2}{398600} \frac{1}{(1 - 0,5)} = 20484 [km].$$

- d) Výpočet hlavní poloosy elipsy provedeme dle vztahu (3.50)

$$a = \frac{r_A + r_p}{2} = \frac{20484 + 6828}{2} = 13656 [km].$$

- e) Konečně výpočet vedlejší poloosy elipsy stanovíme z rov. (3.62)

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 13656 \sqrt{1 - 0,5^2} = 11826,44 [km].$$

Kruhová dráha ($e = 0$)

Kruhovou oběžnou dráhu můžeme považovat za speciální dráhu eliptickou. Kružnice je geometrickým místem bodů, které mají konstantní vzdálenost od pevného bodu. V tomto případě je ohnisko totožné se středem kružnice a průvodič $r = konst$. Dosadíme-li do rov. (3.44) a (3.45) za excentricitu $e = 0$ zjistíme, že pro kruhovou dráhu jednoduše platí

$$r = p = \frac{h^2}{\mu} = konst. \quad (3.63)$$

Parabolická dráha ($e = 1$)

Parabola (obr. 3-7) je obecně definována jako množina geometrických bodů, které mají stejnou vzdálenost od ohniska a od zvolené řídicí přímky. Řídicí přímka leží vpravo od fokusu ve vzdálenosti $d = 2r_p$ a je rovnoběžná s osou y .

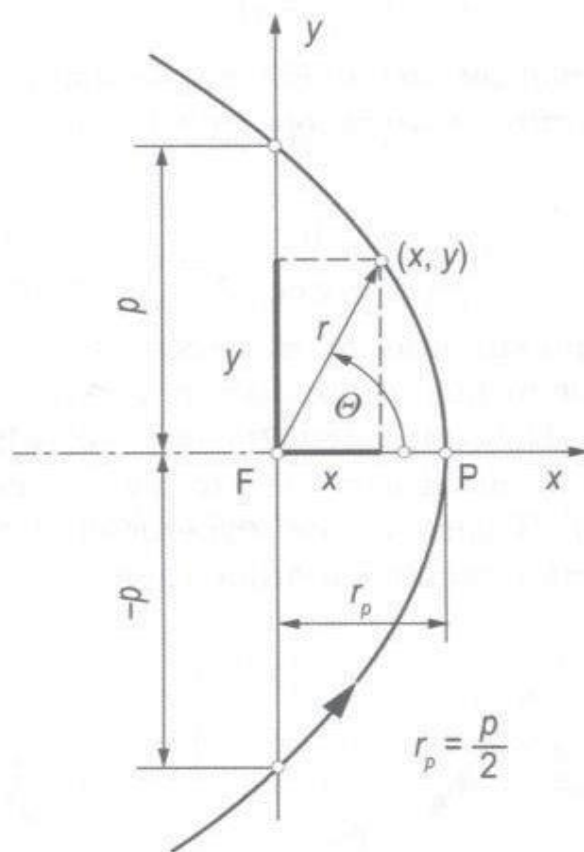
Parabolická dráha je určena rovnicí obecné kuželosečky (3.45), v níž dosadíme za excentricitu $e = 1$. Takže parabolická dráha je v polárních souřadnicích určena rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}. \quad (3.64)$$

Parabola představuje již otevřenou dráhu. Polohový vektor pro pravou anomálii $\theta = 180^\circ$, tj. při $\cos \theta = -1$, nabývá nekonečné hodnoty. Hlavní poloosa $a \rightarrow \infty$. Pericentrum parabolické dráhy (vrchol paraboly) leží na průsečíku paraboly s její osou y , kdy pro pravou anomálii platí $\cos \theta = 1$. Parametr paraboly je v souladu s rovnicí (3.64) dán dvojnásobkem vzdálenosti vrcholu paraboly od ohniska

$$p = 2r_p. \quad (3.65)$$

Parabolický tvar dráhy svými parametry představuje hraniční dráhu, která je předělem mezi eliptickými a hyperbolickými dráhami.



Obr. 3-7 Geometrické charakteristiky paraboly.

Hyperbolická dráha ($e > 1$)

Hyperbola je definována jako množina geometrických bodů, které mají od dvou pevných bodů (ohnisek) stálý rozdíl vzdáleností. Rozdíl těchto vzdáleností se rovná dvojnásobku délky hlavní poloosy ($2a$).

Hyperbolická dráha je určena rovnicí obecné kuželosečky s tím, že excentricita je větší jak jedna ($e > 1$). V obecné teorii kuželoseček je délka hlavní poloosy hyperboly záporná. Nicméně, zde upravíme obecný výraz pro hyperbolu za předpokladu, že hlavní poloosu hyperboly budeme uvažovat jako kladnou veličinu ($a > 0$).

Podobně jako u elipsy i zde použijeme pro nalezení výrazu pro parametr stejný postup. Nejprve určíme dle rov. (3.45) výraz pro vzdálenost pericentra hyperboly r_p ($\theta = 0$) a z téže rovnice určíme vztah pro vzdálenost apocentra hyperboly r_A ($\theta = 180$). Avšak vzhledem k tomu, že nyní je excentricita větší jak jedna ($e > 1$) je dle rov. (3.45) číselná hodnota vzdálenosti apocentra hyperboly záporná. Tudíž v souladu s obr. 3-8 je nutno kladně uvažovanou vzdálenost ($2a$) mezi pericentrem a apocentrem zapsat následovně

$$2a = |r_A| - r_p = -r_A - r_p.$$

Nyní do uvedeného vztahu dosadíme výrazy pro polohu apocentra a pericentra, které získáme dle rov. (3.45)

$$2a = -p \left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e} \right),$$

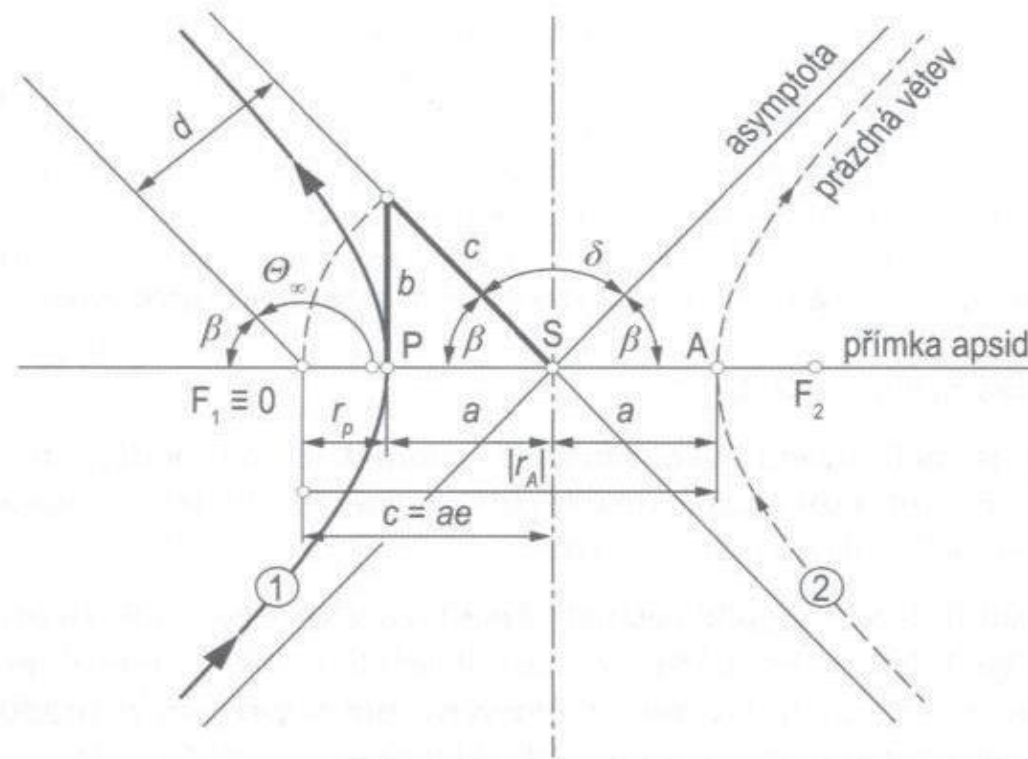
odkud obdržíme výraz pro parametr hyperboly, který budeme používat ve tvaru

$$p = a(e^2 - 1). \quad (3.66)$$

Po dosazení parametru p dle rov. (3.66) do obecného výrazu pro kuželosečku (3.45) získáváme řešení pohybové rovnice pro pohyb kosmického tělesa po hyperbole ve tvaru

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \Theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \Theta}. \quad (3.67)$$

Na rozdíl od jiných typů kuželoseček, hyperbola má dvě osově symetrické větve. Pro pohyb tělesa v centrálním poli vykazujícím přitažlivé gravitační síly je platná pouze jedna z nich, označena (1). Druhá větev (2) nemá reálný fyzikální význam, odpovídala by odpuzující gravitační síle, označujeme ji jako tzv. prázdnou větev. Pericentrum P leží v průsečíku hyperboly (vrchol reálné hyperboly) s osou apsid ($\Theta = 0$), zatímco apocentrum A je totožné s vrcholem prázdné větve.



Obr. 3-8 Geometrické charakteristiky hyperboly.

Významnou roli hrají obě asymptoty. Asymptoty jsou tečny v nekonečnu k oběm větvím hyperboly a svírají spolu úhel 2β (obr. 3-8). Hledejme nyní pravou anomálii pro případ, kdy polohový vektor $r \rightarrow \infty$. Jinými slovy, v limitním případě bude rovnoběžná s asymptotou. Z rov. (3.67) vyplývá, že této situaci odpovídá pravá anomálie $\Theta = \Theta_\infty$ pro niž platí podmínka

$$\cos \Theta_\infty = -1/e. \quad (3.68)$$

Jak je možno vidět z obr. 3-8, mezi úhlem asymptoty β a limitní pravou anomálií Θ platí následující vazba

$$\beta = 180^\circ - \Theta_\infty.$$

Odtud pro $\cos \beta$ platí vztah

$$\cos \beta = \cos(180^\circ - \Theta_\infty) = \cos 180^\circ \cos \Theta_\infty + \sin 180^\circ \sin \Theta_\infty = -\cos \Theta_\infty.$$

Srovnáním s rov. (3.68) je zřejmé, že pro úhel asymptot platí

$$\cos \beta = 1/e. \quad (3.69)$$

Přilétající kosmické těleso k centrálnímu tělesu umístěnému v ohnisku F se při oběhu asymptoticky pootočí o úhel δ a poté opět tímto směrem odlétá do nekonečna. Úhel asymptotického pootočení stanovíme dle obr. 3-8 z podmínky $\delta/2 = 90^\circ - \beta$. Takže z funkce pro sinus tohoto úhlu obdržíme vztah

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin(90^\circ - \beta) = \sin 90^\circ \cos \beta - \cos 90^\circ \sin \beta = \cos \beta.$$

Srovnáním s rov. (3.69) vidíme, že poloviční úhel asymptotického pootočení je roven převrátné hodnotě excentricity

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{e}. \quad (3.70)$$

Doplňme ještě bez odvození některé další užitečné vztahy, známé z teorie hyperboly. Vztahy platí za předpokladu, že hlavní poloosa hyperboly je uvažována kladně ($a > 0$).

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}, \quad (3.71)$$

$$b = r_p \sqrt{(e+1)/(e-1)}, \quad (3.72)$$

$$e = 1 + (r_p/a), \quad (3.73)$$

$$e = \sqrt{1 + (b/a)^2}, \quad (3.74)$$

$$r_A = -a(e+1), \quad (3.75)$$

$$r_p = a(e-1), \quad (3.76)$$

$$r_p = c - a, \quad (3.77)$$

$$d = (r_p + a) \sin \beta, \quad (3.78)$$

$$d = a\sqrt{e^2 - 1}, \quad (3.79)$$

$$d = ae \sin \beta. \quad (3.80)$$

3.2.2 Druhý Keplerův zákon - zákon ploch

Druhý Keplerův zákon se vztahuje k poznatku, že plocha opsaná průvodičem při pohybu kosmického tělesa po oběžné dráze je konstantní. Pro prokázání tohoto zákona použijeme odvozenou pohybovou rov. (3.10), do níž ještě dosadíme za jednotkový vektor $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ a zapíšeme takto

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (3.81)$$

Obě strany uvedené rovnice přenásobíme vektorově zleva polohovým vektorem \vec{r}

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{r}).$$

Díky tomu, že vektorový součin polohových vektorů na pravé straně rovnice je roven nule ($\vec{r} \times \vec{r} = 0$), je vektorový součin

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0.$$

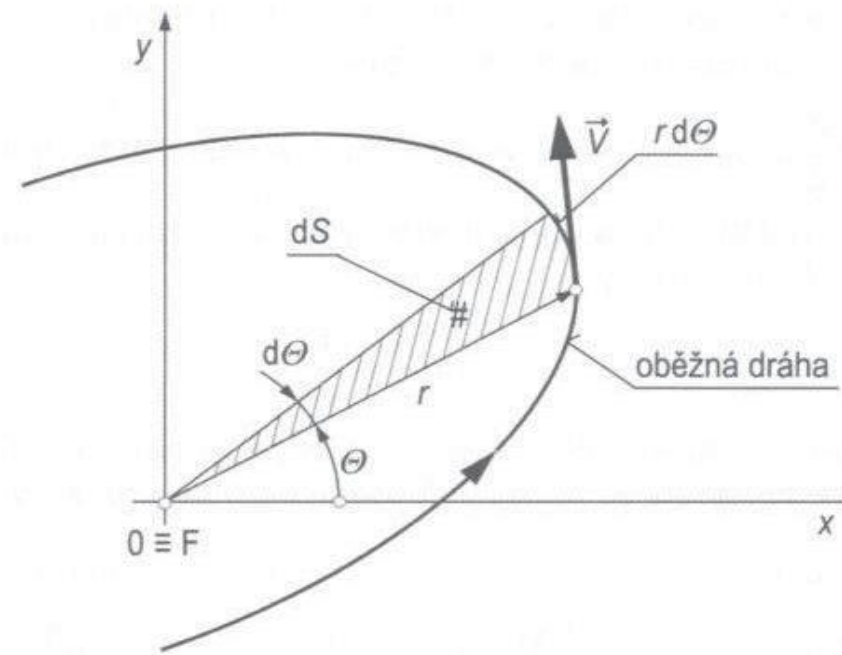
Dále uvážíme skutečnost, že pro derivaci vektorového součinu polohového vektoru a vektoru rychlosti s přihlédnutím k výše uvedeným skutečnostem platí

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0.$$

Z nulovosti uvedené derivace vyplývá, že součin polohového vektoru a vektoru rychlosti ($\vec{r} = \vec{V}$) musí být konstantní

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{V} = \vec{h}. \quad (3.82)$$

Vektor \vec{h} je konstantní vektor co do velikosti i směru a s časem se nemění. Jeho geometrický význam vyplyne z následujícího odvození II. Keplerova zákona.



Obr. 3-9 Definiční obrázek k odvození sektoriální rychlosti.

Sledujme plochu opisovanou průvodičem r při pohybu kosmického tělesa po oběžné dráze (obr. 3-9). Za elementární čas dt průvodič změní svou úhlovou polohu o $d\theta$ a opíše elementární plochu dS

$$dS = \frac{1}{2} r(r d\theta).$$

Časová změna plochy pak bude dána vztahem

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}.$$

Po dosazení dle rov. (3.30) dostáváme velmi důležitý vztah pro tzv. sektoriální rychlost

$$\frac{dS}{dt} = \frac{h}{2} = konst. \quad (3.83)$$

Uvedený vztah představuje II. Keplerův zákon, který říká, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času při pohybu kosmického tělesa po oběžné dráze, tzv. sektoriální rychlost, je konstantní. Tímto konstanta h dle rov. (3.83) dostává svůj geometrický význam. Konstanta h je rovna dvojnásobku sektoriální rychlosti a nazývá se *konstanta zákona ploch*.

Konstanta \vec{h} má vedle geometrického významu také fyzikální význam. Připomeňme si známý obecný výraz pro moment hybnosti $\vec{b} = \vec{r} \times m\vec{V}$, který přepíšeme pro těleso o jednotkové hmotnosti ($m = 1$) na tvar

$$\frac{\vec{b}}{m} = \vec{r} \times \vec{V}.$$

Toto je moment hybnosti vztažený na jednotku hmotnosti, a nazývá se specifický moment hybnosti. Srovnáním tohoto výrazu s rov. (3.82) je zřejmý fyzikální význam vektorové konstanty \vec{h} . Představuje specifický moment hybnosti kosmického tělesa o jednotkové hmotnosti.

Doplňme ještě vzájemnou polohu vektoru \vec{r} a \vec{h} . Pro tento účel sestavíme skalární součin $\vec{r} \cdot \vec{h}$. Uplatněním pravidla pro smíšený součin vektorů obdržíme

$$\vec{r} \cdot \vec{h} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{V}) = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) = 0.$$

Odtud vyplývá, že $|\vec{r}||\vec{h}|\cos\alpha = 0$. Pro nenulové moduly vektorů $|\vec{r}|$ a $|\vec{h}|$ musí být $\cos\alpha = 0$, což platí pro úhel $\alpha = 90^\circ$. Z toho vyplývá, že oba vektory jsou navzájem kolmé. A protože \vec{h} je časově konstantní vektor (co do velikosti i směru) znamená to také, že průvodič \vec{r} leží neustále v jedné rovině. Toto je potvrzení toho, že oběžné dráhy jsou rovinné křivky.

3.2.3 Třetí Keplerův zákon - oběžná doba

Zajímejme se nyní o periodu pohybu T , tj. dobu, za kterou projde kosmické těleso stejnými polohami na své oběžné dráze. Za tuto dobu průvodič opíše právě celou plochu elipsy S_e . Předpokládáme, že známe sektoriální rychlost pohybu kosmického tělesa. Pak lze psát

$$S_e = \pi ab = \int_0^T \left(\frac{dS}{dt}\right) dt. \quad (3.84)$$

Nyní do uvedeného vztahu dosadíme za sektoriální rychlost dle rov. (3.83) a výraz pro vedlejší poloosu dle vztahu (3.62). Po integraci obdržíme pro periodu následující mezivýsledek

$$T = 2\pi \frac{a^2}{h} \sqrt{1 - e^2}.$$

Dále dosadíme za konstantu h dle vztahu, který získáme kombinací výrazů pro parametr p dle rov. (3.38) a rov. (3.47) ve tvaru

$$h = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2}. \quad (3.85)$$

Po dosazení do rov. (3.84) za specifický moment hybnosti h dle rov. (3.85) a úpravě obdržíme výsledný vztah pro periodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (3.86)$$

Uvedenou rovnicí můžeme ještě přepsat na následující tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = konst. \quad (3.87)$$

Toto je zpřesněné vyjádření III. Keplerova zákona, který stanovuje skutečnost, že poměr druhých mocnin period a třetích mocnin hlavních poloos eliptických drah zůstává konstantní. V tomto znění jej vyslovil Kepler, avšak bez znalosti výrazu pro onu konstantu. Definitivní podobu III. Keplerův zákon doznal až mnohem později na základě Newtonových studií. Vzhledem k tomu, že konstanta obsahuje gravitační parametr μ je tato konstanta pro každou planetu, či jiné centrální těleso různá.

