I. 5. Vyšetřování průběhu funkce

Monotonie a lokální extrémy

Důsledek 12. *Nechť má funkce* $f(x)$ *konečnou derivaci na intervalu* I.

- *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *rostoucí na* I.
- *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *klesající na* I.

Definice 13. Nechť $x_0 \in D(f)$. Tento bod se nazývá *stacionární*, pokud $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 14. Lokální extrém může nastat buď ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta 15. *Nechť je funkce* $f(x)$ *spojitá v bodě* x_0 *a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí* $\mathcal{O}\{x_0\}\setminus x_0$. *Jestliže pro všechna* $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x < x_0$, *je* $f(x_0) > 0$ *(*$f(x_0) < 0$*) a jestliže pro všechna* $x \in \mathcal{O}\{x_0\}$, $x > x_0$, *je* $f(x_0) < 0$ *(*$f(x_0) > 0$*), pak má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *ostré lokální maximum (minimum).*

Věta 16. *Nechť* $f'(x_0) = 0$. *Je-li* $f''(x_0) > 0$, *pak má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *ostré lokální minimum. Je-li* $f''(x_0) < 0$, *pak má funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 *ostré lokální maximum.*

Konvexnost, konkávnost a inflexní body

Důsledek 17. *Nechť* I *je otevřený interval a funkce* $f(x)$ *má vlastní druhou derivaci na intervalu* I.

- *Je-li* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *ostře konvexní na* I.
- *Je-li* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in I$, *pak je* f *ostře konkávní na* I.

Definice 18. Nechť $x_0 \in D(f)$. Tento bod se nazývá *kritický*, pokud $f''(x_0) = 0$.

Věta 19.

- *Nechť* x_0 *je inflexní bod a nechť existuje* $f''(x_0)$. *Potom* $f''(x_0) = 0$.
- *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a existuje okolí* $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ *takové, že platí* $f''(x_0) < 0$ *pro každé* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *a* $f''(x_0) > 0$ *pro každé* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *nebo naopak. Pak je* x_0 *inflexním bodem funkce* $f(x)$.
- *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$. *Pak je* x_0 *inflexním bodem funkce* $f(x)$.

Poznámka 20. Inflexním bodem může může být buď kritický bod nebo bod, kde $f''(x_0)$ neexistuje. Zde je potřeba dát pozor na definici inflexního bodu. V některých publikacích bývá inflexní bod definován jako kritický bod, v němž druhá derivace mění znaménko, což znamená, že v inflexním bodě musí existovat vlastní druhá derivace, jejíž hodnota je rovna nule. Inflexní body bývají někdy ještě rozdělovány do dvou kategorií podle chování $f'(x_0)$. Pokud x_0 je inflexní bod a současně $f'(x_0) = 0$, nazývá se bod x_0 *sedlovým bode* (též stacionární inflexní bod), a pokud x_0 je inflexní bod s $f'(x_0) \neq 0$, hovoříme o *nestacionárním inflexním bodě*.

Asymptoty

Definice 21. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

Věta 22. *Přímka $y = ax + b$ je <u>asymptotou se směrnicí</u> funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když existují konečné limity*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Vyšetřování průběhu funkce — postup

i) Definiční obor;
ii) spojitost, charakterostika bodů nespojitosti;
iii) lichost, sudost, periodičnost;
iv) $f(x) = 0$, intervaly, kde je funkce kladná a záporná;
v) $f'(x) = 0$ a $D(f')$;
vi) monotonie, extrémy;
vii) $f''(x) = 0$ a $D(f'')$;
viii) konvexnost, konkávnost, inflexní body;
ix) asymptoty bez směrnice a směrnicí;
x) graf funkce.

(247) Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = x^{-3}\, e^{-x \sin x}$$

sudá, nebo lichá.

Řešení:

Připomeňme, že funkce je sudá, jestliže je její graf symetrický dle osy y, tj. $f(-x) = f(x)$, a lichá, jestliže je její graf symetrický dle počátku soustavy souřadnic, tj. $f(-x) = -f(x)$. Spočtěme tedy, čemu se rovná $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^{-3}\, e^{-(-x)\sin(-x)} = -x^{-3}\, e^{x(-\sin x)} = -x^{-3}\, e^{-x \sin x} = -f(x).$$

Daná funkce je tedy lichá.

(248) Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \frac{x(x^2+5)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{x^7} \ln \sqrt[3]{x^2}}$$

sudá, nebo lichá.

Řešení:

Spočtěme, čemu se rovná $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)[(-x)^2+5]}{\operatorname{cotg} \frac{1}{(-x)^7} \ln \sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{-x(x^2+5)}{\operatorname{cotg} \left(-\frac{1}{x^7}\right) \ln \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{-x(x^2+5)}{-\operatorname{cotg} \frac{1}{x^7} \ln \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x(x^2+5)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{x^7} \ln \sqrt[3]{x^2}} = f(x). \end{aligned}$$

Daná funkce je tedy sudá.

(249) Zjistěte, zda je funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sin x}$$

sudá, nebo lichá.

Řešení:

Spočtěme, čemu se rovná $f(-x)$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 1}{\sin(-x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{-\sin x} = -\frac{x^2 + 2x + 1}{\sin x} \neq \pm f(x).$$

Daná funkce tedy není ani sudá, ani lichá.

(250) Rozhodněte o kladnosti a zápornosti funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)\,e^{\sin x}}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Řešení:

Funkce může změnit znaménko pouze ve svém nulovém bodě (protnutím osy x), nebo v bodech, kde není definována (přeskočením osy x). Proto nejprve určíme definiční obor dané funkce

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme nulové body této funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ \frac{(x-2)\,e^{\sin x}}{\operatorname{arccotg} x} &= 0, \\ (x-2)\,e^{\sin x} &= 0, \\ x-2 &= 0, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme celkem dva intervaly, na nichž musíme zjistit znaménko funkce.

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

Daná funkce je tedy záporná (její graf je pod osou x) v intervalu $(-\infty, 2)$ a kladná (její graf je nad osou x) v intervalu $(2, \infty)$.

(251) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obor funkce $f(x)$. Je zřejmé, že platí $D(f) = \mathbb{R}$. Spočítáme první derivaci, tj.

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 60x^2(x^2 - x - 2).$$

Nyní musíme určit definiční obor pro $f'(x)$, ten je očividně $D(f') = \mathbb{R}$, a stacionární body funkce $f(x)$, tedy musíme vyřešit rovnici $f'(x) = 0$. Proto

$$60x^2(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$$

Tyto body nám rozdělí definiční obor rozdělí na čtyři intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$ a $(2, \infty)$, ve kterých zjistíme znaménka $f'(x)$. Podle těchto znamének určíme průběh funkce v jednotlivých intervalech a určíme případné extrémy. K tomu nám pomůže následující tabulka

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Odtud je vidět, že funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalech $(-\infty, -1)$, a $(2, \infty)$, klesající v $(-1, 2)$. Funkce $f(x)$ má dva lokální extrémy, lokální maximum pro $x = -1$ a lokální minimum pro $x = 2$.

(252) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = x\,e^{-x^2}.$$

Řešení:

Stejným postupem jako v předchozím příkladě obdržíme

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) \quad \text{a} \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme stacionární body funkce $f(x)$, proto

$$e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1-2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ a } x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nyní se nám definiční obor funkce $f(x)$ rozpadl na tři intervaly, ve kterých určíme průběh funkce, tj.

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Tedy funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a klesající v intervalech $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Také má dva lokální extrémy, konkrétně lokální minimum pro $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a lokální maximum pro $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(253) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci
$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}.$$

Řešení:

Určíme potřebné definiční obory a derivaci $f(x)$, tj.
$$D(f) = (0,1) \cup (1,\infty), \quad f'(x) = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}, \quad D(f') = (0,1) \cup (1,\infty).$$
Určíme stacionární body, proto
$$\frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} \quad \Rightarrow \quad x\,(2\ln x - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } \ln x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = e^{\frac{1}{2}}.$$
Ovšem bod $x_1 \notin D(f)$, proto je stacionárním bodem pouze x_2. Nyní analyzujeme monotonii funkce $f(x)$, tj.

x	$(0,1)$	$\left(1, e^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{1}{2}}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Tedy funkce $f(x)$ je klesající v intervalech $(0,1)$, a $(1,\sqrt{e})$, rostoucí v intervalu $(\sqrt{e},\infty)$ a s lokálním minimem pro $x = \sqrt{e}$.

(254) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = x - 2\sin x, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory (ty jsou určeny již zadáním příkladu) a $f'(x)$, tj.

$$D(f) = (0, 2\pi), \quad f'(x) = 1 - 2\cos x, \quad D(f') = (0, 2\pi).$$

Najdeme stacionární body

$$1 - 2\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{3} \text{ a } x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

A analyzujeme monotonii funkce $f(x)$

x	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí na intervalu $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ a klesající na intervalech $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$. Funkce má také dva lokální extrémy, lokální minimum pro $x = \frac{\pi}{3}$ a lokální maximum v bodě $x = \frac{5\pi}{3}$.

