1 Funkce

Funkce je predpis, ktery kazdemu cislu x z definicniho oboru M pripradi prave jedno y z oboru hodnot N. Zapisujeme ji:

1. $y = f(x)$
2. $f : y = x$

Definicni obor

Definicini obor je mnozina vsech pripustnych hodnot argumentu x, tedy vsechny hodnoty, kterych muze x nabyvat. Znacime ho $D(f)$.

Priklady:

1. $f : y = x$, zde je resenim cely obor realnych cisel $\Re \Rightarrow D(f) = \Re$
2. $f : y = \frac{1}{x}$, v tomto pripade definicni obor realna cisla mimo $0 \Rightarrow D(f) = \Re\backslash\{0\}$

1.1 Obor hodnot

Obor hodnot je mnozina vsech realnych hodnot cisel y, ktera dostaneme jako vystupni hodnoty jestlize za x dosadime vsechny pripustne hodnoty z $D(f)$. Znacime ho $H(f)$. Priklady:

1. $f : y = x$, definicni obor $D(f) = \Re$, pak $H(f) = \Re$
2. $f : y = |x|$, absolutni hodnta, tedy obor hodnot bude $H(f) =< 0, \infty)$
3. $f : y = x^2$, $D(f) =< -2, 2 >$, dosadime-li do funkce,dostaneme, ze nabyvaji pouze nezapornych cisel mensich nebo rovnych 4, tedy $H(f) =< 0, 4 >$

Polynomické, racionální lomené, exponenciální a goniometrické funkce

Polynomické funckce

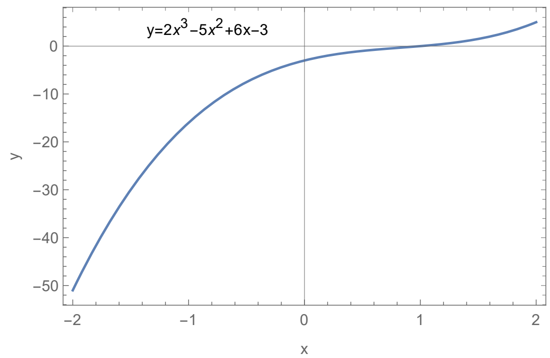
Definice: Polynomická funkce n-tého stupně ($n \in N$) je dána předpisem

$$f : \ y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \tag{1}$$

Definiční obor: Všechná reálná čísla. **Obor hodnot:** Všechná reálná čísla.
Věta: Každá polynomická rovnice stupně n má v oboru reálných čísel nejvýše n kořenů počítáno i s jejich násobností.
Věta: Každá polynomická rovnice lichého stupně má v oboru reálných čísel aspoň jeden kořen.

Příklad: Načrtněte grafy funkcí

$$a: \; y = x^3 \qquad b: \; y = x^2 - 2x + 2 \tag{2}$$



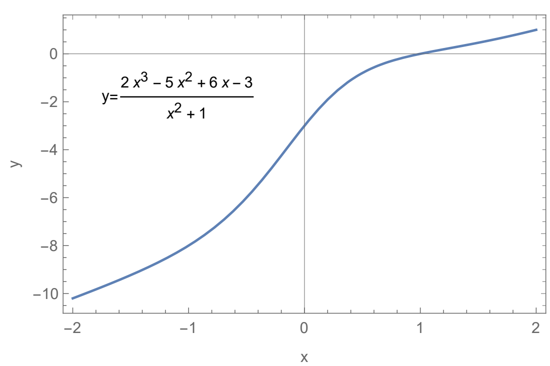
Obrázek 1: Ukázka polynomické funkce.

Racionálně lomenné funckce

Definice: Polynomická funkce $(n, m \in R)$ je dána předpisem

$$f: \; y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0 x^0} \tag{3}$$

Definiční obor: Všechná reálná čísla, krom kořenu polynomu ve jmenovateli.
Obor hodnot: Všechná reálná čísla.



Obrázek 2: Ukázka racionálně lomenné funkce.