3.3 Energie kosmického tělesa při pohybu v centrálním gravitačním poli

3.3.1 Specifická mechanická energie

Vraťme se opět k pohybové rovnici (3.10), kterou s využitím výrazu pro jednotkový vektor $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ zapíšeme ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0. \quad (3.88)$$

Rovnici přenásobíme skalárně zleva vektorem rychlosti $\dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0. \quad (3.89)$$

Snadno lze prokázat, že skalární součin $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$ se dá vyjádřit následovně

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r})^2 = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dt}.$$

O správnosti tvrzení se lze přesvědčit zpětnou derivací našeho výsledku

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r})^2 = \frac{1}{2} (2 \dot{r} \cdot \ddot{r}) = \dot{r} \cdot \ddot{r}.$$

Dále z druhého členu v rov. (3.89) vypíšeme výraz $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}/r$ a provedeme jeho derivaci. Dá se prokázat, že tento výraz se dá vyjádřit takto

$$\frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} (r r \cos 0)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} (r^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{dr}{dt}.$$

Důkazem je opět zpětná derivace získaného výrazu

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})^{-\frac{1}{2}} (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \frac{1}{(r^2)^{1/2}} 2(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}{r}.$$

Nyní můžeme odvozené výrazy dosadit do původní rovnice (3.89), čímž získáme rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dt} + \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = 0.$$

Rovnici upravíme separací proměnných pro přímou integraci takto

$$\frac{1}{2} dV^2 = -\mu \frac{dr}{r^2}.$$

Integrací uvedené rovnice obdržíme výsledek ve tvaru

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\mu}{r} + \varepsilon.$$

Rovnici přepíšeme do konečného tvaru, kde levá strana představuje součet specifické kinetické energie a specifické potenciální energie

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon \text{ [Jkg}^{-1}\text{]}. \quad (3.90)$$

Konstanta na pravé straně rovnice pak představuje celkovou specifickou mechanickou energii kosmického tělesa při pohybu po oběžné dráze. Pokud výsledek uplatníme pro kosmické těleso o zadané hmotnosti m , můžeme naši rovnici přepsat na tvar

$$\frac{1}{2}mV^2 + \left(-\frac{\mu}{r}m\right) = m\varepsilon \text{ [J]}. \quad (3.91)$$

což představuje nám dobře známý zákon zachování mechanické energie ve tvaru

$$E_c = E_k + E_p. \quad (3.92)$$

3.3.2 Specifická energetická konstanta

Vraťme se zpět k výrazu pro celkovou specifickou mechanickou energii kosmického tělesa pohybujícího se po eliptické dráze. Jelikož celková energie v souvislosti se zákonem zachování energie zůstává konstantní, můžeme výraz pro celkovou energii zapsat pro libovolnou polohu kosmického tělesa na oběžné dráze. S výhodou zvolíme polohu v pericentru $r = r_p$, kde pravá anomálie je rovna nule ($\theta = 0$). V pericentru jsou průvodič a vektor rychlosti na sebe vzájemně kolmé. Z výrazu pro specifický moment hybnosti $\vec{r}_p \times \vec{V}_p = \vec{h}$ vyplývá, že součin jejich modulů se rovná modulu specifického momentu hybnosti $r_p V_p \sin 90^\circ = h$. Odtud pro rychlost kosmického tělesa v pericentru platí

$$V_p = \frac{h}{r_p}. \quad (3.93)$$

Z rovnice (3.44) zapsanou pro podmínky v pericentru dostáváme vztah pro kvadrát specifického momentu hybnosti ve tvaru

$$h^2 = r_p \mu (1 + e).$$

Po dosazení kvadrátu rychlosti V_p dle rov. (3.93) do rov. (3.90) a následně po dosazení výše uvedeného vztahu pro kvadrát specifického momentu hybnosti, obdržíme následující mezivýsledek

$$\varepsilon = \frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{\mu(1+e)}{2r_p} - \frac{\mu}{r_p} = -\frac{\mu}{2r_p} (1-e).$$

Nakonec, po dosazení za vzdálenost pericentra $r_p = a(1-e)$ dle vztahu (3.58) získáme po úpravě výsledný vztah pro specifickou energetickou konstantu

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}. \quad (3.94)$$

Specifickou energetickou konstantu jsme odvozovali pro elipsu, avšak obecně platí pro každou kuželosečku a představuje celkovou specifickou mechanickou energii kosmického tělesa. Jak je vidět ze vztahu (3.94), závisí přímo úměrně na gravitačním parametru centrálního tělesa a nepřímo úměrně na hlavní poloose kuželosečky. To znamená, že v daném centrálním gravitačním poli celková specifická energie závisí jen na velikosti dráhy, která je dána hlavní poloosou příslušné kuželosečky. Podle velikosti hlavní poloosy lze pro jednotlivé kuželosečky psát následující konkrétní výrazy pro specifické energetické konstanty, které jsou uvedeny v tab. 3-2.

Tab. 3-2	Specifická energetická konstanta [Jkg^{-1}]
Eliptická dráha ($a > 0$)	$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$
Kruhová dráha ($a = r$)	$\varepsilon = -\frac{\mu}{2r}$
Parabolická dráha ($a \rightarrow \infty$)	$\varepsilon = 0$
Hyperbolická dráha (zde je $a > 0$)	$\varepsilon = +\frac{\mu}{2a}$

3.3.3 Kosmické rychlosti a dráhy letu

Rychlost patří k nejdůležitějším charakteristikám popisujícím pohyb kosmického tělesa. Pro stanovení rychlosti pohybu kosmického tělesa použijeme výše odvozený vztah pro celkovou specifickou mechanickou energii (3.90), do něhož dosadíme výraz pro energetickou konstantu (3.94). Po dosazení a úpravě obdržíme obecný výraz pro rychlost pohybu kosmického tělesa ve tvaru

$$V = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + \varepsilon\right)} = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}. \quad (3.95)$$

Uvedený výraz je v tomto tvaru platný nejen pro eliptickou oběžnou dráhu, ale má obecnou platnost pro jakoukoliv kuželosečku. V daném centrálním gravitačním poli (μ) závisí rychlost pohybu jen na velikosti oběžné dráhy (a) a poloze na dráze, určené vzdáleností pohybujícího se tělesa od středu centrálního gravitačního pole (r).

I. kosmická rychlost – kruhová rychlost

Dosazením do obecného vztahu pro rychlost (3.95) za hlavní poloosu poloměr kruhové oběžné dráhy ($a = r = konst.$) obdržíme výraz pro rychlost, kterou nazýváme kosmickou rychlostí, respektive kruhovou rychlostí

$$V_I = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \quad (3.96)$$

Např. pro planetu Zemi je hodnota kruhové rychlosti v nulové výšce $V_I = 7,9 [kms^{-1}]$

II. kosmická rychlost – úniková rychlost

Pro otevřenou parabolickou dráhu, pro niž platí ($a \rightarrow \infty$) obdržíme výraz pro II. kosmickou rychlost ve tvaru

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = V_I \sqrt{2}. \quad (3.97)$$

Tato rychlost odpovídá rychlosti, při níž je možno překonat přitažlivost centrálního tělesa a proto se nazývá úniková rychlost. Pro únik z planety Země je hodnota II. kosmické rychlosti $V_{II} = 11,2 \text{ [kms}^{-1}\text{]}$.

Hyperbolická rychlost

Vraťme se zpět k výrazu pro celkovou specifickou mechanickou energii, rov. (3.90), kam dosadíme za specifickou energetickou konstantu pro hyperbolu, uvedenou v tab. 3-2

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}.$$

Dosadíme-li za průvodič ($r \rightarrow \infty$) obdržíme vztah pro rychlost v nekonečnu ve tvaru

$$V_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \quad (3.98)$$

Tato rychlost se nazývá *hyperbolický přebytek rychlosti*. Zavedme tuto rychlost zpět do výrazu pro celkovou specifickou mechanickou energii

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_\infty^2}{2},$$

odkud pro kvadrát hyperbolické rychlosti získáváme vztah ve tvaru

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + V_\infty^2. \quad (3.99)$$

A s přihlédnutím k rovnici (3.97) pro II. kosmickou rychlost můžeme zapsat relaci mezi kvadráty rychlostí

$$V^2 = V_{II}^2 + V_\infty^2. \quad (3.100)$$

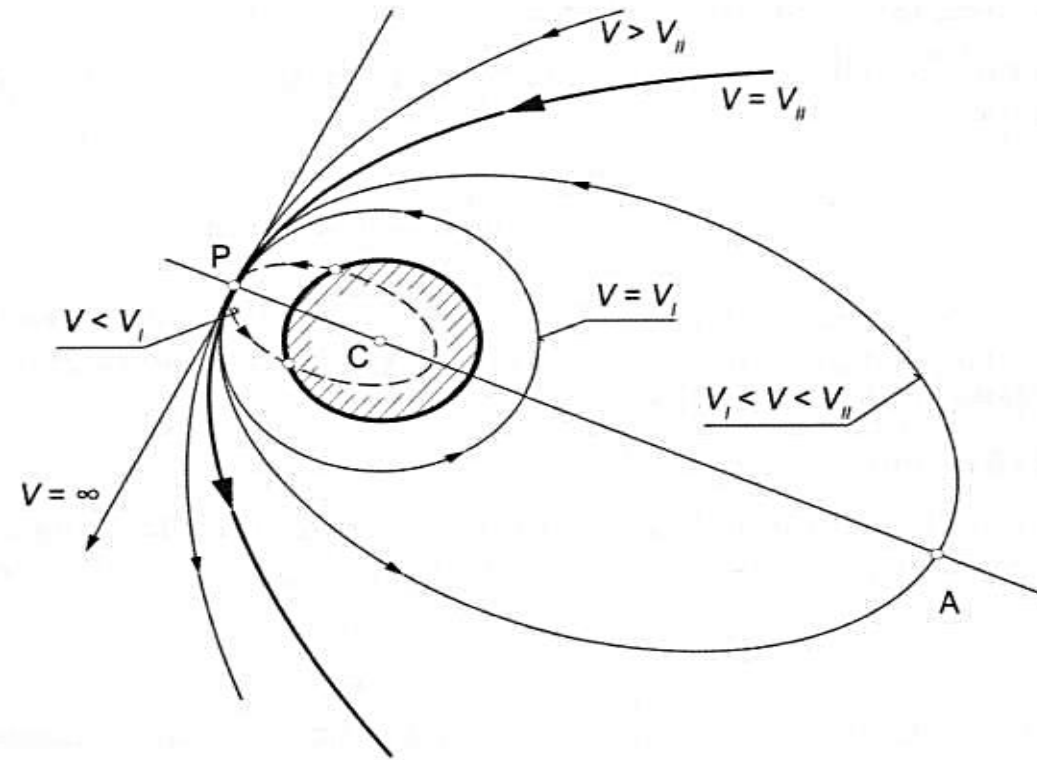
Z uvedeného vztahu je zřejmé proč je rychlost V_∞ nazývána hyperbolickým přebytkem rychlosti. Je to rychlost, o kterou je třeba zvýšit parabolickou únikovou rychlost, abychom přešli na hyperbolickou dráhu, nutnou pro odlet z příslušného CGP. Kvadrát hyperbolického přebytku rychlosti se v mechanice kosmického letu označuje

$$C_3 = V_\infty^2 \text{ [km}^2\text{s}^{-2}\text{]}, \quad (3.101)$$

a je měřítkem energie potřebné k uskutečnění meziplanetárního letu, [23]. Často se nazývá jako „charakteristická energie“. Více se o meziplanetárních letech uvádí v kap. 6.

Srovnání tvarů drah a rychlostí je uvedeno na obr. 3-10. Z uvedeného je vidět, že parabolická úniková dráha je předělem mezi uzavřenými dráhami (kruhovými a eliptickými) a otevřenými dráhami (parabolickými a hyperbolickými). Čárkovaně je na obrázku znázorněna dráha balistické rakety, jejíž eliptická dráha protíná povrch Země. Povšimněte si, že pro balistickou dráhu leží perigeum uvnitř Země.

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP



Obr. 3-10 Srovnání uzavřených a otevřených drah.

Příklad 3.2

Zadání:

Stanovte následující parametry eliptické dráhy kosmického tělesa obíhajícího kolem Země rychlosti v perigeu a apogeu V_P , V_A , periodu T , specifickou energetickou konstantu \mathcal{E} rychlost V_1 v zadaném bodě dráhy (1), který je definován hodnotou pravé anomálie θ_1 .

Potřebná data:

Pravá anomálie	$\theta_1 = 115 [^\circ]$,
Excentricita	$e = 0,2 [1]$,
Vzdálenost perigea	$r_P = 7150 [km]$,
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 [km^3s^{-2}]$.

Řešení:

- a) Výpočet specifického momentu hybnosti provedeme dle rov. (3.44), kterou upravíme s uvažováním podmínky v perigeu $\theta = 0^\circ$ na tvar

$$h = \sqrt{\mu r_P (1 + e)} = \sqrt{(398600)7150(1 + 0,2)} = 58481 [km^2s^{-1}].$$

- b) Výpočet vzdálenosti apogea provedeme rovněž pomocí vztahu (3.44), kde nyní uvažujeme podmínku pro apogeum $\theta = 180^\circ$

$$r_A = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e} = \frac{58481^2}{398600} \frac{1}{(1 - 0,2)} = 10725 [km].$$

- c) Výpočet hlavní poloosy elipsy provedeme dle vztahu (3.50)

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{10725 + 7150}{2} = 8937,5 \text{ [km]}.$$

d) Výpočet oběžné doby (periody) z rov. (3.86)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{8937,5^3}{398600}} = 8408,825 \text{ [s]} = 2,33578 \text{ [h]} = 2^\circ 20' 09''.$$

e) Výpočet rychlosti v perigeu a apogeu provedeme jednoduše dle vztahu (3.93)

$$V_P = \frac{h}{r_P} = \frac{58481}{7150} = 8,179 \text{ [kms}^{-1}\text{]}, \quad V_A = \frac{h}{r_A} = \frac{58481}{10725} = 5,453 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

f) Specifická energetická konstanta je dána výrazem

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{398600}{2(8937,5)} = -22,299 \text{ [km}^2\text{s}^{-2}\text{]} = -22,299 \text{ [MJkg}^{-1}\text{]}.$$

g) Výpočet modulu polohového vektoru r_1

$$r_1 = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta_1} = \frac{58481^2}{398600} \frac{1}{1 + 0,2 \cos 115^\circ} = 9372,2 \text{ [km]}.$$

h) Konečně rychlost v bodě (1), který je definován souřadnicemi (r_1, θ_1) stanovíme z rovnice (3.95) ve tvaru

$$V_1 = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_1} + \mathcal{E} \right)} = \sqrt{2 \left(\frac{398600}{9372,2} + (-22,299) \right)} = 6,361 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

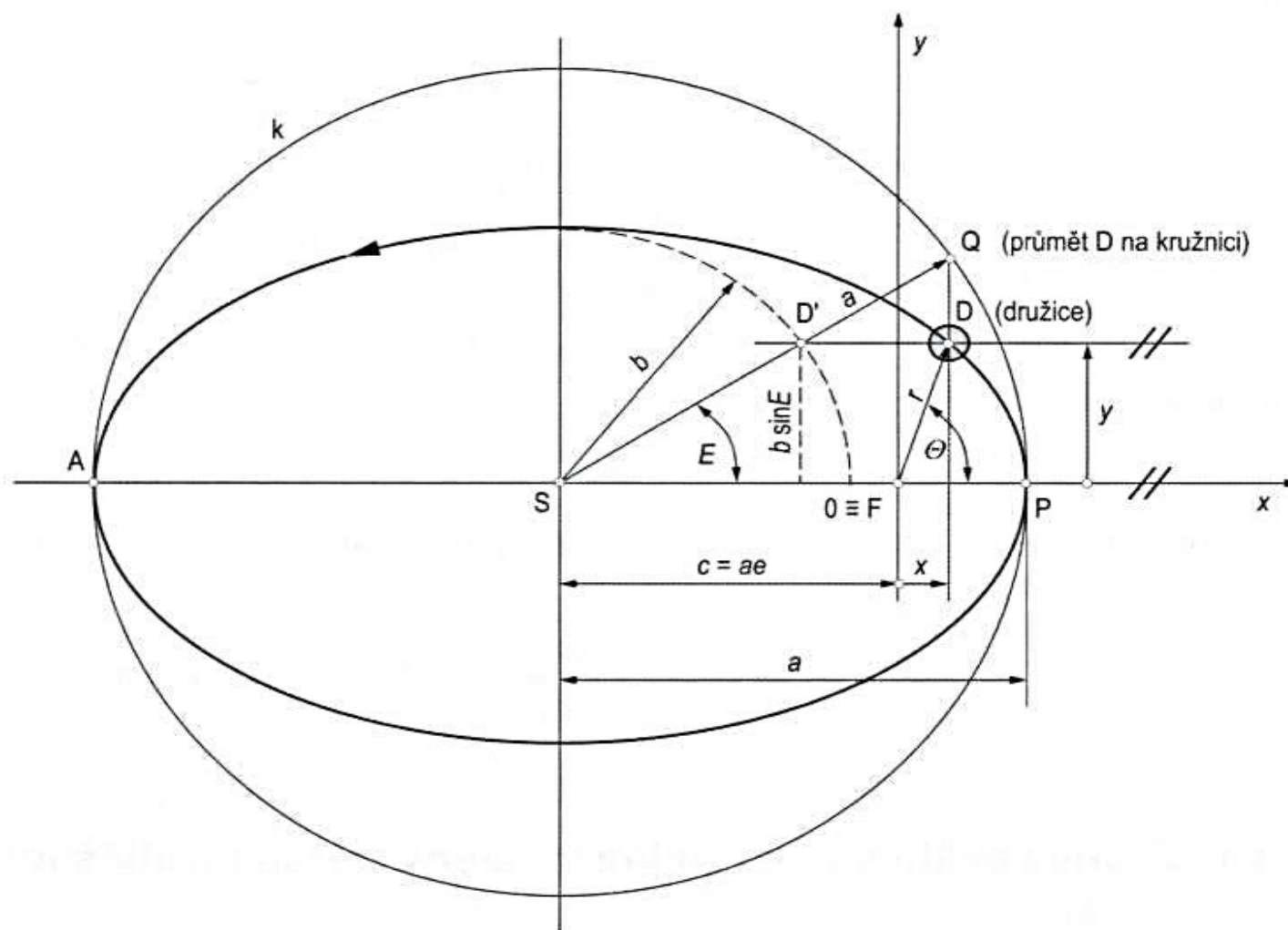
3.4 Časový průběh pohybu kosmického tělesa na oběžné dráze

Na základě dosavadních rozborů umíme nalézt polohu kosmického tělesa r v závislosti na pravé anomálii θ pro jakoukoliv známou eliptickou oběžnou dráhu, např. pomocí rovnice dráhy (3.45). Nyní nás bude zajímat, v jakém čase se do této polohy kosmické těleso dostane. Hledáme funkční závislost $t = f(\theta)$. Jak vyplývá ze zákona ploch, pohyb kosmického tělesa po eliptické oběžné dráze je nerovnoměrný. Pro řešení časové závislosti slouží Keplerova rovnice, kterou nyní odvodíme.

