

Slezská univerzita v Opavě
Fyzikální ústav



Matematické metody ve fyzice

Sbírka příkladů

Martin Blaschke, Filip Blaschke

Opava 2022
verze 0.81

Obsah

1	Zábavné příklady	5
1.1	Příklady	5
2	Řady	9
2.1	Úvodní definice a pojmy	9
2.2	Příklady	10
3	Tvorba diferenciálních rovnic	13
3.1	Opakování	13
3.1.1	Separovatelné rovnice	13
3.1.2	Homogenní rovnice	14
3.1.3	Exaktní rovnice	15
3.1.4	Integrační faktor	16
3.1.5	Lineární rovnice prvního řádu	17
3.1.6	Substituční metoda	19
3.1.7	Singulární řešení diferenciálních rovnic	21
3.1.8	Piece-wise řešení diferenciální rovnice	22
3.2	Příklady na tvorbu diferenciálních rovnic	22
3.3	Metoda Lagrangeových multiplikátorů	27
3.4	Laplaceova transformace	28
3.5	Fourierův rozvoj	30
4	Komplexní analýza	33
4.1	Základní pojmy a definice	33
4.2	Analytická funkce	35
4.3	Cauchyho věta. Cauchyho integrál	37
4.4	Taylorova řada	39
4.5	Singulární body	41
4.6	Laurentova řada	43
4.7	Fourierova řada	46
4.8	Výpočet reziduí	48
4.9	Výpočet integrálů po uzavřené křivce	50
4.10	Aplikace teorie reziduí	52

5	Speciální funkce	59
5.1	Gamma funkce	59
5.2	Legendreovy polynomy $P_\ell(x)$	60
5.3	Přidružené Legendreovy polynomy $P_\ell^m(x)$	61
5.4	Besselovy funkce $J_n(x)$	62
5.5	Sférické Besselovy funkce $j_\ell(x)$	63
5.6	Hermitovy polynomy $H_n(x)$	64
5.7	Laguerrovy polynomy $L_n(x)$	65
5.8	Přidružené Laguerrovy polynomy $L_n^k(x)$	66
5.9	Chebyshevovy polynomy $T_n(x)$	67
6	Matematické nástroje teoretické fyziky	69
6.1	Youngovy tabulky	70
6.1.1	Standardní forma Youngových tabulek	70
6.1.2	Dimenze ireducibilní reprezentace $SU(N)$	73
6.1.3	Rozklad tenzorových reprezentací	76
6.2	Základní operátorové identity	79
6.2.1	Lieova derivace, Hadamardova formule	80
6.2.2	Poincarého věta, BCH identita	84
6.2.3	Zassenhausova identita	90
7	Řešení	95

1 Zábavné příklady

V matematice neexistuje zvláštní cesta pro krále.

Euklides

Následující příklady slouží pouze k pobavení počtáře a k procvičení přirozené inteligence.

1.1 Příklady

1.1.1 **Diofantova úloha:*** Najděme taková tři přirozená čísla, aby jejich součet, stejně jako součet kterýchkoli dvou z nich, tvořil čtverec nějakého přirozeného čísla.

[41, 80, 320]

1.1.2 Maminka se nachází v bodě (t, x, y, z) . Maminka je v čase t o 21 let starší než její dítě. Za 6 let bude dítě $5\times$ mladší než maminka. Otázka: Jaké jsou časoprostorové souřadnice tatínka?

$[(t, x, y, z)]$

1.1.3 **Kant a hodiny:**[†]

Jednou když Kant přijal nového sluhu, který zřejmě nevěděl, že musí natahovat hodiny, se nástěnné hodiny v Kantově domě zastavily. Když si toho Kant všiml, hodiny natáhl, ale nemohl je nařídít. Kapesní hodinky měl v opravě, na věž neviděl a internet tehdy ještě nebyl.

Pohlédnul na hodiny a vydal se na návštěvu ke svému příteli Schmidtovi, který bydlel asi kilometr daleko. Když přišel do Schmidtova bytu, pohlédl Kant letmo na hodiny. U svého přítele se filozof nějaký čas zdržel a při loučení vhrnul opět krátký pohled na hodiny. Domů se Kant vracel svým klidným vyrovnaným

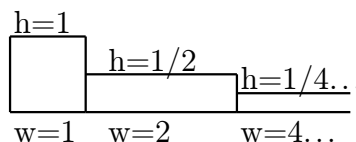
*Diofantos byl řecký matematik žijící ve 3. století našeho letopočtu. Řešení uvedené v závorce je to, které našel sám Diofantos. Počet trojic čísel řešící jeho úlohu je ve skutečnosti nekonečný.

[†]Jeden z největších německých filozofů, Immanuel Kant (1724-1804), profesor univerzity v tehdejší Královci byl starý mládenec a samotář. Přesně dodržoval svůj denní harmonogram. Obyvatelé městečka, když jej ráno viděli jít na přednášku, si mohli podle něj seřadit hodinky.

krokem. Po návratu domů ihned nařídil své hodiny. Jak mohl Kant znát přesný čas v okamžiku, když seřizoval hodiny?

1.1.4 Jak nabarvit nekonečno:

Mějme nekonečný proužek papíru jako na prvním obrázku. První díl je čtverec o straně 1. Každá další část má délku vždy $2\times$ větší a výšku $2\times$ menší než předcházející díl. Každá z částí proužku má plochu 1. Plocha celého proužku je $S = 1 + 1 + 1 + \dots$, je tedy nekonečně velká a na její obarvení spotřebujeme nekonečně mnoho barvy.



Necháme-li jednotlivé proužky rotovat kolem osy tvořené základnou obdélníků, vznikne soustava válců. První válec má objem $V_1 = 1/(4\pi)$. Druhý válec má objem $V_2 = 1/8V_1$, třetí $V_3 = 1/8V_2$, atd. Objem celé soustavy válců je tedy konečný. Nalejeme-li do soustavy válců uvedené množství barvy, měli bychom tak i nabarvit jednu stranu jednotlivých proužků. V čem je rozpor?

1.1.5 Sto vězňů:

Ve vězení je zavřeno sto vězňů, každý na samotce bez oken. Cely jsou zvukotěsné. Ve vězení je „vycházková“ místnost, ve které je na stole lampa s jedinou žárovkou. Předpokládáme, že žárovka je na začátku zhasnutá. Žádný vězeň ze své cely pochopitelně nepozná, zda lampa svítí či ne.

Každý den vyberou strážé náhodně jednoho vězně a umožní mu pobyt ve vycházkové místnosti. Každý vězeň má stejnou šanci navštívit vycházkovou místnost, jsou vybírání losováním. Vězeň může (ale nemusí) během svého pobytu rozsvítit nebo zhasnout lampu. Večer zavedou strážé vězně zpět do cely.

Vězni však mají možnost dostat milost, jestliže některý z nich pozná, že každý vězeň již byl ve vycházkové místnosti alespoň jedenkrát. Pokud však některý vězeň prohlásí, že všichni vězni již navštívili vycházkovou místnost a bude se mýlit (tj. některý vězeň do té doby ještě vycházkovou místnost nenavštívil), nejen že ztratí všichni vězni šanci na propuštění, ale dokonce budou všichni zastřeleni. Proto pochopitelně musí mít vězeň, který žádá o milost pro sebe a ostatní, stoprocentní jistotu, že ve vycházkové místnosti byli všichni vězni.

Před tím, než jsou všichni zavřeni do cel, je vězňům dovoleno sejít se jedenkrát na dvoře vězení a domluvit se na strategii.

Předpokládejme, že los je spravedlivý a že každý vězeň jednou za čas navštíví vycházkovou místnost. Jakou strategii si mohou vězni domluvit, aby získali milost?

1.1.6 Další úloha doplňuje předešlou: Určete počet uspořádaných r -tic, které můžete vytvořit z množiny A o n -prvcích, tak aby v každé r -tici existovali všechny prvky z množiny A alespoň jednou. Zřejmá podmínka $r \geq n$.

1.1.7 Je známo, že kvadratická rovnice má dvě, jedno nebo žádné reálné řešení. Podívejme se na rovnici v proměnné x , kde a, b a c jsou konstanty:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b < c$. Nyní si všimněte, že $x = a$, $x = b$ a také $x = c$ jsou řešením dané rovnice. Jak může mít uvedená kvadratická rovnice v proměnné x tři řešení?

1.1.8 Nalezněte chybu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x \\ \frac{d}{dx} \overbrace{x + x + \dots + x}^{x\text{-krat}} &= 2x \\ \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{x\text{-krat}} &= 2x \\ x &= 2x \end{aligned}$$

1.1.9 Nalezněte všechna přirozená čísla, která jsou součtem třetích mocnin svých číslic.

[1, 153, 370, 371, 407]

1.1.10 Jaký tvar má křivka zadaná implicitní rovnicí: $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0$?

[Srdcovka]

1.1.11 **Úloha Lva Nikolajeviče Tolstého o sekáčích:**

Skupině sekáčů bylo nařízeno posekat dvě louky, z nichž jedna byla dvakrát větší než druhá. Půl dne kosila celá skupina sekáčů větší louku; v druhém půldnu se skupina rozdělila na dvě stejné části. První část skupiny pokračovala v kosení větší louky a do konce dne ji celou pokosila. Druhá část šla kosit druhou, menší louku, a kosila ji do konce dne, ale práci nedokončila. Zbytek menší louky byl pokosen druhý den a to tak, že ji pokosil jeden sekáč za celý den práce.

Kolik sekáčů bylo ve skupině?

1.1.12 Jaká je průměrná vzdálenost dvou bodů ve čtverci o hraně delky 1?

$\left[\frac{1}{15} (2 + \sqrt{2} + \operatorname{arcsinh}(1)) \right]$

1.1.13 Rozmyslete si následující úlohu:

Ve velké místnosti je velký počet lidí. Průměrná hmotnost lidí je 87,624 kg a celková 87 350. Je možné z tohoto údaje rozhodnout, zda-li je pravděpodobné, že se v místnosti nalézá člověk hmotnosti 320 kg?

Průměrný součet veškerého osobního majetku lidí v místnosti představuje \$89 548 566,9 a celkový majetek lidí v místnosti činí \$89 568 324 126,5. Můžeme z toho údaje rozhodnout zda-li je pravděpodobné, že se v místnosti nachází Bill Gates? V čem se fundamentálně liší tyto dvě situace? ‡

‡ Autor naráží na problém, který se občas nazývá *černá labuť*. Vis též kniha se stejným názvem. Autor je Nassim Nicholas Taleb

2 Řady

S rozkoší užíváme matematiky a děje se nám jako Lotofágům, neboť okuvsivše ji, nechceme se jí již vzdát a ovládá nás jako květ lotosu.

Aristoteles

2.1 Úvodní definice a pojmy

Definice delta operátoru:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k),$$

kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{R}$. Pak pro každý součet řady platí:

$$\sum_{k=a}^b \Delta f(k) = f(a+1) - f(a) + f(a+2) - f(a+1) + \dots + f(b+1) - f(b) = f(b+1) - f(a).$$

Pokud $\Delta H = f$ zapisujeme $H = \sum f$.

Geometrická řada.

$$\sum_{k=a}^b q^k = \sum_{k=a}^b \Delta \left(\frac{q^k}{q-1} \right) = \left[\frac{q^k}{q-1} \right]_a^{b+1} = \frac{q^{b+1} - q^a}{q-1},$$

kde $q \neq 1$.

Definujme $k^{[n]*}$:

$$\Delta k^{[n]} = \Delta [k(k-1)\dots(k-n+1)] = nk^{[n-1]},$$

kde $n \in \mathbb{Z}$ přičemž ustanovujeme, že $k^{[0]} := 1$.

Aritmetická řada:

$$\sum_{k=a}^b k = \sum_{k=a}^b \Delta \left(\frac{k^{[2]}}{2} \right) = \frac{(b+1)b - a(a-1)}{2} = \frac{n}{2}(b+a),$$

kde $n = b - a + 1$ je počet členů řady.

*Formálně se jedná o tzv. Pochhammerův polynom, či symbol $(k)_n$, avšak toto značení není z pedagogického hlediska vhodné.

2.2 Příklady

2.2.1 Určete následující výrazy:

- a) $\Delta 1$ [0]
 b) Δc [0]
 c) Δk [1]
 d) Δk^2 [2k + 1]
 e) $\Delta \frac{1}{k}$ $\left[\frac{-1}{k(k+1)} \right]$
 f) $\Delta(3k + k^{[n]})$ $\left[3 + \frac{k^{[n-1]}}{n-1} \right]$
 g) $\Delta 2^{[k]}$ [2^[k]]
 h) $\Delta a^{[k]}$ $[a^{[k]}(a-1)]$
 i) $\Delta k^{[-3]}$ $[-3k^{[-4]}]$
 j) $\Delta k^{[0]}$ [1]

2.2.2 Najděte součty následujících řad:

- a) $\sum_1^3 k^{[2]}$ [8]
 b) $\sum_0^4 k^2$ [30]
 c) $\sum_0^b k^2$ $\left[\frac{(b+1)b(b-1)}{3} + \frac{(b+1)b}{2} \right]$
 d) $\sum_0^b k^3$ $\left[\frac{(b+1)b(b-1)(b-2)}{4} + (b+1)b(b-1) + \frac{b(b-1)}{2} \right]$
 e) $\sum_1^3 k^3$ [36]
 f) $\sum k^n$ $\left[\frac{k^{[n+1]}}{n+1} \right]$
 g) $\sum \frac{1}{k^2 + k}$ $\left[\frac{-1}{k} \right]$
 h) $\sum_0^{100} 2^k$ [2¹⁰¹ - 1]

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \sum \sinh(k) & \left[\frac{\sinh(k-1) - \sinh(k)}{2 - 2\cosh(1)} \right] \\ \text{j) } \sum \frac{1}{k} & \left[\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} \right] \end{array}$$

2.2.3 V následujících příkladech použijte metodu per partes pro řady definovanou identitou:

$$\sum f(k)\Delta g(k) = f(k)g(k) - \sum g(k+1)\Delta f(k). \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum k2^k & [2^k(k-2)] \\ \text{b) } \sum \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} & \left[\frac{-2k-1}{2(k+1)(k+2)} \right] \\ \text{c) } \sum k^2 4^k & \left[\frac{4^k}{27} ((3k-4)^2 + 4) \right] \\ \text{d) } \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} & \left[6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \right] \end{array}$$

2.2.4 Ověřte, že příklad 1.2.3 d) lze spočítat pomocí funkce

$$S(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^k \equiv (x\partial_x)^2 \sum_{k=0}^n x^k.$$

2.2.5 Z definice integrálu spočítejte následující integrály

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int x^2 dx \\ \text{b) } \int x^3 dx \end{array}$$

2.2.6 Vypočítejte následující sumu

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{1 + e^{\lambda\epsilon(k)}},$$

kde $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\epsilon(k)$ je libovolná lichá funkce.

$$\left[N + \frac{1}{2} \right]$$

2.2.7 Ukažte, že každé reálné číslo $r > 0$ může být vyjádřeno pomocí *Cantorovy řady*:

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!},$$

kde $0 \leq c_k \leq k-1$, $k > 1$, a $c_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sum of the type:

$$\sum n^d \quad (2.2)$$

where n is a summation index and $d > 0$ an integer can be easily dealt with using per partes technique with result:

$$\sum n^d = \frac{n^{d+1} - n^d - \sum_{k=2}^d \binom{d}{k} \sum n^{d-k+1}}{d+1}. \quad (2.3)$$

This is in the form of recurrence and so it is easily handled with computers.

3 Tvorba diferenciálních rovnic

Kdo podceňuje výsledky matematiky, škodí celé vědě, neboť ten, kdo nezná matematiku, nemůže poznat exaktní vědy a nemůže pochopit svět.

Roger Bacon

V této kapitole se budeme zabývat popisem fyzikálních úloh diferenciálními rovnicemi a hledáním jejich řešení. Ve fyzice se často tvrdí, že každý problém, se kterým se v přírodě můžeme setkat, se dá popsat nějakou diferenciální rovnicí. Pokud bychom byli schopni vždy nalézt řešení takovéto diferenciální rovnice, byla by práce fyziků mnohem jednodušší, i když ne prostá hledání hlubších souvislostí a symetrií přírody.

3.1 Opakování

Obecně můžeme říci, že problém nalezení řešení diferenciálních rovnic je velmi obtížný. Dokonce i tak jednoduchý případ diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x, y)$ nemůže být obecně vyřešen. Čili neexistuje obecná formule, která jednoznačně přiřadí každému $f(x, y)$ řešení $y(x)$. Je však možné klasifikovat některé diferenciální rovnice prvního řádu do několika typů a následně pro ně použít speciální metody hledání řešení.

3.1.1 Separovatelné rovnice

Zvláštní místo mezi těmito rovnicemi zaujímá typ, který je možno plně separovat vzhledem k proměnným x a y a tedy vyjádřit ve tvaru:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

kde $P(x)$ resp. $Q(y)$ je pouze funkce proměnné x resp. y . Obecné řešení toho typu rovnic je dáno prostým integrálem

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c,$$

kde c je libovolná konstanta.

3.1.1 Řešte následující diferenciální rovnice:

$$\text{a) } \sqrt{1-x^2}dy = \sqrt{1-y^2}dx \quad [\arcsin x - \arcsin y = c]$$

$$\text{b) } y' = xy^2 - x \quad \left[\frac{y-1}{y+1} = ce^{x^2} \right]$$

$$\text{c) } y' = \frac{\sin^2 x}{\sin y} \quad [2 \cos y - \sin x \cos y + x = c]$$

$$\text{d) } \sin x \cos^2 y dx = \cos^2 x dy \quad [\sec x - \tan y = c]$$

$$\text{e) } \sqrt{1+x}dy = (1+y^2) dx \quad [\arctan y - 2\sqrt{1+x} = c]$$

$$\text{f) } y' = \frac{1+y}{1+x} \quad \left[\frac{y+1}{x+1} = c \right]$$

3.1.2 Homogenní rovnice

Funkce $f(x, y)$ je homogenní řádu n , pokud platí:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^n f(x, y), \quad \lambda > 0.$$

Pokud je diferenciální rovnice v následujícím tvaru

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

kde $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou homogenní funkce stejného řádu, pak můžeme psát:

$$y' = -\frac{f(x, y)}{Q(x, y)} \equiv \varphi(x, y), \quad (3.1)$$

kde $\varphi(x, y)$ je homogenní funkce nultého řádu. Díky této vlastnosti můžeme tuto funkci vyjádřit jako funkci podílu y a x :

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi(\lambda x, \lambda y) = \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Tento tvar nám naznačuje zvolit substituci $y/x = v$ neboť platí:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v.$$

Vložením do rovnice (3.1) dostáváme:

$$\frac{dv}{\varphi(1, v) - v} = \frac{dx}{x}.$$

Tento tvar rovnice je již plně separovaný a může být řešen přímou integrací.

3.1.2 Řešte následující diferenciální rovnice:

a) $(x^2 + y^2) dy + 2xy dx = 0$	$\left[\left(\frac{y}{x} \left(3 + \frac{y^2}{x^2} \right) \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{c}{x} \right]$
b) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2}$	$\left[\arcsin \frac{y}{x} - \log x = c \right]$
c) $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$	$\left[\sin \frac{y}{x} + \log x = c \right]$
d) $(x + y)y' = x - y$	$\left[x^2 - 2xy - y^2 = c \right]$
e) $x^2 y dx = (x^3 - y^3) dy$	$\left[\log y + \frac{x^3}{3y^3} = c \right]$
f) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$	$[y - x + y \log x = c]$
g) $\sinh x dy = \cos y dx$	$\left[2 \arctan e^y + \log \tanh \frac{x}{2} = c \right]$
h) $y' = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$	$\left[y = ce^{-2\sqrt{\frac{x}{y}}} \right]$
i) $x(xy + y) dx = x^2 dy$	$\left[x = ce^{2\sqrt{\frac{y}{x}}} \right]$
j) $x^2 y' - y^2 = x^2 y y'$	$\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \log y = c \right]$
k) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$	$\left[\log x + e^{-\frac{y}{x}} = c \right]$
l) $y' = y' \log y + \tan x \sec^2 x$	$\left[y(2 - \log y) = \frac{\tan^2 x}{2} + c \right]$

3.1.3 Exaktní rovnice

Výraz $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ je exaktním pokud existuje funkce $F(x, y)$ taková, že platí:

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

V takovém případě rovnice

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

může být jednoduše vyjádřena jako $dF(x, y) = 0$ s obecným řešením ve tvaru:

$$F(x, y) = c.$$

Ze záměnnosti pořadí parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

plyne i nutná podmínka k existenci funkce F :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3.1.3 Řešte následující diferenciální rovnice:

- a) $(e^x + 1) dx + dy = 0$ [$e^x + x + y = c$]
- b) $\left(2x + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right) dx = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{y}} dy$ [—]
- c) $(3x^2y - y^3) dx = (3y^2x - x^3) dy$ [$x^3y - xy^3 = c$]
- d) $xdy + ydx = 0$ [$xy = c$]
- e) $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx = \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} dy$ [$\sin \frac{y}{x} = c$]
- f) $x dx + y dy = 0$ [$x^2 + y^2 = c$]
- g) $(3x^2y - y^3) dx - (x^3 + 3y^2x) dy = 0$ [—]
- h) $(y \cos xy + 2x) dx + x \cos xy dy = 0$ [$x^2 + \sin xy = c$]
- i) $(y^2 + 2xy + 1) dx + (2xy + x^2) dy = 0$ [$x^2y + xy^2 + x = c$]
- j) $3x^2y dx + (x^3 - 3y^2x^2) dy = 0$ [—]

3.1.4 Integrační faktor

Předpokládejme, že

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

má řešení

$$F(x, y) = c,$$

kde $F(x, y)$ je diferencovatelná funkce. Platí tedy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Eliminováním y' z prvních dvou rovnic dostáváme

$$\frac{1}{P} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial F}{\partial y} \equiv \mu(x, y),$$

kde $\mu(x, y)$ je hodnota podílu. Z konstrukce plyne, že:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu(x, y)P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu(x, y)Q(x, y)$$

a tedy platí, že

$$\mu(x, y) (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$$

je exaktní rovnice. Funkce $\mu(x, y)$ se nazývá *integrační faktor*.