(255) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

Nejdříve určíme definiční obory a $f'(x)$, tj.

$$D(f) = (0, \infty), \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \ln\frac{1}{x}\right), \quad D(f') = (0, \infty).$$

Najdeme stacionární body

$$-\frac{1}{x^2}\left(1 + \ln\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = e\,.$$

A analyzujeme monotonii funkce $f(x)$

x	$(0, e)$	(e, ∞)
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí na intervalu (e, ∞) a klesající na intervalu $(0, e)$. Funkce má také lokální minimum pro $x = e$.

(256) Určete intervaly monotonie a extrémy pro funkci
$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory a $f'(x)$, tj.
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{x^2+4x+3}{e^x}, \quad D(f') = \mathbb{R}.$$
Najdeme stacionární body
$$-\frac{x^2+4x+3}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+3=0$$
$$\Rightarrow \quad (x+1)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \text{ nebo } x=-3.$$
A analyzujeme monotonii funkce $f(x)$

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ je tedy rostoucí pro $x \in (-3,-1)$ a klesající pro $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,\infty)$. Funkce má lokální minimum pro $x=-3$ a lokální maximum pro $x=-1$.

(257) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce
$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}.$$

Řešení:

K analyzování chování tečen grafu funkce $f(x)$ použijeme postup analogický vyšetřování monotonie funkce s tím, že budeme zjišťovat znaménkové změny funkce $f''(x)$. Tedy, nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, k čemuž pochopitelně potřebuje vypočítat i $f'(x)$ – tu ale již známe z příkladu 256, tedy
$$D(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{x^2+4x+3}{e^x},\ f''(x) = \frac{x^2+2x-1}{e^x},\ D(f'') = \mathbb{R}.$$
Nyní určíme kritické body, což jsou řešení rovnice $f''(x) = 0$, tj.
$$\frac{x^2+2x-1}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1-\sqrt{2} \text{ a } x_2 = -1+\sqrt{2}.$$
Teď se nám definiční obor rozpadl na tři intervaly, ve kterých zjistíme jednotlivá znaménka $f''(x)$, tj.

x	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalech $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ a $(-1+\sqrt{2}, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ a má dva inflexní body pro $x = -1-\sqrt{2}$ a $x = -1+\sqrt{2}$.

(258) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3.$$

Řešení:

K analyzování chování tečen grafu funkce $f(x)$ použijeme postup analogický vyšetřování monotonie funkce s tím, že budeme zjišťovat znaménkové změny funkce $f''(x)$. Tedy, nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, k čemuž pochopitelně potřebuje vypočítat i $f'(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7,\ f''(x) = 12x^2 - 12x - 24,\ D(f'') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme kritické body, což jsou řešení rovnice $f''(x) = 0$, tj.

$$12x^2 - 12x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \text{ a } x_2 = -1.$$

Teď se nám definiční obor rozpadl na tři intervaly, ve kterých zjistíme jednotlivá znaménka $f''(x)$, tj.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 2)$. Funkce má dva inflexní body pro $x = -1$ a $x = 2$.

(259) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce

$$f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R},\;\; f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - x^2\right),\;\; f''(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 3\right),\;\; D(f'') = \mathbb{R}.$$

Nyní určíme kritické body, tj.

$$x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 3\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ nebo } x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\; x_2 = \sqrt{3} \text{ a } x_3 = -\sqrt{3}.$$

Teď se nám definiční obor rozpadl na čtyři intervaly, ve kterých zjistíme jednotlivá znaménka $f''(x)$, tj.

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ je konvexní v intervalech $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$, konkávní v $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$. Funkce má tři inflexní body pro $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

(260) Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce
$$f(x) = \sqrt[5]{x^3}.$$

Řešení:

Nejdříve určíme definiční obory a $f''(x)$, tj.
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Rovnice
$$-\frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}} = 0$$
nemá řešení. Ovšem druhá derivace neexistuje pro $x = 0$, proto nám tento bod rozdělí definiční obor funkce $f(x)$ na dva intervaly, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

Funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konkávní na intervalu $(0, -\infty)$. Funkce má inflexní bod pro $x = 0$.

(261) Určete asymptoty bez směrnice funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Řešení:

Určíme definiční obor funkce $f(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

proto jediným možným bodem, kterým může vést asymptota bez směrnice je $x = 0$. Musíme ověřit limitní chování funkce $f(x)$ v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Proto existuje asymptota bez směrnice a je dána rovnicí $x = 0$.

(262) Určete asymptoty bez směrnice funkce

$$f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení:

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě. Určíme definiční obor funkce $f(x)$, tj.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

proto jediným možným bodem, kterým může vést asymptota bez směrnice je $x = 0$. Musíme ověřit limitní chování funkce $f(x)$ v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to 0} \left(5x + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Proto asymptota bez směrnice neexistuje.

(263) Určete asymptoty v $\pm\infty$ funkce
$$f(x)=\frac{3x^2}{x-1}.$$

Řešení:

K určení rovnice asymptoty se směrnicí budeme postupovat dle daných vzorců, proto
$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{1-\frac{1}{x}}=3,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-3x^2+3x}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=3.$$
Při výpočtu jsme využili možnost nerozlišovat, zda limitu počítáme v $+\infty$ nebo $-\infty$ (toto samozřejmě v některých případech není možné a asymptoty se mohou lišit). Proto rovnice asymptoty se směrnicí je v obou směrech rovna $y=3x+3$.

(264) Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}.$$

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na asymptoty bez směrnice. Proto nejdříve určíme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}.$$

V „dírách" definičního oboru vypočítáme jednostranné limity, tj.

$$\lim_{x\to 2} \frac{4+x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)} = \begin{cases} +\infty, & x \to 2^-, \\ -\infty, & x \to 2^+, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{4+x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to -2} \frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)} = \begin{cases} +\infty, & x \to -2^-, \\ -\infty, & x \to -2^+. \end{cases}$$

Funkce $f(x)$ má tedy dvě asymptoty bez směrnice o rovnicí $x = 2$ a $x = -2$. Nyní určíme asymptoty se směrnicí, tj.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4+x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+x^3}{4x-x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^3}+1}{\frac{4}{x^2}-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4+x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+x^3+4x-x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}}{\frac{4}{x^2}-1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = -x$.

(265) Určete asymptoty funkce
$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Řešení:

Nejdříve se zaměříme na asymptoty bez směrnice. Proto nejdříve určíme definiční obor
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
Vypočítáme jednostranné limity v -1, tj.
$$\lim_{x \to -1} \frac{e^x}{x+1} = \begin{cases} +\infty, & x \to -1^+, \\ -\infty, & x \to -1^-, \end{cases}$$
Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu bez směrnice o rovnici $x = -1$. Nyní určíme asymptoty se směrnicí, tj.
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x}{x^2+x} =$$
$$= \begin{cases} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2+x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x+1} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty, \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = 0. \end{cases}$$
V dalším nás tedy zajímá pouze směr do $-\infty$, proto
$$b = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0.$$
Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí pouze ve směru $-\infty$ o rovnici $y = 0$.

(266) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x^2-1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned obdržíme

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^3}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^3}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá (to nám usnadnění kreslení grafu). Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
sgn f	$-$	$+$	$-$	$+$
f	záporná	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(x^2-3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3},$$

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},-1\right)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
sgn f′	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má lokální maximum pro $x = -\sqrt{3}$ a lokální minimum pro $x = \sqrt{3}$. Ve význačných bodech (lok. extrémy, infl. body) je vhodné znát i jejich funkční hodnotu, proto spočítáme $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ a $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\left(x^2+3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tedy v bodě $x = 0$ inflexní bod. Z předchozího již víme, že $f(0) = 0$. V inflexním bodě určíme ještě směrnici tečny, tj. $f'(0) = 0$, což znamená, že tečna je v tomto bodě rovnoběžná s osou x.

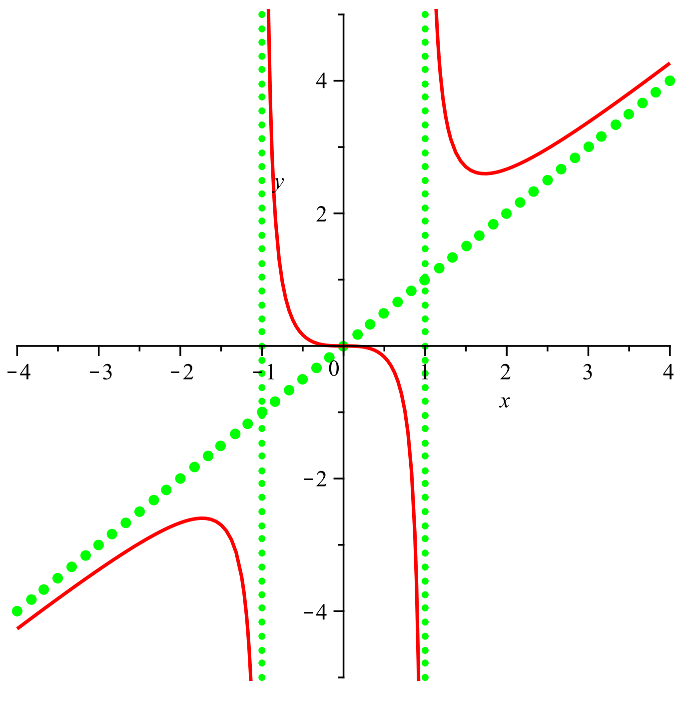
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x = 1$ a $x = -1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = x$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 17. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 266.