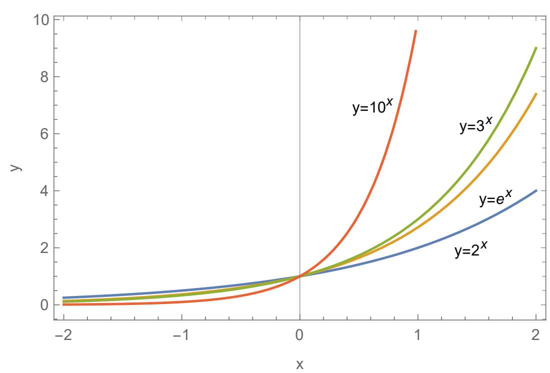
Exponenciální a logaritmická funkce

Mocninná funkce:

$$y = x^a, \qquad a \in R,\, x > 0, \tag{4}$$

kde x je základ a a je exponent.
Exponenciální funkce:

$$y = a^x, \qquad x \in R,\, a > 0. \tag{5}$$



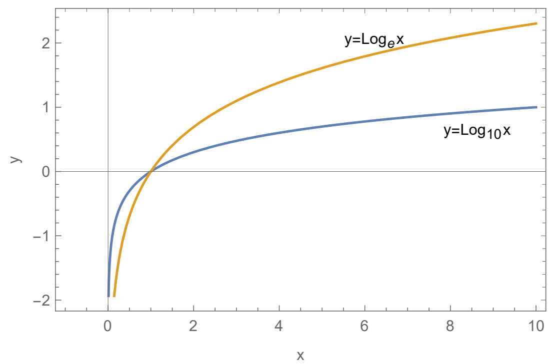
Obrázek 3: Ukázka exponenciální funkce.

Logaritmicka funkce:

$$y = \log_a(x), \qquad x > 0,\, a > 0, \tag{6}$$

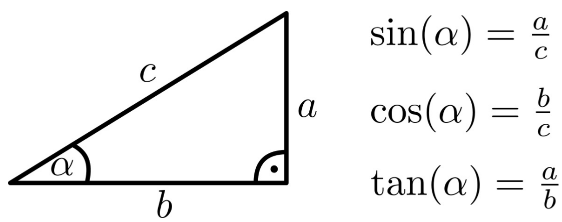
kde a se nazývá základ. **Věta:** Logaritmus (jeho hodnota, zde y) je exponent na který musíme umocnit základ, abychom dostali číslo x (argument) $y = \log_a(x)$ $<=>$ $x = a^y$.
Věta: Logaritmická funkce je *inverzní* k funkci exponenciální - jejich složení dává původní hodnotu vloženou do funkce.
Definice: Přirozený logaritmus je logaritmus o základu e, kde $e = 2,7182818$ je Eulerovo číslo a značíme ho ln ($\ln(x) = \log_e(x)$).
Definice: Dekadický logaritmus je logaritmus o základu 10 a zapisuje se bez číslovky základu tedy $\log_{10}(x) = \log(x)$.
Vlastnosti logaritmu:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
$$\log_a(x^r) = r \cdot log_a(x), \qquad \log_a(1) = 0, \qquad \log_a(a) = 1.$$

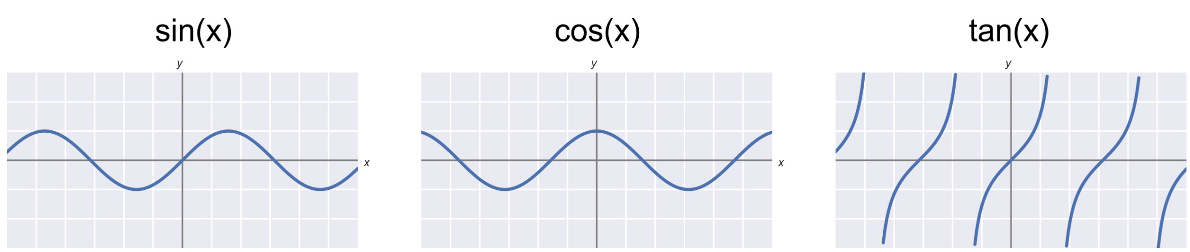


Obrázek 4: Ukázka dekadické a přirozené logaritmicke funkce.