3.1.4 Ověřte diferenciací

$$\text{a) } d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } d\left(\log \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy}$$

$$\text{c) } d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{xdy - ydx}{y^2}$$

$$\text{d) } d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\text{e) } \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = xdx + ydy$$

$$\text{f) } d(xy) = xdy + ydx$$

3.1.5 Řešte následující rovnice za pomoci vhodného integrálního faktoru

$$\text{a) } xdy + x^2dx = ydx \quad \left[\frac{y}{x} + x = c \right]$$

$$\text{b) } (xy^2 + y)dx = (x^2y - x)dy \quad \left[x = cye^{\frac{1}{xy}} \right]$$

$$\text{c) } xdy + 3ydx = xydy \quad \left[yx^3 = ce^y \right]$$

$$\text{d) } (x^2 + y^2 + 2x)dy = 2ydx \quad \left[y - 2\arctan \frac{x}{y} = c \right]$$

$$\text{e) } xdy - ydx = xydy \quad \left[\left(\frac{x}{y}\right)e^y = c \right]$$

$$\text{f) } (x^2 - y^2) = 2xydx \quad \left[y + \frac{x^2}{y} = c \right]$$

3.1.5 Lineární rovnice prvního řádu

Diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} + M(x)y = N(x),$$

se nazývá *lineární*, neboť množina všech řešení této rovnice je uzavřená vzhledem ke sčítání. Pokud provedeme substituci $y = v(x)w(x)$, dostaneme po vhodné úpravě:

$$v(u' + Mu) + uv' = N. \quad (3.2)$$

Pokud je u zvoleno tak, aby byl výraz v závorce roven nule, může být původní rovnice redukována do podstatně jednoduššího tvaru. Proto nejprve vyřešíme rovnici:

$$u' + Mu = 0,$$

kteřá je již separovatelná. Řešení tohoto problému je ve tvaru:

$$\log u + \int M dx = c.$$

Jelikož každé řešení této rovnice redukuje (3.2) na

$$uv' = N,$$

je vhodné zvolit hodnotu konstanty $c = 0$. S touto volbou dostáváme

$$u = e^{-\int M dx},$$

a tedy

$$v' = Ne^{\int M dx},$$

kteřá je také v separovaném tvaru. Řešení dostáváme přímou integrací:

$$v = \int Ne^{\int M dx} dx + c.$$

Celkové řešení poté získáme návratem k původní proměnné y :

$$y = e^{-\int M dx} \int Ne^{\int M dx} dx + ce^{-\int M dx}.$$

3.1.6 Řešte následující rovnice

- | | |
|---|---|
| a) $(1 + x^2) dy = \left(\frac{1}{x} - xy\right) dx$ | $\left[1 + \sqrt{1 + x^2} = cxe^{-y\sqrt{1+x^2}}\right]$ |
| b) $(x^2 + 1) y' + 2xy = x^2$ | $\left[y = \frac{x^3 + c}{3(1 + x^2)}\right]$ |
| c) $y' = e^{-x^2} - 2xy$ | $\left[y = e^{-x^2} (x - 1)\right]$ |
| d) $y' + xy - x = 0$ | $\left[y = 1 - 2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$ |
| e) $y' + y \cos x = \cos^3 x$ | $\left[y = \cos^2 x + 2(\sin x - 1)\right]$ |
| f) $xy' + xy = x^2 \sin x$ | $\left[y = 2 \sin x - x \cos x + \frac{2}{x} \cos x + \frac{c}{x}\right]$ |
| g) $y' = y + \cos x - \sin x$ | $\left[y = \sin x + ce^x\right]$ |
| h) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}}{xy}$ | $\left[x = ce^{x\sqrt{x^2 - y^2}}\right]$ |
| i) $\frac{dx}{dy} + yx = y$ | $\left[x = 1 + ce^{-\frac{y^2}{2}}\right]$ |

$$\begin{array}{ll}
 \text{j) } x^2(1+4y^2)dx + 3yx^3dy = 0 & \left[x\sqrt{(1+4y^2)^3} = c \right] \\
 \text{k) } y' + yx = y & \left[y = ce^{-\frac{(1-x)^2}{2}} \right] \\
 \text{l) } \frac{\arcsin x}{y}dx + (1-e^y)dy & \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \frac{y^2}{2} - e^y(y-1) = c \right]
 \end{array}$$

3.1.6 Substituční metoda

Mnoho diferenciálních rovnic prvního řádu může být řešeno vhodnou substitucí. Již jsme v textu na takové případy narazili. Kupříkladu substituce $y = uv$ při řešení lineární diferenciální rovnice. V této podsekcí si ukážeme několik dalších typických příkladů této metody.

Diferenciální rovnice ve tvaru:

$$y = xf(y') + g(y')$$

se nazývá *Lagrangeova rovnice*, kde f a g jsou diferencovatelné funkce proměnné y' . Substitucí $y' = p$ dostáváme

$$y = xf(p) + g(p).$$

Následným diferenciováním obdržíme:

$$p = xf' \frac{dp}{dx} + f(p) + g' \frac{dp}{dx},$$

což můžeme zapsat ve formě:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'}{p-f}x = \frac{g'}{p-f}.$$

Tato rovnice je lineární vzhledem k x a může být tedy vyřešena.

3.1.7 Řešte následující rovnice, kde $p = y'$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } p^2 - 2yp = 3y^2 & [y = c_1 e^{3x}; y = c_2 e^{-x}] \\
 \text{b) } p^2 + 1 = 2p & [y = x + c_1; y = x + c_2] \\
 \text{c) } p^4 = p^2 y + 2 & \left[y = \frac{p^4 - 2}{p^2}; x = 2p - \frac{4}{3p^2} + c \right] \\
 \text{d) } p^3 + 2p = e^y & \left[y = \log(p^3 + 2p); x = -\frac{1}{p} + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{p}{\sqrt{2}} + c \right] \\
 \text{e) } p^2 x - py + 1 = 0 & \left[y = \frac{c^2 x + 1}{c}; y = 2\sqrt{x} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{f) } p^2 + y^2 = 1 & [\arcsin y \pm x = c] \\ \text{g) } p^2 + (2x - y)p = 2xy & [y = ce^x; y = c - x^2] \\ \text{h) } p^2 + (x - e^x)p = xe^x & \left[y = e^x + c; y = x - \frac{x^2}{2} \right] \end{array}$$

Dalším příkladem může být *Bernoulliho rovnice*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

která může být redukována na lineární rovnici použitím substituce $z = y^{1-n}$:

$$z' + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x).$$

Dalším příkladem může být

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right),$$

která se řeší substitucí $x = u - h, y = v - k$, pokud konstanty h, k jsou nastaveny tak, aby původní rovnice byla homogenní.

3.1.8 Řešte následující rovnice:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y^3 \frac{dy}{dx} + \frac{y^4}{x} = \sin x & \left[y^4 = \left(\frac{48}{x^2} - \frac{96}{x^4} - 4 \right) \cos x + \left(\frac{16}{x} - \frac{96}{x^3} \right) \sin x + \frac{c}{x^4} \right] \\ \text{b) } y' + y = xy^3 & \left[\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x} \right] \\ \text{c) } \frac{1}{y^6} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy^5} = x^2 & \left[\frac{1}{y^5} = \frac{5x^3}{2} + cx^5 \right] \\ \text{d) } y' - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0 & [x = y \log cx] \\ \text{e) } xy' + y = y^2 \log x & \left[\frac{1}{y} = 1 + \log x + cx \right] \\ \text{f) } y' + xy = x^3 y^3 & \left[\frac{1}{y^2} = 1 + x^2 + ce^{x^2} \right] \\ \text{g) } y' = \frac{x + y - 1}{2x + y + 2} & \left[\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{2u + v}; x = u - 3, y = v + 4 \right] \\ \text{h) } y' = \frac{3x + y + 6}{3x + y + 7} & \left[\frac{du}{dx} - 3 = \frac{u - 1}{u}; u = 3x + y + 7 \right] \\ \text{i) } y' = \sin \frac{x - y + 2}{x + y + 3} & \left[\frac{dv}{du} = \sin \frac{u - v}{u + v}; x = u - \frac{5}{2}, y = v - \frac{1}{2} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{j) } y' = \cos(x + y) & \left[\frac{du}{dx} - 1 = \cos u; u = x + y \right] \\
\text{k) } \frac{dx}{dy} = yx^3 - x & \left[\frac{1}{x^2} = y + \frac{1}{2} + ce^{2y} \right] \\
\text{l) } ydx = (x + y^3) dy & [2x = y^3 + cy] \\
\text{m) } y + xy' = e^y y' & [y = \log(yx - c)] \\
\text{n) } 1 + xy' \tan y = y' & [x \sec y = \log |\sec y + \tan y| + c] \\
\text{o) } \frac{ydx}{(1 + x^2)} + \arctan x dy = 0 & [y \arctan x = c] \\
\text{p) } (1 + x^2) dy = (1 + y^2) dx & [\arctan y - \arctan x = c] \\
\text{q) } \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} + y^2 = 0 & [4xy + y^4 = c] \\
\text{r) } \sin 2y dx + 2x \cos 2y dy = 0 & [x \sin 2y = c] \\
\text{s) } e^x y' = e^x + e^y & [e^{x-y} = c - x] \\
\text{t) } dx + 2x dy = y dy & [4x = 2y - 1 + ce^{-2y}] \\
\text{u) } (x^2 + y^2) dx = xy dy & [y = e^{3x} + ce^{2x}] \\
\text{v) } (x - y + 1) dx + (x + y - 1) dy = 0 & [y^2 = 2x^2 e^y + cx^2] \\
\text{w) } dy = (2y + e^{3x}) dx & [y = e^{2x} (e^x + c)] \\
\text{x) } y^2 = (xy - x^3 e^y) y' & \left[e^y = c + \frac{y^2}{2x^2} \right]
\end{array}$$

3.1.7 Singulární řešení diferenciálních rovnic

Mezi zajímavé problémy patří tzv. singulární řešení diferenciálních rovnic. Jsou to taková řešení diferenciální rovnice, pro která je *jednoznačnost* narušena v každém bodě. Geometricky to znamená, že více než jedna integrální křivka se společnou tečnou prochází každým bodem singulárního řešení (x_0, y_0) .

Singulární řešení diferenciální rovnice není popsáno obecným integrálem, čili nemůže být odvozeno z obecného řešení pro jakoukoliv hodnotu integrační konstanty C .

Jedním způsobem jak hledat singulární řešení diferenciální rovnice je tzv. *p-diskriminant* diferenciální rovnice. Pokud je funkce $F(x, y, y')$ a její parciální derivace vzhledem k y a y' spojitá, pak může být singulární řešení nalezeno ze soustavy rovnic:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \quad (3.4)$$

3.1.9 Nalezněte obecné a všechna singulární řešení následujících diferenciálních rovnic:

- a) $(y')^2 - 4y = 0$,
 b) $(y')^2 - xy' + y = 0$,
 c) $1 + (y')^2 = \frac{1}{y^2}$,
 d) $(y')^2(1 - y)^2 = 2 - y$,
 e) $y = (y')^2 - 3xy' + 3x^2$,

Clairautova Diferenciální rovnice

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad (3.5)$$

kde f je libovolná funkce. Obecné řešení nalezneme prozkoumáním diferenciálního důsledku této rovnice, který vypadá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[x + \frac{df}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = 0 \quad (3.6)$$

Z prvního členu y'' dostáváme obecné řešení, které po dosazení do (3.5) nabývá tvaru:

$$y_0 = cx + f(c). \quad (3.7)$$

Ze zbylé části rovnice (3.6) můžeme získat pouze singulární řešení, které má v každém bodě derivaci stejnou jako obecné řešení s určitou konkrétní hodnotou integrační konstanty c . Tedy $y' = c$ a singulární řešení se dá vyjádřit parametricky

$$\begin{aligned} x &= -f(c), \\ y &= -cf'(c) + f(c). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Příklady obecného a singulárního řešení pro $f(x) = x^2$ a $f(x) = x^3$ jsou uvedeny na obrázcích (3.1) a (3.2). Tmavé čáry představují členy z rodiny křivek obecného řešení, modrá pak představuje obalovou křivku k této rodině.

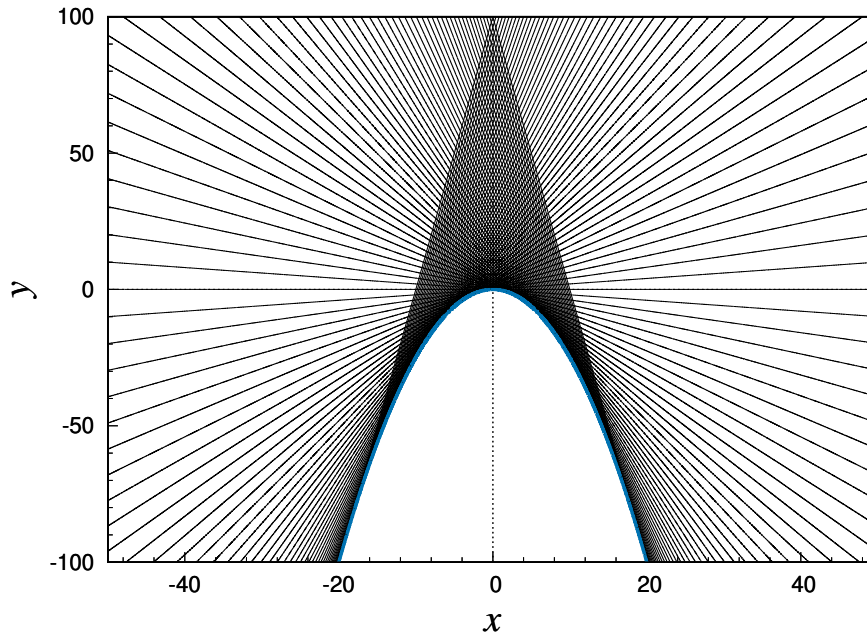
3.1.8 Piece-wise řešení diferenciální rovnice

Nelineární diferenciální rovnice mohou dále mít řešení, která získáme z obecného řešení tak, že na vhodných intervalech pospojujeme různá řešení z rodiny obecných řešení.

3.2 Příklady na tvorbu diferenciálních rovnic

3.2.1 Odvoďte diferenciální rovnici pro radioaktivní rozpad látky o množství M a poločas rozpadu τ .

$$\left[M(t) = M_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t} \right]$$



Obrázek 3.1: Příklady obecného a singulárního řešení pro $f(x) = x^2$. Tmavé čáry představují členy z rodiny křivek obecného řešení pro různé hodnoty c , modrá pak představuje obalovou křivku k této rodině.

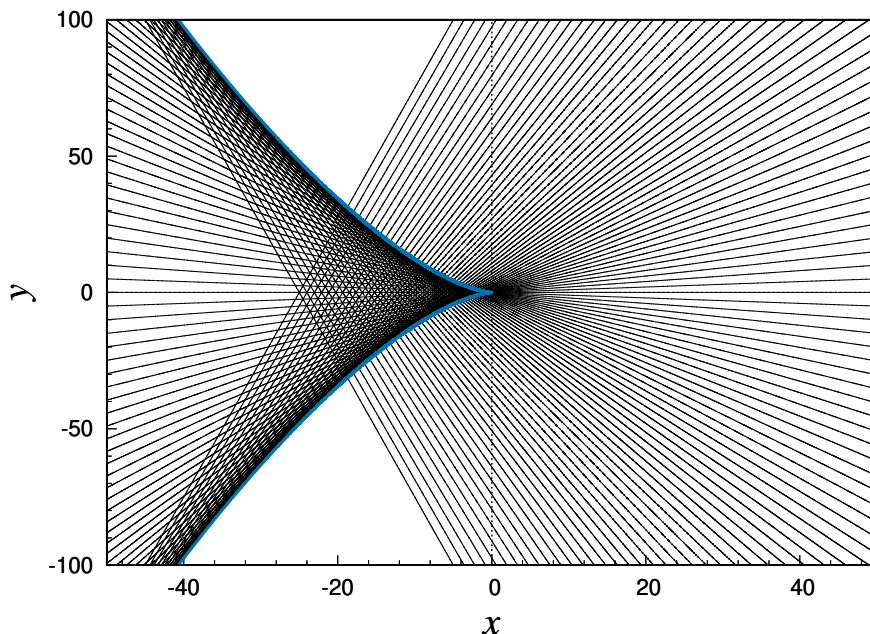
3.2.2 Mějme v čase $t = 0$ počet bakterií v kolonii roven n a v čase $t = 1$ počet bakterií v kolonii roven m , kde n, m jsou velká čísla. Každá bakterie se dělí po uplynutí času τ . Zjistěte hodnotu časové konstanty τ .

$$\left[\tau = \frac{\ln 2}{\ln m - \ln n} \right]$$

3.2.3 Radioaktivní substance A se započala v čase $t = 0$ rozpadat na substanci B , která se dále rozpadá na konečný produkt C . Najděte rovnici pro množství B jako funkci času.

$$\left[B(t) = \frac{A_0 \tau_A}{\tau_A - \tau_B} e^{-\frac{\ln 2}{\tau_B} t} \left(e^{\left(\frac{\ln 2}{\tau_B} - \frac{\ln 2}{\tau_A}\right) t} - 1 \right) \right]$$

3.2.4 Mějme kontejner o obsahu l naplněný vodou. Z vrchní trubky do tohoto kontejneru přitéká r litrů vody za sekundu a stejné množství pak odtéká z kontejneru spodní trubkou. Voda přitékající do kontejneru obsahuje w kg soli na litr. Současně na dně kontejneru leží kus kamenné soli, který se rozpouští konstantní



Obrázek 3.2: Příklady obecného a singulárního řešení pro $f(x) = x^3$. Tmavé čáry představují členy z rodiny křivek obecného řešení pro různé hodnoty c , modrá pak představuje obalovou křivku k této rodině.

rychlostí q kg soli za sekundu.

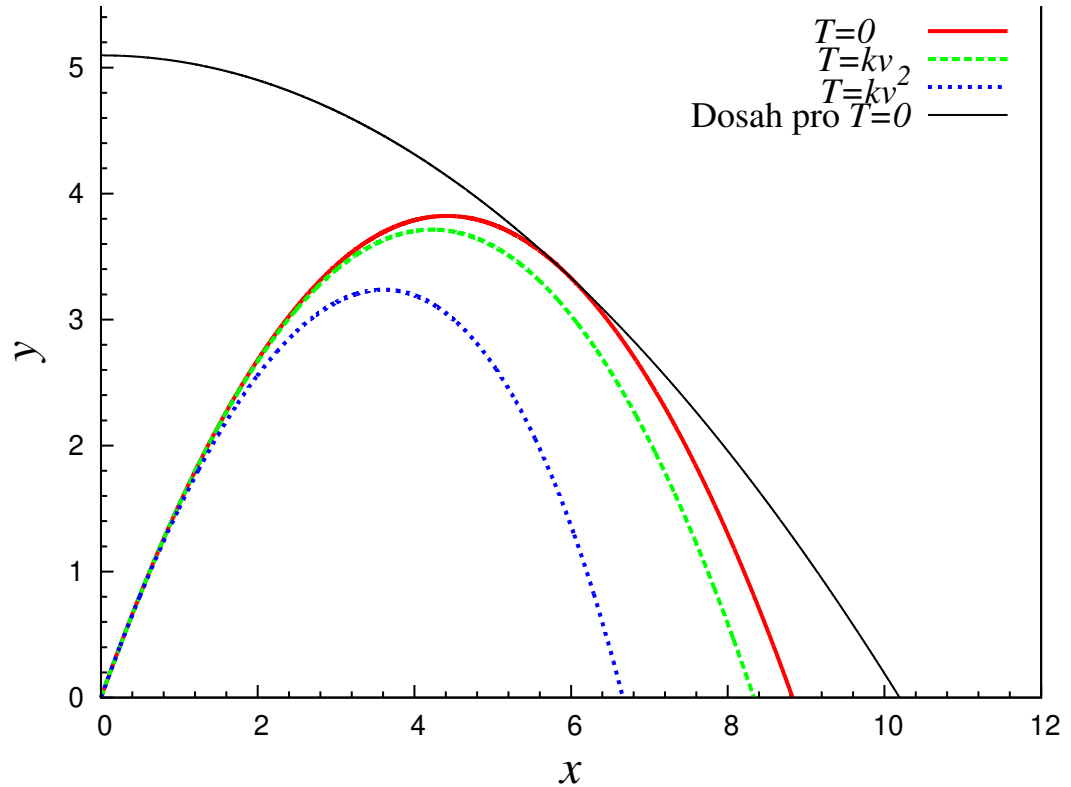
- Najděte funkci $S(t)$ popisující množství kg soli v kontejneru.
- Stanovte množství soli v $t = \infty$.
- Řešte úlohu pro $q = q_0/t$.

$$\left[S(t) = (1 - e^{-\frac{r}{L}t}) \frac{qL}{r} \right]$$

3.2.5 Nalezněte rovnici zrcadla $f(x)$, které odráží paprsky světla vyslané z počátku souřadnicového systému vodorovně s osou x .

$$\left[f(x) = \pm \sqrt{2xc + c^2} \right]$$

3.2.6 Projektil je vystřelen s počáteční rychlostí v_0 pod úhlem α s horizontálou za přítomnosti homogenního gravitačního pole g . Najděte rovnici trajektorie za předpokladu:



Obrázek 3.3: Parabolická střelba projektilu ve třech režimech tření a oblast dosahu děla pro případ beze tření. Konstanty jsou: $g = 9.81$, $v_0 = 10$, $\alpha = \pi/3$, $k = 0.05$.

- zanedbatelného tření,
- s třecí silou v tzv. viskózním režimu, tj. lineárně úměrnou rychlosti $T = kv$,
- s třecí silou v tzv. tlakovém režimu, tj. úměrnou čtverci rychlosti $T = kv^2$.

Vytvořte graf, který porovnává trajektorie střely ve všech případech (3.3). V případě a) popište oblast dosahu projektilu.

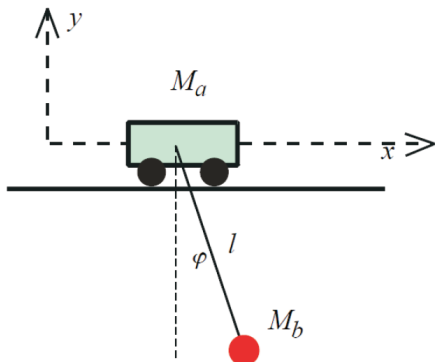
$$\left[y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \right]$$

$$\left[y(x) = \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0 \cos \alpha - kx}{v_0 \cos \alpha} - \frac{(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k})(v_0 \cos \alpha - kx)}{kv_0 \cos \alpha} + \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k}}{k} \right]$$

$$\left[y(x) = \frac{1}{k} \ln \left\{ \cos \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{k}{g}} v_0 \sin \alpha \right) - \sqrt{\frac{g}{k} \frac{e^{kx} - 1}{v_0 \cos \alpha}} \right] \right\} + \frac{1}{2k} \ln \left(1 + \frac{k}{g} v_0^2 \sin^2 \alpha \right) \right]$$

$$\left[y_{\text{dosah}}(x) = \frac{v_0^4 - g^2 x^2}{2gv_0^2} \right]$$

3.2.7 Landauův vozík:

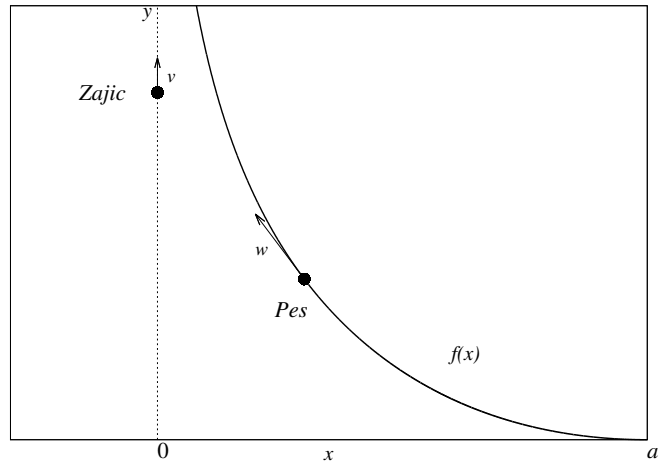


Sestavte diferenciální rovnice Landauova vozíku. Jde o vozík (podle obrázku) pohybující se podél osy x , na němž je připevněno matematické kyvadlo. Za pomoci Lagrangeova principu sestavte diferenciální rovnice popisující časový vývoj systému.

$$\left[\begin{array}{l} (M_a + M_b) \ddot{x} + M_b l \ddot{\varphi} \cos \varphi - M_b l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0 \\ M_b l^2 \ddot{\varphi} + M_b g l \sin \varphi + M_b l \ddot{x} \cos \varphi = 0 \end{array} \right]$$

3.2.8 Psí křivka:

Zajíc běží po ose y konstantní rychlostí v . Pes běží tak, že jeho rychlost neustále ukazuje na zajíce. Velikost jeho rychlosti je konstanta w (viz obrázek). Zajíc stál v čase $t = 0$ v počátku souřadnicového systému a pes v bodě $(a, 0)$. Nalezněte křivku psa po které se snaží dohonit zajíce*.



$$\left[f(x) = \frac{x \left(\frac{x}{a}\right)^q}{2(1+q)} - \frac{x \left(\frac{x}{a}\right)^{-q}}{2(1-q)} + \frac{aq}{1-q^2}, \quad q = \frac{v}{w} \right]$$

3.2.9 Zvědaví čtenáři se mohou pokusit nalézt diferenciální rovnici řešící předchozí úlohu, v případě že bereme v úvahu speciálně relativistické efekty.

$$\left[x f'' = \frac{v}{w} \sqrt{1+f'^2} + \frac{vx}{c} \sqrt{1+f'^2} \right]$$

3.3 Metoda Lagrangeových multiplikátorů

K určení extrémních hodnot funkce

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

jejíž proměnné jsou omezeny m podmínkami

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.9)$$

sestrojíme funkci

$$F = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i$$

a určíme, zda-li existují parametry λ_i (Lagrangeovy multiplikátory) a hodnoty extrémů x_1, x_2, \dots, x_n z n rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

a m podmínek (3.9).

*Zajímavé také je, pokusit se tento příklad vyřešit v jeho zrcadlové formě, kde zajíc běží po ose x a pes startuje u bodu $(0, a)$. Ukazuje se, že tato verze příkladu je mnohem náročnější, co se týče vyřešení dané diferenciální rovnice.