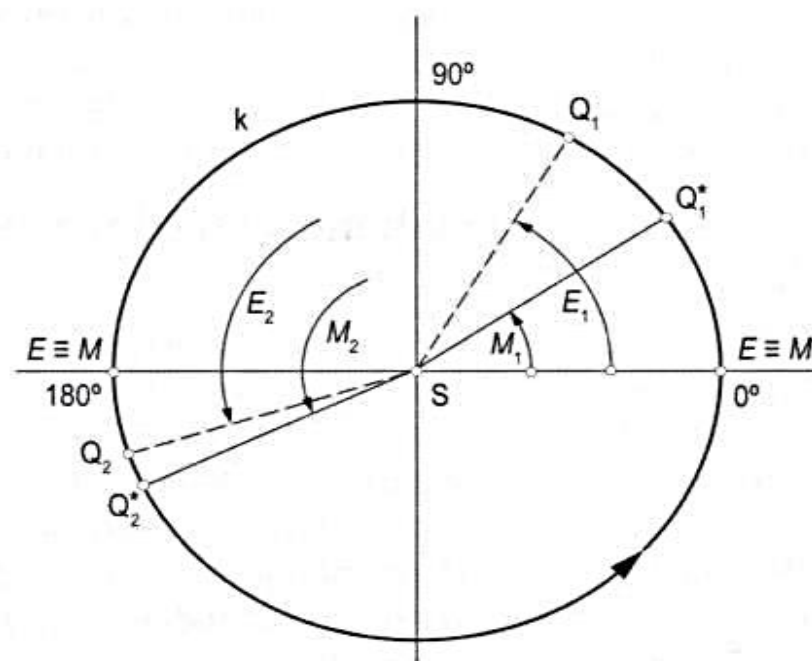
3.4.1 Keplerova rovnice – vztah mezi střední a excentrickou anomálií

Keplerova časová rovnice vyjadřuje vztah mezi tzv. excentrickou anomálií E a střední anomálií M . Excentrická anomálie E je úhel mezi přímkou apsid a spojnicí středu elipsy S s bodem Q (obr. 3-11). Bod Q je definován jako průmět kosmického tělesa D na kružnici „ k “ opsanou dané eliptické dráze, vedený rovnoběžně s osou y . Průmět kosmického tělesa (družice) na pomocnou kružnici se pohybuje rovněž nerovnoměrně. Proto se zavádí další pomocná úhlová proměnná, tzv. střední anomálie M , což je úhel mezi přímkou apsid a spojnicí středu kružnice s bodem Q^* na téže pomocné kružnici „ k “, znázorněné na obr. 3-12. Na rozdíl od nerovnoměrného pohybu bodu Q , svázaného s pohybem bodu D , bod Q^* se po pomocné kružnici „ k “ pohybuje rovnoměrně s konstantní úhlovou rychlostí $n = 2\pi/T$. Tato úhlová rychlost se v mechanice kosmického letu nazývá *střední pohyb*. Ten představuje vlastně úhlovou

rychlost myšleného kosmického tělesa, v obr. 3-12 označeného bodem Q^* , které by se pohybovalo rovnoměrně po kruhové dráze „k“ o poloměru $r = a$.



Obr. 3-11 Definiční obrázek k odvození Keplerovy rovnice.



Obr. 3-12 Relace mezi E a M , resp. mezi nerovnoměrným pohybem bodu Q a rovnoměrným pohybem bodu Q^* na pomocné kružnici k .

Hledejme nejprve velikost průvodiče definujícího polohu kosmického tělesa na eliptické dráze v závislosti na excentrické anomálii $r = f(E)$. Zavedeme souřadnicovou soustavu (x, y) s počátkem v ohnisku $0 \equiv F$ (obr. 3-11). Složky polohového vektoru r v závislosti na excentrické anomálii vyjádříme následovně

$$x(E) = a \cos E - ae = a(\cos E - e), \quad (3.102)$$

$$y(E) = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (3.103)$$

kde jsme ve druhém vztahu uplatnili výraz pro vedlejší poloosu b dle vztahu (3.62). Derivací výše uvedených rovnic obdržíme

$$\dot{x}(E) = -a\dot{E} \sin E, \quad (3.104)$$

$$\dot{y}(E) = b\dot{E} \cos E. \quad (3.105)$$

Složky téhož průvodiče r vyjádříme také v závislosti na pravé anomálii

$$x(\Theta) = r \cos \Theta, \quad (3.106)$$

$$y(\Theta) = r \sin \Theta. \quad (3.107)$$

Derivace těchto rovnic jsou následující

$$\dot{x}(\Theta) = -r\dot{\Theta} \sin \Theta + \dot{r} \cos \Theta, \quad (3.108)$$

$$\dot{y}(\Theta) = r\dot{\Theta} \cos \Theta + \dot{r} \sin \Theta. \quad (3.109)$$

Nyní sestavíme s cíleným záměrem dvě rovnice následující kombinací všech předchozích vztahů (3.102) až (3.109), [52]

$$x(\Theta)\dot{y}(\Theta) = x(E)\dot{y}(E),$$

$$y(\Theta)\dot{x}(\Theta) = y(E)\dot{x}(E).$$

Po dosazení příslušných výrazů do obou uvedených rovnic a roznásobení obou stran rovnic získáme mezivýsledek v následujícím tvaru

$$r^2\dot{\Theta} \cos^2 \Theta + r\dot{r} \sin \Theta \cos \Theta = ab\dot{E}(\cos^2 E - e \cos E),$$

$$-r^2\dot{\Theta} \sin^2 \Theta + r\dot{r} \sin \Theta \cos \Theta = -ab\dot{E} \sin^2 E.$$

Odečtením druhé rovnice od první získáme docela jednoduchý výraz

$$r^2\dot{\Theta} = ab\dot{E}(1 - e \cos E). \quad (3.110)$$

Levá strana rovnice představuje v souladu s rov. (3.30) specifický moment hybnosti h . Kombinací rov. (3.83) a (3.84) a s uvážením vztahu pro střední pohyb (úhlovou rychlost) $n = 2\pi/T$ lze specifický moment hybnosti vyjádřit vztahem

$$h = \frac{2\pi}{T} ab = nab. \quad (3.111)$$

Uvedený výraz dosadíme na levou stranu rovnice (3.110) a separací proměnných upravíme rovnici pro přímou integraci

$$ndt = (1 - e \cos E)dE.$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Levou stranu integrujeme v mezích od okamžiku průchodu kosmického těles pericentrem t_p po libovolný čas t . Pravou stranu integrujeme v mezích 0 až E . Po integraci obdržíme výsledek ve tvaru

$$n(t - t_p) = E - e \sin E. \quad (3.112)$$

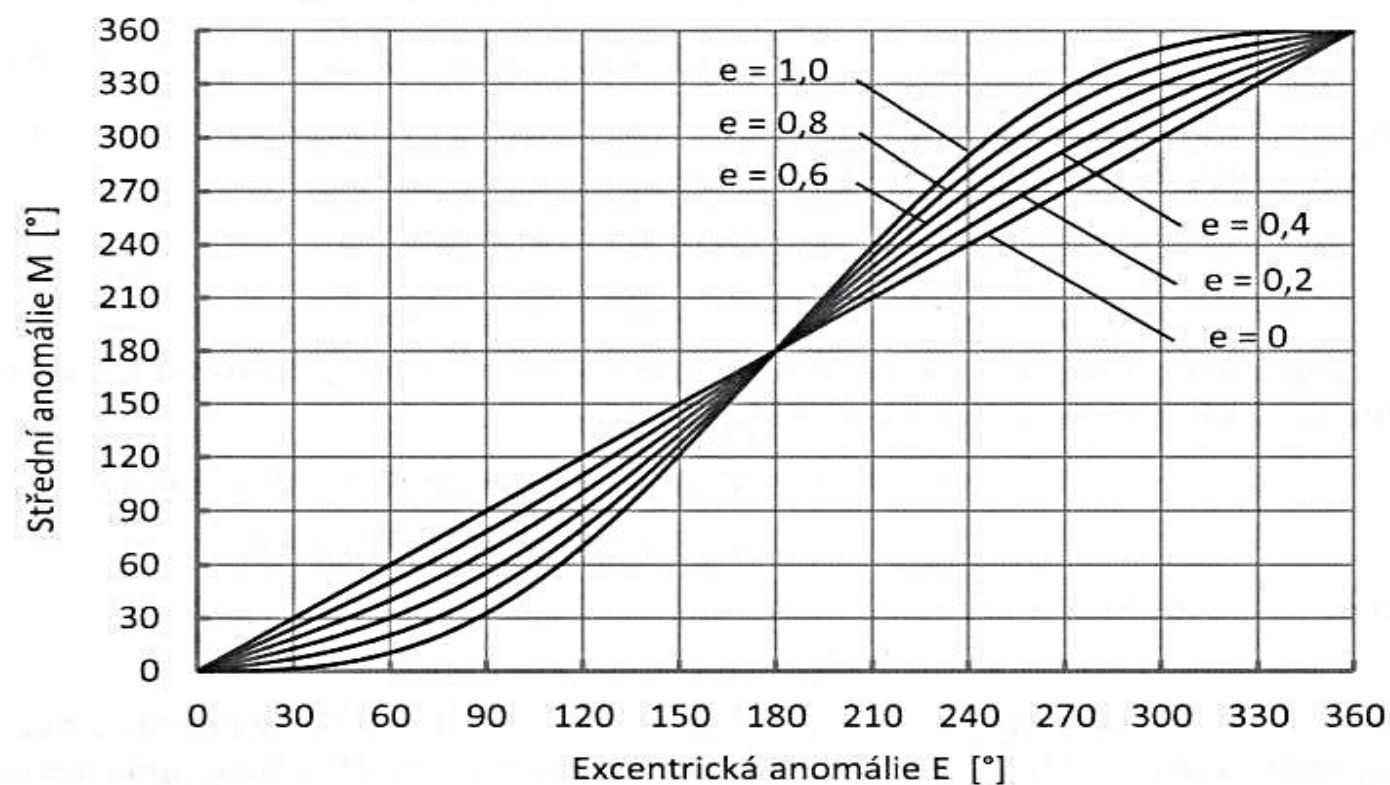
Levá strana uvedené rovnice představuje okamžitou hodnotu střední anomálie M , t úhel měřený od pericentra

$$M = n(t - t_p) = \frac{2\pi}{T} (t - t_p). \quad (3.113)$$

Nyní můžeme s využitím rovnice (3.113) zapsat konečnou podobu Keplerovy rovnice (3.112) ve standardním tvaru

$$M = E - e \sin E. \quad (3.114)$$

Z výše uvedených rovnic (3.113) a (3.114) je zřejmé, že Keplerova rovnice vyjadřují vztah mezi střední anomálií, resp. časem t a polohou kosmického tělesa, vyjádřeno excentrickou anomálií E . Z jejího tvaru vyplývá, že se jedná o transcendentní rovnici. Pro řešení excentrické anomálie E pro zadaný čas t musíme použít nějakou vhodnou numerickou metodu. Grafické vyjádření vzájemné relace mezi střední a excentrickou anomálií je uvedeno na obr. 3-13.



Obr. 3-13 Závislost střední anomálie na excentrické anomálii.

Pro řešení uvedené transcendentní rov. (3.114) se nejčastěji používá Newton-Raphsonova metoda, [56]. Řešení libovolné rovnice $f(x) = 0$ spočívá v použití rekurentního vzorce

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (3.115)$$

Podají-li se zvolit počáteční hodnotu x_0 relativně blízkou k řešení, pak tato metoda velmi rychle konverguje ke správnému řešení s předepsanou přesností.

V našem případě řešíme kořen rovnice $f(E) = 0$, kde funkce $f(E)$ pro i -tou aproximaci má tvar

$$f(E_i) = E_i - e \sin E_i - M \quad (3.116)$$

a její derivace je dána výrazem

$$f'(E_i) = 1 - e \cos E_i. \quad (3.117)$$

Nyní podle rov. (3.115) zapíšeme rekurentní vztah pro hledání hodnoty excentrické anomálie E_{i+1}

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} = E_i - \Delta E_i. \quad (3.118)$$

Uvedený rekurentní vztah řešíme v postupných krocích od vhodně zvolené počáteční hodnoty E_0 tak dlouho, dokud rozdíl posledních dvou hodnot je menší než zvolená tolerance. Za počáteční hodnotu excentrické anomálie lze zvolit například $E_0 = M$.

Pro urychlení numerického řešení Keplerovy rovnice se dle lit. [20] doporučuje volit počáteční hodnotu E_0 buď takto:

$$\text{a) pro případ, že } M < \pi, \quad E_0 = M + e/2, \quad (3.119)$$

$$\text{b) pro případ, že } M > \pi, \quad E_0 = M - e/2, \quad (3.120)$$

nebo na základě vztahu

$$E_0 = M + \frac{e \sin M}{\cos e - \left(\frac{\pi}{2} - e\right) \sin e + M \sin e}. \quad (3.121)$$

Praktická ukázka numerického řešení transcendentní Keplerovy rovnice je představena v níže uvedeném příkladu 3.4.

3.4.2 Vztah mezi modulem polohového vektoru a excentrickou anomálií

Dosadíme-li do modulu polohového vektoru za souřadnice x a y dle vztahů (3.102) a (3.103) obdržíme výraz

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 E},$$

který po jistých goniometrických úpravách vyjadřuje výsledný vztah mezi modulem polohového vektoru a excentrickou anomálií

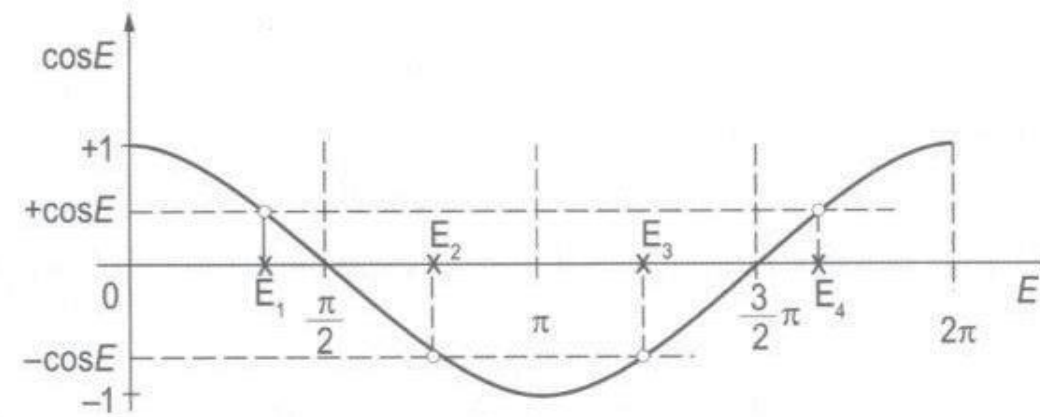
$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3.122)$$

3.4.3 Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií

Protože poloha kosmického tělesa na oběžné dráze je definována nejen průvodičem, ale také pravou anomálií, zbývá nám ještě doplnit funkční vztah $\Theta = f(E)$. K tomu nám

poslouží rovnice eliptické dráhy (3.48) a x-ové souřadnice polohy kosmického tělesa na oběžné dráze dle rov. (3.106) a (3.102). Z rovnosti x-ových souřadnic plyne

$$r \cos \Theta = a(\cos E - e).$$

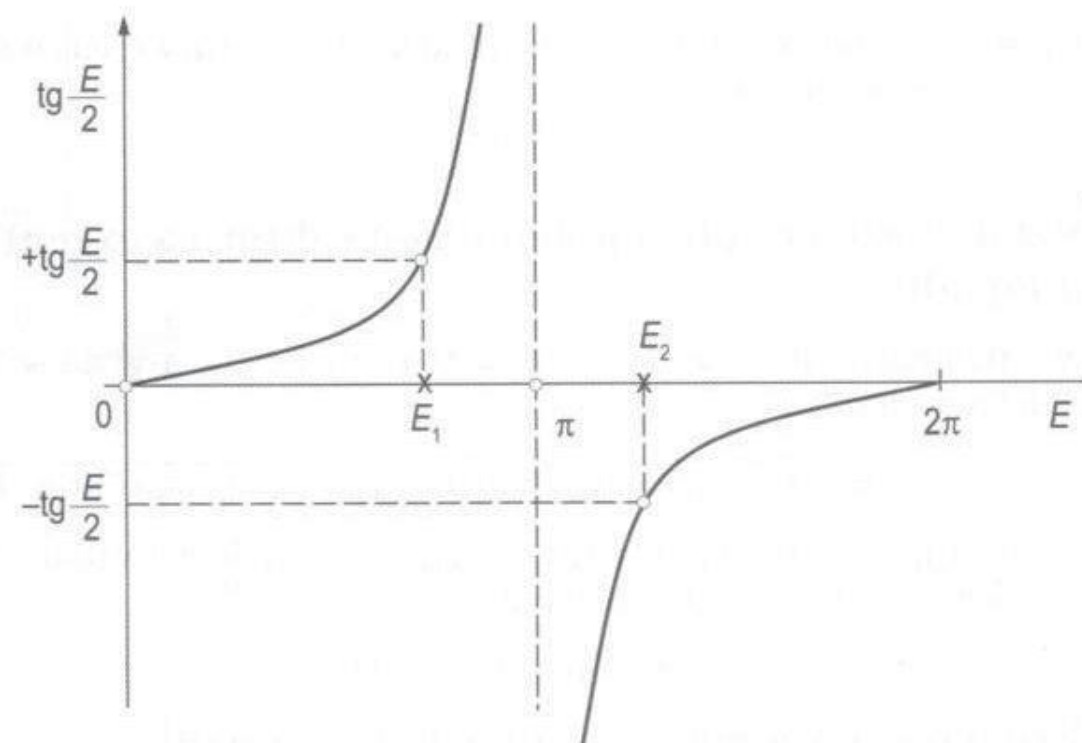


Obr. 3-14 Při použití funkce kosinus úhlu E se objevuje nejednoznačnost řešení. Pro jednu hodnotu $\cos E$ existují dvě hodnoty úhlu E .

