Limita a derivace funkce

Definice funkce

Budiž M nějaká množina reálných čísel. Jestliže každému číslu x množiny M je přiřazeno určité číslo y, říkáme, že y je funkcí x. Množinu M nazýváme oborem této funkce.

Označení: y = f(x)

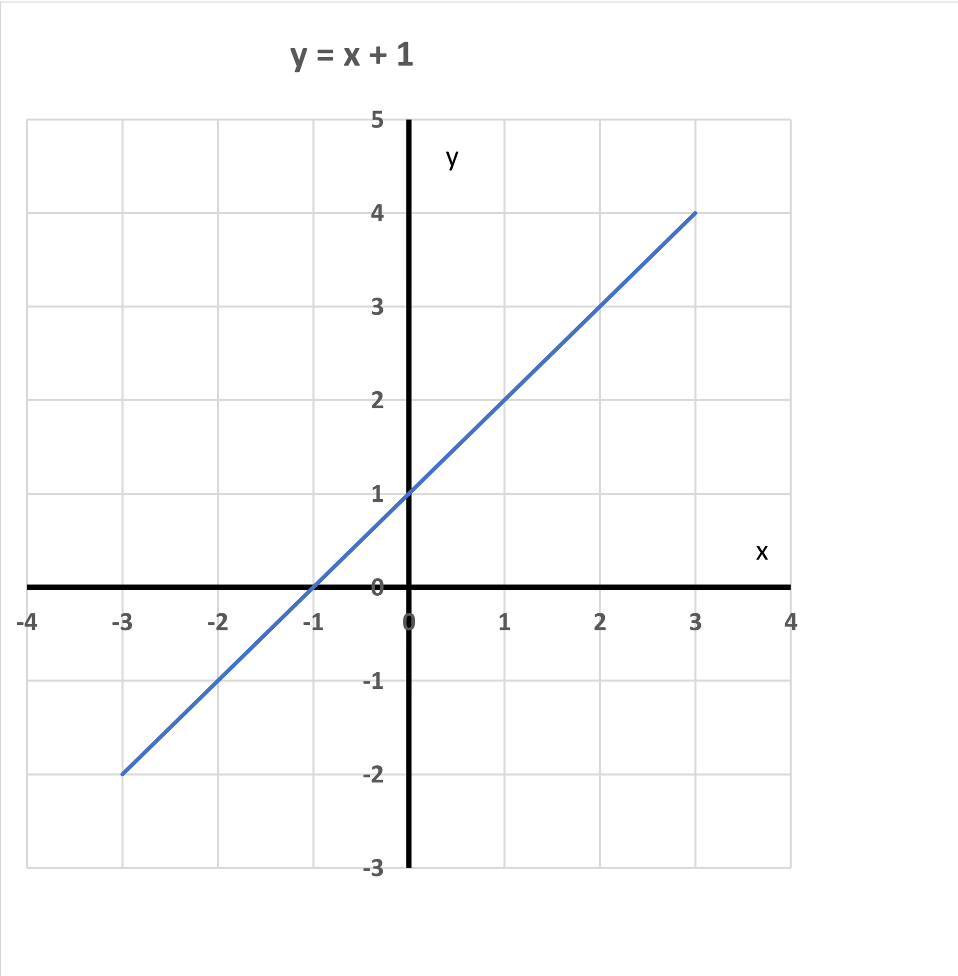
Grafem funkce f(x) je množina všech bodů v rovině, jež mají souřadnice [x, f(x)], kde x ∈ M.

Příklady funkcí

Lineární funkce   y = kx +q   k – směrnice funkce

Směrnice funkce je rovna tangentě úhlu, který svírá graf lineární funkce s osou x.

Graf funkce y = x+1



Tato funkce je definována na celé množině reálných čísel.

Na celé množině reálných čísel jsou také definovány např. funkce y = x^2, y = sin x, y = cos x.

Některé funkce ale nejsou definovány na celé množině reálných čísel. Např.

Nepřímá úměrnost   y = $\frac{1}{x}$ x ∈ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Logaritmická funkce y = ln x   x ∈ (0,∞)

Limita funkce

Funkce y = f(x) nemusí být v některém bodu definována. Nás zajímá, jak se tato funkce chová v okolí tohoto bodu.

Okolím bodu a rozumíme každý otevřený interval, který obsahuje bod a.

Příklad:

y = $\frac{x^2-1}{x-1}$ Tato funkce není definována v bodě x = 1. I když ji můžeme upravit na y = x +1 není stejná jako funkce y = x +1 z předchozího příkladu. K zjištění jak se chová v okolí bodu 1, použijeme limitu.

Definice limity

Funkce f(x) má v bodě a limitu b, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo n takové, že pro všechna x$\neq a$ z okolí (a – n, a + n) čísla a, patří funkční hodnoty f(x) do okolí (b - ε, b + ε).