3.3.1 Nalezněte maximum a minimum následujících funkcí, za předpokladu existence dodatečných podmínek:

- a) $f(x, y) = x + y, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \left[\min : (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \max : (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \right]$
- b) $f(x, y) = Ax^\alpha y^{\beta\dagger}, \quad x + y = C^\ddagger \quad \left[x = \frac{C\alpha}{\alpha+\beta}, y = \frac{C\beta}{\alpha+\beta} \right]$
- c) $f(x, y, z) = xy + yz, \quad x + 2y = 6, x - 3z = 0 \quad \left[x = 3, y = \frac{3}{2}, z = 1 \right]$
- d) $S(x_1, x_2, \dots, x_N) = -\sum_{i=1}^N x_i \ln x_i, \quad \sum_{i=1}^N x_i E_i = E, \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad \left[x_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^N e^{-\beta E_i}} e^{-\beta E_j} \right]$
- e) Najděte rozměry krabice (x, y, z) s největším objemem za předpokladu, že plocha krabice je 64. $\left[x = y = z = \sqrt{\frac{32}{3}} \right]$
- f) Najděte bod P v rovině trojúhelníku ABC , pro který je součet vzdáleností od vrcholů minimální.
- g) Najděte trojúhelník s nejmenším obvodem, který je možno vepsat do daného trojúhelníka.

3.4 Laplaceova transformace

Používání Laplaceovy transformace při hledání řešení diferenciálních rovnic má počátek v symbolických metodách vyvinutých anglickým inženýrem Oliverem Heavisidem.

Funkce $F(p)$ dána vztahem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx = \mathbf{L}(f),$$

se nazývá *Laplaceova transformace* funkce $f(x)$ a operátor \mathbf{L} , který zobrazuje f na F , se nazývá *Laplaceův operátor*. Tento operátor je na první pohled lineární.

3.4.1 Nalezněte Laplaceovu transformaci pro následující funkce:

- a) $e^{ax} \quad \left[\frac{1}{p-a}, p > a \right]$
- b) $x^b \quad \left[\frac{\Gamma[b+1]}{p^{-(b+1)}}, b > -1 \right]$

[†]Jedná se o tzv. Cobbovu-Douglasovu produkční funkci, $f(x, y)$ je objem celkové produkce, x je faktor práce, y faktor kapitálu, A je souhrnná produktivita faktorů, konstanty α a β představují elasticitu výstupu práce a kapitálu a získávají se dostupnými technologiemi.

[‡]Konstanta C pak představuje maximální množství peněz, které jsou k dispozici.

c) $\cos bx$	$\left[\frac{p}{p^2 + b^2} \right]$
d) $\sin bx$	$\left[\frac{b}{p^2 + b^2} \right]$
e) $x \cos bx$	$\left[\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2} \right]$
f) $x \sin bx$	$\left[\frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2} \right]$

3.4.2 Za předpokladu, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{-px} = 0$ ukažte, že

$$\mathbf{L}[f'(x)] = pF(p) - f(0).$$

3.4.3 Obdobně nalezněte vztahy pro

a) $\mathbf{L}(y')$	$[p\mathbf{L}(y) - y(0)]$
b) $\mathbf{L}(y'')$	$[p^2\mathbf{L}(y) - py(0) - y'(0)]$
c) $\mathbf{L}(y''')$	$[p^3\mathbf{L}(y) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0)]$
d) $\mathbf{L}(y^{(n)})$	$\left[p^n\mathbf{L}(y) - \sum_{i=1}^n p^{n-i}y^{(i)}(0) \right]$

3.4.4 Necht' pro y platí $y'' - 3y' + 2y = 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Najděte výraz pro $\mathbf{L}(y)$ a pak nalezněte y .

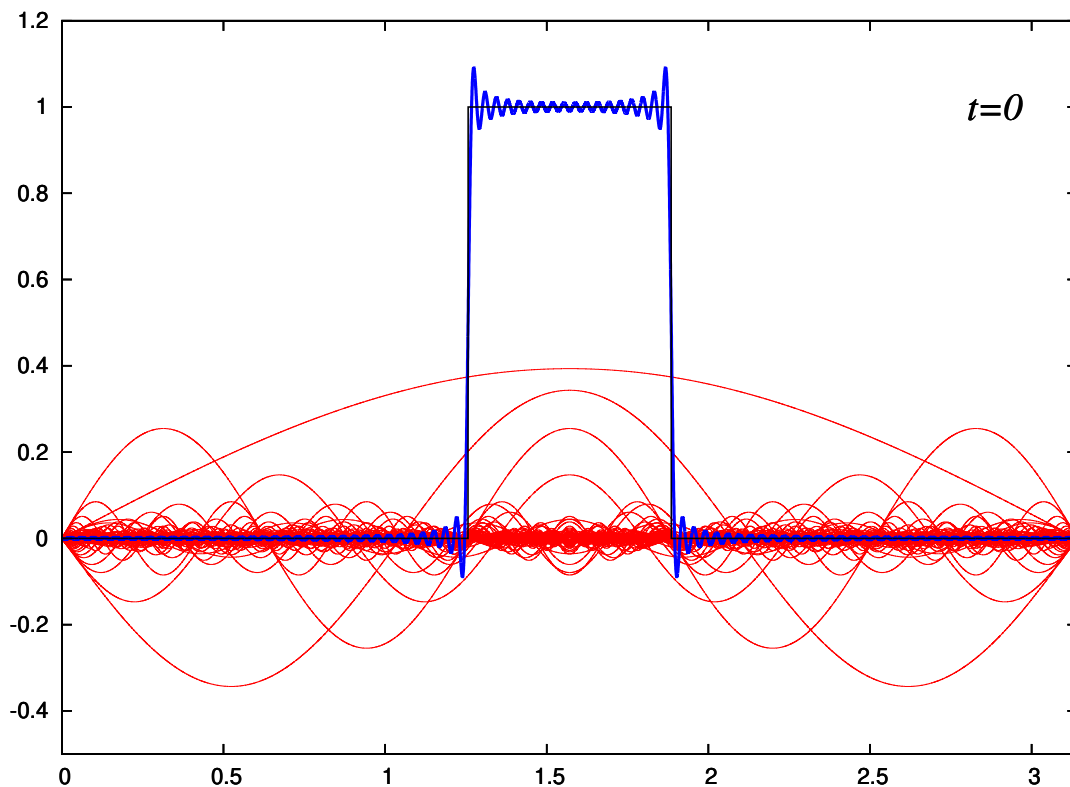
$$\left[\mathbf{L}(y) = \frac{2p^2 - 3p + 4}{p(p-1)(p-2)}, y = 2 - 3e^x + 3e^{2x} \right]$$

3.4.5 Podobně nalezněte řešení následujících rovnic:

a) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$	$\left[y = \cos 2x + \frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 2x}{6} \right]$
b) $y''' + y'' = e^x + x + 1$	$\left[y = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{x^3}{6} - x \right]$

3.4.6 Nalezněte funkci jejíž Laplaceova transformace je:

a) $\frac{p^2 - 5}{3p^2 + 12p + 8}$	$\left[\frac{2}{3}e^{-2x} \cosh \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{3}{2}e^{-2x} \sinh \frac{2}{\sqrt{3}}x \right]$
b) $\frac{p + 1}{p^2 + 2p + 2}$	$[e^{-x} \cos x]$
c) $\frac{2p + 3}{2p^2 + 4p}$	$\left[\frac{3 + e^{-2x}}{4} \right]$
d) $\frac{p}{p^2 + 3p + 1}$	$\left[e^{-\frac{3x}{2}} \left(\cosh \frac{\sqrt{5}x}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{5} \sinh \frac{\sqrt{5}x}{2} \right) \right]$



Obrázek 3.4: Obdelníkový signál na struně (modře) a jeho Fourierův rozvoj (červeně) do 90 řádu v čase $t = 0$.

3.5 Fourierův rozvoj

Fourierův rozvoj a jeho zobecnění do Fourierovi transformace je velice mocný nástroj k řešení některých diferenciálních rovnic. Zde si zopakujeme některé základní vztahy pro Fourierův rozvoj.

Nechť na intervalu $(-\pi, \pi)$ platí:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Ukažte, že pro koeficienty řady pak platí:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

3.5.1 Určete koeficienty Fourierova rozvoje a_n, b_n následujících funkcí:

a) $f(x) = a, \quad -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

3.5.2 Uvažujme strunu napnutou mezi dvěma body $(0, L)$, ve kterých je pevně ukotvena[§]. V základní poloze je struna určena funkcí $f(x) = 0$. Nyní uvedeme strunu do stavu popsaného funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} - a, \\ a & \frac{L}{2} - a < x < \frac{L}{2} + a, \\ 0 & \frac{L}{2} + a < x < L. \end{cases} \quad (3.13)$$

Struna je tedy nabuzena obdélníkovým signálem ve svém středu (3.4). Pokud nyní necháme strunu vyvíjet v čase, obdélníkový signál se bude pohybovat v souladu s vlnovou rovnicí. Ukažte, že na problém se dá dívat i tak, že obdélníkový signál rozvedeme ve Fourierovu řadu stojatých vln, které mění svou amplitudu jako $\cos(n\omega t)$, kde ω je uhlová frekvence stojatého vlnění. Důkaz doložte programem, který výsledek demonstruje.

Výsledek pro gnuplot.

```
reset
set samples 500
set term gif animate
set output "animate.gif"
n=100
dt=2*pi/n
L=pi
set xrange [0:L]
set yrange [-1.2:1.2]
i=0
load "animate.txt"
```

[§]Těmto okrajovým podmínkám, kdy jsou konce struny pevně uchyceny, se odborně říká Dirichletovy okrajové podmínky (Dirichlet boundary conditions). Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet(1805-1859) byl německý matematik, který výrazně přispěl k rozvoji Fourierovy analýzy.

File "animate.txt":

```

b=90
a=L/10
f(x,m)=2/((2*m-1)*pi)*(-cos((2*m-1)*pi/2 + (2*m-1)*pi*a/L) + cos((2*m-1)*pi/2 -
(2*m-1)*pi*a/L))*cos((2*m-1)*i*dt)*sin((2*m-1)*pi*x/L)+2/((2*m-1)*pi)*(sin((2*m-
1)*pi/2 + (2*m-1)*pi*a/L) - sin((2*m-1)*pi/2 - (2*m-1)*pi*a/L))*cos((2*m-1)*i*dt)
*cos((2*m-1)*pi*x/L)
aa=1
sum(x,aa,b)= (aa>=b) ? 0 : f(x,aa)+sum(x,aa+1,b)
g(x)=sum(x,1,b)
set multiplot
plot for [m=1:b] f(x,m) w l lt 1 lw 1 lc 1 notitle
plot g(x) w l lt 1 lw 2 lc 2 notitle
unset multiplot
i=i+1
if (i < n) reread

```

3.5.3 Dokažte, že každá funkce se dá napsat jako součet dvou funkcí, z nichž je jedna lichá a druhá sudá.

3.5.4 Ukažte, na základě Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x + x^2$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.5.5 Ukažte, na základě Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4 Komplexní analýza

Jako slunce zastíňuje hvězdy svým jasem, tak i vzdělaný člověk může zastínit slávu druhých lidí, bude-li předkládat matematické úlohy, a dosáhne ještě víc, bude-li je řešit.

Brahmagupta

V této kapitole si přiblížíme základy komplexní analýzy. Budeme se touto bohatou a mocnou částí matematiky zabývat pouze ve velice omezené míře a to v takové, abychom byli schopni pochopit a používat problematiku propagátorů v kvantové teorii pole.

4.1 Základní pojmy a definice

4.1.1 Popište geometricky množinu všech bodů Gaussovy roviny, které vyhovují těmto nerovnostem:

- a) $\Re z > 0$ [Polorovina ležící napravo od imaginární osy (bez bodů osy)].
- b) $\Im z \leq 1$ [Polorovina ležící pod vodorovnou přímkou procházející bodem $z = i$].
- c) $|\Re z| < 1$ [Pás tvořený body, jejichž vzdálenost od imaginární osy je menší než 1.]
- d) $|\Im z| < 1, \quad 0 < \Re z < 1$ [Obdélník s vrcholy v bodech $-i, 1 - i, 1 + i, i$ (bez stran).]
- e) $|z| \leq 1$ [Jednotkový kruh se středem v počátku včetně kružnice.]
- f) $|z - i| > 1$ [Celá rovina bez jednotkového kruhu se středem v bodě $z = i$.]
- g) $1 < |z + i| < 2$ [Mezikruží se středem v bodě $z = -i$ o větším poloměru 2 a menším 1.]
- h) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ [Úhel velikosti $\pi/4$ s vrcholem v počátku, který leží nad reálnou osou a ta činí jedno z jeho ramen.]

Pro komplexní funkce reálné proměnné $z(t) = x(t) + iy(t)$ definujeme přirozeným způsobem pojem limity, spojitosti, derivace a integrálu. Zavedeme tedy:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \quad (4.1)$$

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad (4.2)$$

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt. \quad (4.3)$$

4.1.2 Vypočtěte:

a) $\frac{1}{i}$ [-i]

b) $(1 + i)^{25}$ [$2^{12}(1 + i)$]

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$ [i]

d) $\sum_{k=0}^N \cos(k\varphi)$ [$\frac{\cos(\frac{N\varphi}{2}) \sin(\frac{(N+1)\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$]

e) $\sum_{k=0}^N \sin(k\varphi)$ [$\frac{\sin(\frac{N\varphi}{2}) \sin(\frac{(N+1)\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$]

f) i^i [$e^{-\frac{\pi}{2} + n2\pi}, n \in \mathbb{Z}$]

g) $\lim \left\{ \frac{1}{n}(1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) \right\}, \quad 0 < \varphi < 2\pi$ [0]

h) $((1 - it)e^{-it})'$ [$-(t + 2i)e^{-it}$]

i) $\int_0^1 (1 + it)^2 dt$ [$\frac{2}{3} + i$]

j) $\int_0^1 \frac{1 + it}{1 - it} dt$ [$\frac{\pi}{2} - 1 + i \ln 2$]

k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ [$-\ln[1 - i]$]

4.1.3 Určete, které křivky jsou definovány těmito parametrickými rovnicemi (t a R jsou reálné parametry, a a b jsou komplexní čísla):

a) $z = a + (b - a)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

b) $z = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad R > 0$

c) $z = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq +\infty$

d) $z = Re^{it} + \frac{e^{-it}}{R}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad R > 1$

$$e) z = \begin{cases} e^{i\pi t}, & 0 \leq t < 1 \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Odpovědi:

- a) Úsečka s počátečním bodem $z = 0$ a s koncovým bodem $z = b$.
- b) Horní polovina kružnice $|z| = R$, počáteční bod $z = R$ a koncový bod $z = -R$.
- c) Pravá polovina paraboly $y = x^2$, směr probíhání je od bodu $z = 0$ do nekonečna
- d) Elipsa

$$\frac{x^2}{(R + 1/R)^2} + \frac{y^2}{(R - 1/R)^2} = 1$$

proběhnutá proti směru hodinových ručiček.

- e) Obvod horní poloviny kruhu $|z| < 1$ proběhnutý jednou proti směru pohybu ručiček.

4.1.4 Vypočtěte následující křivkové integrály:

$$a) \int_{|z|=R} \frac{dz}{z}, \quad [2\pi i]$$

$$b) \int_{|z|=1} |z - 1| |dz|, \quad [8]$$

$$c) \int_l z \sin z \, dz, \quad \text{kde } l \text{ je úsečka s počátečním bodem } z = 0 \text{ a koncovým bodem } z = i, \quad [-ie^{-1}]$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx \quad [\pi]$$

4.1.5 Ukažte bez znalosti Eulerova vzorce, že platí:*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n \equiv \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

4.2 Analytická funkce

Říkáme, že funkce $f(z) : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná v nějakém okolí bodu $z_0 \in U$ je v tomto bodě *diferencovatelná* právě tehdy, když existuje konečná limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \equiv f'(z_0).$$

*Identita se občas nazývá Moivreova věta (De Moivre's theorem).

Číslo $f'(z_0)$ nazýváme *derivací funkce $f(z)$ v bodě z_0* .

4.2.1 Nalezněte všechny body, ve kterých jsou následující funkce diferencovatelné ($z = x + iy$):

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| a) $\Re z$, | $[\emptyset]$ |
| b) $x^2 y^2$, | [na osách] |
| c) $ z ^2$, | $[z = 0]$ |
| d) $x^2 + iy^2$, | [$\Re z = \Im z$] |
| e) $z \Re z$, | $[z = 0]$ |
| f) $2xy - i(x^2 - y^2)$, | $[z \in \mathbb{C}]$ |

Funkce $f(z)$ je diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ právě tehdy, když funkce $u(x, y) = \Re f(x + iy)$, $v(x, y) = \Im f(x + iy)$ jsou diferencovatelné v bodě (x_0, y_0) a splňují v něm *Cauchyho-Riemannovy podmínky*:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Říkáme, že funkce $f(z)$ je *analytická v bodě z_0^\dagger* , jestliže ji lze v nějakém okolí tohoto bodu vyjádřit ve tvaru konvergentní mocninné řady:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (4.5)$$

Pro bod $z_0 = \infty$ je třeba rozdíl $z - z_0$ nahradit výrazem $1/z$.

Platí: Funkce diferencovatelná v oblasti D je v této oblasti analytická.

Někdy je vhodné místo proměnných x, y používat proměnné $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Formálně definujeme:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (4.6)$$

4.2.2 Nechť funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu. Ukažte, že platí:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

4.2.3 Ukažte, že Cauchyho-Riemannovy podmínky mají v proměnných z a \bar{z} tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

zde $f = u + iv$.

[†]Ve starší literatuře, se v tomto smyslu setkáváme s pojmem *regulární funkce*, který se v novější literatuře pokládá ekvivalentní pojmu *holomorfní funkce*.

4.2.4 Je tudíž funkce $|z|$ analytická?

4.2.5 Ukažte, že Laplaceova rovnice $\Delta u = 0$ v proměnných z a \bar{z} má tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

4.3 Cauchyho věta. Cauchyho integrál

Nechť funkce $f(z)$ je analytická v omezené n -násobně souvislé oblasti D , jejíž hranice ∂D je tvořena konečným počtem uzavřených, po částech hladkých křivek. Je-li funkce spojitá na množině $D \cup \partial D$, pak

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0. \quad (4.7)$$

4.3.1 Vypočtete Fresnelovy integrály

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

s použitím

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$[I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}]$$

4.3.2 Podobně vypočtete integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$[\sqrt{\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}]$$

4.3.3 Na základě vhodné substituce vypočtete následující integrál

$$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z}.$$

$$[2\pi i]$$

Při řešení některých úloh je vhodné použít *Cauchyho integrálního vzorce*:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in D, \\ 0, & z_0 \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} f^{(n)}(z_0)/n!, & z_0 \in D, \\ 0, & z_0 \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (4.9)$$

4.3.4 Ukažte, že následující výraz je roven počtu kořenů komplexní funkce $f(z)$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{2\pi i}.$$

4.3.5 Použijte Cauchyho integrálního vzorce k výpočtu integrálů (všechny kružnice jsou orientované proti směru hodinových ručiček);

a) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz,$ [2π sinh 1]

b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1},$ [0]

c) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz,$ [2πi sinh 1]

d) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz,$ [0]

e) $\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3},$ [$-\frac{i\pi}{4}$]

f) $\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz,$ [-πi cosh 1]

g) $\int_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz,$ $D : \text{a) } |z| < \frac{1}{2}; \quad \text{b) } |z| < \frac{3}{2}; \quad \text{c) } |z-1| < \frac{1}{2};$
[a) 2πi; b) iπ(2-e); c) -πie]

h) $\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)},$ $|a| < r < |b|, \quad n = 1, 2, \dots$ [-2πi(b-a)⁻ⁿ]

4.3.6 Nechť funkce $f(z)$ je analytická v kruhu $|z| < R$ a spojitá v kruhu $|z| \leq R$. Dokažte za pomoci Cauchyho integrálního vzorce nerovnost:

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{MR}{(R - |z|)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |z| < R,$$

kde $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$.

4.3.7 **Liouvilleova věta.** Nechť funkce $f(z)$ je analytická v celé Gaussově rovině a nechť existuje M tak, že $|f(z)| \leq M$ pro všechna z . Dokažte, že $f(z)$ je konstantní v celé komplexní rovině.

4.4 Taylorova řada

Je známo, že každou funkci $f(z)$ analytickou v libovolném kruhu $|z - z_0| < R$ lze rozvinout v mocninnou řadu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.10)$$

která konverguje v tomto kruhu, kde koeficienty a_k jsou definovány vztahem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

nebo vztahem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad r < R.$$

Tato mocninná řada se nazývá *Taylorova řada* funkce $f(z)$ v okolí bodu z_0 .

4.4.1 Přímým výpočtem $f^{(n)}(z_0)$ dokažte platnost těchto vzorců pro všechna z :

$$\text{a) } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\text{b) } e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{az_0} \frac{a^n}{n!} (z - z_0)^n,$$

$$\text{c) } \cosh az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

$$\text{d) } \sinh az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\text{e) } \sin az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\text{f) } \cos az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

4.4.2 S použitím rozvoje e^{az} dokažte rovnosti:

$$\text{a) } \cos \sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!},$$

$$\text{b) } \frac{1}{4} (e^z + e^{-z} + 2 \cos z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!},$$

$$\text{c) } \frac{1}{3} \left(e^z + 2e^{-z/2} \cos \frac{z\sqrt{3}}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!},$$

$$\text{d) } e^{z \cot \alpha} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sin^n \alpha} \frac{z^n}{n!}, \quad \alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

4.4.3 S použitím rozvoje $(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ platného pro $|z| < 1$ dokažte rovnosti:

$$\text{a) } \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\text{b) } \frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\text{c) } \frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}, \quad |z| < 1, \quad a \neq 0;$$

$$\text{d) } \frac{1}{z^2 + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-2n-2} z^{2n}, \quad |z| < |a|, \quad a \neq 0;$$

$$\text{e) } \frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1;$$

$$\text{f) } \frac{z^2 + 4z^4 + z^6}{(1-z^2)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^{2n}, \quad |z| < 1;$$

4.4.4 Nalezněte rozvoj těchto racionálních funkcí v Taylorovu řadu v okolí bodu $z = 0$:

$$\text{a) } \frac{1}{(z+1)(z-2)}, \quad \left[\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{n+1} - 2^{-n-1}] z^n \right]$$

$$\begin{array}{ll}
\text{b)} \frac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6}, & \left[- \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1}) z^n \right] \\
\text{c)} \frac{z}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}, & \left[\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{n+1} - 4^{-n-1}] z^{2n+1} \right] \\
\text{d)} \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z - 1)}, & \left[- \sum_{n=0}^{\infty} (z^{4n} + z^{4n-1}) \right] \\
\text{e)} \frac{1}{(z^2 - 1)^2(z^2 + 4)}, & \left[\frac{1}{25} \sum_{n=0}^{\infty} [5n + 6 + (-1)^n 4^{-n-1}] z^{2n} \right] \\
\text{f)} \frac{1}{1 + z + z^2}, & \left[\sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1}) \right] \\
\text{g)} \frac{2z - 1}{4z^2 - 2z + 1}, & \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2^{3n+2} z^{3n+2} - 2^{3n} z^{3n}) \right] \\
\text{h)} \frac{1}{(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)}, & \left[\sum_{n=0}^{\infty} (z^{8n} - z^{8n+1}) \right] \\
\text{i)} \frac{1}{(1 - z^4)(1 + z + z^2 + z^3)}, & \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) (z^{3n} - z^{3n+1}) \right] \\
\text{j)} \sin^2 z, & \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \right] \\
\text{k)} \cos^3 z, & \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n} + 3}{4} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right] \\
\text{l)} \sin^4 z + \cos^4 z, & \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \right] \\
\text{m)} \cos^2 z + \cosh^2 z, & \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{4n}}{(4n)!} z^{4n} \right]
\end{array}$$

4.5 Singulární body

Nechť funkce $f(z)$ je analytická v prstencovém okolí $0 < |z - a| < \rho$ (pro $a = \infty$ v prstencovém okolí $\rho < |z| < +\infty$) a nechť není definována v bodě $z = a$. Bod $z = a$ pak nazýváme *izolovaným singulárním bodem* funkce $f(z)$.

Podle chování funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = a$ provádíme tuto klasifikaci izolovaných singulárních bodů:

- Bod $z = a$ se nazývá *odstranitelná singularita* funkce $f(z)$ právě tehdy, když existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.
- Bod $z = a$ se nazývá *pól* funkce $f(z)$ právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.
- Bod $z = a$ se nazývá *podstatná singularita* (také *neodstranitelná singularita*) funkce $f(z)$ právě tehdy, když funkce $f(z)$ nemá v bodě $z = a$ limitu.