Po dosazení za r dle rovnice eliptické dráhy (3.48) a úpravě dostáváme již relaci mezi pravou a excentrickou anomálií

$$\cos E = \frac{e + \cos \Theta}{1 + e \cos \Theta}. \quad (3.123)$$

Bližším rozborem však snadno zjistíme, že tato vazba je nejednoznačná, neboť funkce $\cos E$ nabývá stejné hodnoty pro dva různé argumenty E (obr. 3-14). Proto použijeme vazbu platnou pro tangenty polovičních úhlů, čímž se nejednoznačnosti vyhneme (obr. 3-15).



Obr. 3-15 Použitím funkce tangens polovičního úhlu E je nejednoznačnost vyloučena

Z goniometrie známe obecný vztah pro tangentu polovičního úhlu. V našem případě pro $(E/2)$ můžeme psát

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}}. \quad (3.124)$$

Do uvedeného vztahu dosadíme výraz pro $\cos E$ dle rov. (3.123). Úpravami, které spočívají nejprve v převedení čitatele i jmenovatele pod odmocninou na tvar

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 + e \cos \Theta - (e + \cos \Theta)}{1 + e \cos \Theta + (e + \cos \Theta)}},$$

získáme po dalších úpravách následující vztah

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \sqrt{\frac{1 - \cos \Theta}{1 + \cos \Theta}}.$$

Jelikož v pořadí druhá odmocnina v tomto vztahu je dle stejného pravidla opět výraz pro tangentu polovičního úhlu, tentokrát $\operatorname{tg}(\Theta/2)$, bude výsledná vazba mezi polovičními hodnotami pravé anomálie a excentrické anomálie dána vztahem

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}. \quad (3.125)$$

Respektive opačné řešení je dáno výrazem

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (3.126)$$

Nyní máme k dispozici veškeré potřebné vztahy k nalezení vazby mezi střední anomálií, resp. časem a pravou anomálií.

Vrátíme-li se ke Keplerově rovnici (3.114), můžeme nalézt vztah pro přímý výpočet střední anomálie v závislosti na pravé anomálii. K tomu použijeme relaci $\sin^2 E + \cos^2 E = 1$, do níž dosadíme výraz (3.123) pro $\cos E$. Odtud nalezneme výraz pro $\sin E$ ve tvaru

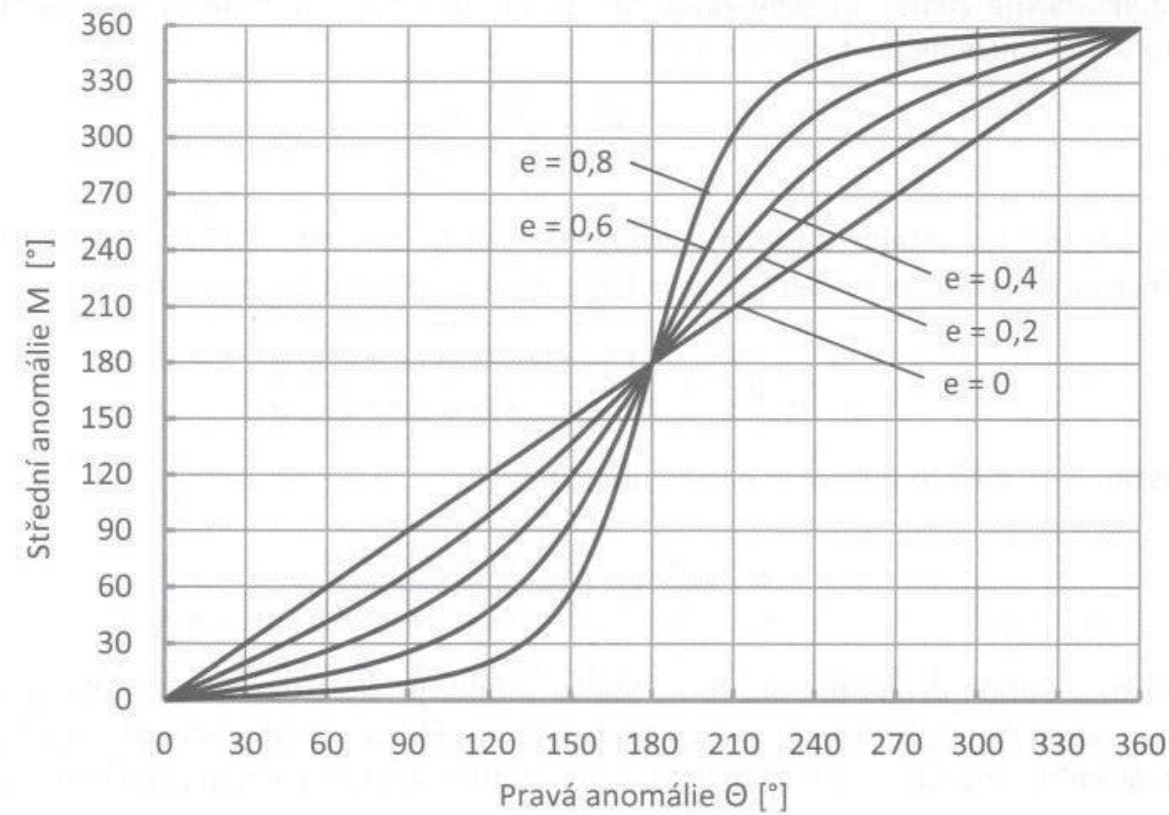
$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta}. \quad (3.127)$$

Dosazením do Keplerovy rovnice (3.114) za úhel E , který určíme z rov. (3.125) a za $\sin E$ dle rov. (3.127) obdržíme modifikovanou Keplerovu rovnici vyjadřující přímý funkční vztah mezi M a Θ ve tvaru

$$M = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right) - e \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta}. \quad (3.128)$$

Grafické znázornění této funkční závislosti střední anomálie M na pravé anomálii Θ je uvedeno na obr. 3-16.

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP



Obr. 3-16 Graf funkční závislosti střední anomálie na pravé anomálii.

Poznámka: Nutno podotknout, že Keplerovu rovnici je možno odvodit i jiným postupem než byl zde uveden. Je možno vycházet z rov. (3.30). Její přímou integrací s využitím rovnice dráhy (3.44) a vazeb mezi pravou anomálií a excentrickou anomálií (3.125) můžeme dospět ke Keplerově rovnici v základním tvaru (3.114), resp. (3.128).

Příklad 3.3

Zadání:

Stanovte dobu letu t kosmického tělesa po eliptické oběžné dráze kolem Země, která uplynula od okamžiku průletu perigeem t_p do aktuální polohy kosmického tělesa definované pravou anomálií Θ .

Potřebná data:

Vzdálenost perigea	$r_p = 6800$ [km],
Délka hlavní poloosy	$a = 10625$ [km],
Pravá anomálie	$\Theta = 140$ [°],
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600$ [km ³ s ⁻²],
Čas průletu perigeem	$t_p = 1^{\circ}36' = 5760$ [s].

Řešení:

a) Výpočet excentricity elipsy dle rov. (3.53)

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{6800}{10625} = 0,36 \text{ [1]}.$$

b) Výpočet momentu hybnosti dle rov. (3.85)

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} = \sqrt{398600(10625)(1 - 0,36^2)} = 60714,52 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{]}.$$

c) Výpočet periody dle rov. (3.86)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{10625^3}{398600}} = 10899,45 \text{ [s]} = 3,0276 \text{ [hod]}.$$

d) Výpočet excentrické anomálie dle rov. (3.125)

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,36}{1 + 0,36}} \operatorname{tg} \left(\frac{140}{2} \right) = 1,884754,$$

$$E = 2 \operatorname{arctg}(1,884754) = 2,165981 \text{ [rad]} = 124,102 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

e) Výpočet střední anomálie z Keplerovy rovnice (3.114)

$$M = E - e \sin E = 2,165981 - 0,36 \sin(124,102),$$

$$M = 1,867886 \text{ [rad]} = 107,022 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

f) Výpočet středního pohybu

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10899,45} = 5,76468 \cdot 10^{-4} \text{ [s}^{-1}\text{]} = 2,0753 \text{ [hod}^{-1}\text{]}.$$

g) Konečně dobu letu mezi perigeem a okamžitou polohou stanovíme pomocí rov. (3.113), kterou si upravíme na tvar

$$t = \frac{M}{n} + t_p = \frac{1,867886}{5,76468 \cdot 10^{-4}} + 5760 = 9000,2 \text{ [s]} = 2,5 \text{ [hod]}.$$

Kosmické těleso na dané eliptické oběžné dráze doletí do polohy definované pomocí pravé anomálie za čas $t = 2,5 \text{ [hod]}$.

Příklad 3.4

Zadání:

Stanovte polohu kosmického tělesa pohybujícího se po eliptické oběžné dráze kolem Země pomocí pravé anomálie θ v době, která uplynula od průletu perigeem. Čas průletu perigeem zvolte $t_p = 0$. Požadovaná přesnost iteračního numerického řešení $|\Delta E_i| < 10^{-8}$.

Potřebná data:

Vzdálenost apogea	$r_A = 14450 \text{ [km]}$,
Excentricita	$e = 0,25 \text{ [1]}$,
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}$,
Doba letu od perigea	$t = 72 \text{ [min]} = 1,2 \text{ [hod]}$.

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Řešení:

- a) Výpočet délky hlavní poloosy elipsy dle rov. (3.52)

$$a = \frac{r_A}{1+e} = \frac{14450}{1+0,25} = 11560 \text{ [km]}.$$

- b) Výpočet momentu hybnosti dle rov. (3.85)

$$h = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = \sqrt{398600(11560)(1-0,25^2)} = 65725,39 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{]}.$$

- c) Výpočet periody dle rov. (3.86)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{11560^3}{398600}} = 12369,38 \text{ [s]} = 3,4359 \text{ [hod]}.$$

- d) Výpočet středního pohybu

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12369,38} = 5,07963 \cdot 10^{-4} \text{ [s}^{-1}\text{]} = 1,828667 \text{ [hod}^{-1}\text{]}.$$

- e) Výpočet střední anomálie dle rov. (3.113).

$$M = n(t - t_p) = 1,828667(1,2) = 2,194399 \text{ [rad]}.$$

- f) Výpočet excentrické anomálie dle rov. (3.114)

$$M = E - e \sin E$$

je nutno provést numericky. Výpočet pokračuje v následujících krocích.

- g) Stanovení počáteční hodnoty excentrické anomálie E_0 .

Vzhledem k tomu, že hodnota střední anomálie $M < \pi$ začínáme aproximaci počáteční hodnoty definované rov. (3.119). Ve výpočtech jsou úhly brány v radiánech!

$$E_0 = M + \frac{e}{2} = 2,194399 + \frac{0,25}{2} = 2,319399 \text{ [rad]}.$$

- h) Numerické řešení transcendentní Keplerovy rovnice provedeno Newton-Raphsonovou metodou dle rov. (3.118)

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} = E_i - \Delta E_i.$$

1. krok řešení:

Funkční hodnota $f(E_0)$ dle rov. (3.116)

$$f(E_0) = E_0 - e \sin E_0 - M = 2,319399 - 0,25 \sin 2,319399 - 2,194399,$$

$$f(E_0) = -5,81601 \cdot 10^{-2}.$$

Hodnota derivace dle rov. (3.117)

$$f'(E_0) = 1 - e \cos E_0 = 1 - 0,25 \cos 2,319399 = 1,170154.$$

Odchylka ΔE_0

$$\Delta E_0 = \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} = \frac{-5,81601 \cdot 10^{-2}}{1,170154} = -4,970300 \cdot 10^{-2}.$$

Absolutní hodnota odchylky $|\Delta E_0|$ po prvním kroku je samozřejmě větší jak požadovaná přesnost $|\Delta E_0| > 10^{-8}$, proto pokračujeme druhým krokem.

2. krok řešení

$$E_1 = E_0 - \Delta E_0 = 2,319399 - (-4,970300 \cdot 10^{-2}) = 2,369102 \text{ [rad]},$$

$$f(E_1) = E_1 - e \sin E_1 - M = 2,369102 - 0,25 \sin 2,369102 - 2,194399,$$

$$f(E_1) = 2,227101 \cdot 10^{-4},$$

$$f'(E_1) = 1 - e \cos E_1 = 1 - 0,25 \cos 2,369102 = 1,179044,$$

$$\Delta E_1 = \frac{f(E_1)}{f'(E_1)} = \frac{2,227101 \cdot 10^{-4}}{1,179044} = 1,888905 \cdot 10^{-4}.$$

Absolutní hodnota odchylky $|\Delta E_1|$ po druhém kroku je stále větší než požadovaná přesnost $|\Delta E_1| > 10^{-8}$, proto pokračujeme třetím krokem.

3. krok řešení

$$E_2 = E_1 - \Delta E_1 = 2,369102 - 1,888905 \cdot 10^{-4} = 2,368913 \text{ [rad]},$$

$$f(E_2) = E_2 - e \sin E_2 - M = 2,368913 - 0,25 \sin 2,368913 - 2,194399,$$

$$f(E_2) = 3,11288 \cdot 10^{-9},$$

$$f'(E_2) = 1 - e \cos E_2 = 1 - 0,25 \cos 2,368913 = 1,179011,$$

$$\Delta E_2 = \frac{f(E_2)}{f'(E_2)} = \frac{3,11288 \cdot 10^{-9}}{1,179011} = 2,64025 \cdot 10^{-9}.$$

Jak vidíme absolutní hodnota odchylky $|\Delta E_2|$ po třetím kroku je již menší než požadovaná přesnost $|\Delta E_2| < 10^{-8}$, proto můžeme v tomto kroku stanovenou hodnotu excentrické anomálie považovat za dostatečně přesné řešení Keplerovy rovnice

$$E \equiv E_2 = 2,368913 \text{ [rad]} = 135,7287 \text{ [°]}.$$

i) Výpočet skutečné anomálie Θ

Pomocí výše stanovené hodnoty excentrické anomálie E můžeme konečně vypočítat skutečnou anomálii Θ dle rov. (3.126)

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+0,25}{1-0,25}} \operatorname{tg} \left(\frac{135,7287}{2} \right) = 3,173670,$$

$$\Theta = 2 \operatorname{arctg} 3,173670 = 145,02 \text{ [°]}.$$

Kosmické těleso se během 72 minut přemístilo z perigea eliptické dráhy do polohy, definované pravou anomálií $\Theta = 145 \text{ [°]}$.

3.5 Poloha a rychlost kosmického tělesa v rovině oběžné dráhy

3.5.1 Perifokální souřadnicová soustava

Polohový vektor a vektor rychlosti pohybu kosmického tělesa na oběžné dráze odvodíme v tzv. perifokální souřadnicové soustavě (x, y, z) s počátkem v ohnisku. Osa x leží na přímce apsid a její kladný smysl směřuje od ohniska k pericentru. Osa y je totožná s parametrem p . Jak je nám již známo, poloha kosmického tělesa na oběžné

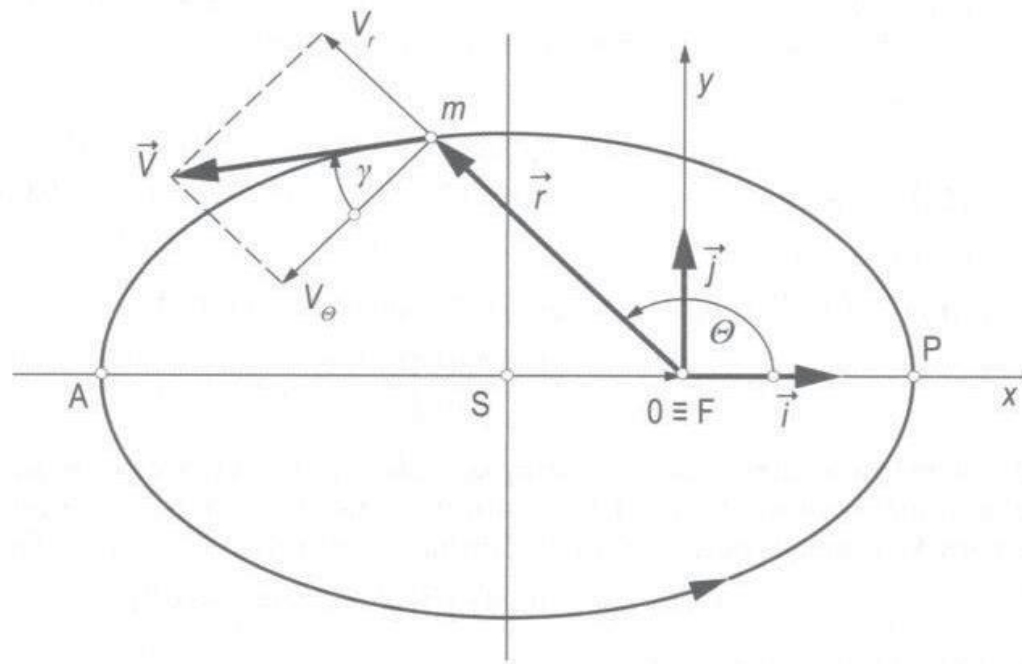
3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

dráze je dána polohovým vektorem \vec{r} , který má v perifokální souřadnicové soustavě dvě složky, ($z = 0$)

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y. \quad (3.129)$$

Vektor rychlosti \vec{V} pohybujícího se kosmického tělesa po eliptické dráze je v každé okamžiku tečný k dráze. V perifokální souřadnicové soustavě (x, y) má rovněž dvě složky

$$\vec{V} \equiv \vec{r}' = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y}. \quad (3.130)$$



Obr. 3-17 Definice složek výsledného vektoru rychlosti \vec{V} a sklonu dráhy letu γ .

Jak znázorněno na obr. 3-17, vektor rychlosti \vec{V} rozkládáme na vektor radiální rychlosti \vec{V}_r ve směru polohového vektoru a na vektor transverzální rychlosti \vec{V}_θ , který je kolmý na polohový vektor.

