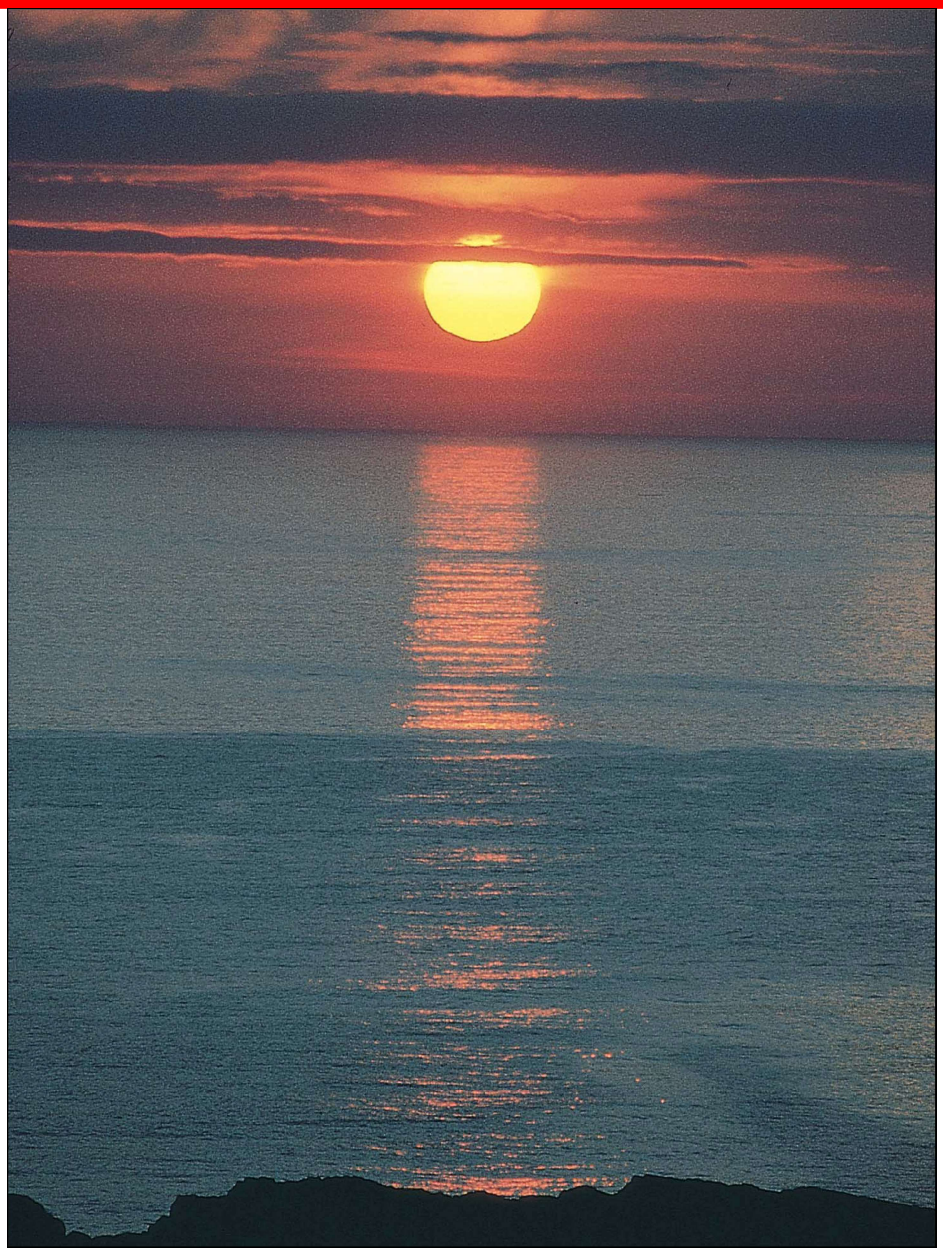
1
Měření



Ležíte na pláži u moře. Hladina je úplně klidná a vy pozorujete západ Slunce. Můžete ho dokonce pozorovat dvakrát: poprvé vleže a podruhé, když vstanete. Možná vás překvapí, že z doby, která uplyne mezi těmito dvěma západy, lze odhadnout poloměr Země. Opravdu je možné změřit Zemi tak prostým pozorováním?

1.1 MĚŘENÍ

Základem fyziky je měření. Objevovat fyziku znamená také poznávat možnosti měření veličin, které jsou s ní spjaty. Nazýváme je **fyzikálními veličinami**. Patří k nim například délka, čas, hmotnost, teplota, tlak nebo elektrický odpor.