4.5.1 Pro následující funkce nalezněte všechny izolované singulární body a stanovte jejich charakter:

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $\frac{z}{\sin z}$, | e) $\cotg z - \frac{1}{z}$, |
| b) $\frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$, | f) $z(e^{1/z} - 1)$, |
| c) $z^2 \sin \frac{z}{z+1}$, | g) $e^{\cotg(\pi/z)}$, |
| d) $\frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi z}{z+1}$, | h) $\sin e^{1/z}$. |

Odpovědi:

- $z = 0$ – odstranitelná singularita; $z = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ – póly;
- $z = 0$ – odstranitelná singularita; $z = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ – póly;
- $z = \infty$ – pól; $z = -1$ – podstatná singularita;
- $z = \infty$ a $z = 1$ – odstranitelná singularita; $z = -1$ – podstatná singularita;
- $z = 0$ – odstranitelná singularita; $z = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ – póly;
- $z = \infty$ – odstranitelná singularita; $z = 0$ – podstatná singularita;
- $z = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$ – podstatné singularity;
- $z = 0$ – podstatná singularita.

Existuje ještě jedna podrobnější klasifikace pólů, která vyžaduje zavedení jednoho pomocného pojmu. Nechť funkce $f(z)$ je analytická v bodě $z = a$ a nechť $m \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo. Říkáme, že $z = a$ je *m-násobným nulovým bodem* funkce $f(z)$ právě tehdy, když

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Říkáme, že bod $z = \infty$ je *m-násobným nulovým bodem* funkce $f(z)$ právě tehdy, když funkce $g(z) = f(1/z)$ má *m-násobný nulový bod* v bodě $z = 0$.

Má-li funkce $f(z)$ v bodě $z = a$ pól, pak má funkce $1/f(z)$ v tomto bodě nulový bod. *Násobnost* pólu funkce $f(z)$ v bodě $z = a$ pak nazýváme násobnost nulového bodu funkce $1/f(z)$ v bodě $z = a$.

Také říkáme, že bod $z = a$ je *hromadným bodem pólů* funkce $f(z)$ právě tehdy, když funkce $f(z)$ je analytická v nějakém prstencovém okolí $0 < |z - a| < r$ s výjimkou nekonečně mnoha bodů a_1, a_2, \dots , v nichž má funkce $f(z)$ póly, přičemž bod a je limitou posloupnosti $\{a_n\}$.

4.6 Laurentova řada

Laurentovou řadou se středem v bodě a nazýváme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n .$$

Říkáme, že řada konverguje v bodě z_0 , jestliže konvergují řady

$$\sum_{n=-\infty}^0 c_n (z_0 - a)^n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z_0 - a)^n .$$

Každou funkci $f(z)$ analytickou v mezikruží $r < |z - a| < R$ lze rozvinout v Laurentovu řadu se středem v bodě $z = a$, která konverguje v tomto mezikruží. Její koeficienty c_n jsou dány vztahy[‡]

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) (z - a)^{-n-1} dz , \quad r < \rho < R .$$

4.6.1 Pomocí vzorce pro součet nekonečné geometrické posloupnosti a vět o derivování a integrování řad, dokažte rovnosti:

$$\text{a) } \frac{1}{z - b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n , \quad |z| > |b| ,$$

$$\text{b) } \frac{1}{z^2 - b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)} z^{2n} , \quad |z| > |b| ,$$

$$\text{c) } \frac{z^2}{z^2 + b^2} = \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^n b^{-2n} z^{2n} , \quad |z| > |b| ,$$

$$\text{d) } \frac{1}{(z - b)^2} = - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n + 1) b^{-n-2} z^n , \quad |z| > |b| ,$$

Nechť funkci $f(z)$ analytickou v mezikruží $r < |z - a| < R$ lze psát ve tvaru součtu $f_1(z) + f_2(z)$, kde funkce $f_1(z)$ je analytická pro $|z - a| < R$ a funkce $f_2(z)$ pro $|z - a| > r$. Funkci $f(z)$ pak můžeme rozvinout v mezikruží $r < |z - a| < R$ v Laurentovu řadu tak, že rozvineme funkci $f_1(z)$ v Taylorovu řadu v bodě $z = a$ a funkci $f_2(z)$ rozvineme v řadu se zápornými exponenty $z - a$. Je-li funkce $f(z)$ racionální, lze hledaný rozklad $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ získat rozkladem na parciální zlomky.

[‡]Tyto vzorce se při hledání rozvoje konkrétních funkcí v Laurentovy řady téměř nikdy nepoužívají. Obvykle se rozvoj konkrétní funkce v Laurentovu řadu nějakým způsobem převede na rozvoj v Taylorovu řadu.

4.6.2 Následující funkce rozviňte v mezikruží $1 < |z| < 2$ v Laurentovu řadu se středem v bodě $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{1}{(z+1)(z-2)}, & \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{3} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n \right] \\
 \text{b)} \quad & \frac{z^4 + 1}{(z-1)(z+2)}, & \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{3} z^n + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} z + \frac{7}{24} z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{17(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n \right] \\
 \text{c)} \quad & \frac{z}{(z^2+1)(z+2)}, & \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{5} z^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2(-1)^{n-1}}{5} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot 5} z^n \right] \\
 \text{d)} \quad & \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}, & \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-3n-4}{9} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^{n+1}} z^n \right] \\
 \text{e)} \quad & \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}, & \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{5} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5 \cdot 4^{n+1}} z^{2n} \right] \\
 \text{f)} \quad & \frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}, & \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-5n-6}{25} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100 \cdot 4^n} z^{2n} \right]
 \end{aligned}$$

4.6.3 Rozviňte v mezikruží D v Laurentovu řadu se středem v bodě $z = a$ (bod a i mezikruží D jsou popsány u každé úlohy zvlášť) tyto funkce:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{1}{z(z-3)^2}, & a = 1, & D : \{1 < |z-1| < 2\}, \\
 \text{b)} \quad & \frac{1}{(z^2-9)z^2}, & a = 1, & D : \{1 < |z-1| < 2\}, \\
 \text{c)} \quad & \frac{z+i}{z^2}, & a = i, & -i \in D, \\
 \text{d)} \quad & \frac{z^2-1}{z^2+1}, & a = 1, & 2i \in D, \\
 \text{e)} \quad & \frac{1}{z(z-1)(z-2)}, & a = 0, & -\frac{3}{2} \in D, \\
 \text{f)} \quad & \frac{2z}{z^2-2i}, & a = 1, & -1 \in D, \\
 \text{g)} \quad & \frac{z^3}{(z-1)(z-2)}, & a = -1, & D : \{0 < |z+1| < 3\}, \\
 \text{h)} \quad & \frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}, & a = 0, & D : \{|z| > 2\}.
 \end{aligned}$$

Výsledky:

- a) $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n$,
- b) $\sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(n+1)(-1)^n}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{27 \cdot 2^{2n+3}} (z-1)^n$,
- c) $\sum_{n=-\infty}^{-1} (n+2) i^{n+1} (z-i)^n$,
- d) $1 + \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^{n+1} 2^{-n/2+1} \sim \frac{\pi n}{4} (z-1)^{n-1}$,
- e) $-\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n - \frac{1}{2} z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2} z^n$,
- f) $\sum_{n=-\infty}^{-1} i^{-n-1} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}} (z-1)^n$,
- g) $\frac{1}{3} (z-1)^{-1} - \frac{8}{9} + \frac{19}{27} (z+1) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{3^{n+2}} (z+1)^n$,
- h) $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1 + (-1)^n \cdot 4^{-n-1}}{5} z^{2n}$.

Funkci $f(z)$ můžeme snadno rozvinout v mezikruží $r < |z-a| < R$ v Laurentovu řadu se středem v bodě $z = a$, jestliže ji vyjádříme ve tvaru součinu dvou funkcí $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, kde $f_1(z)$, resp. $f_2(z)$ je analytická funkce pro $|z-a| < R$, resp. $|z-a| > r$. Funkci $f_1(z)$ rozvineme v bodě $z = a$ v Taylorovu řadu a funkci $f_2(z)$ rozvineme v řadu se zápornými exponenty $z-a$. Laurentova řada funkce $f(z)$ je pak dána součinem řad odpovídajících funkcím $f_1(z)$ a $f_2(z)$.

4.6.4 Rozviňte v mezikruží D v Laurentovu řadu se středem v bodě $z = a$ (bod a i mezikruží D jsou popsány u každé úlohy zvlášť) tyto funkce:

- a) $z^3 e^{1/z}$, $a = 0$, $D : \{0 < |z| < \infty\}$,
- b) $z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$, $a = 0$, $D : \{0 < |z| < \infty\}$,
- c) $z^3 \cos \frac{1}{z-2}$, $a = 2$, $D : \{0 < |z-2| < \infty\}$,
- d) $\frac{e^z}{z(1-z)}$, $a = 0$, $D : \{1 < |z| < \infty\}$,
- e) $\frac{e^{1/(z-1)}}{z(z+1)}$, $a = 1$, $D : \{1 < |z-1| < 2\}$,
- f) $e^{t(z-1/z)/2}$, $a = 0$, $D : \{0 < |z| < \infty\}$,

Výsledky:

$$\text{a) } z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+3)!},$$

$$\text{b) } -\pi z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{-2n+1},$$

$$\text{c) } (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + \frac{23}{2}(z-2) + 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{48n^2 + 72n + 23}{(2n+2)!} (z-2)^{-2n+1} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+2)!} (16n^2 + 24n + 5)(z-2)^{2n},$$

$$\text{d) } - \sum_{n=-\infty}^{-2} ez^n + (1-e)z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=n+2}^{\infty} \frac{1}{p!} \right) z^n,$$

$$\text{e) } \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{e} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}(n-p)!} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \right) (z-1)^n,$$

$$\text{f) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n, \text{ kde } J_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}, \quad J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t).$$

4.7 Fourierova řada

Na každou Fourierovu řadu $F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$ se lze dívat jako na Laurentovu řadu

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, na kružnici $|z| = 1$. Proto úlohu rozvinout danou funkci ve Fourierovu řadu lze často převést na úlohu o jejím rozvoji v Laurentovu řadu pomocí substituce $e^{i\varphi} = z$.

4.7.1 Nalezněte Fourierovu řadu funkcí:

- a) $\frac{1 - a \cos \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$, $-1 < a < 1$,
- b) $\frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$, $-1 < a < 1$,
- c) $\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$, $0 < a < 1$,
- d) $\frac{1}{1 - a \sin \varphi}$, $-1 < a < 1$,
- e) $\frac{\sin^2 \varphi}{(1 + a^2 + 2a \cos \varphi)^2}$, $0 < a < 1$,
- f) $\ln(1 + a^2 - 2a \cos \varphi)$, $0 < a < 1$,
- g) $\cos \varphi \ln(1 + a^2 \cos^2 \varphi)$, $0 < a < 1$,

Výsledky:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\varphi$,
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\varphi$,
- c) $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\varphi$,
- d) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{2a^2(1-a^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{2n} \cos 2n\varphi -$
 $\frac{1}{2a^2(1-a^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{2n-1} \sin(2n-1)\varphi$,
- e) $\frac{1}{2a^2(1-a^2)} + \frac{1}{2a^2(1-a^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (-a)^n [1 + a^2 - n(1-a^2)] \cos n\varphi$,
- f) $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\varphi$,
- g) $2 \left[\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a} \right)^2 + \ln \frac{\sqrt{1+a^2}+1}{2} \right] \cos \varphi +$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{\sqrt{(a^2+1)}-1}{a} \right)^2 n \left(\frac{1}{n} + 2 \frac{\sqrt{(a^2+1)}-1}{a} \right) \cos(2n+1)\varphi$$

4.8 Výpočet reziduí

Nechť funkce $f(z)$ je v bodě z_0 analytická nebo v něm má izolovaný singulární bod. *Reziduem funkce $f(z)$ v bodě z_0 pro $z_0 \neq \infty$ nazýváme číslo*

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz,$$

kde číslo $\rho > 0$ je dostatečně malé (kružnice se obíhá jednou proti směru pohybu hodinových ručiček). *Reziduem funkce $f(z)$ v bode ∞ nazýváme číslo*

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz,$$

kde číslo $R > 0$ je dostatečně velké (kružnice se obíhá jednou proti směru pohybu hodinových ručiček).

Je-li funkce $f(z)$ analytická v bodě z_0 kde $z_0 \neq \infty$, pak podle Cauchyho věty je $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Reziduum v nekonečnu může být nenulové i v případě, když je funkce v nekonečnu analytická.

Výpočet reziduí přímo z definice je značně složitý. Základem pro praktické výpočty je věta: *Nechť pro $0 < |z - z_0| < \rho$ je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

pak

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Je-li pro $R < |z| < \infty$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

pak

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

4.8.1 Vypočtete:

a) $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\sin z}{z^2}$

[−1]

- b) $\operatorname{res}_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}}$ [-1]
- c) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2}$ [e]
- d) $\operatorname{res}_{z=\infty} z^2 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$ $\left[\frac{\pi^3}{6}\right]$
- e) $\operatorname{res}_{z=\pi/4} \frac{\cos z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- f) $\operatorname{res}_{z=1} z e^{\frac{1}{z-1}}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$
- g) $\operatorname{res}_{z=\infty} z^n e^{\frac{a}{z}}$ $\left[\frac{-a^{n+1}}{(n+1)!}\right]$
- h) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$ $\left[\frac{1}{n!}\right]$

Výpočet reziduí je zpravidla jednodušší než výpočet rozvoje funkce v Laurentovu řadu v prstencovém okolí daného bodu, neboť při výpočtu rezidua stačí najít jen jeden koeficient Laurentovy řady. Toto zjednodušení je tím větší, čím méně členů obsahuje hlavní část Laurentovy řady.

Uvedeme základní formule pro výpočet reziduí.

Nechť je bod $z_0 \neq \infty$ jednonásobným pólem funkce $f(z)$. Pak

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Nechť lze funkci $f(z)$ psát ve tvaru

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou analytické v bodě $z_0 \neq \infty$ a $\psi(z)$ splňuje podmínky

$$\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0.$$

Pak

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Nechť funkce $f(z)$ je analytická v bodě $z = \infty$. Pak

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z (f(\infty) - f(z)).$$

Nechť lze funkci $f(z)$ psát ve tvaru $f(z) = \varphi(1/z)$, kde funkce $\varphi(\xi)$ je analytická v bodě $\xi = 0$. Pak

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0).$$

Nechť lze funkci $f(z)$ psát ve tvaru $f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z)$, kde funkce $\varphi(z)$ je analytická v bodě $z_0 \neq \infty$. Pak

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(z_0).$$

4.8.2 Nalezněte rezidua následujících funkcí ve všech jejich konečných singulárních bodech:

- a) $\frac{1}{z + z^3}$ [1 ($z = 0$); $-1/2$ ($z = i, -i$)]
- b) $\frac{z^2}{(1 + z)^3}$ [1 ($z = -1$)]
- c) $\frac{z^{2n}}{(z - 1)^n}, n = 1, 2, \dots$ [$\binom{2n}{n-1}$ ($z = 1$)]
- d) $\frac{\cos z}{(z - 1)^2}$ [$-\sin 1$ ($z = 1$)]
- e) $\frac{1}{e^z + 1}$ [-1 ($z = (2n + 1)\pi i$), $n \in \mathbb{Z}$]

4.8.3 Nalezněte rezidua těchto funkcí v nekonečnu:

- a) $\frac{z^4 + 1}{z^{-1}}$ [0]
- b) $\cos \pi \frac{z + 2}{2z}$ [π]
- c) $\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z - 1}$ [0]
- d) $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z + 1}$ [-1]
- e) $\frac{(z^{10} + 1) \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{(z^5 + 2)(z^6 - 1)}$ [-1]
- f) $z \cos^2 \frac{\pi}{z}$ [π^2]

4.9 Výpočet integrálů po uzavřené křivce

V následujících úlohách se používá *reziduové věty*:

Nechť funkce $f(z)$ je analytická v oblasti D s výjimkou konečného počtu bodů $a_k \in D$ ($k = 1, 2, \dots, n$), ve kterých má funkce $f(z)$ izolované singulární body. Nechť je funkce $f(z)$ spojitá v každém bodě uzávěru oblasti D s výjimkou singulárních bodů. Nechť je hranice ∂D oblasti D složená z konečného počtu hladkých uzavřených křivek. Pak

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z),$$

jestliže se integrace po hranici ∂D provádí v kladném smyslu.

4.9.1 Vypočtěte integrály:

- a) $\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$, $D: \{|z-1| < 1\}$, $\left[-i\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right]$
- b) $\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $D: \{|z-1-i| < 2\}$, $\left[-i\frac{\pi}{2}\right]$
- c) $\int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$, $D: \{x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3}\}$, $[i\pi \sin 1]$
- d) $\int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, $D: \{2 < |z| < 4\}$, $\left[-i\frac{3\pi}{64}\right]$
- e) $\int_{\partial D} \frac{ze^{\frac{1}{3z}}}{z+3} dz$, $D: \{|z| > 4\}$, $\left[i\frac{16\pi}{3}\right]$

Při výpočtu integrálů funkcí analytických v celé rovině s výjimkou konečného počtu izolovaných singulárních bodů si je nutné uvědomit, že součet všech reziduí takové funkce (včetně rezidua v nekonečnu) je roven nule. Jinými slovy pro takové funkce platí rovnost

$$\int_{\partial D} f(z) dz = - \int_{\partial D_d} f(z) dz,$$

kde D_d je doplněk množiny \bar{D} v uzavřené Gaussově rovině.

4.9.2 Vypočtěte integrály:

- a) $\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$, $D: \{|z| < 2\}$, $[0]$
- b) $\int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2\left(\frac{1}{z}\right)}{(z-1)(z-2)} dz$, $D: \{|z| < 3\}$, $[0]$
- c) $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz$, $D: \{|z| < 2\}$, $[2\pi i]$
- d) $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz$, $D: \{|z| < 2\}$, $\left[-\frac{2\pi i}{3}\right]$

$$\text{e) } \int_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz, \quad D : \{|z| > 3\}, \quad [2\pi i \cos 1]$$

$$\text{f) } \int_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z^{11}} dz, \quad D : \{|z| < 2\}, \quad [4\pi i (\cos 1 - \sin 1)]$$

4.9.3 Dokažte rovnost

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

4.10 Aplikace teorie reziduí

Funkci nazveme *meromorfní v oblasti D*, jestliže v této oblasti nemá jiné singulární body než póly. Funkce meromorfní v celé Gaussově rovině se nazývá *meromorfní funkce*.

Nejjednodušší výpočet integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (4.11)$$

pomocí věty o residuích je, jestliže chování funkce $f(z)$ v polorovině $\Im z > 0$ (nebo $\Im z < 0$) umožňuje považovat daný integrál přes reálnou osu za integrál funkce $f(z)$ po hranici této oblasti.

4.10.1 Nechť funkce $f(z)$ je analytická v polorovině $\Im z > 0$ mimo póly a_1, a_2, \dots, a_n a je spojitá až na hranici této poloroviny (mimo póly). Dokažte, že je-li funkce $f(z)$ taková, že splňuje podmínku $f(z) = o(\frac{1}{z})$ pro $z \rightarrow \infty$ v polorovině $\Im z \geq 0$, pak platí vzorec:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

4.10.2 Vypočtěte integrály:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}, \quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, \quad \left[\frac{5\pi}{12}\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}, & [0] \\
\text{d)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}, & [\pi\sqrt{2}] \\
\text{e)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}, & \left[\frac{4\pi}{3}\right] \\
\text{f)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25}, & \left[\frac{\pi}{4}\right] \\
\text{g)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}, & \left[\frac{3\pi}{8}\right] \\
\text{h)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4ix - 5)^2}, & [0]
\end{aligned}$$

4.10.3 Nechť funkce $f(z)$ je analytická v polorovině $\Im z > 0$ mimo póly a_1, a_2, \dots, a_n a je spojitá až na hranici této poloroviny (mimo póly). Dokažte, že je-li funkce $f(z)$ taková, že splňuje podmínku $f(z) = o(1)$ pro $z \rightarrow \infty$ v polorovině $\Im z \geq 0$, pak platí vzorec:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} [f(z)e^{iz}].$$

4.10.4 Vypočtěte integrály:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx, & [\pi i e^{-1}] \\
\text{b)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2ix - 2} dx, & \left[-\frac{2\pi \sin 1}{e}\right] \\
\text{c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^3} dx, & [0] \\
\text{d)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix}}{x^2 - 6x + 109} dx, & [\pi i e^{3i-10}]
\end{aligned}$$

$$\text{e) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx, \quad [\pi(1-i)e^{-3i-6}]$$

$$\text{f) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^4+8x^2+16} dx, \quad \left[\frac{3\pi}{32e^2} \right]$$

4.10.5 Nechť jsou splněny podmínky příkladu 4.10.3 a nechť je mimo to funkce $f(z)$ reálná pro reálné hodnoty z . Dokažte vzorce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx = -2\pi \Im \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} [f(z)e^{iz}] \right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx = 2\pi \Re \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} [f(z)e^{iz}] \right\},$$

4.10.6 Vypočtěte integrály:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2+2x+2} dx, \quad \left[\frac{\pi \cos 2}{e^2} \right]$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx, \quad \left[\frac{\pi(4-e)}{3e^2} \right]$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x) \sin x}{x^4+10x^2+9} dx, \quad \left[\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^3} \right) \right]$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^3+13x) \sin x}{x^4+13x^2+36} dx, \quad \left[\pi \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \right) \right]$$

$$\text{e) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2-4x+5} dx, \quad \left[\frac{\pi}{e^2} (\cos 4 - \sin 4) \right]$$

$$\text{f) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+10} dx, \quad \left[\frac{\pi}{e^3} \left(\cos 1 + \frac{\sin 1}{3} \right) \right]$$

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ mimo bod $c \in (a, b)$, a nechť integrál funkce $f(x)$ přes interval $\langle a, b \rangle$ diverguje. *Integrálem funkce $f(x)$ přes interval $\langle a, b \rangle$*

ve smyslu hlavní hodnoty nazýváme limitu[§]

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{I_\rho} f(x) dx ,$$

kde I_ρ je interval $\langle a, b \rangle$, z něhož je vyňato okolí $(c - \rho, c + \rho)$ bodu c .

Nechť je funkce definována na celém intervalu $(-\infty, \infty)$ a nechť je integrovatelná na každém uzavřeném intervalu. Integrálem ve smyslu hlavní hodnoty pak míníme:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x) dx .$$

4.10.7 Určete:

$$\text{a) v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} , \quad [0]$$

$$\text{b) v.p.} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} , \quad [0]$$

$$\text{c) v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx , \quad [0]$$

$$\text{d) v.p.} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} , \quad [-\ln 2]$$

$$\text{e) v.p.} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} , \quad [0(i\pi?)]$$

$$\text{f) v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx , \quad [\pi]$$

$$\text{g) v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \arctan x dx , \quad [0]$$

[§]v.p. z francouzského *valuer principal*. V anglicky mluvících zemích se častěji používá zkratka p.v. *principal value* a nebo značení:

$$\int_a^b f(x) dx .$$

4.10.8 Nechť $R(z)$ je racionální funkce, která má póly a_1, a_2, \dots, a_n v horní polorovině a póly b_1, b_2, \dots, b_m na reálné ose (a jiné póly pro $\Im z \geq 0$ nemá). Dokažte, že splňuje-li funkce $R(z)$ podmínku $R(z) = O(1/z)$ pro $z \rightarrow \infty$, pak platí vzorec

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} R(z)e^{iz} + \pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=b_k} R(z)e^{iz}.$$

Poznámka: Výsledek této úlohy lze využít i k výpočtu konvergentních integrálů. Např. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \Im \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

4.10.9 Vypočtěte integrály:

$$\text{a) v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \quad [\pi i(\alpha > 0), -\pi i(\alpha < 0)]$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx, \quad \alpha > 0; \quad \left[\frac{\pi \alpha}{2} \right]$$

$$\text{c) } \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx, \quad n = 2, 3, 4; \quad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\text{d) } \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + a^2)} dx, \quad \Re a > 0; \quad \left[\frac{\pi \left(1 - a + \frac{a^2}{2} - e^{-a} \right)}{2a^4} \right]$$

4.10.10 Nechť $R(\xi, \eta)$ je racionální funkce a nechť funkce $R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ nemá póly na reálné ose. Dokažte, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

4.10.11 Vypočtěte integrály:

$$\text{a) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}, \quad \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{13 + 12 \sin \varphi}, \quad \left[\frac{2\pi}{5} \right]$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{13 + 12 \cos \varphi} d\varphi, \quad \left[\frac{13\pi}{45} \right]$$

$$\text{d) } \int_0^{\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \left[2\pi \left(\sqrt{2} - \frac{5}{4} \right) \right]$$

$$\text{e) } \int_0^{\pi} \cotg(\varphi - ia), \quad a > 0; \quad [\pi i]$$

4.10.12 Ukaŕte ŕe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^N dx = \pi \sum_{\alpha=0}^{N-2\alpha>0} (-1)^\alpha \frac{N(N-2\alpha)^{N-1}}{\alpha!(N-\alpha)!2^{N-1}}.$$

5 Speciální funkce

*Nedělejte si starosti ohledně vašich potíží v matematice.
Můžu vás ujistit, že ty moje jsou stále větší.*

Albert Einstein

V této kapitole předkládáme základní definice a vztahy pro tzv. speciální funkce matematické fyziky. V dnešní době ustupují speciální funkce před numerickými řešeními daných problémů fyziky, ale přesto stále představuje nedílnou součást intelektuální výbavy každého teoretického fyzika.