Definujme jednotkové vektory radiálních a transverzálních složek pomocí jednotkových vektorů ve směru os perifokální souřadnicové soustavy dle obr. 3-18

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta, \quad (3.131)$$

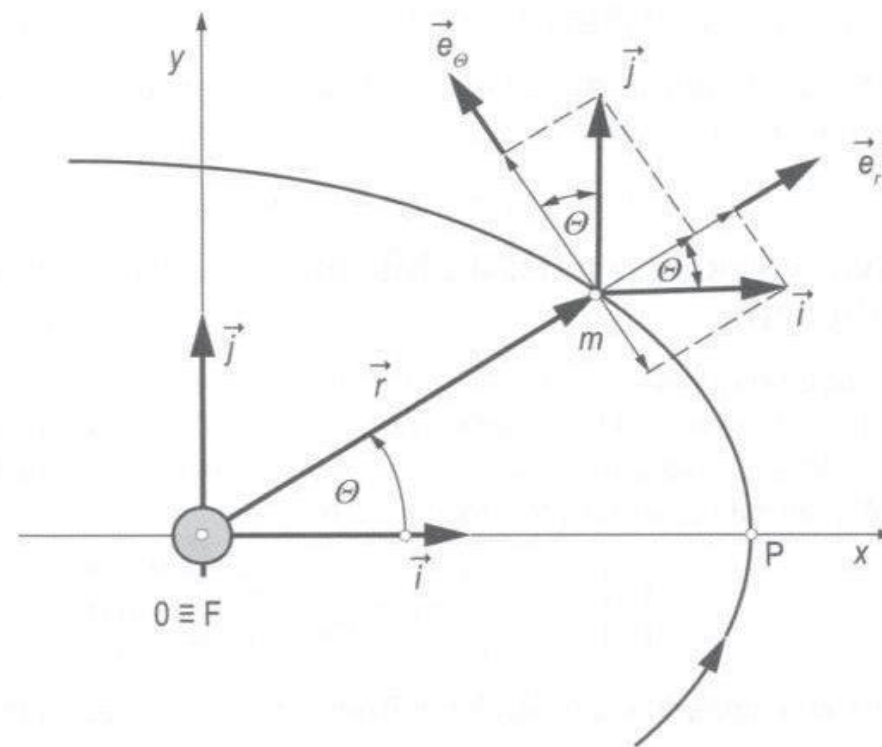
$$\vec{e}_\theta = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta. \quad (3.132)$$

Pomocí jednotkových vektorů vyjádříme jak polohový vektor, tak vektory radiální a transverzální rychlosti

$$\vec{r} = r\vec{e}_r = r(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta), \quad (3.133)$$

$$\vec{V}_r = V_r\vec{e}_r = V_r(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta), \quad (3.134)$$

$$\vec{V}_\theta = V_\theta\vec{e}_\theta = V_\theta(-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta). \quad (3.135)$$



Obr. 3-18 Definice jednotkových vektorů.

V rovnici (3.135) je transversální rychlost vyjádřena jako součin modulu polohového vektoru a úhlové rychlosti $V_\theta = r\dot{\theta}$. S využitím rov. (3.134) a (3.135) sestavíme výsledný vektor rychlosti jako vektorový součet radiální a transversální rychlosti

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta = \dot{r}(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) + r\dot{\theta}(-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta). \quad (3.136)$$

V dalším kroku nalezneme výrazy pro oba moduly v rovnici (3.136) v závislosti na geometrii eliptické dráhy a gravitačním parametru.

Vztah pro specifický moment hybnosti (3.30) přepíšeme do tvaru $r\dot{\theta} = h/r$. Za konstantu ploch h dosadíme dle dříve odvozeného výrazu (3.38) $h = \sqrt{\mu p}$ a za r dosadíme rovnici dráhy dle vztahu (3.45). Po dosazení a úpravě obdržíme pro hledaný modul výraz

$$V_\theta = r\dot{\theta} = \sqrt{\mu/p} (1 + e \cos \theta). \quad (3.137)$$

Druhý modul \dot{r} nalezneme přímou derivací rovnice dráhy (3.45) a s použitím vztahu (3.137) $\dot{\theta} = V_\theta/r$ obdržíme

$$\dot{r} = \frac{-pe(-\sin \theta)\dot{\theta}}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{V_\theta}{r}.$$

Po dosazení za V_θ dle rov. (3.137) a za r dle rovnice dráhy (3.45) obdržíme po malé úpravě výsledný vztah pro modul radiální rychlosti

$$V_r = \dot{r} = \sqrt{\mu/p} e \sin \theta. \quad (3.138)$$

Odvozené výrazy pro modul radiální i transversální rychlosti dosadíme do rov. (3.136) pro výsledný vektor rychlosti

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$\vec{V} = \sqrt{\mu/p} [e \sin \Theta (\vec{i} \cos \Theta + \vec{j} \sin \Theta) + (1 + e \cos \Theta)(-\vec{i} \sin \Theta + \vec{j} \cos \Theta)].$$

Po roznásobení a setřídění členů vzhledem k jednotkovým vektorům obdržíme konečný výraz pro vektor výsledné rychlosti

$$\vec{V} = \sqrt{\mu/p} [-\vec{i} \sin \Theta + \vec{j}(e + \cos \Theta)]. \quad (3.139)$$

3.5.2 Stavový vektor v perifokální souřadnicové soustavě. Sklon dráhy letu

Výsledky pro polohový vektor i pro vektor rychlosti můžeme zapsat ve formě stavových vektorů. Úplný stavový vektor představuje šest prvků vytvořených ze souřadnic polohového vektoru a vektoru rychlosti. *Polohový vektor* s využitím vztahů (3.106) (3.107) a (3.45) lze zapsat v maticové formě takto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \Theta \\ r \sin \Theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{p}{1 + e \cos \Theta} \begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.140)$$

A vektor rychlosti v souladu s rov. (4.139) můžeme zapsat rovněž v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \sqrt{\mu/p} \begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ e + \cos \Theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

S využitím obr. 3-17 můžeme definovat další důležitý pojem a to *sklon dráhy letu* γ , což je úhel mezi výsledným vektorem rychlosti a transverzální rychlostí, která leží v místě horizontální rovině. Sklon dráhy letu lze vyjádřit pomocí poměru radiální a transverzální rychlosti

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{V_r}{V_\Theta} = \frac{V \sin \gamma}{V \cos \gamma}, \quad (3.142)$$

odkud po dosazení dle rov. (3.138) a (3.137) vyjádříme výraz pro sklon dráhy letu ve tvaru

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{e \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta} \right). \quad (3.143)$$

Výše uvedené vztahy platí samozřejmě pro jakoukoliv kuželosečku. Podívejme se však zvlášť na speciální případ, na parabolickou dráhu. Pro parabolu platí $e = 1$.

Uvážením této skutečnosti a použitím rov. (3.143) získáme nejprve výraz pro tangentu sklonu dráhy letu ve tvaru

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \Theta}{1 + \cos \Theta}.$$

Z goniometrických vazeb lze nalézt výrazy pro poloviční úhly pravé anomálie

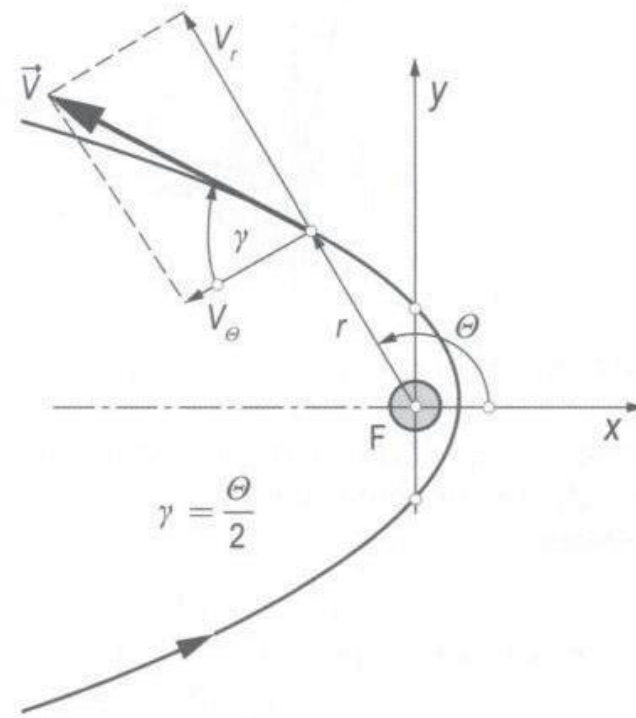
$$\begin{aligned} \sin \Theta &= 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}, \\ \cos \Theta &= \cos^2 \frac{\Theta}{2} - \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \cos^2 \frac{\Theta}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} - 1. \end{aligned}$$

Po dosazení do výrazu pro tangentu sklonu dráhy letu obdržíme

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Odkud vyplývá jednoduchá relace mezi sklonem dráhy letu a pravou anomálií pro parabolickou dráhu

$$\gamma = \frac{\theta}{2}. \quad (3.144)$$



Obr. 3-19 Složky výsledného vektoru rychlosti a sklon dráhy letu pro parabolou.

A stavové vektory pro parabolickou dráhu v perifokální souřadnicové soustavě nabudou dle rov. (3.140) a (3.141) tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{p}{1 + \cos \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.145)$$

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \sqrt{\mu/p} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 1 + \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

3.5.3 Výpočet polohy a rychlosti z počátečních podmínek

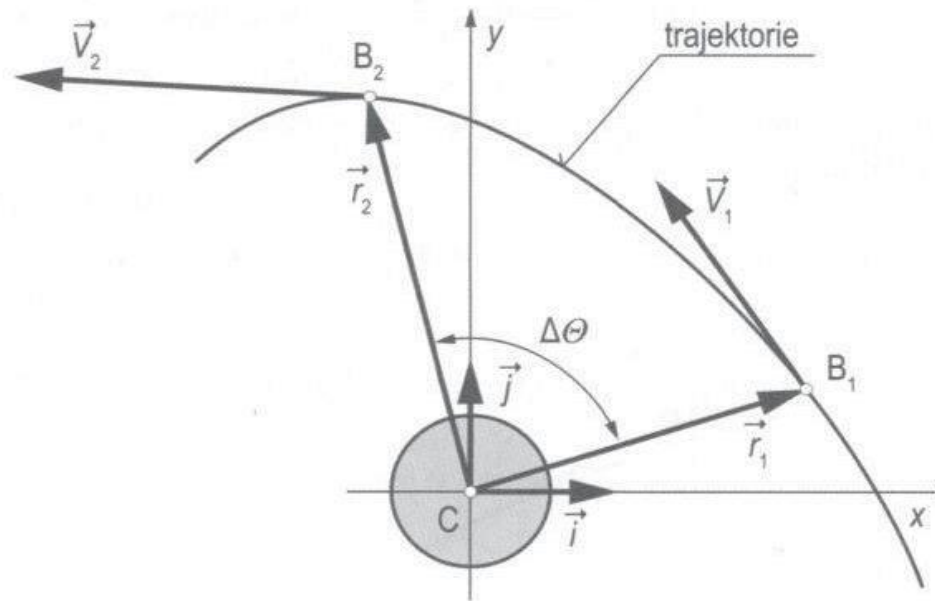
Známe-li počáteční polohu $r(\theta_1) = r_1$ a rychlost kosmického tělesa $V(\theta_1) = V_1$ v souladu s rov. (3.129) a (3.130) na libovolné oběžné dráze

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, \quad (3.147)$$

$$\vec{V}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{y}_1 \vec{j}, \quad (3.148)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

můžeme z těchto počátečních hodnot stanovit polohu r_2 a rychlost kosmického tělesa V_2 v jiném okamžiku, který je dán polohou $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$ (obr. 3-20).



Obr. 3-20 Počáteční a nová poloha a rychlost kosmického tělesa.

Vydeme ze skutečnosti, že specifický moment hybnosti h je na dané oběžné dráze každém okamžiku konstantní. Hodnotu specifického momentu hybnosti stanovíme počáteční podmínky takto

$$\vec{h} = \vec{r}_1 \times \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & 0 \end{vmatrix} = (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) \vec{k}. \quad (3.1)$$

Jak vyplývá z rov. (3.149), vektor specifického momentu hybnosti má jen jednu složku ve směru jednotkového vektoru \vec{k} , takže tato složka je přímo modulem vektoru specifického momentu hybnosti

$$h = (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1). \quad (3.1)$$

V dalším kroku následuje vyjádření jednotkových vektorů v libovolně zvolené souřadnicové soustavě pomocí počátečních hodnot polohového vektoru \vec{r}_1 , vektoru rychlosti \vec{V}_1 a modulu specifického momentu hybnosti h .

Nejprve si z rov. (3.147) vyjádříme jednotkový vektor \vec{i}

$$\vec{i} = \frac{\vec{r}_1}{x_1} - \frac{y_1}{x_1} \vec{j}. \quad (3.1)$$

Uvedený výraz (3.151) dosadíme do vztahu (3.148) pro počáteční vektor rychlosti \vec{V}_1

$$\vec{V}_1 = \dot{x}_1 \left(\frac{\vec{r}_1}{x_1} - \frac{y_1}{x_1} \vec{j} \right) + \dot{y}_1 \vec{j} = \frac{\dot{x}_1}{x_1} \vec{r}_1 + \left(\dot{y}_1 - \frac{\dot{x}_1}{x_1} y_1 \right) \vec{j} = \frac{\dot{x}_1}{x_1} \vec{r}_1 + \frac{x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1}{x_1} \vec{j}$$

Čitatel v posledním členu této rovnice představuje dle rov. (3.150) modul specifického momentu hybnosti h . Z takto upravené rovnice nalezneme výsledný výraz pro jednotkový vektor \vec{j} ve tvaru

$$\vec{j} = \frac{x_1}{h} \vec{V}_1 - \frac{\dot{x}_1}{h} \vec{r}_1. \quad (3.152)$$

Dosazením tohoto jednotkového vektoru do rovnice (3.151) upravíme výraz pro jednotkový vektor \vec{i} na tvar

$$\vec{i} = \frac{\vec{r}_1}{x_1} - \frac{y_1}{x_1} \left(\frac{x_1}{h} \vec{V}_1 - \frac{\dot{x}_1}{h} \vec{r}_1 \right) = -\frac{y_1}{h} \vec{V}_1 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{y_1 \dot{x}_1}{h x_1} \right) \vec{r}_1 = -\frac{y_1}{h} \vec{V}_1 + \frac{h + y_1 \dot{x}_1}{h x_1} \vec{r}_1.$$

Po dosazení za modul h v čitateli posledního členu dle rov. (3.150) upravíme výraz pro jednotkový vektor na konečný tvar

$$\vec{i} = -\frac{y_1}{h} \vec{V}_1 + \frac{\dot{y}_1}{h} \vec{r}_1. \quad (3.153)$$

Oba odvozené konečné výrazy pro jednotkové vektory (3.153) a (3.152) dosadíme do vztahů pro hledaný polohový vektor \vec{r}_2 dle rov. (3.129) a vektor rychlosti \vec{V}_2 dle rov. (3.130)

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j},$$

$$\vec{V}_2 = \dot{x}_2 \vec{i} + \dot{y}_2 \vec{j}.$$

Po dosazení a úpravě uvedených vztahů vzhledem k počátečním vektorům polohy \vec{r}_1 a rychlosti \vec{V}_1 obdržíme

$$\vec{r}_2 = x_2 \left(-\frac{y_1}{h} \vec{V}_1 + \frac{\dot{y}_1}{h} \vec{r}_1 \right) + y_2 \left(\frac{x_1}{h} \vec{V}_1 - \frac{\dot{x}_1}{h} \vec{r}_1 \right) = \frac{x_2 \dot{y}_1 - y_2 \dot{x}_1}{h} \vec{r}_1 + \frac{-x_2 y_1 + y_2 x_1}{h} \vec{V}_1,$$

$$\vec{V}_2 = \dot{x}_2 \left(-\frac{y_1}{h} \vec{V}_1 + \frac{\dot{y}_1}{h} \vec{r}_1 \right) + \dot{y}_2 \left(\frac{x_1}{h} \vec{V}_1 - \frac{\dot{x}_1}{h} \vec{r}_1 \right) = \frac{\dot{x}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \dot{x}_1}{h} \vec{r}_1 + \frac{-\dot{x}_2 y_1 + \dot{y}_2 x_1}{h} \vec{V}_1.$$

Obě uvedené rovnice přepíšeme do jednodušších výrazů

$$\vec{r}_2 = f \vec{r}_1 + g \vec{V}_1, \quad (3.154)$$

$$\vec{V}_2 = \dot{f} \vec{r}_1 + \dot{g} \vec{V}_1, \quad (3.155)$$

kde koeficienty f , g a jejich derivace \dot{f} , \dot{g} představují tzv. Lagrangeovy koeficienty ve tvaru

$$f = \frac{x_2 \dot{y}_1 - y_2 \dot{x}_1}{h}, \quad (3.156)$$

$$g = \frac{-x_2 y_1 + y_2 x_1}{h}, \quad (3.157)$$

$$\dot{f} = \frac{\dot{x}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \dot{x}_1}{h}, \quad (3.158)$$

$$\dot{g} = \frac{-\dot{x}_2 y_1 + \dot{y}_2 x_1}{h}. \quad (3.159)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Z uvedených vztahů (3.154) a (3.155) je patrné, že polohový vektor i vektor rychlosti dán lineární kombinací počátečních vektorů polohy a rychlosti.

Pro další řešení je třeba vyjádřit Lagrangeovy koeficienty v závislosti na pravé anomálii respektive na rozdílu pravé anomálie mezi hledanou a počáteční polohou kosmického tělesa. K tomu využijeme vztahy odvozené v předchozí podkapitole. Složky počátečního polohového vektoru ve zvolené souřadnicové soustavě zapíšeme dle rov. (3.140)

$$x_1 = r_1 \cos \Theta_1, \quad (3.160)$$

$$y_1 = r_1 \sin \Theta_1. \quad (3.161)$$

A složky počátečního vektoru rychlosti ve směrech příslušných jednotkových vektorů v dané souřadnicové soustavě převezmeme z rovnice (3.141) pro výsledný vektor rychlosti, odkud složky počáteční rychlosti jsou dány vztahy

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{\mu/p} \sin \Theta_1, \quad (3.162)$$

$$\dot{y}_1 = \sqrt{\mu/p} (e + \cos \Theta_1). \quad (3.163)$$

Pro složky hledaného polohového vektoru (x_2, y_2) a složky hledaného vektoru rychlosti (\dot{x}_2, \dot{y}_2) budeme používat stejné vztahy (3.160) až (3.163) s tím, že budeme v tom případě používat index „2“.

Připomeňme, že parametr p je svázán s modulem specifického momentu hybnosti h dle rov. (3.38), odkud plyne vztah $h = \sqrt{p\mu}$. Nyní již můžeme přikročit k sestavování výrazů pro jednotlivé Lagrangeovy koeficienty.