Goniometrické funkce



Obrázek 5: Geometrická definice goniometrických funkcí.



Obrázek 6: Ukázak goniometrických funkcí $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$.

Vlastnosti goniometrických funkcí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}, \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x, \qquad \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x, \qquad \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x,$$
$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

2 Shrnuti a priklady

2.1 Sestrojovani grafu

2.1.1 Linearni funkce

Do rovnice funkce dosadime nejakou hodnoru xa x, napr.0 a dosadime do rovnice a dostaneme y a tim dostaneme souradnice jednoho bodu, oznacime A. Jelikoz jsou obor hodnot i definicini obor vsechna $\Re$, muzeme si vybrat jakekoliv cislo a opet dosadime za x a vypocitame y. Tim dostaneme druhy bod B. Zakreslime do grafu a propojenim bodu dosyaneme graf linearni funkce. V pripade, ze mame funkci omezenou na nejakou cast $D(f)$ dosadime tyto krajni body za x a vypocitame y-nove souradnice

2.1.2 Kvadraticka funkce

Grafem je parabola. Vypocitame vrcholy funkce, ktere jsou dane vzorci:

1. souradnice x
$$\frac{-b}{2a}$$
2. souradnice y
$$c - \frac{b}{4a}$$

Pote polozime rovnici = 0 a dopocitame koreny. Tim dostaneme pruseciky s osou x.

Je-li a v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ kladne, je parabola otevrena nahoru, je-li zaporne, je obracena - otevrena dolu.

2.1.3 Exponencialni funkce

Exponencialni funkce prochazi bodem o souradnicich $[0, 1]$, za x opet dosadime a dopocitame y, tim dostaneme duhy bod. Oba zakreslime do grafu a propojime (pr exponencialni funkce)

2.1.4 Pravidla pro pocitani logaritmickych funkci

Nyní zavedeme ještě další zápis pro mocninu $a^v = r$, kde základ a je kladné reálné číslo různé od jedné.

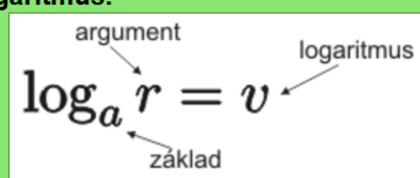
Poznámka

Logaritmus čísla $r > 0$ o základu $a > 0, a \neq 1$ je takové číslo v, pro které platí: $a^v = r$.

$$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r.$$

Zápis $\log_a r = v$ čteme **"logaritmus r o základu a je v".**

Číslo a nazýváme **základ logaritmu**,
číslo r nazýváme **argument logaritmu**,
číslo v nazýváme **logaritmus.**



Priklad vypoctu: Vypoctete $\log_3 9$
Reseni:

1. hledane cislo si oznacime symbolem ?: $\log_3 9 = ?$
2. prepiseme rovnost podle dfinice logaritmu: $\log ar = v \Rightarrow a^v = r \Rightarrow 3^? = 9$
3. hledame ? lehce odhadneme, ze hledane cislo je 2, jelizko $3^2 = 9$
4. vysledek je tedy $\log_3 9 = 2$

Pri sestrojovani grafu postupujeme obdobne jako v predchozim pripade, nalezneme tedy dva body jez protneme nasim grafem.

2.1.5 Vlastnosti funkci

Rovnice	$y = ax + b$
$D(f)$	$\mathbb{R}$
$H(f)$	$\mathbb{R}$
Rostoucí, klesající	Lineární funkce je rostoucí pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$.
Sudá, lichá	Lineární funkce není ani sudá, ani lichá.
Prostá	Lineární funkce je prostá.
Periodická	Lineární funkce není periodická.
Omezenost	Lineární funkce není omezená ani shora, ani zdola.
Graf	Grafem lineární funkce je přímka.