5.1 Gamma funkce

Gamma funkce $\Gamma(x)$ je prodloužení faktoriálu na reálnou osu. Prodloužení je uděláno tak, aby $\ln \Gamma(x)$ byla konvexní funkce. Těmito dvěma požadavky je gamma funkce plně definována a určena následujícím integrálem:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

vlastnosti:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{5.1}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Eulerova Beta funkce je dána vztahem

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

5.1.1 Dokažte vztah (5.1) použitím integrace per partes.

5.1.2 Vyjádřete následující integrály pomocí gamma funkce:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} x^{2/3} e^{-x} dx, \quad \left[\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \right]$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2} dx, \quad \left[\frac{1}{2} \Gamma(3) \right]$$

$$\text{c) } \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right]^n dx, \quad [\Gamma(n+1)]$$

5.1.3 Vypočtete povrch n -rozměrné koule o poloměru r .

$$\left[S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} \right]$$

5.1.4 Odhadněte, pro jakou dimenzi má jednotková koule největší povrch (v dané míře).

$$[n \sim 7.257]$$

5.1.5 Vypočtete objem n -rozměrné koule o poloměru r .

$$\left[V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n \right]$$

5.1.6 Odhadněte, pro jakou dimenzi má jednotková koule největší objem (v dané míře).

$$[n \sim 5.257]$$

5.2 Legendreovy polynomy $P_\ell(x)$

Diferenciální rovnice:

$$(1-x^2)^2 P_\ell''(x) - 2xP_\ell'(x) + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0,$$

nebo

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_\ell(x) \right] + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0.$$

Generující funkce:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad \text{pro } |t| < 1, |x| \leq 1.$$

Ortonormalita:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'},$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) P_\ell(x') (2\ell + 1) = 2\delta(x - x').$$

Vyjádření $P_\ell(x)$:

$$\begin{aligned} P_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell} \sum_{\nu=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^\nu (2\ell - 2\nu)!}{\nu! (\ell - \nu)! (\ell - 2\nu)!} x^{\ell - 2\nu}, \\ &= \frac{1}{\ell! 2^\ell} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right)^\ell d\varphi. \end{aligned}$$

Rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned} \ell P_{\ell-1} - (2\ell + 1)xP_\ell + (\ell + 1)P_{\ell+1} &= 0; \\ P_\ell &= xP_{\ell-1} + \frac{x^2 - 1}{\ell} P'_{\ell-1}; \\ xP'_\ell - \ell P_\ell &= P'_{\ell-1}; \\ xP'_\ell + (\ell + 1)P_\ell &= P'_{\ell+1}; \\ \frac{d}{dx} [P_{\ell+1} - P_{\ell-1}] &= (2\ell + 1)P_\ell. \end{aligned}$$

5.3 Přidružené Legendreovy polynomy $P_\ell^m(x)$

Diferenciální rovnice:

$$(1 - x^2) P_\ell^m(x)'' - 2x P_\ell^m(x)' + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P_\ell^m(x) = 0.$$

Generující funkce:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{P_\ell^m(x) z^m y^\ell}{m!} = \left[1 - 2y \left(x + z\sqrt{1 - x^2} \right) + y^2 \right]^{-1/2}.$$

Ortogonalita:

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{\ell\ell'}, \quad \ell, \ell' \geq m.$$

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} (2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(x) P_{\ell}^m(x') = 2\delta(x-x'), \quad (|x|, |x'| < 1).$$

Vyjádření $P_{\ell}^m(x)^*$:

$$P_{\ell}^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_{\ell}(x).$$

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{(\ell+m)!}{\ell! \pi} (-1)^{m/2} \int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi \right)^{\ell} \cos m\varphi \, d\varphi.$$

Rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned} P_{\ell}^{m+1} - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_{\ell}^m &= [m(m-1) - \ell(\ell+1)] P_{\ell}^{m-1}; \\ \sqrt{1-x^2} P_{\ell}^{m+1}(x) &= (1-x^2) P_{\ell}^m(x)' + mx P_{\ell}^m(x); \\ (2\ell+1)x P_{\ell}^m &= (\ell+m) P_{\ell-1}^m + (\ell+1-m) P_{\ell+1}^m; \\ x P_{\ell}^m &= P_{\ell-1}^m - (\ell+1-m) \sqrt{1-x^2} P_{\ell}^{m-1}; \\ P_{\ell+1}^m - P_{\ell-1}^m &= (2\ell+1) P_{\ell}^{m-1} \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

5.4 Besselovy funkce $J_n(x)$

Diferenciální rovnice:

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

Generující funkce (pro $n \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\alpha x) \left(\frac{s}{\alpha} \right)^n = e^{\frac{x}{2} \left(s - \frac{\alpha^2}{s} \right)},$$

$$J_{-n} = (-1)^n J_n.$$

Ortogonalita:

$$\int_0^{\infty} x J_n(ax) J_n(bx) \, dx = \frac{1}{a} \delta(|a| - |b|).$$

$$\int_0^c x J_n(ax) J_n(bx) \, dx = \frac{c^2}{2} [J_{n+1}(ac)]^2 \delta_{ab}.$$

*Někteří autoři definují $P_{\ell}^m(x)$ s dodatečným faktorem $(-1)^m$.

Vyjádření $J_n(x)$:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \oint t^{-n-1} e^{t-x^2/4t} dt.$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta.$$

Rekurentní vztahy:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x);$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x);$$

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)).$$

5.5 Sfěrické Besselovy funkce $j_\ell(x)$

Diferenciální rovnice:

$$(xj_\ell)'' + \left(x - \frac{\ell(\ell+1)}{x}\right) j_\ell = 0.$$

Generující funkce:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{j_\ell(x)t^\ell}{\ell!} = j_0(\sqrt{x^2 - 2xt}).$$

Ortogonalita:

$$\int_0^\infty x^2 j_\ell(ax) j_\ell(bx) dx = \frac{\pi}{2a} \delta(a-b).$$

$$\int_{-\infty}^\infty j_\ell(x) j_{\ell'}(x) dx = \frac{\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}.$$

Vyjádření $j_\ell(x)$:

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x) = (-1)^\ell x^\ell \left(\frac{d}{xdx}\right)^\ell \frac{\sin x}{x},$$

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &= \frac{x^\ell}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^1 e^{ixs} (1-s^2)^\ell ds \\ &= \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!} x^\ell \left(1 - \frac{1}{1!(\ell+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(\ell+3/2)(\ell+5/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots\right). \end{aligned}$$

Rekurentní vztah:

$$j_{\ell+1} = \frac{\ell}{x} j_{\ell} - j'_{\ell} = \frac{2\ell+1}{x} j_{\ell} - j_{\ell-1}.$$

Příklady:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}; \\ j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ j_2(x) &= \frac{3 \sin x}{x^3} - \frac{3 \cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

5.6 Hermitovy polynomy $H_n(x)$

Diferenciální rovnice:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0,$$

nebo

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) + (2n - x^2 + 1) H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0.$$

Generující funkce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) s^n}{n!} = e^{-s^2 + 2sx}.$$

Ortogonalita:

$$\int_0^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{(2^n n!)} = \sqrt{\pi} \delta(x-y) e^{x^2}.$$

Obecněji:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y) s^n}{(2^n n!)} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \exp\left(\frac{-s^2(x^2 + y^2) + 2sxy}{1-s^2}\right).$$

Vyjádření $H_n(x)$:

$$\begin{aligned} H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x); \\ H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}; \\ H_n(x) &= (-1)^{n/2} n! \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)! (n/2 - k)!}, \quad \text{pro } n \text{ sude,} \\ H_n(x) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n! \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)! \left(\frac{n-1}{2} - k\right)!}, \quad \text{pro } n \text{ liche,} \end{aligned}$$

Rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned} \frac{d^m H_n(x)}{dx^m} &= \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-1}(x), \\ x H_n(x) &= \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x), \\ H_n(x) &= \left(2x - \frac{d}{dx} \right) H_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Příklady:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

5.7 Laguerrovy polynomy $L_n(x)$

Diferenciální rovnice:

$$x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0,$$

Generující funkce[†]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \frac{1}{1-z} e^{-\frac{xz}{1-z}}.$$

Ortogonalita:

$$\int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{mn},$$

Vyjádření $L_n(x)$:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}); \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right). \end{aligned}$$

[†]Někteří autoři definují generující funkci s faktorem $\frac{1}{n!}$ v sumě.

Rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned}(1 + 2n - x)L_n - nL_{n-1} - (n + 1)L_{n+1} &= 0, \\ xL_n'(x) &= nL_n(x) - nL_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned}L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2).\end{aligned}$$

5.8 Přidružené Laguerrovy polynomy $L_n^k(x)$

Diferenciální rovnice:

$$xL_n^{k''}(x) + (k + 1 - x)L_n^{k'}(x) + nL_n^k(x) = 0.$$

Generující funkce[‡]:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)z^n &= \frac{1}{(1-z)^{k+1}}e^{-\frac{xz}{1-z}}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{L_n^k(x)z^n u^k}{k!} &= \frac{1}{1-z} \exp\left(\frac{u-xz}{1-z}\right).\end{aligned}$$

Ortogonalita:

$$\int_0^{\infty} L_n^k(x)L_m^k(x)e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{mn},$$

Vyjádření $L_n^k(x)$:

$$\begin{aligned}L_n^k(x) &= \frac{e^x x^{-k}}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n+k} e^{-x}); \\ &= (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k L_{n+k}(x).\end{aligned}$$

Rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned}L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) &= L_n^k(x), \\ xL_n^{k'}(x) &= nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x).\end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned}L_0^k(x) &= 1, \\ L_1^k(x) &= 1 - x + k, \\ L_2^k(x) &= \frac{1}{2!}(x^2 - 2(k+2)x + (k+1)(k+2)).\end{aligned}$$

[‡]Někteří autoři definují generující funkci s faktorem $\frac{1}{n!}$ v sumě.

5.9 Chebyshevovy polynomy $T_n(x)$

Diferenciální rovnice:

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} T_n(x) - x \frac{d}{dx} T_n(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Generující funkce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) y^n = \frac{1 - xy}{1 - 2xy + y^2}.$$

Vlastnost symetrie:

$$T_n(x) = T_{-n}(x).$$

Ortogonalita:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta_{mn} & m, n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

Vyjádření $T_n(x)$:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \cos^{-1} x); \\ T_n(x) &= \frac{1}{2} \left[\left(x + i\sqrt{1-x^2} \right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned} T_{n+1} - 2xT_n + T_{n-1} &= 0, \\ (1-x^2) T'_n - n x T_n + n T_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

6 Matematické nástroje teoretické fyziky

Matematika je hra hraná podle jistých jednoduchých pravidel s nesmyslnými znaky na papíře.

David Hilbert

V této kapitole se zaměříme na některé z méně známých matematických metod používaných v teoretické fyzice. Ačkoliv nejsou běžně součástí sylabů magisterského studia, autoři jsou přesvědčení, že čím dřív je učiněn „první kontakt“ s některými s těchto metod, tím lépe. Konkrétně jsme vybrali tzv. Youngovy tabulky a „operátorový kalkulus“. Tyto dva nástroje představují pouze pomyslnou špičku ledovce z velmi bohaté a stále rostoucí sbírky „triků“, jež se tak či onak staly součástí standardní výzbroje teoretického fyzika. Jejich výběr však nepodléhal žádnému tvrdšímu selekčnímu kritériu než je vlastní preference autorů, tudíž je nelze brát za „reprezentativní vzorek“.

Ačkoliv jsou obě témata z hlediska teoretické fyziky velmi užitečná, jejich pravá hodnota v kontextu této sbírky spíše leží v jejich „hravosti“. To se projevuje na stylu této kapitoly dvojitým způsobem. Za prvé, jelikož se zde zabýváme nestandardní tematikou, je tato kapitola trošku více deskriptivní, než tomu bylo doposud. Jelikož má text sloužit k prvnímu seznámení, matematický rigor není adresován do takové míry, jak je obvyklé a spíše se pozornost upíná k rychlému proniknutí k podstatě dané problematiky. Tudíž nejedná se přímo o učební text, ale ani o „pouhou“ sbírku příkladů.

Ve cvičeních samotných se odráží druhý rozdíl, který trošku separuje tuto kapitolu od zbytku sbírky. Mnohá ze cvičení mají povahu posloupnosti kroků, jež do hloubky prozkoumávají určitou vlastnost dané metody, či pohlízejí na určitý problém z jiné perspektivy, než je ta ve vlastním textu. Navíc mnohé ze cvičení souvisí jedno s druhým a trik, použitý k řešení jednoho, může v jiné podobě velmi urychlit řešení druhého. Mnohé z klíčových faktů o dané problematice jsou zahrnuty jako součást cvičení a předpokládá se, že čtenář si nemalou část poznatků takřikajíc odvodí sám. Jinými slovy tato kapitola klade poněkud vyšší nároky nejen na míru čtenářovy spolupráce, ale také na jeho samostatnost a tvůrčí iniciativu.

Důvodem k tomuto přístupu je hluboké přesvědčení autorů, že jediný způsob jak dosáhnou skutečného porozumění matematiky, je nejen investice času a trpělivosti, ale i kreativity. Jinak řečeno, student/čtenář si musí s těmito nástroji dostatečně „vyhrát“, než jim plně porozumí, při kterémžto procesu však může dojít i k inovacím. A to, zdá se, je skutečná praxe vědy.

6.1 Youngovy tabulky

Youngovy tabulky jsou velmi důmyslnou, semi-grafickou metodou, jak klasifikovat ireducibilní reprezentace grupy permutací S_N a grupy speciálních unitárních reprezentací $SU(N)$, jež jsou obě velmi důležité a často používané grupy v teoretické fyzice, zejména ve fyzice elementárních částic. Jejich cena je především v rychlé orientaci v jinak značně nepřehledné problematice. Na ireducibilní reprezentace Lieových grup se totiž standardně nahlíží aparátem kanonické Cartanovy reprezentace a algebrou zvedacích a snižovacích operátorů. Tato reprezentace je samozřejmě neocenitelná, pokud je třeba například vybudovat systém vlastních stavů v kvantové mechanice apod. Nicméně pokud se například někdo chce jen rychle zorientovat v počtu a dimenzích ireducibilních reprezentací, nebo spočítat multiplicitu částicových stavů v té či oné inkarnaci kvarkového modelu, pak jsou Youngovy tabulky neocenitelným pomocníkem.

6.1.1 Standardní forma Youngových tabulek

Označme spinovou část vlnové funkce elektronu symbolicky jako $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$, reprezentující stav se spinem nahoru a dolů. Nyní předpokládejme, že máme dva elektrony nacházející se na stejném orbitalu určitého atomu a chceme popsat spinovou část jejich vlnové funkce. Z Pauliho vylučovacího principu víme, že takovýto systém dvou elektronů se může nacházet v jednom ze čtyř stavů (které jsou buď symetrické nebo antisymetrické vůči záměně částic):

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad |\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2), \quad |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2, \quad (6.1)$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2). \quad (6.2)$$

Na prvním řádku se nachází stavy, které jsou symetrické vůči záměně elektronů ($1 \leftrightarrow 2$), tvořící tzv. *triplet*. Příslušná orbitální část vlnové funkce je tudíž nutně antisymetrická v souladu s Pauliho vylučovacím principem. Na druhém řádku se nachází jediná možná kombinace, která je antisymetrická vůči záměně elektronů a říká se jí *singlet*. Příslušná orbitální část vlnové funkce je tudíž symetrická. Fyzikálně lze stavy tripletu a singletu rozlišit mezi sebou, neboť mají jiný celkový spin; triplet reprezentuje stavy s spinem 1 a singlet stav se spinem 0.

Podobný seznam stavů bychom mohli napsat i pro tři elektrony. V tomto případě bychom dostali dva dublety s celkovým spinem $\frac{1}{2}$ a jeden kvadruplet s celkovým spinem $\frac{3}{2}$. Pro čtyři elektrony máme dva singlety se spinem 0, tři triplety s celkovým spinem 1 a pentaplet o spinu 2.* V principu lze klasifikovat spinové stavy libovolného počtu elektronů výše naznačeným způsobem, totiž rozepsáním všech možných kombinací dílčích stavů a rozřazením je do skupin podle toho, jak se transformují vůči záměně elektronů. Je však zřejmé, že takovýto postup je velmi pracný a časově náročný. Naštěstí existuje velmi elegantní metoda, jak tyto stavy klasifikovat systematicky a bez velké námahy. Tato metoda nese název *Youngovy* (čti „Jangovy“) *tabulky*.

Youngovy tabulky byly speciálně vynalezeny pro klasifikaci ireducibilních reprezentací grupy permutací, ale lze je stejně dobře použít i pro grupu $SU(n)$, tudíž mají široké uplatnění i v částicové fyzice. Vrátime-li se zpátky k problému klasifikace spinových stavů systému elektronů, lze Youngovy tabulky zavést velice přirozeně, i když používané značení může napoprvé působit nezvyklým dojmem.

Spinový stav jednoho elektronu označme jako čtverec, ve kterém je vepsána buď jednička nebo dvojka, v závislosti na tom, zda se jedná o stav se spinem nahoru nebo dolů:

$$|\uparrow\rangle \equiv \boxed{1}, \quad |\downarrow\rangle \equiv \boxed{2}. \quad (6.3)$$

Chceme-li klasifikovat spinové stavy s dvěma elektrony, je zapotřebí nakreslit čtverce dva a to buď vedle sebe nebo nad sebou. Pravidlo přitom je, že čtverce vedle sebe odpovídají symetrickému stavu, kdežto nad sebou antisymetrickému:†

$$\boxed{1}\boxed{1} \equiv |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad \boxed{1}\boxed{2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2), \quad \boxed{2}\boxed{2} \equiv |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2, \quad (6.4)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2). \quad (6.5)$$

Je zřejmé, že Youngova tabulka $\boxed{\frac{2}{1}}$ je totožná s $\boxed{1}\boxed{2}$ a podobně $\boxed{\frac{2}{1}}$ se liší od $\boxed{\frac{1}{2}}$ pouze znaménkem, což ale fyzikálně představuje stejný stav. Rovněž si povšimněme, že Youngovy tabulky $\boxed{\frac{1}{1}}$ a $\boxed{\frac{2}{2}}$ jsou nulové stavy.

Z těchto pozorování vyplývá, že nemá cenu uvažovat Youngovy tabulky se všemi možnými číselnými kombinacemi, ale že fyzikálně (a i co se týče reprezentací v teorii grup) jsou relevantní pouze některé z nich. Z tohoto důvodu se zavádí konvence, že čísla objevující se v Youngových tabulkách a i tabulky samotné musí mít tzv. *standardní formu*. Tato standardní forma je z definována tak, že v každém řádku

* Jak přijít na tyto „tenzorové“ rozklady si ukážeme v podsekcí 6.1.3.

† Jak lze vidět, za Youngovy tabulky pokládáme normalizované stavy. V literatuře to není obvyklé a lze se častěji setkat s případy, kdy normalizační faktory na pravé straně těchto vztahů chybí. Z fyzikálního hlediska je ale výhodnější pracovat s normalizovanými stavy a proto se budeme nadále držet této konvence.

Youngovy tabulky čísla zleva doprava nikdy neklesají (tedy mohou být přinejmenším stejné, ale nikdy menší), kdežto v každém sloupci musí vždy odshora dolů růst. Takže například v následujícím je levá Youngova tabulka standardní, kdežto pravá nikoliv:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$$

Youngova tabulka ve standardní formě navíc ještě splňuje další podmínku, která se týká umístění čtverců v tabulce. Tato podmínka říká, že počet čtverců v řádku nesmí nikdy stoupat směrem odshora dolů a navíc, že všechny čtverce se kladou co nejvíc nalevo v daném řádku. Na příkladě dole vidíme, že první Youngova tabulka je ve standardní formě, kdežto ostatní nikoliv.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

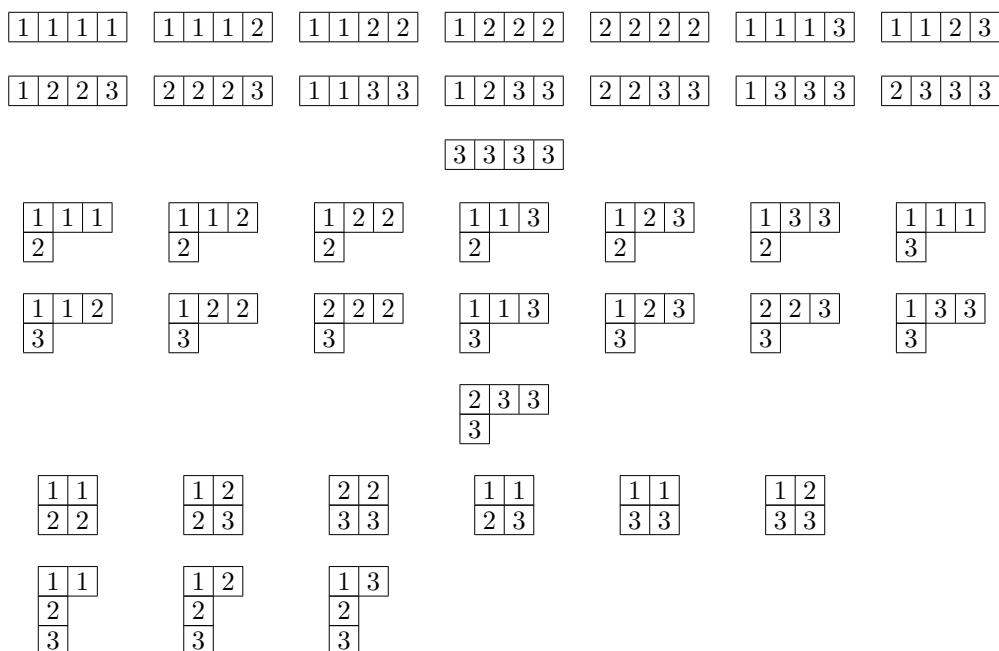
6.1.1 Najděte všechny očíslované standardní Youngovy tabulky o třech čtvercích a k nim přiřaďte odpovídající spinové stavy tří elektronů.

Řešení:

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} &\equiv |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 + |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3), \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 + |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3), & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} &\equiv |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3, \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3), & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \end{array} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3). \end{aligned}$$

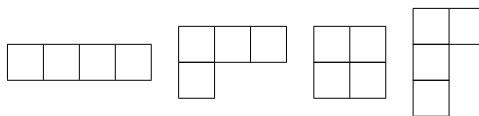
6.1.2 Nalezněte všechny očíslované standardní Youngovy tabulky o čtyřech čtvercích pro grupu $SU(3)$. (Nápověda: V tomto případě budou čísla ve čtvercích nabývat hodnot $\{1, 2, 3\}$.)