Koeficient f nalezneme dle vztahu (3.156), kde použijeme odpovídající, výše zmíněné složky polohového vektoru a složky vektoru rychlosti

$$f = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} \left[(r_2 \cos \Theta_2) \sqrt{\mu/p} (e + \cos \Theta_1) - (r_2 \sin \Theta_2) (-\sqrt{\mu/p} \sin \Theta_1) \right],$$

$$f = \frac{r_2}{p} [e \cos \Theta_2 + (\cos \Theta_2 \cos \Theta_1 + \sin \Theta_2 \sin \Theta_1)]. \quad (3.164)$$

Z goniometrických funkcí vyplývá, že $(\cos \Theta_2 \cos \Theta_1 + \sin \Theta_2 \sin \Theta_1) = \cos(\Theta_2 - \Theta_1)$. Z obr. (3-20) je zřejmé, že $\Theta_2 - \Theta_1 = \Delta\theta$ definuje vzájemnou hledanou polohu v počáteční poloze. Takže výraz pro Lagrangeův koeficient f můžeme přepsat do tvaru

$$f = \frac{r_2}{p} (e \cos \Theta_2 + \cos \Delta\theta). \quad (3.165)$$

Z rov. (3.45) pro dráhu

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \Theta_2}$$

stanovíme výraz pro

$$e \cos \Theta_2 = \frac{p}{r_2} - 1. \quad (3.166)$$

Po dosazení do vztahu (3.165) a úpravě obdržíme výraz pro součinitel f ve tvaru

$$f = 1 - \frac{r_2}{p}(1 - \cos \Delta\theta). \quad (3.167)$$

Pro výpočet Lagrangeova součinitele f ještě zbývá určit vztah pro modul polohového vektoru r_2 , který vystupuje v rovnici (3.167).

Modul hledaného polohového vektoru sestavíme opět pomocí rovnice dráhy (3.45) s využitím relace mezi pravými anomáliemi $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_2} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta_1 + \Delta\theta)}.$$

Do uvedeného vztahu dosadíme dle známých goniometrických vazeb vztah

$$\cos(\theta_1 + \Delta\theta) = \cos \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_1 \sin \Delta\theta$$

a po nepatrné úpravě přepíšeme výraz pro modul hledaného polohového vektoru do tvaru

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_1 \cos \Delta\theta - e \sin \theta_1 \sin \Delta\theta}.$$

V následujícím kroku vyloučíme pravou anomálii určující počáteční polohový vektor θ_1 . K tomu použijeme rov. (3.166), kterou zapíšeme pro počáteční podmínky (index 1)

$$e \cos \theta_1 = \frac{p}{r_1} - 1. \quad (3.168)$$

Z rovnice (3.138) pro radiální rychlost kosmického tělesa V_r , kterou zapíšeme pro počáteční podmínky (index 1)

$$V_{r1} = \sqrt{\mu/p} e \sin \theta_1, \quad (3.169)$$

nalezneme výraz pro

$$e \sin \theta_1 = V_{r1} \sqrt{p/\mu}. \quad (3.170)$$

Po dosazení obou výrazů (3.168) a (3.170) obdržíme konečný vztah pro modul hledaného polohového vektoru

$$r_2 = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cos \Delta\theta - V_{r1} \sqrt{p/\mu} \sin \Delta\theta}. \quad (3.171)$$

Stanovení koeficientu g provedeme dle rovnice (3.157), kam dosadíme za souřadnice (x_1, y_1) přímo dle rov. (3.160) a (3.161). Pro stanovení souřadnic (x_2, y_2) použijeme stejných vztahů, avšak s indexem „2“

$$g = \frac{-x_2 y_1 + y_2 x_1}{h} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} [(-r_2 \cos \theta_2) r_1 \sin \theta_1 + (r_2 \sin \theta_2) r_1 \cos \theta_1],$$

$$g = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{p\mu}} (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1) = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{p\mu}} \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

$$g = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{p\mu}} \sin \Delta\theta. \quad (3.172)$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

Koeficient \dot{g} odvodíme podobným postupem. Vztahy pro souřadnice x_1, y_1 opět použijeme dle rovnic (3.160), (3.161) a vztahy pro složky rychlosti \dot{x}_2, \dot{y}_2 stanovíme dle rovnic (3.162) a (3.163) pro index „2“. Dosadíme do výrazu (3.159) pro derivaci koeficientu \dot{g}

$$\dot{g} = \frac{-\dot{x}_2 y_1 + \dot{y}_2 x_1}{h} = \frac{1}{\sqrt{p\mu}} \left[-(-\sqrt{\mu/p} \sin \Theta_2) r_1 \sin \Theta_1 + \sqrt{\mu/p} (e + \cos \Theta_2) r_1 \cos \Theta_1 \right],$$

$$\dot{g} = \frac{r_1}{p} [e \cos \Theta_1 + (\sin \Theta_2 \sin \Theta_1 + \cos \Theta_2 \cos \Theta_1)].$$

První člen v hranaté závorce $e \cos \Theta_1$ nahradíme dle rov. (3.168) a kulatou závorku upravíme následovně: $(\sin \Theta_2 \sin \Theta_1 + \cos \Theta_2 \cos \Theta_1) = \cos(\Theta_2 - \Theta_1) = \cos \Delta\Theta$. Po dosažení obdržíme

$$\dot{g} = \frac{r_1}{p} \left(\frac{p}{r_1} - 1 + \cos \Delta\Theta \right).$$

A po poslední nepatrné úpravě získáváme výsledný vztah pro Lagrangeův koeficient \dot{g} ve tvaru

$$\dot{g} = 1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Delta\Theta). \quad (3.173)$$

Poslední koeficient \dot{f} odvodíme jiným způsobem. Využijeme vzájemnou vazbu mezi Lagrangeovými koeficienty, kterou lze odvodit z výrazu pro specifický moment hybnosti

$$f\dot{g} - \dot{f}g = 1. \quad (3.174)$$

Uvedená rovnice je vlastně jiná forma vyjádření zákona zachování specifického momentu hybnosti kosmického tělesa pomocí Lagrangeových koeficientů. Odvození je uvedeno v Příloze A.

Z rov. (3.174) vyjádříme výraz pro koeficient \dot{f} ve tvaru

$$\dot{f} = \frac{1}{g} (f\dot{g} - 1). \quad (3.175)$$

Nyní do uvedeného vztahu dosadíme dříve odvozené výrazy pro koeficienty f, g a \dot{g}

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r_1 r_2 \sin \Delta\Theta} \left\{ \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Delta\Theta) \right] \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Delta\Theta) \right] - 1 \right\},$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r_1 r_2 \sin \Delta\Theta} \left[-\frac{r_2}{p} (1 - \cos \Delta\Theta) - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Delta\Theta) + \frac{r_1 r_2}{p^2} (1 - \cos \Delta\Theta)^2 \right].$$

Po úpravě dostáváme konečný výraz pro Lagrangeův koeficient \dot{f} ve tvaru

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu} (1 - \cos \Delta\Theta)}{p \sin \Delta\Theta} \left(\frac{1 - \cos \Delta\Theta}{p} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.176)$$

Výhodou použití Lagrangeových koeficientů pro výpočet polohy a rychlosti kosmického tělesa na oběžné dráze je skutečnost, že není nutno a priori znát tvar dráhy. Jak jsme ji

poznali, typ dráhy je určen excentricitou. Excentricita však v žádném výsledném vztahu pro výpočet Lagrangeových koeficientů nevystupuje. Metoda je tedy nezávislá na tvaru dráhy, respektive excentricitě.

Nicméně, tvar oběžné dráhy i polohu oběžné dráhy v rovině zvolené souřadnicové soustavy můžeme dodatečně stanovit z obecné rovnice dráhy (3.43), která zahrnuje konstantu Θ_0 . Pro řešení použijeme rovnici dráhy pro počáteční podmínky (index 1)

$$r_1 = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos(\Theta_1 - \Theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\Theta_1 - \Theta_0)} \quad (3.177)$$

a vztah pro počáteční radiální rychlost kosmického tělesa

$$V_{r1} = e\sqrt{\mu/p} \sin(\Theta_1 - \Theta_0). \quad (3.178)$$

Potřebný modul vektoru počáteční radiální rychlosti stanovíme ze vztahu

$$V_{r1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{r}_1}{r_1}. \quad (3.179)$$

Použití obecného tvaru rovnice dráhy (3.43) je nutné pro stanovení úhlové konstanty Θ_0 , která definuje polohu pericentra oběžné dráhy v její rovině vzhledem k obecně zvolené souřadnicové soustavě dle obr. 3-6. Připomeňme, že pouze v perifokální souřadnicové soustavě je tato úhlová konstanta rovna nule. I když jsme zde použítou souřadnicovou soustavu označili stejně (x, y) , nejedná se o perifokální souřadnicovou soustavu.

Řešení provedeme následujícím postupem. Nejprve ze složek počátečního polohového vektoru \vec{r}_1 určíme pravou anomálii Θ_1 dle vztahu

$$\Theta_1 = \arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right). \quad (3.180)$$

Využitím rov. (3.177) a (3.178) stanovíme výraz pro tangentu úhlu $(\Theta_1 - \Theta_0)$

$$\operatorname{tg}(\Theta_1 - \Theta_0) = \frac{\sin(\Theta_1 - \Theta_0)}{\cos(\Theta_1 - \Theta_0)} = \frac{V_{r1}\sqrt{p/\mu}}{\frac{p}{r_1} - 1},$$

odkud získáme úhlovou konstantu Θ_0 ze vztahu

$$\Theta_0 = \Theta_1 - \arctg\left(\frac{V_{r1}\sqrt{p/\mu}}{\frac{p}{r_1} - 1}\right) [\text{rad}]. \quad (3.181)$$

Před výpočtem excentricity e je nutno stanovit hodnotu modulu počáteční radiální rychlosti V_{r1} dle rov. (3.179). Poté můžeme přistoupit k výpočtu excentricity z rovnice (3.177) nebo z rov. (3.178). Zvolíme-li rov. (3.178), obdržíme pro výpočet excentricity výraz

$$e = \frac{V_{r1}\sqrt{p/\mu}}{\sin(\Theta_1 - \Theta_0)}. \quad (3.182)$$

Výpočet excentricity provádíme pro hodnotu úhlové konstanty Θ_0 , která dává kladnou hodnotu excentricity. Řešení tvaru a polohy dráhy je ukázáno na příkladu 3.6.

Příklad 3.5

Zadání:

Na základě zadaných počátečních podmínek vypočtete pomocí Lagrangeových koeficientů polohový vektor \vec{r} a vektor rychlosti \vec{V} pro aktuální polohu, která je dána změnou pr. anomálie o hodnotu $\Delta\theta$.

Potřebná data:

Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]},$
Přírůstek pravé anomálie	$\Delta\theta = 80 \text{ [}^\circ\text{]},$
Počáteční polohový vektor	$\vec{r}_1 = 10640\vec{i} - 7520\vec{j},$
Počáteční vektor rychlosti	$\vec{V}_1 = 6,1\vec{i} + 1,9\vec{j}.$

Řešení:

a) Výpočet specifického momentu hybnosti

$$\vec{h} = \vec{r}_1 \times \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10640 & -7520 & 0 \\ 6,1 & 1,9 & 0 \end{vmatrix} = 66088\vec{k}.$$

b) Výpočet parametru p dle rov. (3.38)

$$p = \frac{h^2}{\mu} = \frac{66088^2}{398600} = 10957,41 \text{ [km]}.$$

c) Výpočet modulu počátečního polohového vektoru

$$r_1 = \sqrt{10640^2 + (-7520)^2} = 13029,198 \text{ [km]}.$$

d) Výpočet počáteční radiální rychlosti dle rov. (3.179)

$$V_{r1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{r}_1}{r_1} = \frac{(6,1\vec{i} + 1,9\vec{j})(10640\vec{i} - 7520\vec{j})}{13029,198} = 3,884813 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

e) Výpočet hodnot goniometrických funkcí

$$\begin{aligned} \sin \Delta\theta &= \sin(80^\circ) = 0,984808 \text{ [1]}, \\ \cos \Delta\theta &= \cos(80^\circ) = 0,173648 \text{ [1]}. \end{aligned}$$

f) Výpočet modulu polohového vektoru dle rov. (3.171)

$$r_2 = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cos \Delta\theta - V_{r1} \sqrt{p/\mu} \sin \Delta\theta},$$

$$r_2 = \frac{10957,41}{1 + \left(\frac{10957,41}{13029,198} - 1\right) 0,173648 - 3,884813 \sqrt{\frac{10957,41}{398600}} 0,9848}$$

$$r_2 = 32411,651 \text{ [km]}.$$

g) Výpočet koeficientu f provedeme dle rov. (3.167)

$$f = 1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Delta\theta) = 1 - \frac{32411,651}{10957,41} (1 - 0,173648) = -1,44432$$

h) Výpočet koeficientu g provedeme dle rov. (3.172)

$$g = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{p\mu}} \sin \Delta\theta = \frac{13029,198(32411,651)}{\sqrt{10957,41(398600)}} 0,984808 = 6292,856 \text{ [s]}.$$

i) Výpočet derivace koeficientu \dot{g} dle rov. (3.173)

$$\dot{g} = 1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Delta\theta) = 1 - \frac{13029,198}{10957,41} (1 - 0,173648) = 0,017404 \text{ [1]}.$$

j) Výpočet derivace koeficientu \dot{f} provedeme dle rov. (3.175)

$$\dot{f} = \frac{1}{g} (f\dot{g} - 1) = \frac{1}{6292,856} [-1,44432 (0,017404) - 1],$$

$$\dot{f} = -1,62905 \cdot 10^{-4} \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

k) Výpočet aktuálního (hledaného) polohového vektoru \vec{r}_2 provedeme dle rov. (3.154)

$$\vec{r}_2 = f\vec{r}_1 + g\vec{V}_1,$$

$$\vec{r}_2 = -1,44432(10640\vec{i} - 7520\vec{j}) + 6292,856 (6,1\vec{i} + 1,9\vec{j}),$$

$$\vec{r}_2 = 23018,857\vec{i} + 22817,713\vec{j} \text{ [km]}.$$

l) Výpočet aktuálního (hledaného) vektoru rychlosti \vec{V}_2 provedeme dle rov. (3.155)

$$\vec{V}_2 = \dot{f}\vec{r}_1 + \dot{g}\vec{V}_1,$$

$$\vec{V}_2 = -1,62905 \cdot 10^{-4} (10640\vec{i} - 7520\vec{j}) + 0,017404 (6,1\vec{i} + 1,9\vec{j}),$$

$$\vec{V}_2 = -1,627145\vec{i} + 1,258113 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

Příklad 3.6

Zadání:

Stanovte tvar (excentricitu e) a polohu oběžné dráhy ve zvolené souřadnicové soustavě (x, y) pro případ uvedený v příkladu 3.5.

Potřebná data:

Gravitační parametr Země	$\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]},$
Parametr	$p = 10957,41 \text{ [km]},$
Počáteční polohový vektor	$\vec{r}_1 = 10640\vec{i} - 7520\vec{j},$
Počáteční vektor rychlosti	$\vec{V}_1 = 6,1\vec{i} + 1,9\vec{j},$
Přírůstek pravé anomálie	$\Delta\theta = 80 \text{ [}^\circ\text{]}.$

Řešení:

a) Výpočet modulu počátečního polohového vektoru r_1

$$r_1 = \sqrt{10640^2 + (-7520)^2} = 13029,198 \text{ [km]}.$$

b) Výpočet počáteční radiální rychlosti kosmického tělesa dle rov. (3.179)

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$V_{r1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{r}_1}{r_1} = \frac{(6,1\vec{i} + 1,9\vec{j})(10640\vec{i} - 7520\vec{j})}{13029,198} = 3,884813 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

c) Výpočet pravé anomálie počáteční polohy θ_1 ze složek počátečního polohového vektoru

$$\theta_1 = \text{arctg}\left(\frac{-7520}{10640}\right) = -0,6152531 \text{ [rad]} = -35,251406 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

d) Výpočet úhlové konstanty θ_0 , která definuje směr přímky apsid v rovině zvolené souřadnicové soustavy dle rov. (3.181)

$$\theta_0 = \theta_1 - \text{arctg}\left(\frac{V_{r1}\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{\frac{p}{r_1} - 1}\right) = -35,251406 - \text{arctg}\frac{3,884813\sqrt{\frac{10957,41}{398600}}}{\frac{10957,41}{13029,198} - 1}$$

$$\theta_0 = 0,713510587 \text{ [rad]} = 40,881145 \text{ [}^\circ\text{]} \text{ nebo } \theta_0 = 220,881145$$

e) Výpočet excentricity e provedeme dle vztahu (3.182) pro obě stanovené hodnoty úhlové konstanty θ_0

$$e = \frac{V_{r1}}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} \sqrt{\frac{p}{\mu}} = \frac{3,884813}{\sin(-35,251406 - 40,881145)} \sqrt{\frac{10957,41}{398600}} = -0,6634$$

$$e = \frac{V_{r1}}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} \sqrt{\frac{p}{\mu}} = \frac{3,884813}{\sin(-35,251406 - 220,881145)} \sqrt{\frac{10957,41}{398600}} = 0,6634$$

Je zřejmé, že geometrický smysl má pouze úhlová konstanta $\theta_0 = 220,881 \text{ [}^\circ\text{]}$ kladnou excentricitu. Pak perigeum leží ve 3. kvadrantu. Dle hodnoty excentricity můžeme konstatovat, že se jedná o eliptickou oběžnou dráhu.