(267) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x+1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodu nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
sgn f′	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Z tabulky vidíme, že funkce má v $x=-2$ lokální minimum a v $x=0$ lokální maximum. Spočtěme v těchto význačných bodech funkční hodnotu.

$$f(-2) = 4, \qquad f(0) = 0.$$

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

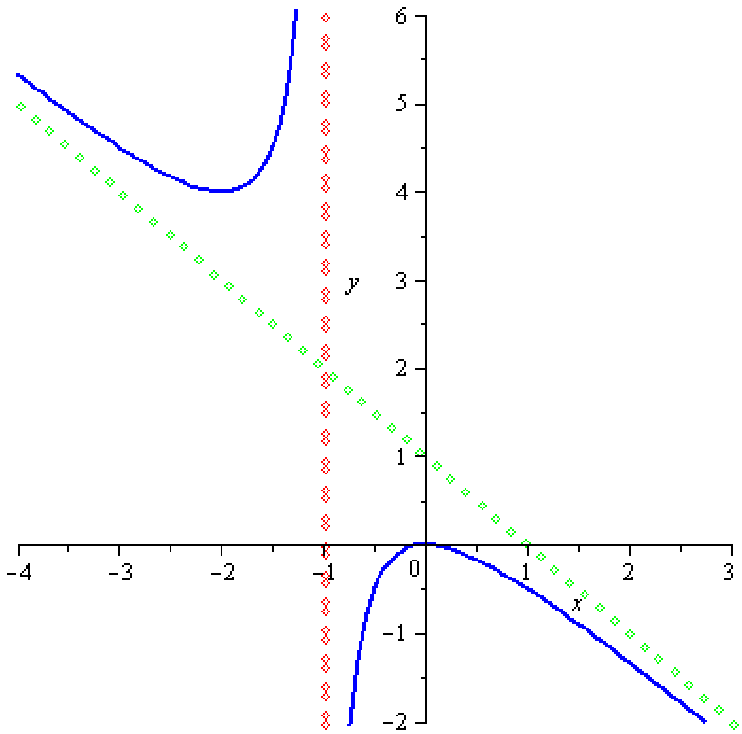
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má jednu asymptotu bez směrnice o rovnici $x = -1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} = -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 18. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 267.

(268) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna kladná reálná čísla, tedy

$$D(f) = (0, \infty).$$

ii) Zjistíme limitní chování na okraji definičního oboru

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \ln x \left| \infty - \infty \right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x\ln x}{x}$$

$$\left| \begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0 \\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+x\ln x}{x} = \frac{1+0}{0} \end{array} \right| = \infty.$$

iii) Vzhledem k tvaru definičního oboru je zřejmé, že zadaná funkce není ani lichá, ani sudá, ani periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ \frac{1}{x} + \ln x &= 0, \\ \ln x &= -\frac{1}{x}, \\ \ln x^x &= -1, \end{aligned}$$

kde použité úpravy jsou vzhledem k oboru hodnot korektní. Protože $\ln x^x > 0$, daná funkce nemá žádný nulový bod a je tedy na celém svém definičním oboru buď pouze kladná, nebo pouze záporná (zdůrazněme, že definiční obor je „bez děr“). Tedy

x	$(0, \infty)$
sgn f	$+$
f	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1.$$

Připomeňme, že vše navíc probíhá na definičním oboru původní funkce, tj.

x	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = 1$ lokální minimum. Spočtěme v tomto význačném bodě funkční hodnotu.

$$f(1) = 1 + 0 = 1.$$

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-x^2+2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2.$$

x	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

Čili funkce f má v $x=2$ inflexní bod. Funkční hodnota v něm je

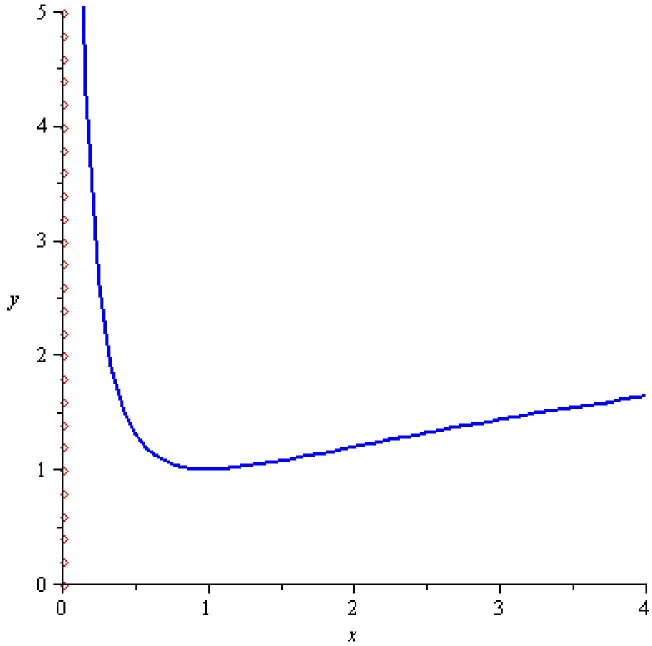
$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \doteq 1,19.$$

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má jednu asymptotu bez směrnice o rovnici $x=0$. Asymptotu se směrnicí má, opět vzhledem k definičnímu oboru, smysl hledat pouze v $+\infty$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x\ln x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|$$
$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \ln x = \infty,$$

tedy funkce $f(x)$ asymptotu se směrnicí nemá.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



OBRÁZEK 19. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 268.

(269) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $3x^2 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodu nespojitosti, tj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-2x}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{1+2x}{3x^2},$$

není zadaná funkce lichá ani sudá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$+$	$-$
f	kladná	kladná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{2\,(x-1)}{3x^3}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má pro $x = 1$ lokální minimum s hodnotou $f(1) = -\frac{1}{3}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = -\frac{2\,(2x-3)}{3x^4}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(2x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2},$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má pro $x = \frac{3}{2}$ inflexní bod. Platí $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{27}$ a směrnice tečny je rovna $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{81}$, což nám tentokrát náčrt grafu příliš neusnadní.

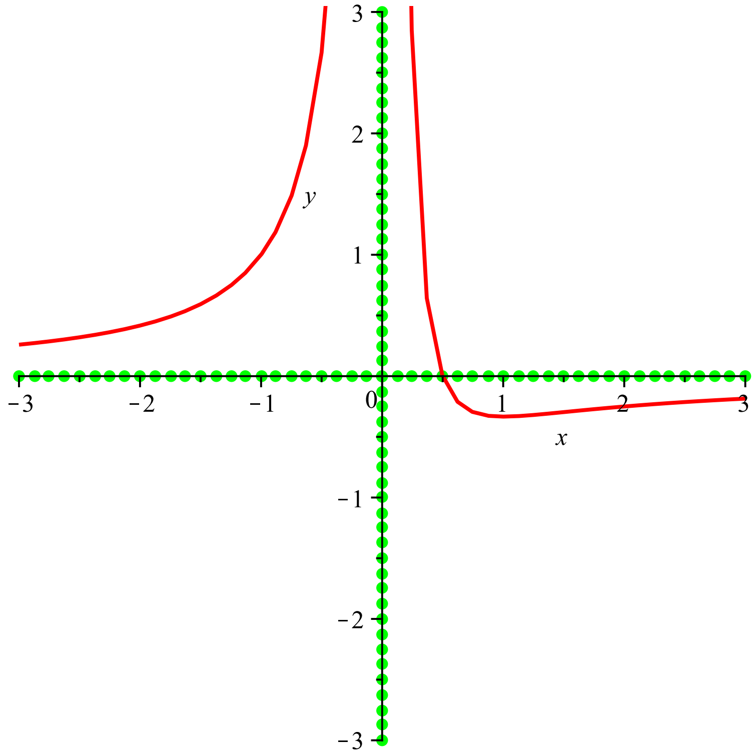
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1-2x}{3x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{3x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}}{3} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}{3} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 20. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 269.