Řešení:



6.1.2 Dimenze ireducibilní reprezentace $SU(N)$

Pokud necháme čísla v Youngových tabulkách nabývat hodnot od 1 po N , potom každá standardní Youngova tabulka představuje určitou ireducibilní reprezentaci grupy $SU(N)$.[‡] V příkladu 6.1.2 jsme například vypsali všechny čtyř-částicové stavy grupy $SU(3)$. Vidíme, že zde existují čtyři typy ireducibilních reprezentací, jež lze charakterizovat pomocí Youngových tabulek:



Zde se prázdnou Youngovou tabulkou myslí množina všech možných očíslování, jež splňují podmínky kladené na standardní formu. Například držíme-li se případu grupy $SU(3)$, Youngova tabulka \square představuje množinu tří prvků $\square = \{[1], [2], [3]\}$ a tedy zahrnuje fundamentální reprezentaci grupy $SU(3)$. Podobně, jak si lze snadno ověřit, tabulku $\square\square$ lze očíslovat dle pravidel o standardní formě Youngových tabulek šesti způsoby, zatímco tabulku \square pouze třemi. Obecně počet všech možných očíslování

[‡]V předchozí sekci jsme se, striktně řečeno, zabývali ireducibilními reprezentacemi grupy permutací dvou prvků S_2 . Lze však ukázat, že stejné reprezentace má i grupa $SU(2)$. Následující metody jsou přirozeným rozšířením pro N prvků, tedy jak pro grupu permutací S_N tak i pro grupu N -rozměrných unitárních matic (s jednotkovým determinanem) $SU(N)$.

Youngovy tabulky se nazývají její *dimenze*. Podíváme-li se na řešení k úloze 6.1.2, tak lze konstatovat:

$$\dim\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) = 15, \quad \dim\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}\right) = 15, \quad \dim\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}\right) = 6, \quad \dim\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}\right) = 3.$$

Dimenze Youngovy tabulky představuje množství částicových stavů v daném multipletu. Bylo by tedy užitečné mít po ruce nějaké pravidlo, jak dimenzi libovolné Youngovy tabulky vypočítat, aniž by se musely ručně hledat všechny možné způsoby očíslování, kterážto procedura je i pro malá N časově velmi náročná.

6.1.3 Na základě úvahy odvoďte, že pro grupu $SU(N)$ platí

$$\dim\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) = \binom{N+3}{4}, \quad \dim\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}\right) = 3 \binom{N+2}{4},$$

$$\dim\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{3} \binom{N+1}{2} \binom{N-1}{2}, \quad \dim\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}\right) = 3 \binom{N+1}{4}$$

a porovnejte výsledky pro $N = 3$ s předchozím odstavcem. (Nápověda: Dimenze Youngovy tabulky je obecně polynom v N , jehož řád je stejný jako počet čtverců v tabulce. Je zřejmé, že pro $N = 0$ neexistuje žádné očíslování a tudíž hledaný polynom nemá žádný konstantní člen. K určení koeficientů stojících u mocnin, například N , N^2 , N^3 apod., stačí ručně vypočítat dimenzi pro $N = 1$, $N = 2$ atd. a výsledky použít k nalezení těchto koeficientů. Náročnost této „brute force“ metody přirozeně roste s počtem čtverečků v tabulce.)

6.1.4 Odvoďte dimenzi Youngovy tabulky o jediném řádku s q čtverci a tabulky o jediném sloupci s p čtverci a výsledek odůvodněte na základě symetrie.

Řešení:

$$D_q = \binom{N+q-1}{q}, \quad D_p = \binom{N}{p}.$$

Výsledky odpovídají počtu kombinací N prvků do q resp. p přihrádek s opakováním, resp. bez opakování prvků. Rovněž odpovídají diskrétní variantě Bosé-Einsteinovy resp. Diracovy-Fermiho statistiky pro počet možných obsazení N degenerovaných hladin q bosony resp. p fermiony.

Všimněme si, že z hlediska grupy $SU(3)$ mají následující Youngovi tabulky stejnou dimenzi

$$\dim\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}\right) = \dim\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}\right).$$

Důvod je ten, že kdykoliv je v tabulce sloupec o třech čtvercích, pak existuje pouze jediné jeho očíslování a to $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ a tudíž při výpočtu dimenze je možné takové sloupce

zcela ignorovat. Samozřejmě fyzikálně tyto tabulky představují odlišnou situaci, neboť jedna popisuje devíti částicový multiplet, zatímco ta druhá pouze šesti částicový. Docházíme ale k závěru, že pro grupu $SU(3)$, *co se výpočtu dimenze týče*, nemusíme uvažovat žádnou Youngovu tabulku s více než dvěma řádky. Je tedy možné popsat všechny Youngovy tabulky pomocí dvou čísel $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, kde y_1 značí počet čtverců v prvním řádku, zatímco y_2 značí počet čtverců v druhém řádku. V souladu s pravidly o standardní formě Youngových tabulek však musí platit $y_1 \geq y_2$. Podobně pro grupu $SU(N)$ lze tabulky charakterizovat $N - 1$ čísly, uspořádanými od největšího po nejmenší $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{N-1})$. V dalším budeme symbolem $D_N \mathbf{y}$ rozumět dimenzi tabulky \mathbf{y} vzhledem ke grupě $SU(N)$.

6.1.5 Odvoďte $D_N(y, 1)$. (Nápověda: Pokuste se sestavit rekurentní formuli zahrnující členy $D_k(y - 1)$ a výslednou sumu sečtěte.)

$$\left[D_N(y, 1) = y \binom{N+y-1}{y} \right]$$

6.1.6 Odvoďte $D_N(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{y-1 \text{ times}})$.

$$\left[D_N(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{y-1 \text{ times}}) = y \binom{N+1}{y+1} \right]$$

Výpočet dimenze libovolné Youngovy tabulky lze provést kupodivu velmi snadno pomocí následujícího algoritmu. Ještě před tím, než se s ním seznámíme, si zavedme jeden nový pojem. Na očíslovaných tabulkách zavedeme zobrazení do reálných čísel, které z nedostatku lepšího výrazu nazveme *determinantem*. Determinant očíslované Youngovy tabulky je dán jako součin všech hodnot jeho čtverců. Například:

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \\ \boxed{5} & & & \end{pmatrix} = 720, \quad \det \begin{pmatrix} \boxed{x} & \boxed{y} & \boxed{z} & \boxed{u} \\ \boxed{x} & \boxed{y} & \boxed{z} & \\ \boxed{v} & & & \end{pmatrix} = x^2 y^2 z^2 uv.$$

Dimenzi Youngovy tabulky lze spočítat jako podíl determinantů dvou vhodných očíslování. V čitateli do každého čtverce vepíšeme N a k tomu přičteme souřadnici daného čtverce, přičemž každý krok doprava od startovního čtverce umístěném v levém horním rohu, se bere jako $+1$ a každý krok dolů jako -1 . Například očíslování Youngovy tabulky $(4, 3, 1)$ vzhledem ke grupám $SU(4)$ a $SU(6)$ vypadají následovně:[§]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

[§]Determinant Youngovy tabulky s N čtverci s tímto očíslováním lze chápat jako rozšíření pojmu faktoriál, neboť například $\det \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = 3!$ apod. Navíc například $\det \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3 \times 4 \times 5 = 3^{(3)}$, což je široce používaný tzv. *Pochhammerův symbol* nebo také *rostoucí faktoriál*. Determinant Youngových tabulek tedy zahrnuje obě tyto důležité operace jako speciální případy.

Očíslování ve jmenovateli provedeme tak, že do každého čtverce zaneseme počet čtverců nacházející se napravo a pod daným čtvercem plus jedna. Toto očíslování nezávisí na zvolené grupě a je pro danou tabulku jedinečné:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Dimenze Youngovy tabulky $(4, 3, 1)$ vzhledem ke grupám $SU(4)$ a $SU(6)$ je tudíž

$$D_4(4, 3, 1) = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & \\ 2 & & & \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}} = \frac{100800}{576} = 175,$$

$$D_6(4, 3, 1) = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & \\ 4 & & & \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}} = \frac{2540160}{576} = 4410.$$

A jak se lze snadno přesvědčit, vzhledem ke grupě $SU(N)$ dostáváme výsledek

$$D_N(4, 3, 1) = \frac{(N-2)(N-1)N^2(N+1)^2(N+2)(N+3)}{576}.$$

6.1.7 Vypočítejte $D_N(3, 2, 1)$, $D_N(4, 2, 2)$ a $D_N(3, 3, 3)$.

$$\left[\begin{array}{l} D_N(3, 2, 1) = (N-2)(N-1)N^2(N+1)(N+2)/45 \\ D_N(4, 2, 2) = (N-2)(N-1)^2N^2(N+1)(N+2)(N+3)/720 \\ D_N(3, 3, 3) = (N-2)(N-1)^2N^3(N+1)^2(N+2)/4320 \end{array} \right]$$

6.1.8 Odvoďte $D_N(y_1, y_2)$.

$$\left[D_N(y_1, y_2) = \frac{y_1 - y_2 + 1}{N-1} \binom{N+y_1-1}{y_1+1} \binom{N+y_2-2}{y_2} \right]$$

6.1.9 Takzvanou *konjugovanou* tabulkou k dané Youngově tabulce rozumíme tabulku, jež má sloupce přehozeny s řádky (ale tak aby výsledkem byla tabulka ve standardní formě). Například konjugovaná tabulka k $\square\square$ je \square a k $\square\square$ je $\square\square$. Označme si konjugovanou tabulku k tabulce (y_1, \dots, y_N) jako $(y_1, \dots, y_N)^*$. Tudíž $(2)^* = (1, 1)$ a $(2, 1, 1)^* = (3, 1)$. Experimentujte s tímto pojmem a nalezněte relaci, dávající do souvislosti dimenze konjugovaných tabulek.

$$\left[D_N(\mathbf{y})^* = D_N(\mathbf{y}) \Big|_{(N+q) \leq (N-q) \forall q \in \mathbb{Z}} \right]$$

6.1.10 Ověřte, že součet dimenzí všech Youngových tabulek (jak ve standardní formě, tak v nestandardní formě) o počtu čtverců rovným 1, 2 a 3 je roven N, N^2 a N^3 . Argumentujte, proč součet dimenzí všech Youngových tabulek řádu k je N^k .

Řešení: N^k je počet všech možných očíslování k čtverců N čísly, což musí odpovídat součtu všech možných symetrizací těchto očíslování.

6.1.3 Rozklad tenzorových reprezentací

Jednou z mnoha aplikací Youngových tabulek je jejich snadné využití k rozložení tenzorových reprezentací do ireducibilní částí. „Tenzorem“ zde chápeme libovolný produkt fundamentálních (či anti-fundamentálních) reprezentací.

Fundamentální reprezentací grupy $SU(N)$ myslíme vektor s N prvky q_a , kde $a \in \{1, \dots, N\}$. Transformace tohoto vektoru vůči $SU(N)$ charakterizuje $N \times N$ matice U a ve složkách je dána jako $q_{a'} = U_{a'}^a q_a$.[¶] Vektor fundamentální reprezentace můžeme chápat i jako Youngovu tabulku \square . Podobně anti-fundamentální reprezentací je vektor \bar{q}^a , jež se transformuje jako $\bar{q}^{a'} = \bar{U}_{a'}^a \bar{q}^a$, kde $\bar{}$ označuje komplexní sdružení. Youngova tabulka pro anti-fundamentální reprezentaci je jediný sloupec o $N - 1$ čtvercích (například vzhledem ke grupě $SU(3)$ to je $\bar{\square}$).

Nejjednodušším netriviálním tenzorem vzhledem k $SU(N)$ je matice s $N \times N$ prvky T_{ab} , kde $a, b \in \{1, \dots, N\}$. Transformace tohoto tenzoru je dána $T_{a'b'} = U_{a'}^a U_{b'}^b T_{ab}$. Jelikož se jedná o tenzor s oběma indexy dole, můžeme jej také vnímat jako součin dvou fundamentálních vektorů (alespoň co se transformačních vlastností týče) $T_{ab} \sim q_a q_b$, nebo-li $T \sim \square \otimes \square$. Problém, ke kterému směřujeme, je ten, že T představuje reducibilní reprezentaci $SU(N)$. To znamená, že T lze rozložit do několika (ireducibilních) částí, které se transformují nezávisle na ostatních.

Ilustrujme si tento fakt pro $SU(2)$. Matice transformace U má tvar

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

A transformace složek T_{ab} jsou dány

$$\begin{aligned} T_{11} &\rightarrow \alpha^2 T_{11} - \alpha \bar{\beta} (T_{12} + T_{21}) + \bar{\beta}^2 T_{22}, \\ T_{22} &\rightarrow \beta^2 T_{22} + \bar{\alpha} \beta (T_{12} + T_{21}) + \bar{\alpha}^2 T_{22}, \\ T_{12} &\rightarrow \alpha \beta T_{11} + |\alpha|^2 T_{12} - |\beta|^2 T_{21} - \bar{\alpha} \bar{\beta} T_{22}, \\ T_{21} &\rightarrow \alpha \beta T_{11} + |\alpha|^2 T_{21} - |\beta|^2 T_{12} - \bar{\alpha} \bar{\beta} T_{22}. \end{aligned}$$

Reducibilita těchto transformací vězí ve faktu, že tyto vztahy lze přepsat i do následující podoby

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} + T_{21} \\ T_{12} - T_{21} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & \bar{\beta}^2 & \alpha \bar{\beta} & 0 \\ \beta^2 & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha} \beta & 0 \\ 2\alpha \beta & -2\bar{\alpha} \bar{\beta} & |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} + T_{21} \\ T_{12} - T_{21} \end{pmatrix},$$

[¶]Používáme Einsteinovu sumační konvenci pro pár stejného horního a dolního indexu.

- Přesouvejte očíslované čtverce $\boxed{a} \dots \boxed{a}, \boxed{b} \dots \boxed{b}, \boxed{c} \dots$ atd. k neočíslované tabulce jednu po druhé tak, aby byla dodržena následující pravidla:
 - Po každém přidání musí být výsledná Youngova tabulka ve standardní formě.
 - Čtverce se stejným písmenem se nesmí objevit ve stejném sloupci.
 - Pro každý čtverec musí platit, že součet všech a -ček n_a , které se nachází v pravém horním kvadrantu od daného čtverce, nesmí být menší než součet všech b -ček n_b , který nesmí být menší než součet c -ček n_c , atd. $n_a \geq n_b \geq n_c \geq \dots$ Například následující konfigurace není dovolena,

		b
	a	
a		

neboť pro horní levý čtverec je jediný označený čtverec v jeho horním pravém kvadrantu b -čko, což je víc než 0 a -ček.

- Pokud jsou dvě výsledné Youngovy tabulky ve stejném tvaru, ale liší se v konfiguraci označených čtverců, potom se obě tabulky chápou jako nezávislé příspěvky. Pokud je konfigurace stejná, potom se bere jen jediná z nich.
- Pokud je rozklad počítán pro grupu $SU(N)$, každý sloupec o N čtvercích se vymaže.

Tato pravidla jsou doplňkem k intuitivnímu chápání rozkladu produktu dvou Youngových tabulek jako roznásobování dvou závorek. Očíslováním jedné tabulky a držení se několika selekčních kritérií slouží jen k tomu, aby se nezapočítávaly určité konfigurace víckrát, než je potřeba. Tudíž rozklad produktu $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & b \\ \hline \end{array}$, který jsme uvedli výše, je proveden následovně

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & b \\ \hline \end{array} &= \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline & a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\
 &= \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & a \\ \hline \end{array} \\
 &\oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & \\ \hline a & & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} .
 \end{aligned}$$

Poslední řádek koresponduje s výsledkem uvedeným výše. Všimněme si, že dvě shodné tabulky $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ představují nezávislé příspěvky, neboť konfigurace očíslovaných čtverců je v obou případech různá. Podívejme se na tento rozklad v konkrétním případě grupy $SU(3)$. Jelikož $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ se rovná singletu a každá tabulka obsahující více než tři řádky je nulová, rozklad se zjednodušuje na

$$SU(3) : \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \mathbf{1}.$$

Jelikož každou Youngovu tabulku lze (téměř**) identifikovat pomocí její dimenze, lze tento výsledek přepsat do kompaktnější podoby:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1},$$

kde jsme označili

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \mathbf{10}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \overline{\mathbf{10}}.$$

Jelikož dimenze obou tabulek jsou stejné, museli jsme symbolem $\bar{\quad}$ vyznačit rozdíl. Tabulka napravo se nazývá *konjugovaná* k tabulce nalevo, neboť když položíme jednu na druhou, výsledná tabulka je $SU(3)$ singlet.^{††}

6.1.12 Nalezněte rozklady $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ a $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$. (Tím si ověřujeme platnost tvrzení uvedených na začátku této podkapitoly o stavových multipletech soustavy tří a čtyř elektronů.)

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \end{array} \right]$$

6.1.13 Nalezněte rozklady $\overline{\mathbf{6}} \otimes \mathbf{8}$ a $\overline{\mathbf{10}} \otimes \mathbf{6}$ pro grupu $SU(3)$.

$$\left[\begin{array}{l} \overline{\mathbf{6}} \otimes \mathbf{8}_{SU(3)} = \overline{\mathbf{24}} \oplus \mathbf{15} \oplus \overline{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3} \\ \overline{\mathbf{10}} \otimes \mathbf{6}_{SU(3)} = \mathbf{42} \oplus \mathbf{15} \oplus \overline{\mathbf{3}} \end{array} \right]$$

6.1.14 Nalezněte rozklady $\overline{\mathbf{6}} \otimes \mathbf{6}$ a $\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6}$ pro grupu $SU(6)$. Jak by stejné rozklady vypadaly pro grupu $SU(3)$?

$$\left[\begin{array}{l} \overline{\mathbf{6}} \otimes \mathbf{6}_{SU(6)} = \mathbf{35} \oplus \mathbf{1} \\ \overline{\mathbf{6}} \otimes \mathbf{6}_{SU(3)} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6}_{SU(6)} = \mathbf{56} \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{20} \\ \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6}_{SU(3)} = \mathbf{35} \oplus \mathbf{35} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{27} \oplus \mathbf{27} \oplus \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \end{array} \right]$$

**Například si povšimněme, že pro grupu $SU(3)$ jsou dimenze Youngových tabulek $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ a $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ obě 15, i když se nejedná o konjugované tabulky. Jinými slovy ačkoliv je značení tenzorových rozkladů pomocí dimenzí standardní, nelze se na něj vždy spolehnout. Ve většině případů lze však poznat o jakou tabulku se jedná z kontextu.

††Tato definice konjugace je však jiná než ta uvedená v příkladu 6.1.9 a je třeba vždy rozlišovat, který koncept konjugace máme na mysli.

6.2 Základní operátorové identity

Operátory hrají důležitou úlohu v mnoha odvětvích fyziky, zejména v kvantové mechanice a kvantové teorii pole. S tím, jak se moderní teoretická fyzika „matematizuje“, se dostávají stále více do popředí matematického aparátu fyziků. Existuje rozsáhlá literatura zabývající se teorií lineárních operátorů, jež zasahuje do mnoha odvětví pokročilé matematiky, ta však spadá zcela mimo rozsah této sbírky. Zajímáme-li se však pouze o konkrétní výpočty či algebraické manipulace s operátory, není ve většině případů nutné sahat po složitějších konceptech, než je například Taylorův rozvoj. Například existuje mnoho „operátorových identit“, které jsou běžně používány v učebních textech moderní fyziky, jejichž odvození lze provést na několika řádcích.

Cílem této podkapitoly je prostřednictvím cvičení přiblížit některé z těchto operátorových identit čtenáři.

6.2.1 Lieova derivace, Hadamardova formule

Asi nejdůležitějším rozdílem při provádění algebraických manipulací s operátory, oproti analogickým úkonům s čísly, či funkcemi, je fakt, že operátory obecně nekomutují. Veličinou, která tento fakt kvantifikuje, je tzv. *komutátor*

$$[A, B] \equiv AB - BA,$$

nebo-li bilineární forma operátorů A a B , která je sama o sobě operátor. Například komutátor operátorů $A = \partial_x$ a $B = x$, kde první z nich představuje parciální derivaci, zatímco druhý představuje násobení funkcí x , je $[\partial_x, x] = 1$. To si lze ověřit tak, že komutátorem zapůsobíme na obecnou (a dostatečně hladkou) funkci $f(x)$ a využijeme pravidel o derivování:

$$[\partial_x, x] f(x) = \partial_x(xf(x)) - x\partial_x f(x) = \partial_x(x)f(x) = 1 \cdot f(x).$$

Jelikož výraz zcela napravo lze chápat jako působení operátoru identity „1“ na funkci $f(x)$, můžeme výše uvedenou relaci abstrahovat jako rovnost dvou operátorů, tedy $[\partial_x, x] = 1$.

Než chápat komutátor jako zobrazení přiřazující dvojici operátorů A a B operátor $[A, B]$, je většinou výhodnější jej vnímat jako funkci jednoho operátoru na druhý. Z tohoto hlediska se v literatuře ustálilo několik standardních označení

$$\mathcal{L}_A(B), \quad A^*B, \quad \text{ad}(A)B,$$

přičemž všechna znamenají totéž co $[A, B]$. Označení pro komutátor A^*B a $\text{ad}(A)B$ se chápe jako působení *adjungovaného* (či *duálního*) operátoru A^* , nebo $\text{ad}(A)$ na operátor B . Oproti tomu \mathcal{L}_A označuje tzv. *Lieovu derivaci*, vzhledem k A . V následujícím budeme výrazy \mathcal{L}_A a $[A, \cdot]$ používat jako synonyma a volně přecházet od jednoho značení ke druhému, kdykoliv to bude výhodné.

Lieova derivace je pojem z diferenciální geometrie. Pokud si za A a B představíme vektorová pole na varietě, pak $\mathcal{L}_A(B)$ určuje infinitezimální změnu pole B podél směru „toku“ pole A (nebo-li ve směru integračních křivek, jejichž tečny popisuje A). Slovíčko „derivace“ je přitom na místě. Lieova derivace respektuje všechny vlastnosti kladené na obyčejné derivace.