Obrázek 7: Vlastnosti linearni funkci

Rovnice	$y = ax^2 + bx + c$
$D(f)$	$\mathbb{R}$
$H(f)$	Pro hodnoty koeficientu $a > 0$ je $H(f) = \left\langle \frac{-b^2+4ac}{4a}; \infty \right)$ a pro hodnoty koeficientu $a < 0$ je $H(f) = \left(-\infty; \frac{-b^2+4ac}{4a} \right)$. V dalším textu se dozvíme, jak jsme k těmto intervalům dospěli.
Rostoucí, klesající	Kvadratická funkce není na svém definičním oboru ani rostoucí, ani klesající. Pro kladné hodnoty koeficientu a je tato funkce na intervalu $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ klesající a na intervalu $\left(\frac{-b}{2a}; \infty\right)$ rostoucí. Pro záporné hodnoty koeficientu a je tato funkce na intervalu $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ rostoucí a na intervalu $\left(\frac{-b}{2a}; \infty\right)$ klesající.
Sudá, lichá	Obecně není kvadratická funkce ani sudá, ani lichá. Pro hodnotu koeficientu $b = 0$ (tzn. funkce ve tvaru $f : y = ax^2 + c$) je kvadratická funkce sudá.
Prostá	Kvadratická funkce není prostá.
Periodická	Kvadratická funkce není periodická.
Omezenost	Pro hodnoty koeficientu $a > 0$ je kvadratická funkce omezená zdola a pro hodnoty koeficientu $a < 0$ je kvadratická funkce omezená shora.
Graf	Grafem kvadratické funkce je parabola.

Obrázek 8: Vlastnosti kvadratickych funkci

2.1.6 Priklady funkci

Rovnice	$y = a^x$
$D(f)$	$\mathbb{R}$
$H(f)$	$(0; \infty)$
Rostoucí, klesající	Exponenciální funkce je rostoucí pro hodnoty základu $a > 1$ a klesající pro hodnoty základu $a \in (0; 1)$.
Sudá, lichá	Exponenciální funkce není ani sudá, ani lichá.
Prostá	Exponenciální funkce je prostá.
Periodická	Exponenciální funkce není periodická.
Omezenost	Exponenciální funkce je omezená zdola.

Obrázek 9: Vlastnosti exponencialnich funkci

Rovnice	$y = \log_a x$
$D(f)$	$(0; \infty)$
$H(f)$	$\mathbb{R}$
Rostoucí, klesající	Logaritmická funkce je rostoucí pro hodnoty základu $a > 1$ a klesající pro hodnoty základu $a \in (0; 1)$.
Sudá, lichá	Logaritmická funkce není ani sudá, ani lichá.
Prostá	Logaritmická funkce je prostá.
Periodická	Logaritmická funkce není periodická.
Omezenost	Logaritmická funkce není omezená.

Obrázek 10: Vlastnosti logaritmickych funkci

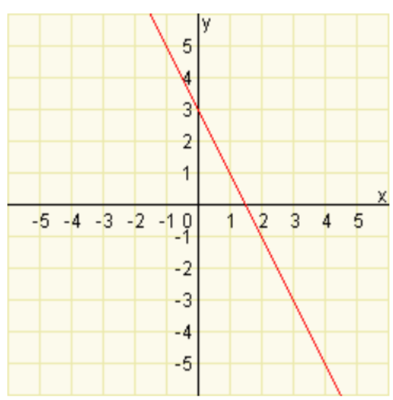
Pro $x, x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, $r \in \mathbb{R}$ a $a, b \in (0; +\infty)\backslash\{1\}$ platí:

- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a, \ (x \neq 1)$
- $\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x = \log_a b \cdot \log_b x$
- $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

Obrázek 11: Pravidla pro pocitani logaritmichych funkci

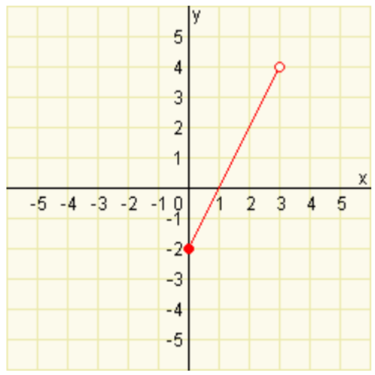
3. Načrtněte graf funkce f, která je zadána předpisem $f : x = -2x + 3$.