(270) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, tj.
$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Z bodu ii) plyne, že funkce je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí
$$f(-x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x),$$
je zadaná funkce sudá (to nám usnadnění kreslení grafu). Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$-$	$+$
f	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

V bodě lokálního minima $x = 0$ určíme funkční hodnotu, tj. $f(0) = -1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor
$$f''(x) = -\frac{4\left(3x^2-1\right)}{(x^2+1)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}.$$

viii) Určíme inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má dva inflexní body $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ s hodnotami $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ a $f'\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

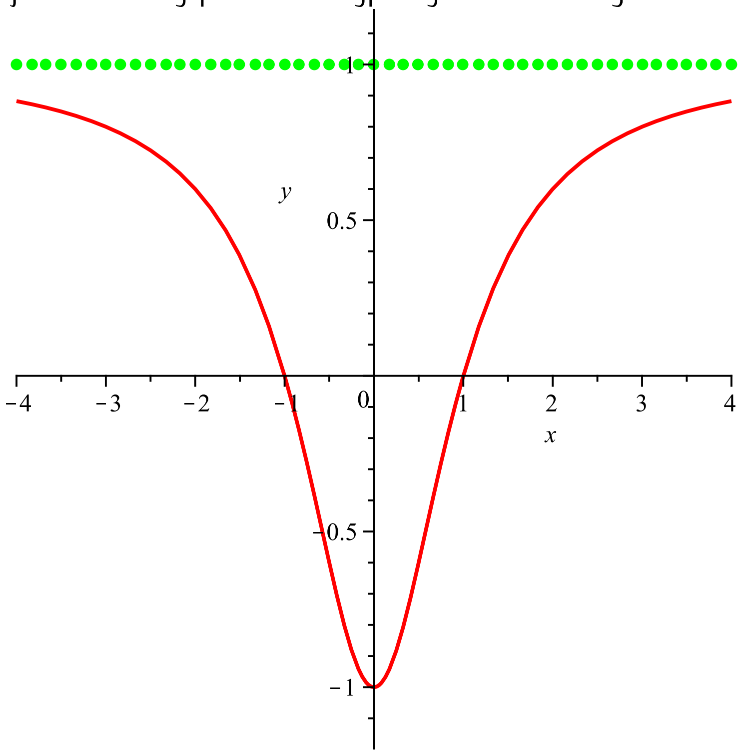
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 1$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 21. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 270.

(271) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x^2-1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned obdržíme

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = -f(x),$$

je zadaná funkce sudá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Je zřejmé, že průsečíky s osou x neexistují (neboť rovnice $x^2+1=0$ nemá řešení). Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$-$	$+$
f	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

V bodě lokálního maxima $x=0$ určíme funkční hodnotu, tj. $f(0) = -1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{4\left(3x^2+1\right)}{(x^2-1)^3}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

viii) Funkce nemá kritické body (rovnice $3x^2 + 1 = 0$ nemá řešení). Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Je vidět, že funkce nemá inflexní body.

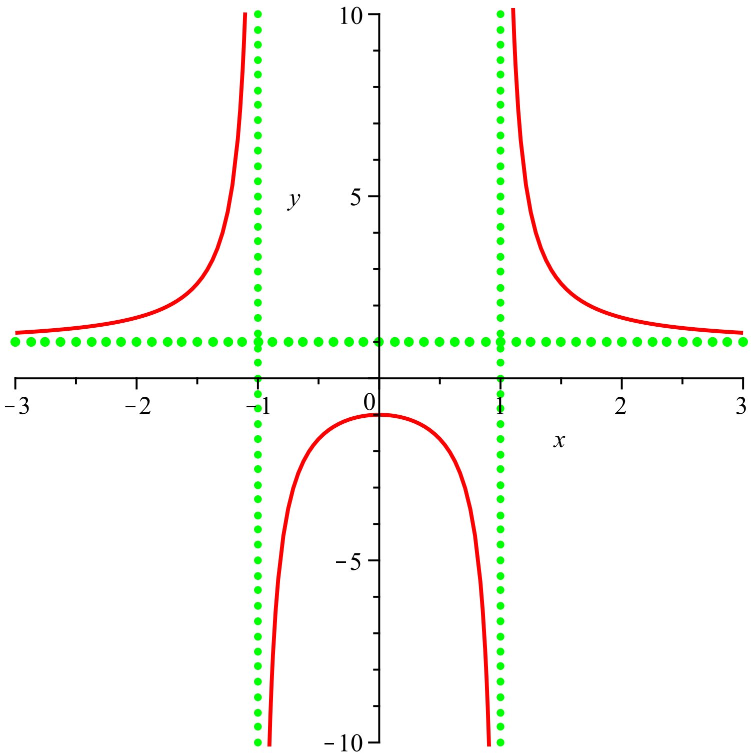
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x = 1$ a $x = -1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 1$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 22. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 271.

(272) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x}{3 - x^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $3 - x^2 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned obdržíme

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x}{3 - x^2} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \left(\frac{x}{\sqrt{3} + x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - x} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x}{3 - x^2} = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \left(\frac{x}{\sqrt{3} + x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - x} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{x}{3 - x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x}{3 - x^2} = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{-x}{3 - x^2} = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
sgn f	$+$	$-$	$+$	$-$
f	kladná	záporná	kladná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{3 + x^2}{(3 - x^2)^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$$

vi) Je zřejmé, že funkce $f(x)$ nemá stacionární body. Určíme intervaly monotonie, tj.

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
sgn f'	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ tedy nemá žádný lokální extrém.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2x\left(9 + x^2\right)}{(3 - x^2)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\left(9 + x^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ má inflexní bod pro $x = 0$. Z předchozího již víme, že $f(0) = 0$. Určíme zde ještě směrnici tečny, tj. $f'(0) = \frac{1}{3}$.

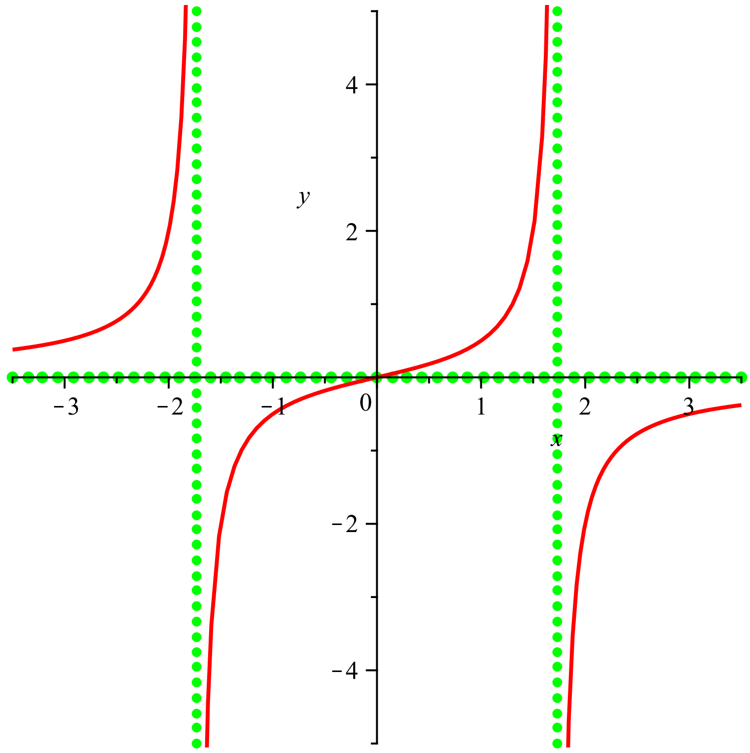
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x = \sqrt{3}$ a $x = -\sqrt{3}$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x}{3-x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{3x - x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - 1} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{3 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 23. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 272.

(273) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R}\{0\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodě nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(-x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1,$$

tedy funkce nemá průsečíky s osou x. Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}, \quad D(f') = \mathbb{R}\setminus\{\pm 0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1,$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Určíme funkčního hodnoty lokálního maxima pro $x = -1$ a minima pro $x = 1$, tj. $f(-1) = -1$ a $f(1) = 1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}, \quad D(f'') = \mathbb{R}\setminus\{\pm 0\}.$$

viii) Inflexní body očividně neexistují, určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

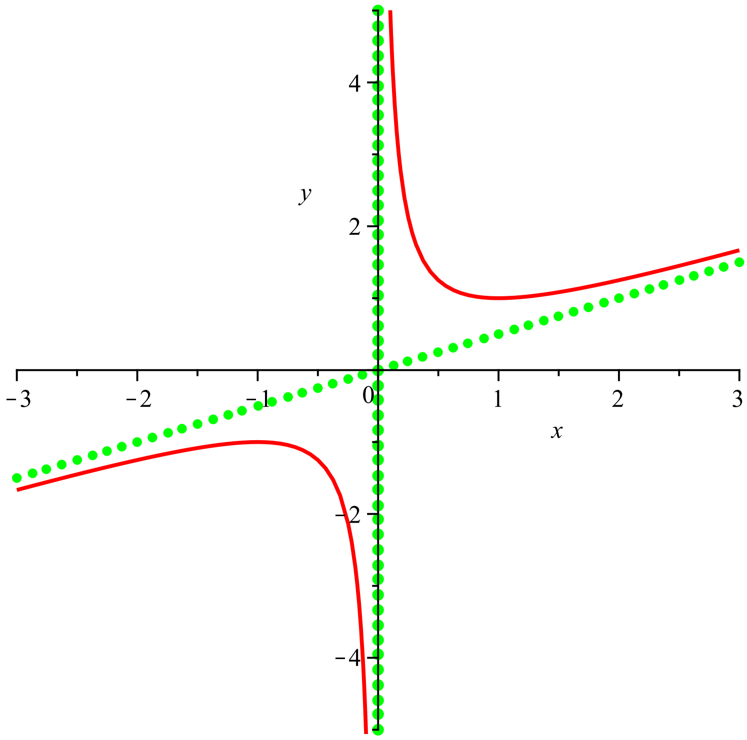
Z tabulky vidíme, že funkce $f(x)$ nemá inflexní bod.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu se směrnicí o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{2x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2},$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = \frac{x}{2}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 24. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 273.