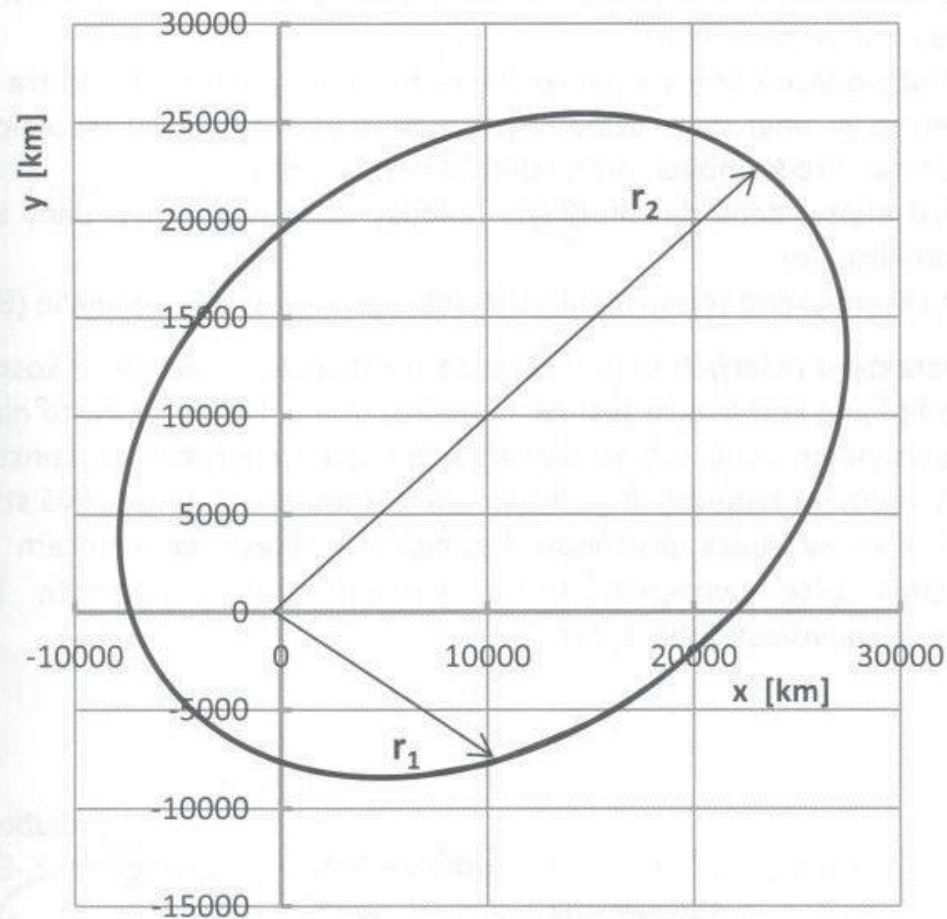
f) Výpočet oběžné dráhy provedeme dle obecného tvaru rovnice dráhy (3.43), kterou přepíšeme s uvážením relace $p = h^2/\mu$ na tvar

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{10957,41}{1 + 0,663441 \cos(\theta - 220,881145^\circ)}$$

Výpočet oběžné dráhy byl proveden v tabulkovém procesoru Excel. Grafické znázornění úplné oběžné dráhy a její polohy v dané souřadnicové soustavě je uvedeno na obrázku 3-21, kde jsou vyznačeny polohy počátečního polohového vektoru (r_1, θ_1) i hledaného polohového vektoru (r_2, θ_2) , posunutého o zadané $\Delta\theta = 80^\circ$.

	θ	r	$\cos \theta$	x	$\sin \theta$	
	[$^\circ$]	[km]	[1]	[km]	[1]	[km]
	-50	10846,746	0,642788	6972,154	-0,766044	-8300
	-40	12244,888	0,766044	9380,128	-0,642788	-7870
r_1, θ_1	-35,2514	13029,198	0,816627	10640,000	-0,577165	-7520
	-20	16181,549	0,939693	15205,682	-0,342020	-5500

	0	21985,474	1,000000	21985,474	0,000000	0,000
	20	28825,206	0,939693	27086,833	0,342020	9858,801
	40	32549,552	0,766044	24934,403	0,642788	20922,449
r_2, θ_2	44,7486	32411,643	0,710203	23018,835	0,703997	22817,709
	50	31765,754	0,642788	20418,633	0,766044	24333,979



Obr. 3-21 Vypočtený tvar a poloha eliptické oběžné dráhy.

3.6 Poloha a rychlost kosmického tělesa na dráze v prostoru

Při stanovování polohy a rychlosti pohybu kosmického tělesa na oběžné dráze, která může mít obecnou polohu v prostoru, budeme vycházet ze znalosti polohového vektoru a rychlosti v rovině oběžné dráhy. Pak nám již bude stačit nalézt transformační rovnici mezi perifokální souřadnicovou soustavou v rovině dráhy a vhodnou prostorovou souřadnicovou soustavou.

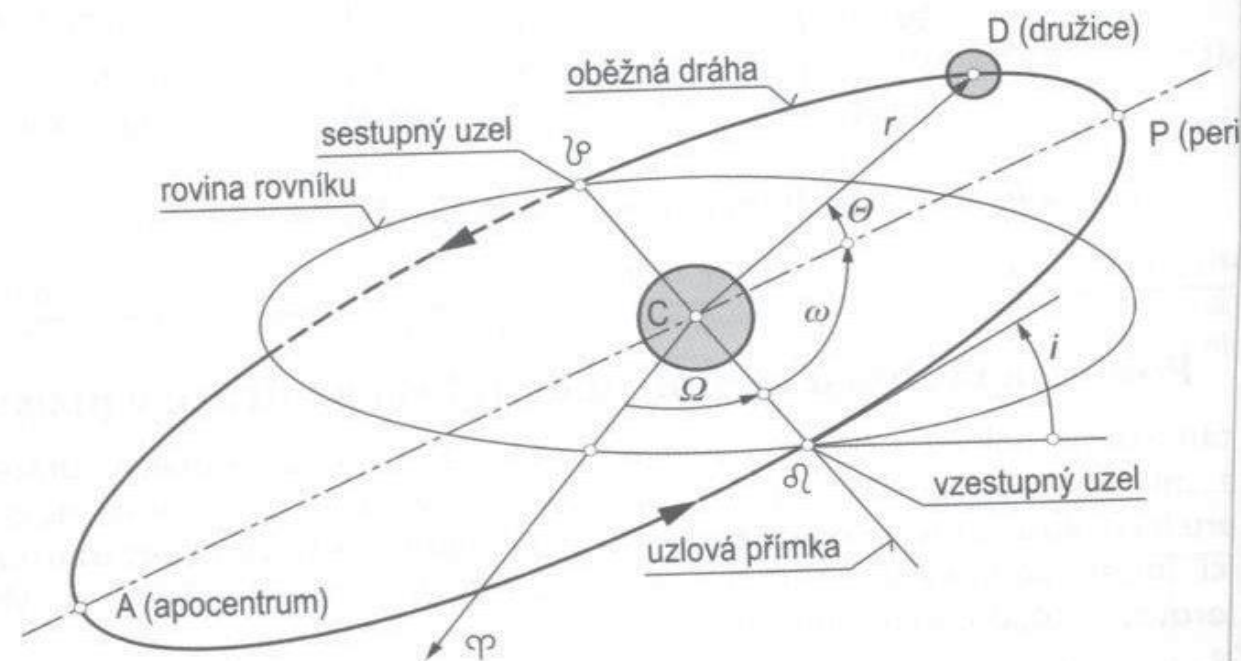
Než přistoupíme k nalezení vhodné transformační rovnice, seznámíme se s klasickým popisem oběžné dráhy v prostoru, který se používá v nebeské mechanice a astronomii. V této nejstarší vědní disciplíně je poloha oběžné dráhy v prostoru definována pomocí tzv. elementů dráhy.

3.6.1 Elementy dráhy

Mezi základní elementy dráhy se nejčastěji řadí následující šestice prvků $a, e, i, \Omega, \omega, \Theta$. Jejich geometrický význam je zřejmý z obr. 3-22. Elementy dráhy jsou na sobě nezávislé a je jimi jednoznačně dána:

- Poloha roviny dráhy v prostoru, která je definována sklonem dráhy (i) a délkou vzestupného uzlu (Ω). Sklon dráhy je úhel mezi rovinou dráhy a rovinou rovníku. Délka vzestupného uzlu je úhel definující polohu uzlové přímky v rovině rovníku směru jarní rovnodennosti.
- Orientace oběžné dráhy v její rovině pomocí argumentu pericentra (ω). Argument pericentra je úhel mezi uzlovou přímkou a přímkou apsid (spojnice pericentra a apocentra). Pro kruhovou dráhu úhel ω není definován.
- Velikost elipsy, daná délkou hlavní poloosy (a) a tvar elipsy, daný bezrozměrnou excentricitou (e).
- Poloha kosmického tělesa na oběžné dráze pomocí pravé anomálie (Θ).

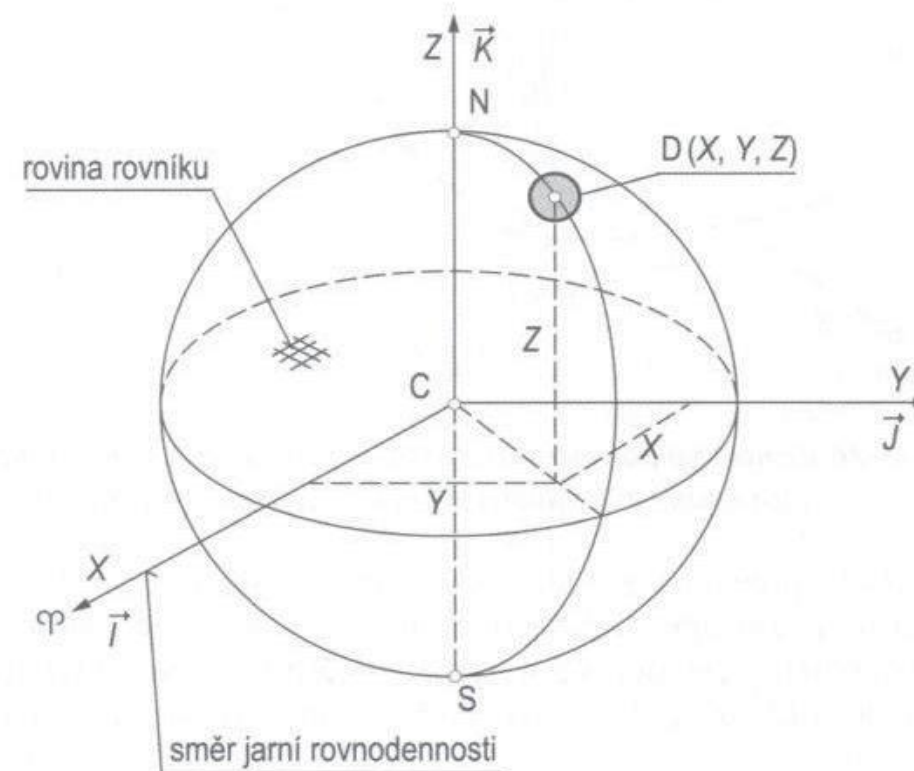
Podle charakteru řešených úloh v nebeské mechanice i mechanice kosmického letu lze zvolit i jiné kombinace šestice elementů dráhy. Někdy se místo hlavní poloosy a používá specifický moment hybnosti h . A místo pravé anomálie Θ se používá střední anomálie M nebo klasicky doba průchodu kosmického tělesa pericentrem t_p . Zde jsme upřednostnili výše uvedenou šestici elementů dráhy, protože lépe vysvětlují geometrické souvislosti (obr. 3-22).



Obr. 3-22 Poloha oběžné dráhy v prostoru je definována šesti elementy dráhy

3.6.2 Geocentrická rovníková souřadnicová soustava

Geocentrická rovníková souřadnicová soustava (X, Y, Z) je inerciální souřadnicová soustava, jejíž počátek je spojen se středem centrálního gravitačního pole „C“ a zůstává nehybná v prostoru vzhledem ke stálícím (obr. 3-23). Primární osa X leží v rovině rovníku a směřuje k bodu jarní rovnodennosti na nebeské sféře. Osa Z směřuje k severnímu pólu centrálního tělesa (Země). Třetí osa leží v rovině rovníku a doplňuje souřadnicovou soustavu na pravouhlý pravotočivý systém os.



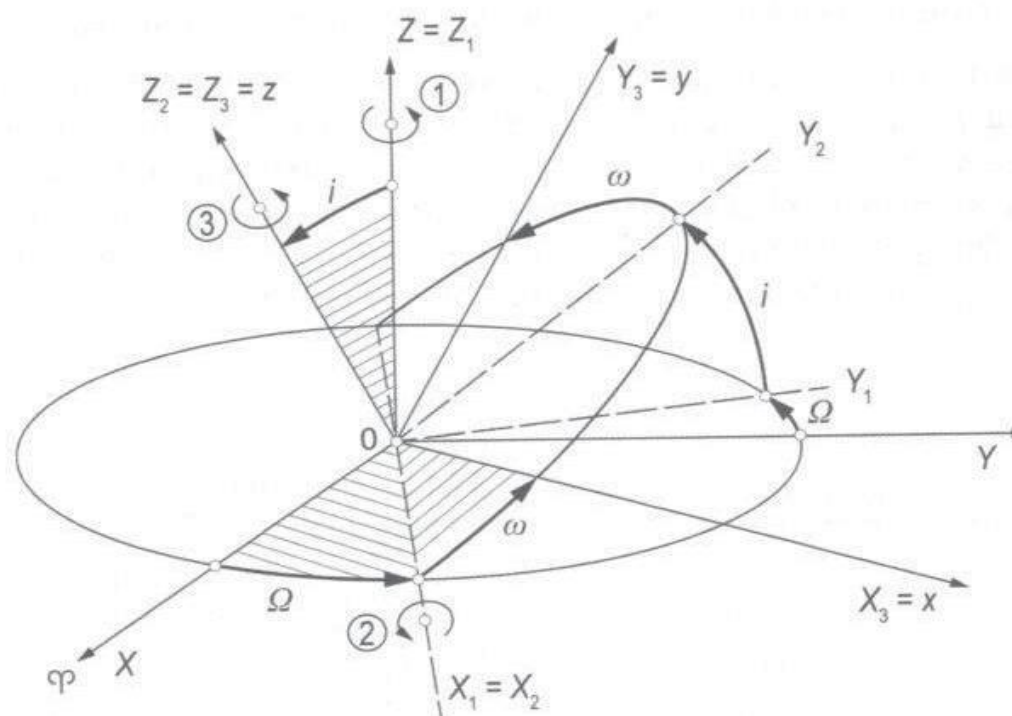
Obr. 3-23 Geocentrická rovníková (inerciální) souřadnicová soustava. Poloha kosmického letadla je dána souřadnicemi (X, Y, Z) .

Transformace mezi geocentrickou rovníkovou a perifokální souřadnicovou soustavou

Pro nalezení prvků polohového vektoru $\{r\}$ a prvků vektoru rychlosti $\{V\}$ v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě je třeba nalézt transformační rovnici, která umožňuje přepočítání mezi stavovými vektory v perifokální a geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě. Prvky polohového vektoru a vektoru rychlosti v perifokální souřadnicové soustavě máme k dispozici a jsou dány rov. (3.140) a (3.141).

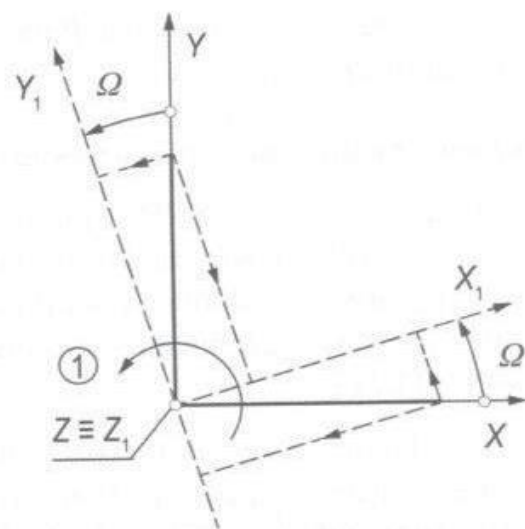
Nejprve si ukážeme obecnou transformaci mezi dvěma obecnými souřadnicovými soustavami. Předpokládejme, že máme dvě souřadnicové soustavy, které jsou na počátku ztotožněny a nachází se v základní poloze znázorněné osami (X, Y, Z) dle obr. 3-24. Nyní je třeba nalézt obecnou výslednou polohu obou souřadnicových soustav vůči sobě. Tu nalezneme pomocí tří postupných pootočení sledované souřadnicové soustavy vůči pevné vztažné souřadnicové soustavě. Touto vztažnou souřadnicovou soustavou nechť je geocentrická rovníková souřadnicová soustava (X, Y, Z) . Pořadí pootočení sledované pohyblivé souřadnicové soustavy je patrné z obr. 3-24.

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP



Obr. 3-24 Vzájemná poloha geocentrické rovníkové (X, Y, Z) a perifokální souřadnicové soustavy (x, y, z) . Pořadí pootočení.

První pootočení provedeme v kladném smyslu kolem osy Z o úhel Ω (vzestupného uzlu) dle obr. 3-25. Zapišeme vztahy vyjadřující vzájemnou relaci složkami libovolného vektoru ve výchozí geocentrické soustavě (X, Y, Z) a pootočené poloze (X_1, Y_1, Z_1) . Vztahy zapišeme ve složkové formě i v maticové formě jak uvedeno níže.



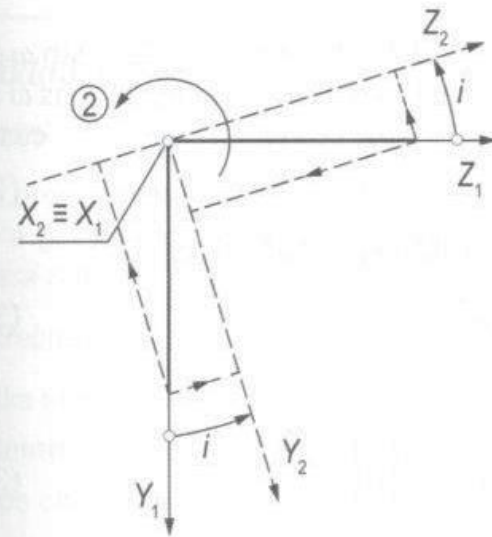
$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos \Omega + Y \sin \Omega, \\ Y_1 &= -X \sin \Omega + Y \cos \Omega, \\ Z_1 &= Z. \end{aligned}$$

V maticové formě

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Obr. 3-25 První pootočení os.

Druhé pootočení okamžité mezipohy os (X_1, Y_1, Z_1) provedeme v kladném okolo osy X_1 o úhel i (sklon oběžné dráhy), čímž dle obr. 3-26 obdržím transformační rovnice.



Obr. 3-26 Druhé pootočení os.

$$X_2 = X_1,$$

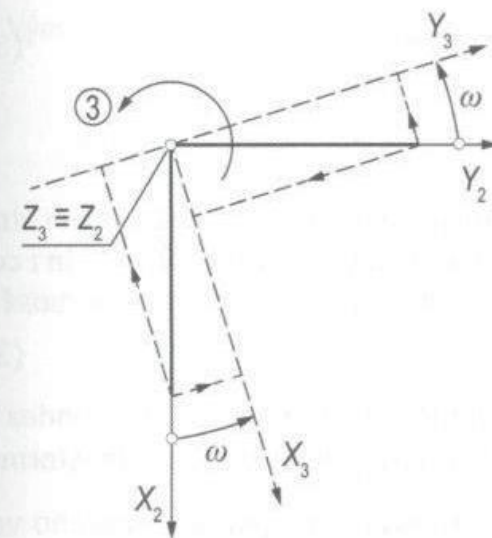
$$Y_2 = Y_1 \cos i + Z_1 \sin i,$$

$$Z_2 = -Y_1 \sin i + Z_1 \cos i.$$

V maticové formě

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \quad (3.184)$$

Třetí pootočení okamžité mezipolohy os (X_2, Y_2, Z_2) provedeme v kladném smyslu okolo os Z_2 o úhel ω (argument pericentra). Toto poslední pootočení konečně stanoví výslednou polohu transformované souřadnicové soustavy, označenou (X_3, Y_3, Z_3) . Tuto souřadnicovou soustavu můžeme v našem případě považovat za hledanou polohu perifokální souřadnicové soustavy (x, y, z) vůči soustavě (X, Y, Z) .