Snadno můžeme určit dva body, které leží na grafu této lineární funkce např. tak, že za x resp. za y dosadíme 0 a druhou souřadnici dopočteme. Takto získanými body $A = [0; 3]$, $B = [1{,}5; 0]$ proložíme přímku.



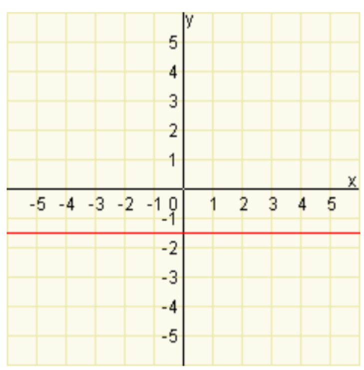
5. Načrtněte graf funkce f, která je zadána předpisem $f : y = 2x - 2; D(f) = \langle 0; 3)$.

Obdobně jako v příkladu 3. určíme dva body, které odpovídají krajním hodnotám definičního oboru $A = [0; -2]$, $B = [3; 4]$. Tyto dva body spojíme úsečkou, a konce označíme plným nebo prázdným kroužkem podle toho, jestli dané hodnoty leží nebo neleží v definičním oboru.



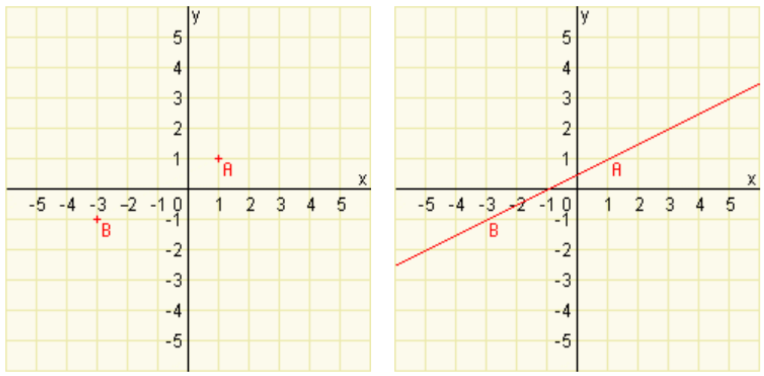
7. Načrtněte graf funkce g, která je zadána předpisem $g : y = -1,5$.

Jedná se o předpis konstantní funkce. O konstantní funkci víme, že její graf je přímka rovnoběžná s osou x. Dále víme, že graf funkce protíná osu y v bodě o y-ové souřadnici rovné koeficientu b. Koeficient $b = -1,5$.



9. Graf lineární funkce je zadán dvěma body $A = [1; 1]$, $B = [-3; -1]$. Načrtněte graf lineární funkce a

Graf získáme snadno tak, že v kartézské soustavě souřadnic zobrazíme body $A = [1; 1]$, $B = [-3; -1]$ a proložíme jimi přímku.



3. Je dán předpis funkce $f : y = 0,5x^2 - 2$.
Načrtněte graf této funkce.

Koeficient a v předpisu funkce má kladné znaménko - parabola bude 'otevřená' nahoru. Koeficient b je nulový - x-ová souřadnice vrcholu bude mít hodnotu 0. Souřadnici y vrcholu určíme z koeficientu c. Vrchol paraboly vypočteme podle $V = [-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}]$. Vrchol paraboly má souřadnice $V = [0; -2]$. Jedná se o druhý speciální případ kvadratické funkce, průsečíky paraboly s osou x můžeme zjistit snadno, když rovnici

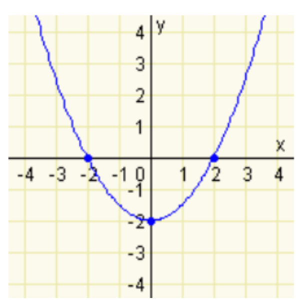
$$0,5x^2 - 2 = 0$$

upravíme na tvar

$$0,5x^2 = 2,$$

odkud

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$



4. Je dán předpis funkce $f: y = -3x^2 + 6x$.
Načrtněte graf této funkce.

Koeficient a v předpisu funkce má záporné znaménko - parabola bude 'otevřená' dolů. Koeficient b v předpisu funkce má opačné znaménko než koeficient a, vrchol paraboly tedy bude napravo od osy y. Koeficient c je nulový, proto parabola protíná osu y v počátku. Souřadnice vrcholu vypočteme podle zmíněného vzorce, jeho souřadnice jsou $V = [1; 3]$. Jedná se o první speciální případ kvadratické funkce, průsečíky paraboly s osou x zjistíme snadno, když v rovnici