(274) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x^2 - 1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = (0, \infty)\,.$$

ii) Zjistíme limitní chování v levém krajním bodě definičního oboru, tj.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

iii) Definiční obor funkce $f(x)$ není symetrický, proto funkce $f(x)$ ani nemůže být lichá nebo sudá. Navíc, je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad D(f') = (0, \infty)\,.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e,$$

x	$(0, e)$	(e, ∞)
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

Pro $x = e$ má funkce $f(x)$ lokální maximum s funkční hodnotou $f(e) = \frac{1}{e}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}, \quad D(f'') = (0, \infty)\,.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}},$$

x	$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

V bodě $x = e^{\frac{3}{2}}$ má funkce $f(x)$ inflexní bod. Platí $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}}$ a směrnice tečny je rovna $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2\,e^3}$, což nám tentokrát náčrt grafu příliš neusnadní.

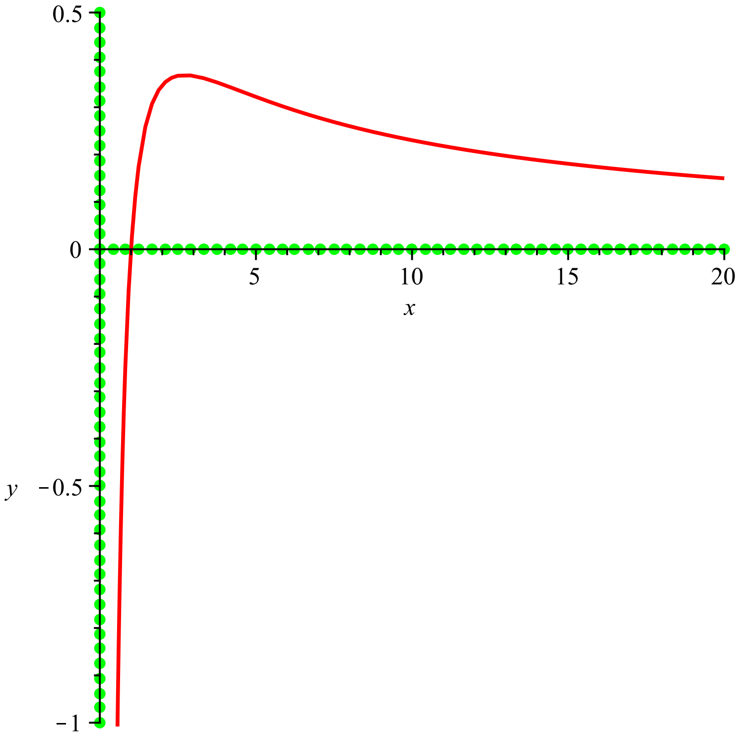
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptotu se směrnicí (pokud existuje – směr pro $x \to -\infty$ nemá smysl uvažovat), proto

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} \;\Big|\, \frac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \;\Big|\, \frac{\infty}{\infty} \,\Big| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 25. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 274.

(275) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x \neq 0$. Proto máme
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ii) Zjistíme limitní chování v bodě nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty.$$

iii) Poněvadž platí
$$f(-x) = \frac{\ln x^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x),$$
je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn f	$-$	$+$	$-$	$+$
f	záporná	kladná	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x) = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm e,$$

x	$(-\infty, -e)$	$(-e, 0)$	$(0, e)$	(e, ∞)
sgn f′	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ ma lokální minimum pro $x = -e$ a lokální maximum pro $x = e$ s funkčními hodnotami $f(-e) = -\frac{2}{e}$ a $f(e) = \frac{2}{e}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor
$$f''(x) = \frac{2\ln x^2 - 6}{x^3}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = e^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm e^{\frac{3}{2}},$$

x	$\left(-\infty, -e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(-e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$	$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tři inflexní body pro $x = \pm e^{\frac{3}{2}}$ a $x = 0$. Vypočítáme funkční hodnoty a směrnice tečen, proto $f\left(-e^{\frac{3}{2}}\right) = -3\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(-e^{\frac{3}{2}}\right) = 5\,e^{3}$, $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = 3\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -e^{-3}$.

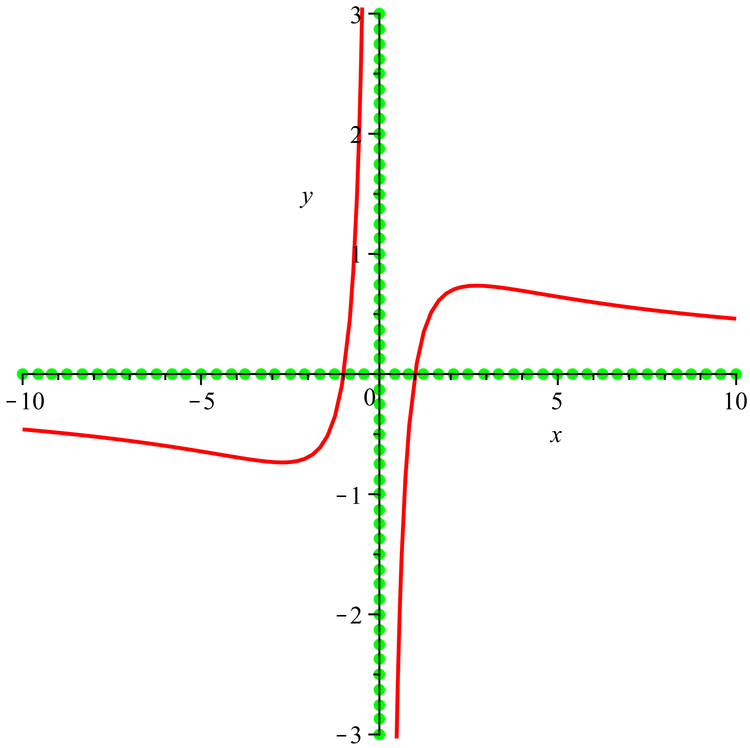
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\ln x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{2x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{1} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má i asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 26. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 275.

(276) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - \ln x.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $\ln x$ existuje. Proto máme

$$D(f) = (0, \infty)\,.$$

ii) Zjistíme limitní chování v levém krajním bodě definičního oboru, proto

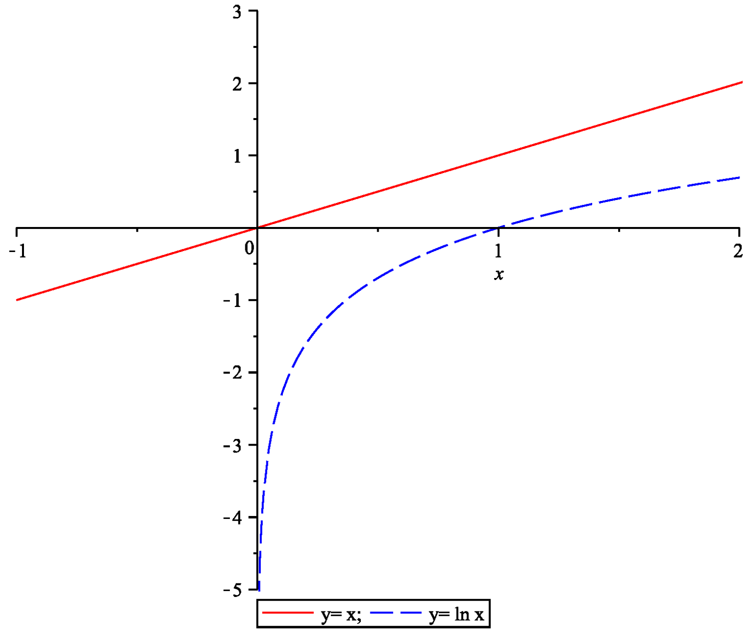
$$\lim_{x \to 0^+} (x - \ln x) = \infty.$$

iii) Definiční obor není symetrický, proto funkce $f(x)$ nemůže být sudá ani lichá. Navíc, je zřejmé, že funkce není ani periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln x.$$

Pokud si vzpomenete na grafy elementárních funkcí, viz



je zřejmé, že funkce $f(x)$ nemá žádné průsečíky s osou x, proto

x	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$
f	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

x	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Určíme hodnotu lokálního minima, tj. $f(1) = 1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

viii) Kritické body neexistují, určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(0,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$
f	$\cup$