Obr. 3-27 Třetí pootočení os.

$$X_3 \equiv x = X_2 \cos \omega + Y_2 \sin \omega,$$

$$Y_3 \equiv y = -X_2 \sin \omega + Y_2 \cos \omega,$$

$$Z_3 \equiv z = Z_2.$$

V maticové formě

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.185)$$

Nyní již můžeme postupným dosazováním dílčích transformačních matic stanovit souřadnice polohového vektoru, resp. stavový vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (3.186)$$

Po roznásobení dílčích transformačních matic obdržíme úplnou transformační matici ve tvaru

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$[T_{p/gr}] = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega & \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & \sin \omega \cos \Omega \\ -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega & \sin \omega \sin \Omega \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix}$$

Výslednou transformační rovnici zapíšeme ve zkrácené podobě takto

$$\{r\}_p = [T_{p/gr}]\{r\}_{gr},$$

kde jsme vektory označili následovně

$$\{r\}_p = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p, \quad \{r\}_{gr} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{gr}.$$

Výsledná transformační rovnice slouží k přepočtu stavových vektorů z geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy (X, Y, Z) do perifokální souřadnicové soustavy (x, y, z) . Pro ortogonální souřadnicové soustavy platí

$$[T_{gr/p}] = [T_{p/gr}]^{-1} = [T_{p/gr}]^T.$$

A proto můžeme zpětnou transformaci z perifokální souřadnicové soustavy do geocentrické rovníkové souřadnicové soustavy (X, Y, Z) provést dle transformační rovnice

$$\{r\}_{gr} = [T_{gr/p}]\{r\}_p,$$

kde inverzní transformační matice má tvar

$$[T_{gr/p}] = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega & \sin \omega \cos \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega & \sin \omega \sin \Omega \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

Pro označování transformačních matic používáme dvojici indexů. První lomítkem) vždy označuje, kam se transformuje a druhý index, odkud se transformuje.

Výše uvedený postup platí také pro vzájemné transformace prvků stavových vektorů rychlostí mezi oběma výše uvedenými souřadnicovými soustavami. Transformaci prvků stavového vektoru rychlosti z perifokální do geocentrické souřadnicové soustavy lze psát

$$\{V\}_{gr} = [T_{gr/p}]\{V\}_p,$$

kde pro vektory rychlosti platí následující označení

$$\{V\}_p = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_p, \quad \{V\}_{gr} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix}_{gr}.$$

Příklad 3.7**Zadání:**

Pro prostorovou oběžnou dráhu zadanou pomocí jejích elementů nalezněte stavový vektor $\{r\}$ a $\{V\}$ v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z) pro polohu kosmického tělesa zadanou pomocí pravé anomálie.

Potřebná data:

Délka hlavní poloosy eliptické dráhy	$a = 10800$ [km],
Excentricita eliptické dráhy	$e = 0,4$ [1],
Sklon oběžné dráhy	$i = 35$ [°],
Argument perigea	$\omega = 40$ [°],
Délka vzestupného uzlu	$\Omega = 80$ [°],
Pravá anomálie (poloha kosmického tělesa)	$\theta = 30$ [°],
Gravitační parametr Země	$\mu = 398600$ [km ³ s ⁻²].

Řešení:

a) Výpočet parametru eliptické oběžné dráhy dle rov. (3.47)

$$p = a(1 - e^2) = 10800(1 - 0,4^2) = 9072 \text{ [km]}.$$

b) Výpočet hodnot potřebných goniometrických funkcí

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin 30^\circ = 0,5, & \cos \theta &= \cos 30^\circ = 0,866025, \\ \sin i &= \sin 35^\circ = 0,573576, & \cos i &= \cos 35^\circ = 0,819152, \\ \sin \Omega &= \sin 80^\circ = 0,984808, & \cos \Omega &= \cos 80^\circ = 0,173648, \\ \sin \omega &= \sin 40^\circ = 0,642788, & \cos \omega &= \cos 40^\circ = 0,766044. \end{aligned}$$

c) Výpočet potřebných parametrů vystupujících ve stavových vektorech

$$\frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{9072}{1 + 0,4(0,866025)} = 6737,917 \text{ [km]},$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}} = \sqrt{\frac{398600}{9072}} = 6,628528 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

d) Výpočet polohového vektoru v perifokální souřadnicové soustavě (x, y, z) dle rov. (3.140). Po dosazení obdržíme stavový vektor polohy

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5835,207 \\ 3368,959 \\ 0 \end{Bmatrix}_p \text{ [km]}.$$

e) Výpočet vektoru rychlosti v perifokální souřadnicové soustavě (x, y, z) dle rov. (3.141). Po dosazení obdržíme stavový vektor rychlosti ve tvaru

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}_p = \sqrt{\mu/p} \begin{Bmatrix} -\sin \Theta \\ e + \cos \Theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,31426 \\ 8,39188 \\ 0 \end{Bmatrix}_p \quad [\text{kms}^{-1}].$$

f) Výpočet transformační matice dle rov. (3.191)

$$[T_{gr/p}] = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

Po dosazení výše uvedených goniometrických funkcí obdržíme transformační matici tvaru (Pozn.: Výpočty provedeny s vyšší přesností, výsledky zaokrouhleny na 6

$$[T_{gr/p}] = \begin{bmatrix} -0,385519 & -0,729593 & 0,564863 \\ 0,845839 & -0,524057 & -0,099601 \\ 0,368688 & 0,439385 & 0,819152 \end{bmatrix}.$$

g) Výpočet stavového vektoru polohy v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě získáme dle transformační rovnice (3.190)

$$\{r\}_{gr} = [T_{gr/p}]\{r\}_p,$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{gr} = \begin{bmatrix} -0,385519 & -0,729593 & 0,564863 \\ 0,845839 & -0,524057 & -0,099601 \\ 0,368688 & 0,439385 & 0,819152 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5835,207 \\ 3368,959 \\ 0 \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} -470 \\ 3170 \\ 3631 \end{Bmatrix}_{gr}$$

h) Výpočet stavového vektoru rychlosti v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě získáme dle transformační rovnice (3.192)

$$\{V\}_{gr} = [T_{gr/p}]\{V\}_p,$$

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}_{gr} = \begin{bmatrix} -0,385519 & -0,729593 & 0,564863 \\ 0,845839 & -0,524057 & -0,099601 \\ 0,368688 & 0,439385 & 0,819152 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3,31426 \\ 8,391885 \\ 0 \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} -4, \\ -7, \\ 2,4 \end{Bmatrix}_{gr}$$

Stanovení elementů dráhy ze stavového vektoru

Na základě znalosti prvků stavového vektoru v geocentrické rovníkové souřadnicové soustavě (X, Y, Z, V_x, V_y, V_z) můžeme naopak stanovit všechny elementy dráhy následujícím postupem:

1) Nejprve stanovíme moduly polohového vektoru a vektoru rychlosti dle vz

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

2) Následuje výpočet specifického momentu hybnosti, včetně jeho modulu

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k},$$

kde složky specifického momentu hybnosti jsou dány výrazy

$$h_x = YV_z - ZV_y, \quad (3.197)$$

$$h_y = ZV_x - XV_z, \quad (3.198)$$

$$h_z = XV_y - YV_x, \quad (3.199)$$

a modul stanovíme ze vztahu

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}. \quad (3.200)$$

- 3) Výpočet sklonu oběžné dráhy provedeme pomocí specifického momentu hybnosti následovně

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right). \quad (3.201)$$

Sklon oběžné dráhy je definován v rozsahu $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$. Při výpočtu sklonu dráhy z uvedeného vztahu se neobjevuje žádná nejednoznačnost. Na tomto místě je však třeba říci, že podle jeho hodnoty definujeme typ dráhy s ohledem na smysl oběhu. V případě, kdy sklon dráhy leží v rozsahu $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ nazýváme oběžnou dráhu jako přímou (prográdní) a naopak při sklonu dráhy $90^\circ < i \leq 180^\circ$ se jedná o tzv. zpětnou (retrográdní) oběžnou dráhu.

- 4) Výpočet hlavní poloosy eliptické oběžné dráhy provedeme pomocí specifické energetické konstanty \mathcal{E} a gravitačního parametru μ . Nejprve ze vztahu (3.90) stanovíme energetickou konstantu

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r},$$

a nakonec hlavní poloosu dle vztahu (3.94)

$$a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}. \quad (3.202)$$

- 5) Vektor uzlové přímky určíme dle vztahu

$$\vec{u} = \vec{K} \times \vec{h} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = -h_y \vec{I} + h_x \vec{J} = u_x \vec{I} + u_y \vec{J}, \quad (3.203)$$

odkud je modul vektoru uzlové přímky dán výrazem

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(-h_y)^2 + h_x^2}. \quad (3.204)$$

- 6) Délka vzestupného uzlu je pak dána výrazem

$$\Omega = \arccos\left(\frac{u_x}{u}\right). \quad (3.205)$$

Délka vzestupného uzlu je definována v rozsahu úhlů $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$. Výpočet délky vzestupného uzlu z uvedeného vztahu vede na nejednoznačnost přiřazení správné úhlové hodnoty Ω . Běžně obdržíme dvě řešení, z nichž je nutno nalézt správnou hodnotu Ω dle níže uvedené nabídky

$$\Omega_1 = \arccos\left(\frac{u_x}{u}\right) \quad \text{pro } u_y \geq 0,$$

$$\Omega_2 = 360^\circ - \arccos\left(\frac{u_x}{u}\right) \quad \text{pro } u_y < 0.$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

7) Argument pericentra můžeme stanovit ze vztahu

$$\omega = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{e}}{ue}\right). \quad (3.206)$$

Vektor excentricity, který zároveň definuje směr přímky apsid, stanovíme pomocí vztahu (B.9), který je odvozen v Příloze B

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{r} \left(V^2 - \frac{\mu}{r} \right) - \vec{V} (\vec{r} \cdot \vec{V}) \right]. \quad (3.207)$$

Argument pericentra je definován v rozsahu úhlů $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$. Rovněž v závislosti na argumentu pericentra ω z rov. (3.206) vede na nejednoznačné řešení. Nicméně z polohy přímky apsid, kterou definuje vektor excentricity je zřejmé, že v rozsahu úhlů $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ je vertikální složka vektoru excentricity $e_z \geq 0$. A v rozsahu úhlů $180^\circ \leq \omega < 360^\circ$ je složka $e_z < 0$. Takže dle znaménka složky e_z možno identifikovat správnou hodnotu argumentu pericentra ω podle níže uvedené nabídky

$$\omega_1 = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{e}}{ue}\right) \quad \text{pro } e_z \geq 0,$$

$$\omega_2 = 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{e}}{ue}\right) \quad \text{pro } e_z < 0.$$

8) A konečně poslední element orbitální dráhy, pravou anomálii, určíme dle vztahu

$$\Theta = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right).$$

V tomto případě můžeme nejednoznačnost výpočtu pravé anomálie jednoduše vyřešit pomocí stanovení znaménka radiální rychlosti letu V_r dle dříve uvedeného vztahu (3.179)

$$V_r = \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{r}.$$

Dle základní rov. (3.138) pro radiální rychlost se můžeme jednoduše přesvědčit, že pokud je radiální rychlost $V_r \geq 0$, pak se kosmické těleso pohybuje ve směru od pericentra a pravá anomálie $0^\circ \leq \Theta < 180^\circ$ a pokud je radiální rychlost $V_r < 0$, pak se kosmické těleso pohybuje ve směru k pericentru a pravá anomálie $180^\circ \leq \Theta < 360^\circ$.

Alternativně lze výpočet pravé anomálie nalézt také přímo z rovnice dráhy (3.138)

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \Theta},$$

odkud je pravá anomálie dána výrazem

$$\Theta = \arccos\left[\frac{1}{e} \left(\frac{h^2}{\mu r} - 1 \right)\right].$$

Příklad 3.8

Zadání:

Pro zadané stavové vektory \vec{r} a \vec{V} určete všechny elementy orbitální dráhy a , e , i , ω , Ω , Θ .

Potřebná data:

Gravitační parametr Země $\mu = 398600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}$ a stavové vektory

$$\begin{aligned}\vec{r} &= -2228,2\vec{i} + 7196,1\vec{j} + 4010\vec{k} \quad [\text{km}], \\ \vec{V} &= -7,796\vec{i} - 2,312\vec{j} + 1,871\vec{k} \quad [\text{kms}^{-1}].\end{aligned}$$

Řešení:

a) Výpočet modulu polohového vektoru dle rov. (3.194)

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(-2228,2)^2 + 7196,1^2 + 4010^2} = 8533,981 \text{ [km]}.$$

b) Výpočet modulu vektoru rychlosti letu dle rov. (3.195)

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{(-7,796)^2 + (-2,312)^2 + 1,871^2} = 8,344076 \text{ [kms}^{-1}\text{]}.$$

c) Výpočet složek specifického momentu hybnosti dle rov. (3.197) až (3.199)

$$h_x = YV_z - ZV_y = 7196,1(1,871) - 4010(-2,312) = 22735,023 \text{ [km}^2\text{s}^{-1}\text{]},$$

$$h_y = ZV_x - XV_z = 4010(-7,796) - (-2228,2)1,871 = -27093,$$

$$h_z = XV_y - YV_x = -2228,2(-2,312) - 7196,1(-7,796) = 61252,394.$$

d) Výpočet modulu specifického momentu hybnosti

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} = \sqrt{22735,023^2 + (-27093)^2 + 61252,394^2} = 70730,245.$$

e) Specifickou energetickou konstantu stanovíme dle rov. (3.90)

$$\varepsilon = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{8,344076^2}{2} - \frac{398600}{8533,981} = -11,895592 \text{ [km}^2\text{s}^{-2}\text{]}.$$

f) Výpočet hlavní poloosy provedeme dle rov. (3.94), z níž pro velkou poloosu platí

$$a = -\frac{\mu}{2\varepsilon} = -\frac{398600}{2(-11,895592)} = 16754,105 \text{ [km]}.$$

g) Výpočet sklonu oběžné dráhy dle rov. (3.201)

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right) = \arccos\left(\frac{61252,394}{70730,245}\right) = 30,0 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

Vypočtený sklon oběžné dráhy leží v definovaném oboru $0^\circ \div 180^\circ$. A díky tomu, že je menší jak 90° , jedná se o přímou (prográdní) oběžnou dráhu.

h) Výpočet složek vektoru uzlové přímky. Z rov. (3.203) vyplývá

$$u_x = -h_y = 27093,$$

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$u_y = h_x = 22735,023,$$

$$u_z = 0.$$

i) Výpočet modulu vektoru uzlové přímky

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{27093^2 + 22735,023^2} = 35368,232.$$

j) Výpočet délky vzestupného uzlu dle rov. (3.205)

$$\Omega_1 = \arccos\left(\frac{u_x}{u}\right) = \arccos\left(\frac{27093}{35368,232}\right) = 40,0 \text{ [}^\circ\text{]},$$

$$\Omega_2 = 360^\circ - \arccos\left(\frac{u_x}{u}\right) = 360^\circ - \arccos\left(\frac{27093}{35368,232}\right) = 320,0 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

S ohledem na skutečnost, že složka vektoru uzlové přímky je kladná ($u_y > 0$) správnou hodnotou délky vzestupného úhlu je $\Omega \equiv \Omega_1 = 40,0 \text{ [}^\circ\text{]}$.

k) Výpočet skalárního součinu $\vec{r} \cdot \vec{V}$

$$\vec{r} \cdot \vec{V} = -2228,2(-7,796) + 7196,1(-2,312) + 4010(1,871) = 8236,374$$

l) Výpočet vektoru excentricity dle vztahu (3.207)

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{r} \left(V^2 - \frac{\mu}{r} \right) - \vec{V} (\vec{r} \cdot \vec{V}) \right].$$

$$\vec{e} = \frac{1}{398600} \left[(-2228,2\vec{i} + 7196,1\vec{j} + 4010\vec{k}) \left(8,344^2 - \frac{398600}{8533,981} \right) - (-7,796\vec{i} - 2,312\vec{j} + 1,871\vec{k}) 8236,374 \right],$$

$$\vec{e} = 0,0329876\vec{i} + 0,461490\vec{j} + 0,191881\vec{k}.$$

m) Výpočet modulu vektoru excentricity

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} = \sqrt{0,0329876^2 + 0,461490^2 + 0,191881^2} = 0,501$$

Dle vypočtené hodnoty excentricity můžeme konstatovat, že oběžnou dráhou je elipsa.

n) Výpočet argumentu perigea dle rov. (3.206)

$$\omega_1 = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{e}}{ue}\right) = \arccos\left(\frac{27093(0,0329876) + 22735,023(0,461490)}{35368,232(0,501)}\right)$$

$$\omega_1 = 50 \text{ [}^\circ\text{]},$$

$$\omega_2 = 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{e}}{ue}\right),$$

$$\omega_2 = 360^\circ - \arccos\left(\frac{27093(0,0329876) + 22735,023(0,461490)}{35368,232(0,501)}\right) = 310 \text{ [}^\circ\text{]}.$$

V tomto případě je správným řešením $\omega \equiv \omega_1 = 50 \text{ [}^\circ\text{]}$, což potvrzuje kladná složka vektoru excentricity $e_z > 0$.

o) Výpočet pravé anomálie dle rov. (3.208)

3. Pasivní pohyb kosmických těles v CGP

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right),$$

$$\theta_1 = \arccos \frac{0,0329876(-2228,2) + 0,461490(7196,1) + 0,191881(4010)}{0,501(8533,981)},$$

$$\theta_1 = 20 [^\circ],$$

$$\theta_2 = 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right) = 360^\circ - 20^\circ = 340 [^\circ].$$

Pro přiřazení správné hodnoty je třeba znát znaménko radiální složky vektoru rychlosti letu V_r . Tuto složku stanovíme pomocí výrazu

$$V_r = \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{-7,796(-2228,2) + (-2,312)7196,1 + 1,871(4010)}{8533,981},$$

$$V_r = 0,965127 [kms^{-1}].$$

Jelikož hodnota radiální rychlosti je kladná ($V_r > 0$), správná hodnota pravé anomálie je $\theta \equiv \theta_1 = 20 [^\circ]$.