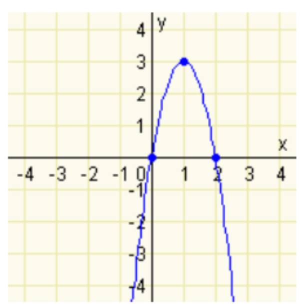
$$-3x^2 + 6x = 0$$

vytkneme $3x$

$$3x(-x + 2) = 0,$$

odkud

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



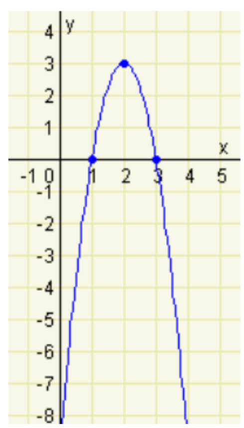
5. Je dán předpis funkce $f : y = -3x^2 + 12x - 9$.
   Načrtněte graf této funkce.

   Koeficient a v předpisu funkce má záporné znaménko - parabola bude 'otevřená' dolů. Koeficient b v předpisu funkce má opačné znaménko než koeficient a, vrchol paraboly tedy bude napravo od osy y. Koeficient c má hodnotu -9, proto parabola protne osu y v bodě o y-ové souřadnici -9. Souřadnice vrcholu vypočteme podle zmíněného vzorce, jeho souřadnice jsou $V = [2; 3]$. Průsečíky paraboly s osou x zjistíme, když vyřešíme kvadratickou rovnici

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0.$$

   x-ové souřadnice průsečíků paraboly s osou x jsou

$$x_1 = 1, x_2 = 3.$$



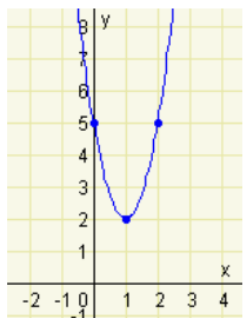
6. Je dán předpis funkce $f: y = 3x^2 - 6x + 5$.
   Načrtněte graf této funkce.

   Koeficient a má kladné znaménko - parabola bude 'otevřená' nahoru. Koeficient b má opačné znaménko než koeficient a, vrchol paraboly tedy bude napravo od osy y. Koeficient c má hodnotu 5, proto parabola protne osu y v bodě o y-ové souřadnici 5. Souřadnice vrcholu vypočteme podle zmíněného vzorce, jeho souřadnice jsou $V = [1; 2]$. Průsečíky paraboly s osou x neexistují, což zjistíme, když se pokusíme vyřešit kvadratickou rovnici

$$3x^2 - 6x + 5 = 0.$$

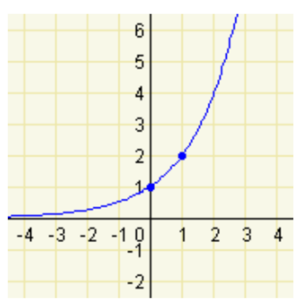
   Diskriminant této kvadratické rovnice $D = -24$ je záporný, proto rovnice nemá žádné reálné řešení.

   Průsečíky s osou x, které nám pomohly k sestrojení grafu v předchozích případech zde použít nemůžeme. Známe souřadnice vrcholu paraboly. Další bod ležící na grafu funkce je bod o souřadnicích $[0; 5]$. Už dříve jsme si mohli povšimnout, že graf kvadratické funkce je symetrický podle osy paraboly. Díky této vlastnosti snadno určíme souřadnice dalšího bodu ležícího na grafu této funkce $[2; 5]$.