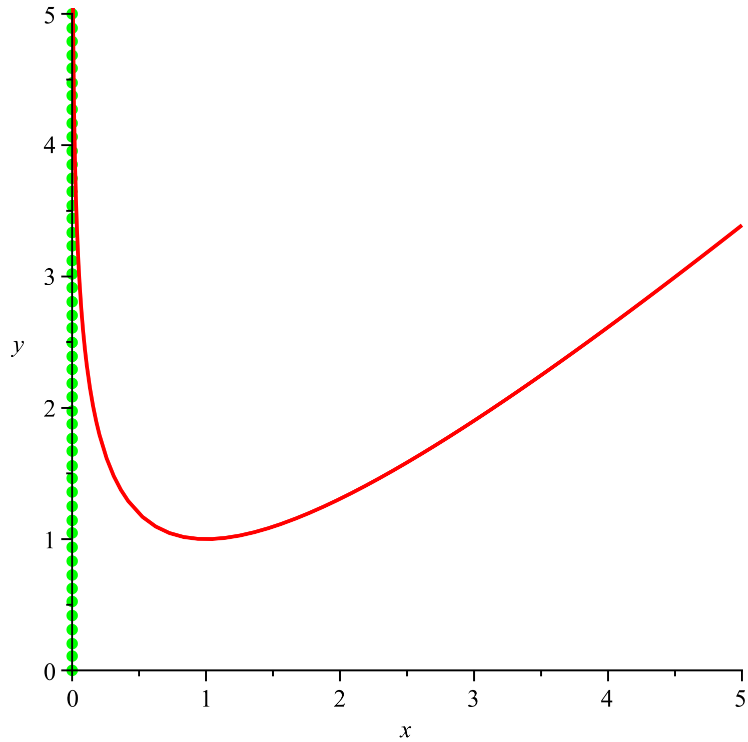
Je tedy zřejmé, že funkce $f(x)$ nemá inflexní bod.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$. Určíme i asymptotu se směrnicí (směr pro $x \to -\infty$ nemá smysl), proto

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \ln x}{x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (x - \ln x - x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Funkce $f(x)$ tey nemá asymptotu se směrnicí.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



OBRÁZEK 27. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 276.

(277) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

v intervalu $x \in [0, 2\pi]$.

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Základní rámec definičního oboru je již dán zadáním příkladu. Dále musí platit

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \text{ a současně } \sin x \neq 1.$$

Řešení druhé rovnice dostaneme ihned, tj. $x \neq \frac{\pi}{2}$ (stále platí $x \in [0, 2\pi]$). První rovnici rozdělíme do dvou možností

$$\begin{array}{lcr} 1+\sin x > 0 \ \wedge \ 1-\sin x > 0 & \text{nebo} & 1+\sin x < 0 \ \wedge \ 1-\sin x < 0, \\ \sin x > -1 \ \wedge \ \sin x < 1 & \text{nebo} & \sin x < -1 \ \wedge \ \sin x > 1, \\ x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \ \wedge \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] & \text{nebo} & \text{soustava nemá řešení.} \end{array}$$

Tedy definiční obor zadané funkce je

$$D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

ii) Určíme hodnoty v krajních bodech definičního oboru, tj. $f(0) = 0$ a $f(2\pi) = 0$. Také zjistíme limitní chování v bodech nespojitosti, proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = -\infty.$$

iii) Vzhledem k definičními oboru není funkce $f(x)$ sudá, lichá ani periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\sin x = 1-\sin x \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi. \end{aligned}$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
sgn f	$+$	$+$	$-$	$-$
f	kladná	kladná	záporná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}, \qquad D(f') = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

vi) Stacionární body neexistují, nyní určíme intervaly monotonie, tj.

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
sgn f′	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Zadaná funkce tedy nemá žádné lokální extrémy.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad D(f'') = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

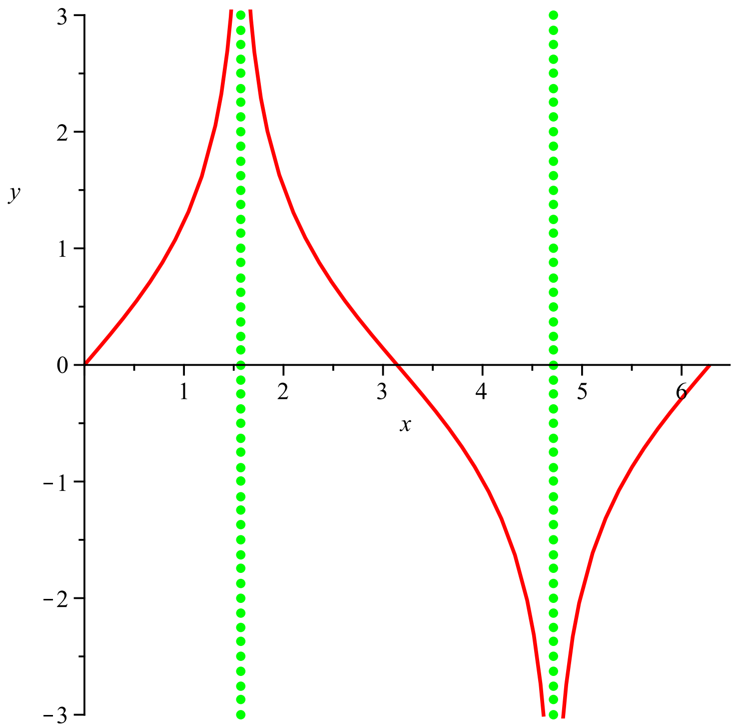
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi.$$

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

Je zřejmé, že kritické body $x_1 = 0$ a $x_3 = 2\pi$ nemohou být inflexními body. Určíme funkční hodnotu a směrnici tečny v inflexním bodě $x = \pi$, tj. $f(\pi) = 0$ a $f'(\pi) = -1$.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má dvě asymptoty bez směrnice o rovnicích $x = \frac{\pi}{2}$ a $x = \frac{3\pi}{2}$. Poněvadž jsme na omezeném intervalu, nemá smysl uvažovat asymptoty se směrnicí.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 28. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 277.

(278) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Funkce $f(x)$ je spojitá v celém definičním oboru.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - x^2\right), \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1,$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ má lokální minimum pro $x = -1$ a lokální maximum $x = 1$ s funkčními hodnotami $f(-1) = -\,e^{-\frac{1}{2}}$ a $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 3\right), \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(x^2 - 3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3}.$$

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkce $f(x)$ má tři inflexní body pro $x = \pm\sqrt{3}$ a pro $x = 0$. Určíme funkční hodnoty a směrnice tečen v inflexních bodech, proto $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f'\left(-\sqrt{3}\right) = -2\,e^{-\frac{3}{2}}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\,e^{-\frac{3}{2}}$ a $f'\left(\sqrt{3}\right) = -2\,e^{-\frac{3}{2}}$.

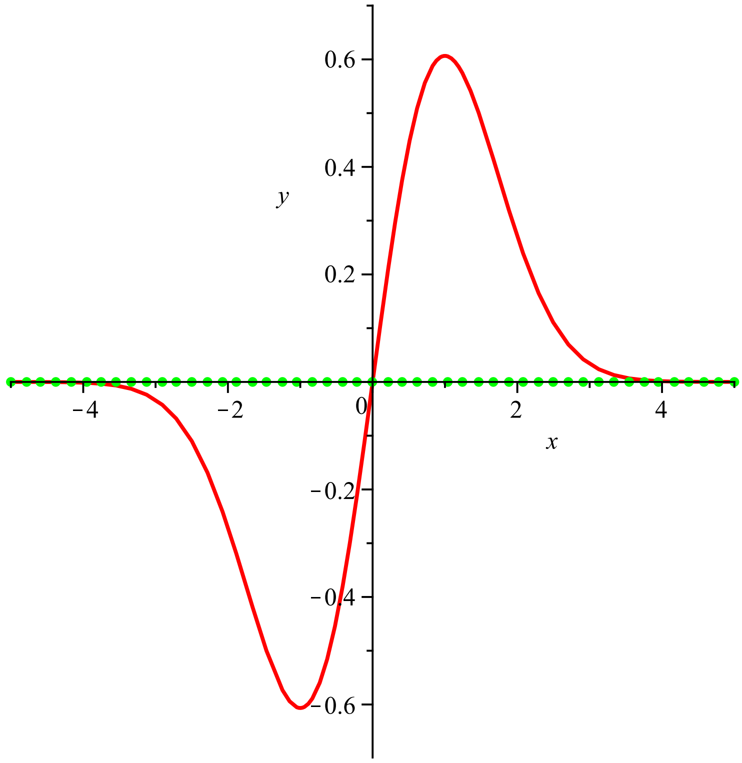
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty se směrnicí. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\,e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\ \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x\,e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = 0$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 29. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 278.