6.2.1 Dokažte linearitu Lieovy derivace.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{L}_A(B + C) = [A, B + C] = [A, B] + [A, C] = \mathcal{L}_A(B) + \mathcal{L}_A(C) \\ \mathcal{L}_A(bB) = [A, bB] = b[A, B] = b\mathcal{L}_A(B) \end{array} \right]$$

6.2.2 Dokažte platnost Leibnitzova pravidla derivování součinu pro Lieovu derivaci.

$$\left[\mathcal{L}_A(BC) = [A, BC] = [A, B]C + B[A, C] = \mathcal{L}_A(B)C + B\mathcal{L}_A(C) \right]$$

Oproti obyčejné derivaci Lieova derivace splňuje navíc jednu zajímavou identitu, která plyne z dobře známé Jacobiho identity

$$\mathcal{L}_A\mathcal{L}_B - \mathcal{L}_B\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{[A, B]}. \quad (6.6)$$

6.2.3 Dokažte.

$$\left[0 = [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = \mathcal{L}_A\mathcal{L}_B(C) - \mathcal{L}_{[A, B]}(C) - \mathcal{L}_B\mathcal{L}_A(C) \right]$$

6.2.4 Jaká grupa lineárních transformací mezi operátory A a B , vůči níž se dvojice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ transformuje jako vektor, zanechá $\mathcal{L}_A(B)$ beze změny?

$$\left[\begin{array}{l} \text{Vůči obecné lineární transformaci } \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \text{ se } [A, B] \text{ transformuje jako} \\ [A, B] \rightarrow (ad - bc)[A, B]. \text{ Tudíž } \mathcal{L}_A(B) \text{ je skalárem vůči grupě speciálních lineárních} \\ \text{transformací } SL(2, \mathbb{C}), \text{ čili komplexních matic } 2 \times 2 \text{ s jednotkovým determinanem.} \end{array} \right]$$

Snad nejdůležitějším a nejužitečnějším cílem operátorového počtu je pochopit chování exponenciály operátoru, řekněme A , která je definitoricky dána nekonečnou sumou:

$$e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots$$

Exponenciála operátoru má přirozené aplikace v diferenciální geometrii (tok vektorového pole), v Lieových grupách (element grupy) a v neposlední řadě i v kvantové mechanice, kde $e^{i\hbar(t-t_0)H}$ je operátor, který „evoluje“ stavy z počátečního okamžiku t_0 do času t v systému definovaném hamiltoniánem H . Vzhledem i k tomuto neúplnému výčtu není příliš překvapivé, že e^A zaujímá privilegované postavení v operátorovém počtu. Uveďme si nyní několik příkladů, jak se chová exponenciála dobře známých operátorů:

6.2.5 Čemu se rovnají výrazy: $e^{\alpha\partial_x}x$, $e^{\lambda x\partial_x}x$, $e^{\varphi(x\partial_y - y\partial_x)}x$ a $e^{\varphi(x\partial_y - y\partial_x)}y$? (Návod: a) Rozvedte exponenciálu do Taylorovy řady, derivujte člen po členu a výsledek znovu sečtěte. Nebo pro náročné b) najděte vlastní funkce v_λ daných operátorů, tedy funkce splňující podmínku $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$ a pak vyjádřete funkci x prostřednictvím některých z v_λ . Využijte faktu, že $e^A v_\lambda = e^\lambda v_\lambda$.)

$$\left[\begin{array}{l} e^{\alpha \partial_x} x = x + \alpha \\ e^{\lambda x \partial_x} x = e^{\lambda} x \\ e^{\varphi(x \partial_y - y \partial_x)} x = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ e^{\varphi(x \partial_y - y \partial_x)} y = y \cos \varphi + x \sin \varphi \end{array} \right]$$

Z předchozího cvičení lze snadno uhodnout, že „akce“ operátorů e^{∂_x} , $e^{x \partial_x}$ a $e^{x \partial_y - y \partial_x}$ na obecné funkce odpovídají po řadě transformacím translace, škálování a rotace. Z tohoto důvodu se operátorům ∂_x , $x \partial_x$ a $x \partial_y - y \partial_x$ říká *generátory* těchto transformací.[‡] Pokud je ale tomu skutečně tak, pak to musí platit pro libovolnou funkci, například pro translaci

$$e^{\alpha \partial_x} f(x) = f(x + \alpha). \quad (6.7)$$

Pravdivost tohoto tvrzení, lze jednoduše demonstrovat pomocí Taylorova rozvoje. Nicméně u složitějších operátorů nemusí být pravdivost analogického tvrzení již tak očividná. Naštěstí existuje velice jednoduchá metoda, jak podobné identity dokázat. Ta vychází z pozorování, že

$$e^{\partial_x} f(x) e^{-\partial_x} = f(e^{\partial_x} x e^{-\partial_x}) = f(x + \alpha),$$

kde všechny výrazy chápeme jako operátory. První rovnítko je dáno faktem, že např. $e^{\partial_x} x^2 e^{-\partial_x} = e^{\partial_x} x e^{-\partial_x} e^{\partial_x} x e^{-\partial_x}$. Jinými slovy $e^{\partial_x} f(x) e^{-\partial_x}$ je podobnostní transformace a pokud je $f(x)$ dostatečně hladká (tak aby existoval Taylorův rozvoj kolem nuly), pak je možné použít identity $e^{\partial_x} x^n e^{-\partial_x} = \left(e^{\partial_x} x e^{-\partial_x} \right)^n$ v každém členu rozvoje $f(x)$. Druhé rovnítko lze ospravedlnit přímým Taylorovým rozvojem obou exponenciál. Je však nutné mít na paměti, že jelikož zde pracujeme s operátory, tak například $\partial_x x = 1 + x \partial_x$, apod. Nakonec pokud zapůsobíme operátorem $e^{\partial_x} f(x) e^{-\partial_x}$ na jedničku, přičemž zřejmě $e^{-\partial_x} \cdot 1 = 1$, pak ihned plyne

$$e^{\alpha \partial_x} f(x) = f(x + \alpha).$$

Podobný trik lze aplikovat pro všechny operátory uvedené v předchozím cvičení. Jeho platnost je však omezena pouze na operátory lineární v derivaci.

6.2.6 Dokažte

$$e^{\alpha g(x) \partial_x} x = G^{-1} \left(G(x) + \alpha \right) e^{-\alpha g(0)},$$

kde $G'(x) = g(x)$. (Návod: Použijte transformaci souřadnic $g(x) \partial_x = \partial_{G(x)}$.)

Nyní si tuto „technologii“ exponenciál rozšíříme na případ obecných operátorů. Jinými slovy budeme chtít nalézt rozklad výrazu

$$e^A B e^{-A}$$

pomocí komutátorů. Existují dvě cesty, jak toho dosáhnout. Následující cvičení ilustrují tu „těžší“ z nich.

[‡]Z geometrického hlediska $e^{\alpha \partial_x}$ představuje transformaci souřadnic $x \rightarrow x + \alpha$; jinými slovy jde o tzv. *pasivní transformaci*. Tutéž operaci lze ale vnímat „aktivně“ jako translaci objektů v prostoru. V tomto případě se však jedná o translaci těchto objektů o $-\alpha$ podél osy x . Tyto rozdílné interpretace akce $e^{\alpha \partial_x}$ můžou občas zmást nezasvěceného čtenáře, neboť většinou není explicitně řečeno, v jakém smyslu se dané transformace chápou.

6.2.7 Přepište následující výrazy pomocí Lieovy derivace: $[A^2, B]$, $[A^3, B]$ a $[A^4, B]$.

$$\left[\begin{array}{l} [A^2, B] = 2\mathcal{L}_A(B)A + \mathcal{L}_A^2(B), \\ [A^3, B] = 3\mathcal{L}_A(B)A^2 + 3\mathcal{L}_A^2(B)A + \mathcal{L}_A^3(B), \\ [A^4, B] = 4\mathcal{L}_A(B)A^3 + 6\mathcal{L}_A^2(B)A^2 + 4\mathcal{L}_A^3(B)A + \mathcal{L}_A^4(B) \end{array} \right]$$

6.2.8 Na základě předchozího příkladu odvoďte obecnou formuli pro $[A^n, B]$. (Návod: Podle výsledků předchozího cvičení napište obecný tvar pravé strany jako sumu přes neznámé koeficienty $c_{n,k}$ a vhodné mocniny Lieových derivací a operátoru A . Potom odvoďte rekurentní formuli pro $c_{n,k}$ na základě analýzy, jak se koeficienty změní, pokud přejdeme na $n + 1$ případ. Získanou rekurenci vyřešte.)

$$\left[[A^n, B] = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mathcal{L}_A^k(B) A^{n-k} \right]$$

6.2.9 Jak se změní výsledek předcházejícího cvičení, budeme-li řadit mocniny A^{n-k} nalevo od $\mathcal{L}_A^k(B)$ místo napravo?

$$\left[[A^n, B] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} A^{n-k} \mathcal{L}_A^k(B) = \left(A^n - (A - \mathcal{L}_A)^n \right) B \right]$$

6.2.10 Čemu se rovná $[e^A, B]$? (Nápověda: Možná se bude hodit sumační identita $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} =$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!k!}.) \quad \left[[e^A, B] = \left(e^{\mathcal{L}_A}(B) - B \right) e^A \right]$$

Z výsledku cvičení 6.2.10 lze již snadno dovodit, že

$$\boxed{e^A B e^{-A} = e^{\mathcal{L}_A}(B) = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots} \quad (6.8)$$

Ukažme si nyní druhý, „lehčí“ a více rozšířenější důkaz této identity, jež zahrnuje trik, který s výhodou uplatníme ještě několikrát. Ten spočívá v zavedení funkce jedné proměnné, řekněme t , která nabývá hodnot v prostoru operátorů

$$F(t) = e^{tA} B e^{-tA}.$$

Derivací této funkce podle t obdržíme

$$F'(t) = e^{tA} [A, B] e^{-tA} = [A, F(t)] = \mathcal{L}_A(F(t)).$$

Odtud jednoduchou integrací, kde zacházíme s \mathcal{L}_A jako s konstantou, s počáteční podmínkou $F(0) = B$ ihned plyne

$$F(t) = e^{t\mathcal{L}_A}(B).$$

Položením $t = 1$ končí náš důkaz. Výsledku (6.8) se občas říká *Hadamardova formule*.

6.2.11 Přepište následující výrazy pomocí Lieovy derivace: $\sin(A)B \cos(A) - \cos(A)B \sin(A)$ a $\cos(A)B \cos(A) + \sin(A)B \sin(A)$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin(A)B \cos(A) - \cos(A)B \sin(A) = \sin(\mathcal{L}_A)B, \\ \cos(A)B \cos(A) + \sin(A)B \sin(A) = \cos(\mathcal{L}_A)B \end{array} \right]$$

6.2.12 Přepište* $[f(A), B]$ jako výraz obsahující funkci A a \mathcal{L}_A působící na B . Výsledek porovnejte s výsledkem cvičení 6.2.10. (Návod: Využijte výsledku cvičení 6.2.9.)

$$[[f(A), B] = (f(A) - f(A - \mathcal{L}_A))B]$$

6.2.2 Poincarého věta, BCH identita

Jak již bylo řečeno výše, exponenciála operátoru je klíčovým objektem operátorového počtu vzhledem k jejím aplikacím v matematice a ve fyzice. S tímto přirozeně souvisí snaha o rozklad složitějšího operátoru na menší elementy, jejichž exponenciála má známé chování, či komplementární problém, fúze dvou exponenciál do jediné. Do popředí se tak dostávají dva velké „problémy“ operátorového počtu tvořící jádro této podkapitoly:

$$\text{Problém I :} \quad e^{A+B} = e^{X_0} e^{X_1} e^{X_2} \dots \quad (6.9)$$

$$\text{Problém II :} \quad e^A e^B = e^{Z_0+Z_1+Z_2+\dots} \quad (6.10)$$

Problému I se v literatuře říká *Zassenhausova identita* a Problému II *Bakerova-Camp-bellova-Hausdorffova* (BCH) identita. V obou jsou X_i a Z_i neznámé výrazy obsahující A, B a potenciálně i všechny jejich (Lieovy) „derivace“ $[A, B], [A, [A, B]],$ apod. Úkolem je najít jejich explicitní tvar. Jak vyjde najevo, toho lze skutečně dosáhnout pouze pro speciální případy A a B ; obecně lze najít jen vysoce formální reprezentace či (asi nejužitečněji) determinovat X_i a Z_i rekurzivně. Existuje také mnoho zajímavých „mutací“ obou těchto identit, z nichž některé si zde ukážeme.

Stojí za povšimnutí, že naše definice problémů I a II není vlastně úplná, neboť jsme ještě dostatečně nespecifikovali, v jakém řádu X_i a Z_i závisí na A a B . Standardně se uvažuje, že X_i a Z_i jsou homogenní výrazy (polynomy) řádu i jak v A tak i v B , nebo-li že počet výskytů operátoru A plus počet výskytů operátorů B se rovná i . Jak uvidíme, obecně budou Z_i a X_i (pro i větší než 1) dány jako lineární kombinace výrazů, obsahující všechny možné do sebe vnořené komutátory daného řádu.

Než se ale pustíme do problémů I a II bude užitečné nejprve rozřešit otázku, jak derivovat exponenciálu operátoru podle parametru (řekněme t). Ilustrujme si to na následujícím problému

$$\partial_t e^{A+tB} \Big|_{t=0} = ?$$

Jelikož v argumentu exponenciály sedí operátor, nelze bezmyšlenkovitě aplikovat známé pravidla pro derivování. Důvod je v tom, že derivace $\partial_t(A+tB) = B$ obecně nekomutuje s $A+tB$. Tím pádem záleží na pořadí a naivně se zdá, že neznáme odpověď na otázku, zda $\partial_t e^{A+tB} \Big|_{t=0} = B e^A$ nebo $\partial_t e^{A+tB} \Big|_{t=0} = e^A B$?

Samozřejmě ani jedna z možností není správně; lépe řečeno jsou neúplné. Ve správném výsledku jsou totiž obě možnosti zahrnuty s nekonečně mnoha dalšími členy.

*Pokud nebude řečeno jinak, obecná funkce obsahující operátor $f(A)$ bude vždy dostatečně hladká tak, aby výrazy, ve kterých se objevuje, dávaly smysl. V praxi se výraz $f(A)$ chápe jako ekvivalent Taylorova rozvoje $f(A)$ kolem 0.

Pokud e^{A+tB} rozvineme Taylorovým rozvojem a budeme-li derivovat člen po členu, † dostáváme

$$\begin{aligned} \partial_t e^{A+tB}|_{t=0} &= B + \frac{1}{2!}(BA + AB) + \frac{1}{3!}(BA^2 + ABA + A^2B) + \frac{1}{4!}(BA^3 + ABA^2 + \\ &+ A^2BA + A^3B) + \frac{1}{5!}(BA^4 + ABA^3 + A^2BA^2 + A^3BA + A^4B) + \dots \\ &= B\left(1 + \frac{A}{2!} + \frac{A^2}{3!} + \frac{A^3}{4!} + \dots\right) + AB\left(\frac{1}{2!} + \frac{A}{3!} + \frac{A^2}{4!} + \frac{A^3}{5!} + \dots\right) + \\ &+ A^2B\left(\frac{1}{3!} + \frac{A}{4!} + \frac{A^2}{5!} + \frac{A^3}{6!} + \dots\right) + A^3B\left(\frac{1}{4!} + \frac{A}{5!} + \frac{A^2}{6!} + \frac{A^3}{7!} + \dots\right) + \dots \\ &= B \frac{e^A - 1}{A} + AB \frac{e^A - 1 - A}{A^2} + A^2B \frac{e^A - 1 - A - \frac{1}{2!}A^2}{A^3} + \dots \end{aligned}$$

Označíme-li si „posunuté“ exponenciály objevující se v posledním řádku předchozí rovnice symbolem

$$E_n(A) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+n)!} = \frac{1}{A^n} \left(e^A - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!} \right) = \frac{1}{A^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

potom můžeme výsledek přepsat do kompaktního, ale neuzavřeného tvaru

$$\partial_t e^{A+tB}|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n B E_{n+1}(A). \quad (6.11)$$

6.2.13 Ověřte následující identity:

$$\begin{aligned} \partial_t e^{A+tB}|_{t=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) B A^n, & E_n(A) &= \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{n-1}} d\xi_n e^{\xi_n A}, \\ E_{n+1}(A) &= \int_0^1 d\xi \xi^n E_n(\xi A), & E_n(A) &= \frac{1}{\xi^n} \partial_\xi \left(\xi^{n+1} E_{n+1}(\xi A) \right) \Big|_{\xi=1}. \end{aligned}$$

6.2.14 Dokažte, že pokud $n > 0$, pak platí $E_n = \frac{\gamma(n,A)}{A^n(n-1)!} e^A$, kde $\gamma(n,A) = \int_0^A dt t^{n-1} e^{-t}$ je tzv. *dolní neúplná gama funkce*. (Návod: Sestavte diferenciální rovnici pro $E_n(A)$ formální derivací podle A , kterou vyřešte s počáteční podmínkou $E_n(0) = 0$.)

$$\left[E_n'(A) = E_n(A) \left(1 - \frac{n}{A} \right) + \frac{1}{A(n-1)!} \right]$$

6.2.15 Ověřte, že $\sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) A^n = e^A$.

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) A^n = \frac{e^A}{A} \int_0^A dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} = e^A \right]$$

†Opět předpokládáme, že „technické“ problémy s tím spojené, například stejnoměrná konvergence apod., jsou vyřešeny vhodným zúžením třídy funkcí, na které operátory působí.

Jakkoliv je identita (6.11) zajímavá, v praxi je jen zřídka kdy použitelná. V literatuře se proto daleko častěji objevuje ve tvaru, kterému se říká *Campbellova-Poincarého fundamentální identita*. Z výsledků předcházejících cvičení lze snadno odvodit, že

$$\begin{aligned}
\partial_t e^{A+tB} \Big|_{t=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) B A^n = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) A^n B + \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) [B, A^n] = \\
&= e^A B + \sum_{n=0}^{\infty} E_{n+1}(A) \left((A - \mathcal{L}_A)^n - A^n \right) B = \\
&= \frac{e^A}{A} \int_0^A dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (A - \mathcal{L}_A)^n(B)}{A^n n!} e^{-t} = \\
&= \frac{e^A}{A} \int_0^A dt e^{-t \frac{\mathcal{L}_A}{A}}(B) = e^A \int_0^1 d\xi e^{-\xi \mathcal{L}_A}(B) = e^A \frac{1 - e^{-\mathcal{L}_A}}{\mathcal{L}_A}(B) = \\
&= e^A E_1(-\mathcal{L}_A)(B).
\end{aligned}$$

6.2.16 Ověřte, že rovněž platí $\partial_t e^{A+tB} \Big|_{t=0} = E_1(\mathcal{L}_A)(B)e^A$.

$$\left[e^A \frac{1 - e^{-\mathcal{L}_A}}{\mathcal{L}_A}(B) = e^{\mathcal{L}_A} \frac{1 - e^{-\mathcal{L}_A}}{\mathcal{L}_A}(B) e^A = \frac{e^{\mathcal{L}_A} - 1}{\mathcal{L}_A}(B) e^A = E_1(\mathcal{L}_A)(B) e^A \right]$$

Všechny dosud provedené výpočty lze jednoduše zobecnit na libovolnou závislost operátoru $A \equiv A(t)$ na parametru t a právě v této obecné podobě se Cambellova-Poincarého identita běžně uvádí:

$$\boxed{e^{-A} \partial_t e^A = \frac{1 - e^{-\mathcal{L}_A}}{\mathcal{L}_A}(A'),} \quad (6.12)$$

kde A' značí derivaci A podle t .

Nyní se zaměříme na problém II. Postupně si ukážeme tři způsoby seřazené vzešupně podle jednoduchosti a (řekněme) elegance, jak odvodit neznámé výrazy Z_i . Všechny tři způsoby svým vlastním způsobem nahlízejí na problém jinak, i když výsledky si samozřejmě odpovídají.

První způsob je tzv. „brute force“ metoda. Zavedeme si opět parametr t a požadovaný výsledek definujeme pomocí řady

$$Z(tA, tB) \equiv tZ_1 + t^2Z_2 + t^3Z_3 + \dots = \ln(e^{tA} e^{tB}). \quad (6.13)$$

Povšimněme si, že s takto explicitně vyznačeným chováním funkce $Z(tA, tB)$ na parametru t implicitně předpokládáme, že Z_i je homogenní polynom řádu i jak v A , tak v B , tedy že platí $Z_i(\lambda A, \lambda B) = \lambda^i Z_i(A, B)$. Z výše uvedené definice pak vyplývá

$$Z_n = \frac{1}{n!} \partial_t^n \ln(e^{tA} e^{tB}) \Big|_{t=0}.$$

Vlastní výpočet se provede tak, že $\ln(e^{tA}e^{tB})$ se rozvede v Taylorovu řadu, která se pak derivuje člen po členu

$$Z_n = \frac{1}{n!} \partial_t^n \left[(e^{tA}e^{tB} - 1) - \frac{1}{2}(e^{tA}e^{tB} - 1)^2 + \frac{1}{3}(e^{tA}e^{tB} - 1)^3 - \dots \right] \Big|_{t=0}$$

6.2.17 Vypočtěte Z_1 , Z_2 a Z_3 .

$$\begin{bmatrix} Z_1 = A + B \\ Z_2 = \frac{1}{2}[A, B] \\ Z_3 = \frac{1}{12}([[A, B], B] + [A, [A, B]]) \end{bmatrix}$$

6.2.18 Odvodte, že platí $Z(-tB, -tA) = -Z(tA, tB)$. Přímým důsledkem této identity je, že pro sudá n je Z_n anti-symetrickým vůči záměně A a B , zatímco pro lichá n je tomu naopak.

$$[1 = e^{tA}e^{tB}e^{-tB}e^{-tA} = e^{Z(tA, tB)}e^{Z(-tB, -tA)}]$$

6.2.19 Odvodte, že platí $Z(tA, tB) = e^{t\mathcal{L}_A}(Z(tB, tA))$ a $Z(tA, tB) = e^{-t\mathcal{L}_B}(Z(tB, tA))$.

$$\begin{bmatrix} e^{tA}e^{tB} = e^{tA}e^{tB}e^{tA}e^{-tA} = e^{t\mathcal{L}_A}(e^{tB}e^{tA}) \\ e^{tA}e^{tB} = e^{-tB}e^{tB}e^{tA}e^{tB} = e^{-t\mathcal{L}_B}(e^{tB}e^{tA}) \end{bmatrix}$$

6.2.20 S využitím předchozích dvou cvičení dokažte následující rekurentní relaci (Návod: Použijte Taylorův rozvoj na obou stranách předchozí identity)

$$Z_{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k!} \mathcal{L}_A^k(Z_{2n-k}(B, A)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{L}_B^k(Z_{2n-k}(B, A)),$$

na jejímž základě spočítejte Z_4 .

$$[Z_4 = \frac{1}{24} [[[B, A], A], B]]$$

Druhý způsob, který si ukážeme, využívá Cambellovu-Poincarého fundamentální identitu (6.12). V tomto případě je výhodnější zvolit si pomocný parametr t trochu jinak:

$$Z(A, tB) \equiv Z_0 + tZ_1 + t^2Z_2 + \dots = \ln(e^A e^{tB}). \quad (6.14)$$

Jinými slovy nyní uvažujeme Z_i coby homogenní polynomy řádu i pouze v B , tedy $Z_i(A, \lambda B) = \lambda^i Z_i(A, B)$. Derivujeme-li e^Z podle t , lze s využitím (6.12) snadno odvodit, že

$$Z' = \frac{\mathcal{L}_Z}{1 - e^{-\mathcal{L}_Z}}(B) = \psi(e^{\mathcal{L}_Z})(B),$$

kde $\psi(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$ je generující funkcí Bernoulliho čísel

$$\psi(e^x) = \sum_0^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Nyní si stačí uvědomit, že $e^{\mathcal{L}Z} \equiv e^{\mathcal{L}A} e^{t\mathcal{L}B}$ a formální integrací předchozího výrazu s počáteční podmínkou $Z(A, 0) = A$ dostáváme BCH formuli ve tvaru

$$Z(A, tB) = A + \int_0^t d\xi \psi(e^{\mathcal{L}A} e^{\xi\mathcal{L}B})(B). \quad (6.15)$$

Toto „řešení“ BCH formule je samozřejmě pouze čistě formální, neboť k získání požadovaných koeficientů Z_i je obecně vždy potřeba provést Taylorův rozvoj. Jednou z výhod (6.15) oproti „brute force“ metodě je možnost jednoduše extrahovat všechny členy lineární v B , tedy obdržet nekonečnou sumu částí všech členů obsažených v (6.13). Jinými slovy, důležitým a užitečným výsledkem (6.15) je skutečnost

$$Z(A, tB) = A + \psi(e^{\mathcal{L}A})(B) + O(B^2).$$

6.2.21 Podobným postupem jako v případě (6.15) ověřte, že formálně lze „vyřešit“ i (6.13):

$$Z(tA, tB) = \int_0^t d\xi \psi(e^{\xi\mathcal{L}A} e^{\xi\mathcal{L}B})(B + e^{-\xi\mathcal{L}A} e^{-\xi\mathcal{L}B} A).$$

Nakonec si ukažme reprezentaci BCH identity, jež je z těchto tří diskutabilně nej-elegantnější a v jistém smyslu i nejužitečnější. Její odvození se dosáhne hledáním „diferenciální“ symetrie $Z(A, B)$, čili infinitesimální transformace A a B , která zanechá $Z(A, B)$ beze změny. Konkrétně, uvažujme infinitesimální přeskálování $B \rightarrow B + \varepsilon B$ a budeme hledat, jak se musí změnit A . Jinými slovy chceme vyřešit rovnici

$$e^{A-\varepsilon D} e^{B+\varepsilon B} = e^A e^B + O(\varepsilon^2),$$

vzhledem k D . S využitím identity (6.12) snadno nahlédneme, že

$$e^{A-\varepsilon D} e^{B+\varepsilon B} \approx \left(1 - \varepsilon \frac{e^{\mathcal{L}A} - 1}{\mathcal{L}A}(D)\right) e^A (1 + \varepsilon B) e^B \approx \left(1 - \varepsilon \frac{e^{\mathcal{L}A} - 1}{\mathcal{L}A}(D) + \varepsilon e^{\mathcal{L}A} B\right) e^A e^B.$$

Jelikož výraz v závorce musí být nula, dostáváme výsledek $D = \frac{\mathcal{L}A}{1 - e^{-\mathcal{L}A}}(B)$. Nyní si stejnou rovnost přepíšeme jako $Z(A - \varepsilon D, B + \varepsilon B) \approx Z(A, B)$. Odtud vyplývá

$$0 = \delta Z = Z(A - \varepsilon D, B + \varepsilon B) - Z(A, B) \approx \varepsilon [(B\partial_B)Z(A, B) - (D\partial_A)Z(A, B)],$$

kde jsme zavedli tzv. *replacement* operátory $(B\partial_B)$ a $(D\partial_A)$. Jejich funkce, jak už název napovídá, je nahradit výskyt operátoru v argumentu derivace operátorem stojícím za ním. Například $(B\partial_A)$ nahrazuje operátor A operátorem B , tedy $(B\partial_A)A = B$. Závorky kolem $B\partial_A$ naznačují, že nezle B ani ∂_A chápat odděleně, ale že dohromady vytvářejí jedinou instrukci. Obecně se replacement operátor, řekněme $(B\partial_A)$, chová jako derivace. Tudíž například platí $(B\partial_A)A^2 = BA + AB$.