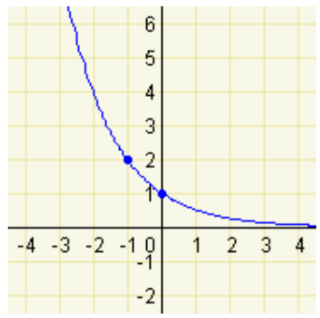
1. Nakreslete grafy funkcí:
   a) $f: y = 2^x$

   Z výkladu víme, že pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí a zároveň pro libovolný základ graf exponenciální funkce prochází bodem o souřadnicích $[0; 1]$. Dále víme, že graf exponenciální funkce o základu 2 prochází bodem o souřadnicích $[1; 2]$.



b) $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Z výkladu víme, že pro $a \in (0;1)$ je exponenciální funkce klesající a zároveň pro libovolný základ graf exponenciální funkce prochází bodem o souřadnicích $[0;1]$. Dále víme, že graf exponenciální funkce o základu $\frac{1}{2}$ prochází bodem $[-1;2]$

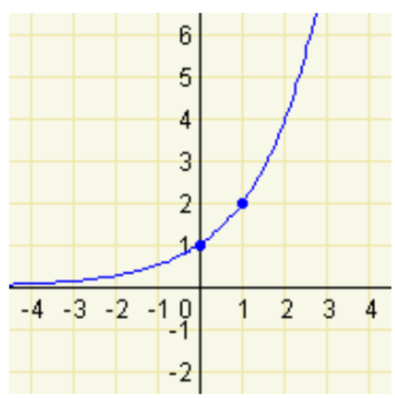


c) $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

Úpravou exponenciálního výrazu

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{\frac{1^x}{2^x}} = \frac{1}{\frac{1}{2^x}} = 2^x$$

je zřejmé, že se jedná o stejnou funkci jako v případě a).

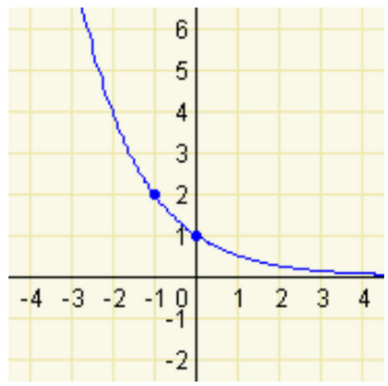


d) $f : y = 2^{-x}$

Úpravou exponenciálního výrazu

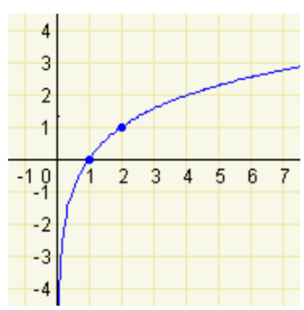
$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

je zřejmé, že se jedná o stejnou funkci jako v případě b).



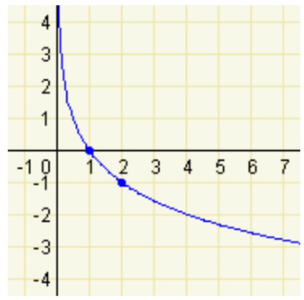
a) $f : y = \log_2 x$

Z výkladu víme, že pro $a > 1$ je logaritmická funkce rostoucí a zároveň graf logaritmické funkce prochází body o souřadnicích $[1; 0]$ a $[2; 1]$.



b) $f: y = \log_{0.5} x$

Z výkladu víme, že pro $a \in (0;1)$ je logaritmická funkce klesající a zároveň graf logaritmické funkce prochází body o souřadnicích $[1;0]$ a $[2;-1]$, neboť $0,5 = \frac{1}{2}$.



c) $f: y = \frac{1}{\log_x 2}$

Úpravou logaritmického výrazu

$$\frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$$

bychom mohli usuzovat, že se jedná o stejnou funkci jako v případě **a**. Je však třeba si uvědomit, pro jaké základy je logaritmická funkce definována. Základ logaritmu může být kladné číslo různé od 1, proto tato funkce je definována na definičním oboru $D(f) = (0;\infty) - \{1\}$.