(279) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -(x - \operatorname{arctg} x) = -f(x)$$

je zadaná funkce lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určit průsečíky s osou x není snadné, zřejmě

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Existence dalších nulových bodů můžeme vyloučit, neboť v bodě vi) ukážeme, že funkce je stále rostoucí. Proto obdržíme

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$-$	$+$
f	záporná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad D(f') = \mathbb{R}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ tedy nemá lokální extrémy.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

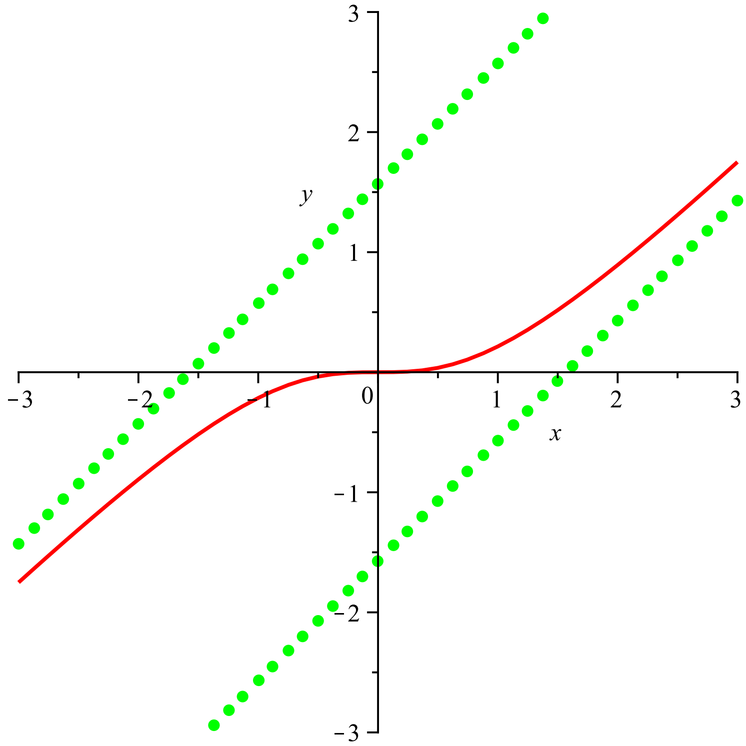
Funkce $f(x)$ má tedy inflexní bod pro $x = 0$. Z předchozího již víme, že $f(0) = 0$. V inflexním bodě určíme ještě směrnici tečny, tj. $f'(0) = 0$, což znamená, že tečna je v tomto bodě rovnoběžná s osou x.

ix) Asymptoty bez směrnice neexistují, určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (x - \operatorname{arctg} x - x) = - \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Funkce $f(x)$ má tedy dvě asymptoty se směrnicí. Pro $x \to -\infty$ je dána rovnicí $y = x + \frac{\pi}{2}$ a pro $x \to +\infty$ máme $y = x - \frac{\pi}{2}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 30. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 279.

(280) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$, tj. $0 \leq (x+1)^2$ a $0 \leq (x-1)^2$, vyhovují funkčnímu předpisu všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Funkce $f(x)$ je spojitá v celém definičním oboru.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \arccos\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

(zde jsme využili vztah $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$) není zadaná funkce lichá ani sudá (to zjistíme již z grafu elementární funkce $\arccos x$). Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
sgn f	$+$	$+$
f	kladná	kladná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2-1\right)}{|x^2-1| \cdot (x^2+1)}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

vi) Vzhledem k definičnímu oboru $f'(x)$ nemáme žádné stacionární body, určíme intervaly monotonie, tj.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
sgn f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ má lokální maximum pro $x = -1$ a lokální minimum $x = 1$ s hodnotami $f(-1) = \pi$ a $f(1) = 0$. V těchto bodech není první derivace definována, proto zde má graf funkce $f(x)$ hrot.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-4x\left(x^2-1\right)}{|x^2-1| \cdot (x^2+1)^2}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

viii) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x\left(x^2-1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Funkce $f(x)$ má tři inflexní body pro $x = \pm 1$ a $x = 0$. Určíme potřebné funkční hodnoty a směrnice tečen, tj. $f(-1) = \pi$, $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -1$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1$.

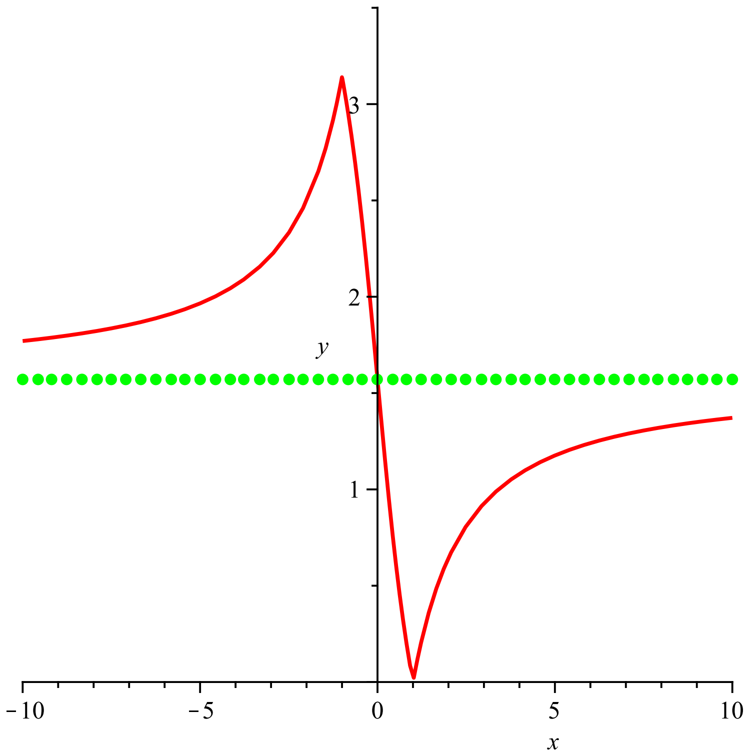
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{x} \left| \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} \right| = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce $f(x)$ má tedy asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = \frac{\pi}{2}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 31. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 280.

(281) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = \sqrt[3]{2x^2 + x^3} = -\sqrt[3]{-2x^2 - x^3}$$

není zadaná funkce ani sudá ani lichá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(2-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f$	$+$	$+$	$-$
f	kladná	kladná	záporná

Ze změny znamének je vidět, že v bodě $x = 0$ je pouze bod dotyku osy x nikoli její průsečík.

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - 3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3},$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Funkce $f(x)$ má lokální minimum pro $x = 0$ a lokální minimum pro $x = \frac{4}{3}$ s hodnotami $f(0) = 0$ a $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$. Navíc, v bodě $x = 0$ není první derivace definována, bude mít graf funkce v tomto bodě hrot.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = -\frac{8}{9(2-x)\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

viii) Druhá derivace nemá nulový bod, určíme tedy intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

V bodě $x = 2$ má funkce $f(x)$ inflexní body. Z předchozího již víme, že $f(2) = 0$. V inflexním bodě určíme ještě směrnici tečny, ovšem $f'(2)$ neexistuje. Z výpočtu $\lim_{x\to 2} f'(x) = -\infty$ plyne, že tečna je v tomto bodě rovnoběžná s osou y.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^2 - x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{\frac{2}{x} - 1}{1}} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\right) \left| -\infty + \infty \right| =$$

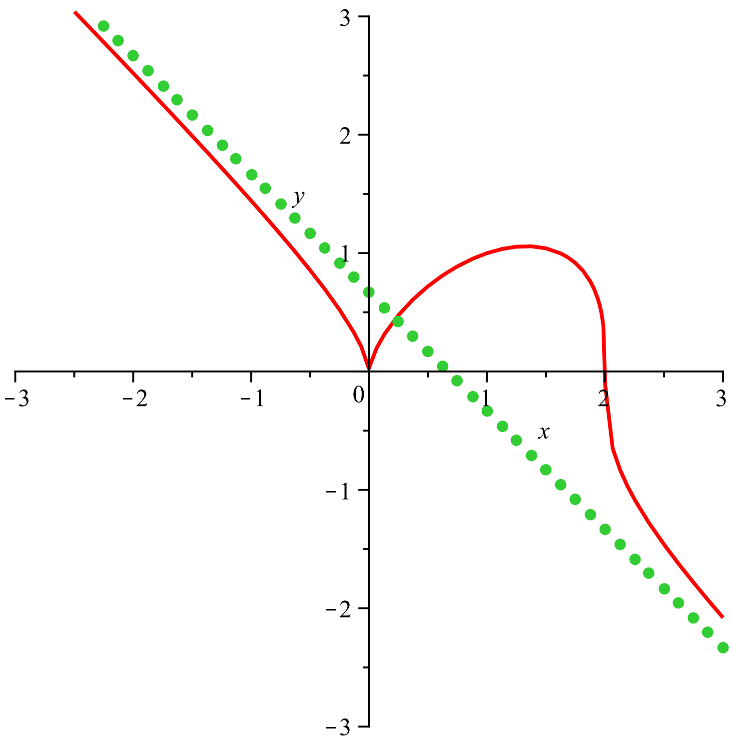
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}} + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}}}{\frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}} \left| \tfrac{0}{0} \right| \overset{\text{l'H.p.}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{3\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{4}{3}}x^2}}{-\frac{1}{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3x^3\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{-4+3x} = \frac{2}{3}$$

Funkce $f(x)$ má asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + \frac{2}{3}$.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 32. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 281.