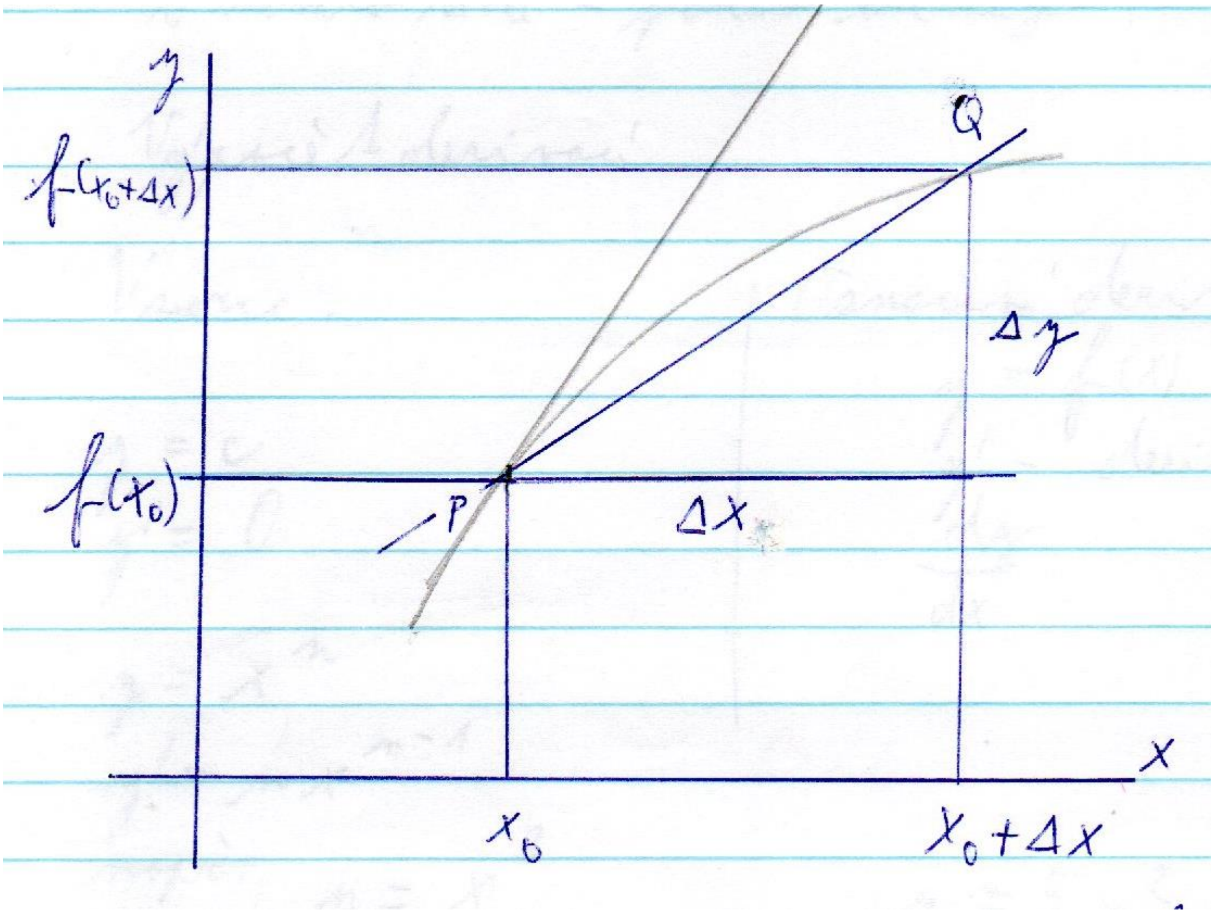
Zapisujeme: $\lim_{x\to 1} f(x)$ = b)

V našem případě $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ = $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1).(x+1)}{x-1}$ = $\lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$

Funkce má limitu i v bodě, němž je definována. V toto případě se limita rovná funkční hodnotě.

Derivace funkce

Máme-li vést v bodě P tečnu ke křivce (viz obrázek), musíme zavést pojem derivace funkce.



Snadno lze určit směrnici sečny PQ.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Bude-li se zmenšovat vzdálenost bodů P a Q, bude se tato směrnice stále více blížit směrnici tečny křivky.

Definice derivace funkce v bodě

Nechť je funkce f(x) definována v bodě x_0 a nějakém jeho okolí. Existuje-li vlastní limita

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, nazýváme tuto limitu derivace funkce f(x) v bodě x_0.

Derivace můžeme hledat i v dalších bodech a ke každému bodu přiřadit derivaci funkce v tomto bodě, pokud existuje. V tomto případě můžeme derivaci pokládat za funkci proměnné x. Tuto funkci lze také derivovat. Získáme pak derivaci druhého řádu.

Označení derivace funkce y = f(x):

y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$

Vzorce pro výpočet derivací

y = c (c je konstanta) $y' = 0$

$y = x^n$ $y' = n\,x^{n-1}$ n je přirozené číslo

$y = \ln x$ $y' = \frac{1}{x}$ $x \in (0,\infty)$ (ln x je přirozený logaritmus x)

$y = \log_a x$ $(a > 0)$ $y' = \frac{1}{x\,lna}$ $x \in (0,\infty)$

$y = e^x$ $y' = e^x$ $x \in (-\infty\,,\infty)$

e – Eulerovo číslo e≐ 2,718281

$y = a^x$ $(a > 0\,, a \neq 1)$ $y' = a^x \ln a$ $x \in (-\infty\,,\infty)$

y = sin x y´= cos x $x \in (-\infty\,,\infty)$

y = cos x y´= - sin x $x \in (-\infty\,,\infty)$

y = tg x $y' = \frac{1}{cos^2 x}$ $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, k je celé číslo

y = cotg x $y' = -\frac{1}{sin^2 x}$ $x \neq k\pi$, k je celé číslo

u a v jsou funkce

derivace součtu $(u + v)' = u' + v'$

derivace součinu $(u\,v)' = u'v + u\,v'$

derivace podílu $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

derivace složené funkce $f'(g(x)) = f'(x).\,g'(x)$

Příklad užití derivací ve fyzice

Rychlost je první derivací dráhy podle času. Zrychlení je druhou derivací dráhy podle času.

s -dráha v – rychlost a - zrychlení

Pohyb rovnoměrný přímočarý

$s = v\,t$ $\frac{ds}{dt} = v$ $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$

pohyb rovnoměrně zrychlený

$s = a\frac{t^2}{2}$ $\frac{ds}{dt} = a\,t = v$ $\frac{d^2 s}{dt^2} = a$