Vrátíme-li se k předchozímu vztahu (a obnovíme závislost na parametru t), pokud $Z(A, tB)$ rozvedeme v řadu (6.14) a využijeme-li faktu, že $(B\partial_B)Z_n(A, B) = nZ_n(A, B)$, lze již snadno odvodit rekurentní formuli pro $Z_n(A, B)$, kterou lze následně (opět ve formálním smyslu) vyřešit:

$$Z_{n+1}(A, B) = \frac{1}{n+1}(D\partial_A)Z_n(A, B) = \frac{1}{(n+1)!}(D\partial_A)^{n+1}(A).$$

Sumací všech členů se dostáváme ke třetí reprezentaci BCH identity $Z = \sum_0^{\infty} t^n Z_n$:

$$Z(A, tB) = e^{t(D\partial_A)}A, \quad D = \frac{\mathcal{L}_A}{1 - e^{-\mathcal{L}_A}}(B).$$

V tomto tvaru lze jednoduše vidět, že lineární členy v B jsou právě takové, jaké jsme odvodili výše, tedy $Z_1 = D = \psi(e^{\mathcal{L}_A})B$. Nicméně fakt, že D je samo o sobě funkcí A , vede k tomu, že $Z_2 = \frac{1}{2}(D\partial_A)D$ má mnohem komplikovanější strukturu a žádná jeho pěkná analytická reprezentace není autorům známá.

6.2.22 Uvažujte symetrii ve formě $A \rightarrow A + \varepsilon A$ a $B \rightarrow B - \varepsilon \tilde{D}$. Najděte \tilde{D} a výslednou formu pro $Z(tA, B)$.

$$\left[Z(tA, B) \equiv \ln(e^{tA}e^B) = e^{t(\tilde{D}\partial_B)}(B), \quad \tilde{D} = \frac{\mathcal{L}_B}{e^{\mathcal{L}_B} - 1}(A). \right]$$

6.2.23 Vypočítejte $Z(A, tB)$ v těchto speciálních případech: $[A, B] = \alpha A$ a $[A, B] = \beta B$. (Návod: Nejprve spočítejte D pomocí Taylorova rozvoje a následné resumace. Stejným postupem potom vypočtete Z .)

$$\left[\begin{array}{l} Z = A + t\psi(e^\beta)B \\ Z = Ae^{\alpha t} + \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}B \end{array} \right]$$

6.2.24 Podobným postupem jako v předešlém cvičení vypočítejte $Z(A, tB)$ ve speciálním případě $[A, B] = \alpha A + \beta B$. Ověřte správnost výsledné formule limitními případy $\alpha \rightarrow 0$ a $\beta \rightarrow 0$, které porovnejte s výsledky předchozího cvičení.

$$\left[Z(A, tB) = e^{\frac{t\alpha}{\beta}(\psi(e^\beta) - 1)}A + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\psi(e^\beta)}{\psi(e^\beta) - 1} \left(e^{\frac{t\alpha}{\beta}(\psi(e^\beta) - 1)} - 1 \right) B \right]$$

6.2.25 Předchozí výsledek je možné odvodit i jednodušeji. Pokud označíme $c \equiv \psi(e^\beta)$ a $d \equiv \frac{\alpha}{\beta}(\psi(e^\beta) - 1)$, ukažte, že $D = cB + dA$. Následně ověřte, že platí

$$e^{t(D\partial_A)} = e^{tc(B\partial_A) + td(A\partial_A)} = e^{\frac{c}{d}(B\partial_A)} e^{td(A\partial_A)} e^{-\frac{c}{d}(B\partial_A)},$$

na základě čehož potvrďte předcházející výsledek ve tvaru $Z(A, tB) = e^{td}A + \frac{c}{d}(e^{td} - 1)B$.

6.2.3 Zassenhausova identita

Nyní obraťme pozornost k problému I:

$$e^{t(A+B)} = e^{tX_0} e^{tX_1} e^{\frac{t^2}{2}X_2} e^{\frac{t^3}{3!}X_3} \dots \quad (6.16)$$

S takto zavedeným parametrem t , neznámé výrazy $X_i(A, B)$ budou obecně homogenními polynomy v A a B řádu i , či-li $X_i(\lambda A, \lambda B) = \lambda^i X_i(A, B)$. Může se zdát podivné, že v (6.16) jak X_0 tak i X_1 jsou oba lineární v t . To ovšem vyplývá z faktu, že jakýkoliv člen konstantní v t musí být nula (neboť obě strany rovnice se musí rovnat v limitě $t \rightarrow 0$) a z faktu, že kdybychom měli na pravé straně (6.16) člen lineární v t pouze jeden, pak by se nevyhnutelně musel rovnat $A + B$ (neboť derivace obou stran (6.16) podle t si musí odpovídat v limitě $t \rightarrow 0$). Pokud by ale byl na pravé straně člen $e^{t(A+B)}$, potom přirozeně $X_{\geq 2} = 0$. Jinými slovy rozklad (6.16) pouze s jediným lineárním členem je triviální. To je důvod, proč takových členů musí být (nejméně) dva.

Čemu se rovná X_0 a X_1 ? Pokud (6.16) zderivujeme podle t a následně položíme $t = 0$, obdržíme podmínku

$$X_0 + X_1 = A + B. \quad (6.17)$$

Tato podmínka překvapivě neurčuje X_0 a X_1 jednoznačně. Pokud chceme vyjádřit neznámé faktory X_n jako výrazy obsahující pouze operátory A a B , jsme nuceni si nejdřív (libovolně) zvolit jeden z nich, řekněme X_0 a následně použít (6.17) pro získání $X_1 = A + B - X_0$. Častou volbou je $X_0 = A$. Jak vidíme, existuje potenciálně neomezená libovůle, jak zvolit X_0 . Pokud se však omezíme pouze na lineární kombinace A a B , pak můžeme obecně uvažovat X_0 a X_1 ve tvaru

$$X_0 = \alpha A + (1 - \beta)B, \quad X_1 = (1 - \alpha)A + \beta B,$$

kde α a β jsou libovolná komplexní čísla. Definujeme-li $A_0 \equiv A$, $A_1 \equiv B$, pak můžeme předchozí vztahy kompaktně přepsat do vektorové rovnosti $X_i = M_{ij}A_j$, kde matice M je dána jako

$$M \equiv M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Omezíme-li se tedy pouze na lineární transformace A a B , které zachovávají součet $A+B$, pak obdržíme množinu transformací, jejíž element reprezentuje $M(\alpha, \beta)$. Různé volby parametrů α a β v matici $M(\alpha, \beta)$ reprezentují různé lineární kombinace A a B v definicích X_0 a X_1 .

6.2.26 Ověřte následující identity

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta)M(\gamma, \delta) &= M(1 - \beta - \gamma + \gamma(\alpha + \beta), 1 - \alpha - \delta + \delta(\alpha + \beta)) \\ M^{-1}(\alpha, \beta) &= M\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta - 1}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta - 1}\right) \\ \ln(M(\alpha, \beta)) &= \frac{\ln(\alpha + \beta - 2)}{\alpha + \beta - 2}(M(\alpha, \beta) - 1) \end{aligned}$$

6.2.27 Dokažte, že matice $M(\alpha, 2 - \alpha) \equiv M_{id}(\alpha)$ tvoří grupu.

$$\left[\begin{array}{llll} \text{asociativita:} & & \text{plyne z asociativity} & \text{násobení matic} \\ \text{uzavřenost vůči grupovému násobení:} & M_{id}(\alpha)M_{id}(\beta) & = & M_{id}(\alpha + \beta - 1) \\ \text{jednotkový prvek:} & M_{id}(1) & = & \mathbf{1}_2 \\ \text{existence inverzních prvků:} & M_{id}^{-1}(\alpha) & = & M_{id}(2 - \alpha) \end{array} \right]$$

(Poznámka: Povšimněte si, že $\det(M_{id}(\alpha)) = 1$, čili $\{M_{id}(\alpha)\}$ je podmnožina $\{M(\alpha, \beta)\}$, která je spojená s identitou (odtud značení M_{id}). Prvky $M_{id}(\alpha)$ tvoří nekompaktní jednoparametrickou grupu (příslušná varieta je topologicky izomorfní s \mathbb{R}). Ovšem z předcházejícího cvičení lze ukázat, že $\ln(M_{id}(\alpha))$ neexistuje, čili $M_{id}(\alpha)$ nelze napsat jako exponenciálu generátoru.)

Kuriózní neurčitost v rovnici (6.17) je projevem důležité vlastnosti Zassenhausovy identity (6.16), která nese název (v žargónu propůjčeném z kvantové teorie pole) *spontánní narušení symetrie*. Jinými slovy zatímco levá strana rovnice (6.16) je velmi symetrická, například záměna A za B a naopak ji zanechá beze změny, pravá strana tuto symetrii (jak se zdá) nemá. Lépe řečeno tato symetrie není na pravé straně Zassenhausovy identity „očividná“. Nicméně aby se obě strany rovnice (6.16) rovnaly, pak musí platit, že např. záměnou $A \rightleftharpoons B$ se v konečném důsledku nic nezmění i na straně pravé. Přesněji řečeno, jak uvidíme níže, záměnou $A \rightleftharpoons B$ se každý z $X_n(A, B)$ změní netriviálním způsobem, avšak pokud bychom znovu poslepovali všechny exponenciály na pravé straně (6.16) do jediné, potom její argument musí nakonec být $A + B$ i pro transformované faktory $X_n(B, A)$. K tomuto zajímavému aspektu Zassenhausovy identity se ještě vrátíme.

Po tomto úvodu se zaměříme na to, jak Zassenhausovu identitu (vy)řešit. V tuto chvíli známe pouze první dva členy X_0 a X_1 za předpokladu, že jsme nějak zafixovali neurčitost v (6.17). Avšak pro větší obecnost následující diskuze se nepřikloníme ani k jedné konkrétní volbě X_0 , či X_1 . Nadále s nimi budeme zacházet jako s „neznámými“ a všechny další faktory $X_{\geq 2}$ vyjádříme jako funkce X_0 a X_1 . To lze provést tak, že všude tam, kde se objeví člen $A + B$ (a symetrie Zassenhausovi identity garantuje, že jinak než v této kombinaci se A a B nemůže objevit), jej nahradíme za $X_0 + X_1$.

Co se týče odvození, tak nejpřímočařejší „brute force“ metoda k obdržení $X_{n \geq 2}$ je

$$X_{n+1} = \partial_t^{n+1} \left(e^{-\frac{t^n}{n!} X_n} \dots e^{-tX_1} e^{-tX_0} e^{t(X_0+X_1)} \right) \Big|_{t=0}. \quad (6.18)$$

Tato formule ihned plyne z (6.16) a v podstatě se dá označit za definici X_{n+1} , která je na rozdíl od BCH formule silně rekurentní, neboť závisí na všech předchozích $X_{\leq n}$. Z tohoto důvodu je praktická hodnota (6.18) velmi malá, jak demonstrují následující cvičení:

6.2.28 Odvoďte X_2 a X_3 pomocí (6.18). Výsledek zapište s použitím operátorů X_0 a X_1 a jejich komutátorů.

$$\left[\begin{array}{l} X_2 = -[X_0, X_1] \\ X_3 = 2[X_1, [X_0, X_1]] + [X_0, [X_0, X_1]] \end{array} \right]$$

6.2.29 Pro odvážné: Vypočtete stejným způsobem X_4 . (Návod: Snažte se přepsat každý z členů tak, aby měl podobu řetězce komutátorů, působící na $[X_0, X_1]$ zleva. Ne všechny možné řetězce komutátorů jsou nezávislé. K zjednodušení výsledku se jich co nejvíce snažte spojit do jediného. K tomu se hodí identita $\mathcal{L}_{X_0}\mathcal{L}_{X_1}([X_0, X_1]) = \mathcal{L}_{X_1}\mathcal{L}_{X_0}([X_0, X_1])$.)

$$\left[X_4 = -[X_0, [X_0, [X_0, X_1]]] - 3[X_1, [X_0, [X_0, X_1]]] - 3[X_1, [X_1, [X_0, X_1]]] \right]$$

Užitečnější formuli pro X_n lze obdržet s pomocí následující identity

$$\begin{aligned} X_0 + X_1 &= \partial_t \left(e^{t(X_0+X_1)} \right) e^{-t(X_0+X_1)} = \\ &= X_0 + e^{t\mathcal{L}_{X_0}}(X_1) + te^{t\mathcal{L}_{X_1}}e^{t\mathcal{L}_{X_0}}(X_2) + \frac{t^2}{2!}e^{\frac{t^2}{2!}\mathcal{L}_{X_2}}e^{t\mathcal{L}_{X_1}}e^{t\mathcal{L}_{X_0}}(X_3) + \dots \\ &= X_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\mathcal{L}_{X_{n-k}}} \right) e^{t\mathcal{L}_{X_0}}(X_{n+1}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Jelikož pravá strana této rovnice nemůže záviset na t , můžeme postupnými derivacemi podle t a následného položení $t = 0$ obdržet posloupnost rovnic, které definují vztahy mezi neznámými koeficienty $X_{n \geq 2}$. Pokud poslední řádek této identity zderivujeme n -krát a položíme $t = 0$, obdržíme obecně značně komplikovaný výraz zřetěžených komutátorů působící na $X_{\leq n}$, nicméně nejvyšší člen v tomto výrazu bude osamocen a bude roven X_{n+1} . Položením tohoto výrazu nule získáme rekurentní formuli pro X_{n+1} závisející na všech předchozích $X_{\leq n}$. Výhodou tohoto přístupu oproti (6.18) je skutečnost, že výsledek je od začátku vyjádřen pomocí zřetěžených komutátorů.

6.2.30 Na základě (6.19) odvoďte X_5 . (Návod: viz návod k úloze 6.2.29.)

$$\left[X_5 = [X_0, [X_0, [X_0, [X_0, X_1]]]] + 6[X_0, [X_1, [X_0, [X_0, X_1]]]] - \right. \\ \left. - 2[X_1, [X_0, [X_0, [X_0, X_1]]]] + 24[X_0, [X_1, [X_1, [X_0, X_1]]]] - \right. \\ \left. - 18[X_1, [X_0, [X_1, [X_0, X_1]]]] + 4[X_1, [X_1, [X_1, [X_0, X_1]]]] \right]$$

Díky přecházejícím cvičením již známe explicitní tvar faktorů X_2, X_3, X_4 a X_5 . Z těchto výrazů se zdá, že obecný tvar faktoru X_{n+2} může být formulován jako součet všech možných řetězců komutátorů o délce n působící na $[X_0, X_1]$ zleva. Například pro X_6 očekáváme obecný tvar:

$$\begin{aligned} X_6 &= c(0000)\mathcal{L}_{X_0}^4([X_0, X_1]) + c(1000)\mathcal{L}_{X_1}\mathcal{L}_{X_0}^3([X_0, X_1]) + \dots \\ &\quad + c(1100)\mathcal{L}_{X_1}^2\mathcal{L}_{X_0}^2([X_0, X_1]) + \dots + c(1111)\mathcal{L}_{X_1}^4([X_0, X_1]), \end{aligned}$$

kde (\dots) -čka jsou celočíselné koeficienty a řetězec v závorce kóduje na jakých pozicích se objevují komutátory „0-tého typu“ X_0 a „1-ního typu“ X_1 . Takových členů v X_6 bude obecně $2^4 = 16$, avšak Jacobiho identita (6.6) sníží tento počet na $2^4 - 2^2 = 12$. V případě X_{n+2} bude počet nezávislých řetězců pro $n \geq 2$ dán vztahem $2^n - 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$.

Můžeme něco říci o koeficientech $c(\dots)$ obecně? Hodnota těchto koeficientů zřejmě nezáleží na tom, co operátory X_0 a X_1 ve skutečnosti představují. Ukazuje se, že volba $X_0 = \partial_x$ a $X_1 = f'(x)$ dokáže prozkoumat strukturu $c(\dots)$ -ček do překvapivě hloubky, umožňující nám exaktní znalost koeficientu $c(0\dots 0)$ pro všechny faktory X_n . To plyne z faktu, že Zassenhausova identita se v případě těchto operátorů dá vyřešit explicitně:

$$e^{\partial_x + f'(x)} = e^{-f(x)} e^{\partial_x} e^{f(x)} = e^{\partial_x} e^{f(x) - f(x-1)} = e^{\partial_x} e^{f'(x)} e^{-\frac{1}{2}f''(x)} e^{\frac{1}{3!}f'''(x)} \dots,$$

kde jsme v prvním kroku využili faktu $\partial_x + f'(x) = e^{-f(x)} \partial_x e^{f(x)}$, ve druhém kroku faktu $e^{-f(x)} e^{\partial_x} = e^{\partial_x} e^{-\partial_x} e^{-f(x)} e^{\partial_x} = e^{\partial_x} e^{-f(x-1)}$ a ve třetím kroku jsme použili Taylorův rozvoj. Jelikož platí $\partial_x^n f(x) = \mathcal{L}_{\partial_x}^{n-1}(f'(x))$, docházíme k závěru, že

$$\boxed{c(\underbrace{0\dots 0}_n) = (-1)^{n+1}.} \quad (6.20)$$

Jak již bylo řečeno, tento fakt není závislý na volbě operátorů X_0 a X_1 .

6.2.31 Volbou $X_0 = f'(x)$ a $X_1 = \partial_x$ ukažte, že

$$\boxed{c(\underbrace{1\dots 1}_n) = (-1)^{n+1}(n+1).} \quad (6.21)$$

$$\left[\begin{array}{l} e^{\partial_x + f'(x)} = e^{-f(x)} e^{\partial_x} e^{f(x)} = e^{f'(x)} e^{-f(x) - f'(x)} e^{\partial_x} e^{f(x)} = e^{f'} e^{\partial_x} e^{f(x) - f(x-1) - f'(x-1)} \\ f(x) - f(x-1) - f'(x-1) = \sum_{n=2}^{\infty} f^{(n)}(x) \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (1-n) \end{array} \right]$$

6.2.32 Volbou $X_0 = \alpha \partial_x + (1-\beta)f'(x)$ a $X_1 = (1-\alpha)\partial_x + \beta f'(x)$ ukažte, že součet všech koeficientů $c(n-k, k)$, tedy $c(\dots)$ -ček, která obsahují $n-k$ operátorů 0-tého typu a k operátorů 1-ního typu, je

$$\boxed{\sum_c c(n-k, k) = (-1)^{n+1} \binom{n+1}{k}.} \quad (6.22)$$

$$\left[\begin{array}{l} e^{\partial_x + f'(x)} = e^{\alpha \partial_x + (1-\beta)f'(x)} e^{(1-\alpha)\partial_x + \beta f'(x)} e^{(\alpha+\beta-1)F(x; \alpha)} \\ F(x; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} (f(x+\alpha-1) - f(x)) + \frac{1}{\alpha} (f(x+\alpha-1) - f(x-1)) \\ F(x; \alpha) = \sum_{n=2}^{\infty} f^{(n)}(x) \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{k-1} (1-\alpha)^{n-k-1} \end{array} \right]$$

Zassenhausovu identitu lze řešit i ve tvaru

$$e^{A+tB} = e^A e^{tX_1} e^{\frac{t^2}{2!}X_2} e^{\frac{t^3}{3!}X_3} \dots$$

Jinými slovy nyní uvažujeme neznámé faktory X_n co by homogenní funkce řádu n pouze v B . Všimněme si, že s takto zvolenou funkcí závislostí na parametru t již neexistuje neurčitost při určení prvního výrazu na pravé straně, jež je zřejmě roven $X_0 = A$.

6.2.33 Postupným derivováním podle t odvoďte, jak vypadají faktory X_1, X_2, X_3 a X_4 . Výsledek zapište pomocí operátorů

$$D_t = \frac{1 - e^{\mathcal{L}_{A+tB}}}{\mathcal{L}_{A+tB}}(B), \quad D \equiv D_t|_{t=0}, \quad D' \equiv \partial_t D_t|_{t=0}, \quad D'' \equiv \partial_t^2 D_t|_{t=0}, \dots \quad (6.23)$$

$$\left[\begin{array}{l} X_1 = D \\ X_2 = D' \\ X_3 = D'' + [D', D] \\ X_4 = D''' + [D'', D] + [[D', D], D] \end{array} \right]$$

Naneštěstí u Zassenhausovy identity není autorům známá žádná „uzavřená“ formule, jako v případě BCH identity. Jsme tedy odkázáni pouze na „brute force“ techniky. Ba co víc, autoři si nejsou vědomi ani žádné „pěkné“ rekurentní formule, kde příkladem „pěkné“ rekurence by byl vztah dávající do souvislosti X_{n+1} pouze s X_n . V rekurencích, které jsou dostupné, závisí X_{n+1} na všech nižších $X_{\leq n}$. To naznačuje, že Zassenhausova identita je o řád složitější problém, než BCH formule, neboť vykazuje hysterezi. Autoři však mají silné podezření, že nějaká „uzavřená“ formule (ve stejném smyslu jako u BCH identity) existovat musí. Vinu přikládají především nevhodnému značení a fenoménu spontánně narušené symetrie, která Zassenhausovu identitu zřetelně odděluje od BCH identity. Řešení tohoto rébusu je přenecháno zvědavému čtenáři jako ultimátní cvičení.

7 Řešení

1.1.6: Příklad odolává hrubé síle. Naštěstí se jedná o typ příkladu, který se snadněji řeší tím, že se zobecní.

Nechť $P_k(n, r)$ označuje počet různých uspořádaných r -tic, které lze vytvořit z množiny o n prvcích a které obsahují právě k druhů elementů z této množiny.

Příklad: $(1,1,1,2,2,3)$ představuje uspořádanou 6-tici (nad nějakou množinou), která obsahuje 3 druhy elementů (jmenovitě elementy 1,2,3).

Řešení příkladu (1.1.6) pak evidentně představuje $P_n(n, r)$.

Počet r -tic, ve kterých se alespoň jednou objevují všechny druhy elementů z množiny nad, kterou je r -tice tvořena, $P_n(n, r)$ má jednoduchý vztah s r -ticemi, ve kterých nějaké prvky chybí. Jmenovitě:

$$P_n(n, r) = n^r - \sum_{k=1}^{n-1} P_k(n, r). \quad (7.1)$$

Explicitně řečeno tento vztah představuje počet všech r -tic bez těch, ve kterých se používá postupně jeden, dva až $n - 1$ druhů elementu.

Podobný vztah pro $P_{n-1}(n, r)$ dostaneme jednoduchou úvahou. Uvědomíme si, že počet r -tic, ve kterých chybí jeden druh elementu, souvysí s těmi r -ticemi, ve kterých chybí více elementů stejným způsobem jako v předchozím vztahu, pokud si jeden z elementů zakážeme používat. Tedy:

$$P_{n-1}(n, r) = n \left[(n-1)^r - \sum_{k=1}^{n-2} P_k(n-1, r) \right]. \quad (7.2)$$

Tento vztah je formálně stejný jako vztah předchozí s tím rozdílem, že se objevil nový člen n . Ten souvysí s počtem možností, kterým si můžeme zakázat jaký element nebudeme používat. Elementů v tomto případě je n a tedy i možností.

Přímým zobecněním dostaneme:

$$P_{n-\ell}(n, r) = \binom{n}{\ell} \left[(n-\ell)^r - \sum_{k=1}^{n-\ell-1} P_k(n-\ell, r) \right], \quad (7.3)$$

kde je nutno přirozeně dodefinovat, že $P_0(n, r) = 0$. Tento vztah je již plně do sebe uzavřen a je možné jej vypočítat. Náš zájem je o případ kdy $\ell = 0$. Vypsáním několika

prvních případů dostaneme:

$$\begin{aligned}P_1(1, r) &= 1, \\P_2(2, r) &= 2^r - 2, \\P_3(3, r) &= 3^r - 3 \times 2^r + 3, \\P_4(4, r) &= 4^r - 4 \times 3^r + 6 \times 2^r - 4, \\P_5(5, r) &= 5^r - 5 \times 4^r + 10 \times 3^r - 10 \times 2^r + 5,\end{aligned}$$

což lze okamžitě zobecnit na

$$P_n(n, r) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r. \quad (7.4)$$