(282) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla, tj.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

ii) Zadaná funkce je spojitá v $\mathbb{R}$.

iii) Poněvadž platí

$$f(-x) = 2(-x+1) - 3\sqrt[3]{(-x+1)^2}$$

není zadaná funkce lichá ani sudá. Je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8(x+1)^3 = 27(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{19}{8}.$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{19}{8}\right)$	$\left(\frac{19}{8},\infty\right)$
sgn f	$-$	$-$	$+$
f	záporná	záporná	kladná

Je tedy vidět, že v bodě $x = -1$ je pouze bod dotyku grafu funkce $f(x)$ a osy x.

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}, \qquad D(f') = \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
sgn f′	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ má lokální maximum pro $x = -1$ a lokální minimum pro $x = 0$ s hodnotami $f(-1) = 0$ a $f(0) - 1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \qquad D(f'') = \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

viii) Je vidět, že kritické body neexistují. Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$+$	$+$
f	$\cup$	$\cup$

Funkce $f(x)$ tedy nemá inflexní bod.

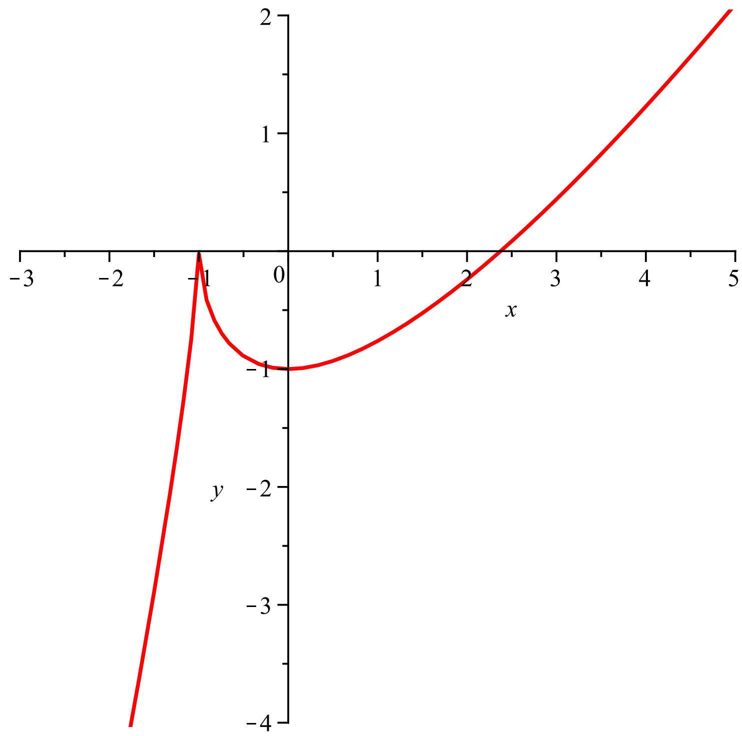
ix) Z bodu ii) plyne, že funkce nemá asymptoty bez směrnice. Určíme nyní asymptoty se směrnicí (pokud existují), proto

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{\text{l'H.p.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}}{1} = 2,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}-2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}\right) = -\infty.$$

Tedy funkce $f(x)$ nemá ani asymptoty se směrnicí.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 33. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 282.

(283) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos(2x)}.$$

Řešení:

Budeme postupovat dle návodu popsaného v úvodní části této kapitoly.

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že
$$\cos 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$
Proto máme
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

ii) Spočítáme limitní chování v bodech nespojitosti (budeme uvažovat pouze interval $[-\pi, \pi]$, viz bod iii)), tj.
$$\lim_{x\to -\frac{3\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{3\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^+} \frac{\cos x}{\cos(2x)} = -\infty.$$

iii) Poněvadž platí
$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\cos(-2x)} = \frac{\cos x}{\cos(2x)} = f(x),$$
je zadaná funkce sudá. Funkce $\cos x$ je periodická s periodou 2π a funkce $\cos(2x)$ je periodická s periodou π. Proto zadaná funkce $f(x)$ je periodická s periodou 2π. Při vyšetřování funkce se tudíž omezíme na libovolný interval délky 2π, my zvolíme interval $[-\pi, \pi]$

iv) Určíme průsečíky s osou x, tj.
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{2}.$$
Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná, proto

x	$\left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
sgn f	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	záporná	kladná	záporná	kladná	záporná	kladná	záporná

v) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.
$$f'(x) = \frac{\left(2\cos^2 x + 1\right)\sin x}{\cos(2x)}, \qquad D(f') = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

vi) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2\cos^2 x + 1\right)\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\pi,\ x_2 = 0,\ x_3 = \pi$$

x	$(\dots,-\pi)$	$\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	$(\pi,\dots)$
sgn f'	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkce $f(x)$ má tedy v intervalu $[-\pi,\pi]$ lokální minima pro $x=\pm\pi$ a lokální maximum pro $x=0$ s hodnotami $f(-\pi)=-1$, $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$.

vii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x)=\frac{\left(11-4\cos^4 x-4\cos^2 x\right)\cos x}{\cos^3 2x},\qquad D(f'')=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}.$$

viii) Vypočítáme kritické body a

$$\begin{aligned} f''(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(11-4\cos^4 x-4\cos^2 x\right)\cos x=0\\ &\Leftrightarrow \quad \cos x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=-\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

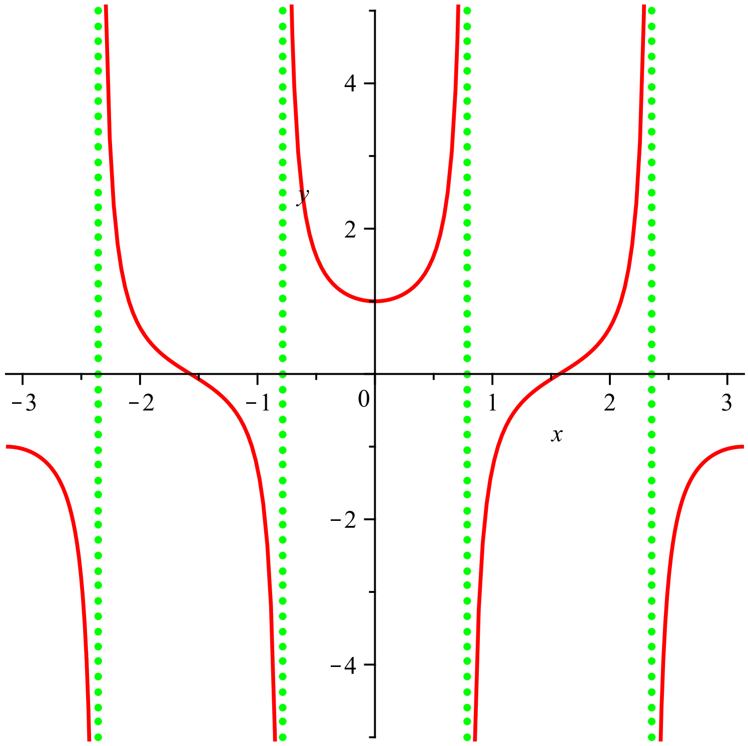
Rovnice $11-4\cos^4 x-4\cos^2 x=0$ nemá řešení, protože při použití substituce $y=\cos^2 x$, dostaneme rovnici $11-4y^2-4y=0$ s řešením $y_1=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}<0$ a $y_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}>1$, tedy řešení původní rovnice neexistuje (stejný výsledek dostaneme bez počítání s využitím faktu $-1\le\cos x\le 1$, potom totiž dostaneme $11-4\cos^4 x-4\cos^2 x\ge 3$). Nyní určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

x	$(\dots,-\pi)$	$\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	$(\pi,\dots)$
sgn f''	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

Funkce $f(x)$ má proto v intervalu $[-\pi,\pi]$ dva inflexní body pro $x=\pm\frac{\pi}{2}$. V inflexních bodech dopočítáme funkční hodnoty a směrnice tečen, tj. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

ix) Z bodu ii) plyne, že funkce má čtyři asymptoty bez směrnice o rovnicích $x=-\frac{3\pi}{4}$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$ a $x=\frac{3\pi}{4}$. Vzhledem k periodičnosti funkce $f(x)$ nemají asymptoty se směrnicí smysl.

x) Nyní zkombinujeme všechny předchozí výpočty a obdržíme graf funkce



Obrázek 34. Graf funkce $f(x)$ z Příkladu 283.