Abychom mohli fyzikální veličinu popsat, zavedeme nejprve její **jednotku**, tj. takovou míru této veličiny, které přisoudíme číselnou hodnotu přesně 1,0. Poté vytvoříme **standard**, s nímž budeme všechny ostatní hodnoty dané fyzikální veličiny porovnávat. Tak například jednotkou délky je metr. Jeho standard je definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za přesně definovaný zlomek sekundy. (K definici metru se ještě vrátíme.) Jednotku fyzikální veličiny i její standard můžeme definovat naprosto libovolným způsobem. Důležité je jen to, aby naše definice byla natolik rozumná a praktická, aby mohla být v odborných kruzích všeobecně přijata.

Jakmile jsme definovali standard, řekněme pro délku, musíme ještě vypracovat metody, jak jej používat pro určování různých délek, ať již jde o poloměr atomu vodíku, vzdálenost koleček skateboardu nebo mezihvězdnou vzdálenost. Můžeme například používat pravítka, která přibližně nahrazují standard délky. Často však nelze přímo porovnat měřenou veličinu se standardem. Pravítkem nezměříme ani poloměr atomu, ani mezihvězdnou vzdálenost.

Fyzikálních veličin je takové množství, že není jednoduché je nějakým způsobem uspořádat. Naštěstí však nejsou všechny navzájem nezávislé. Příkladem může být rychlost, kterou lze vyjádřit jako podíl délky a času. Lze tedy vybrat, po mezinárodní dohodě, celkem malý počet fyzikálních veličin, pro něž definujeme jejich vlastní standardy. Délka i čas k nim patří. Všechny ostatní veličiny lze pak vyjádřit pomocí těchto základních veličin a jejich standardů. Tak například rychlost je definována pomocí dvou základních veličin — délky a času — a jim odpovídajících jednotek a standardů.

Standardy základních veličin musí být dostupné a při opakovaném měření neproměnné. Kdybychom třeba definovali jako standard délky starý český sáh, tedy vzdálenost mezi prsty rozpažených rukou (cca 190 cm), získali bychom bezpochyby standard snadno dostupný, avšak pro každého člověka jiný. Věda a technika však vyžadují přesnost, a proto je neproměnnost standardu mnohem důležitější než jeho snadná dosažitelnost. Je tedy třeba mít k dispozici dostatečný počet jeho přesných kopií i za cenu náročnosti jejich zhotovení.

V klasické fyzice (včetně teorie relativity) mlčky předpokládáme, že měření můžeme provádět tak, abychom při něm měřenou hodnotu neovlivnili. (Nebo — realističtěji — tak, že vliv měření je zanedbatelně malý.) Tak např. při měření průměru šroubu mikrometrem stiskneme šroub čelistmi měřidla přesně definovanou silou. Tím jej nepatrně stlačíme a naměříme údaj menší. Tento rozdíl je pro šroub jistě zanedbatelný. Kdybychom však měřili gumový špalík, už by byl vliv patrný. Lze však jistě najít jiný, vhodnější způsob měření, který průměr špalku znatelně neovlivní.

V kvantové fyzice je problém měření mnohem složitější.

1.2 MEZINÁRODNÍ SOUSTAVA JEDNOTEK

V roce 1971 bylo na 14. generální konferenci pro váhy a míry vybráno sedm **základních veličin** a odpovídajících základních jednotek, které se staly základem **Mezinárodní soustavy jednotek** označované zkratkou SI (z francouzského Système International des Unités), nazývané též metrická soustava. V tab. 1.1 jsou uvedeny jednotky tří základních veličin — délky, hmotnosti a času, které používáme už v úvodních kapitolách této knihy. Byly vybrány tak, aby byly blízké „lidským měřítkům“.

Tabulka 1.1 **Některé základní jednotky SI**

VELIČINA	NÁZEV JEDNOTKY	SYMBOL
délka	metr	m
čas	sekunda	s
hmotnost	kilogram	kg

Všechny tzv. **odvozené jednotky** soustavy SI jsou definovány pomocí jednotek základních. Například jednotku výkonu **watt** (značka W) lze vyjádřit základními jednotkami hmotnosti, délky a času. V kap. 7 ukážeme, že

$$1\ \text{watt} = 1\ \text{W} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}. \tag{1.1}$$

Abychom jednoduše a stručně zapsali velmi velké nebo velmi malé hodnoty veličin, používáme tzv. exponenciální tvar zápisu čísel pomocí mocnin čísla 10. Takto vyjádříme například:

$$3\,560\,000\,000\ \text{m} = 3{,}56\cdot10^{9}\ \text{m} \tag{1.2}$$

nebo

$$0{,}000\,000\,492\ \text{s} = 4{,}92\cdot10^{-7}\ \text{s}. \tag{1.3}$$

S rozvojem počítačů se čísla v exponenciálním tvaru začala zapisovat ještě jednodušším způsobem, například 3,56 E9 m nebo 4,92 E−7 s. Písmeno E označuje, že následující číslo má význam mocnitele (exponentu) základu 10. Některé kalkulačky zápis ještě více zjednodušují a písmeno E nahrazují mezerou.

Jinou možností vyjádření velmi velkých a velmi malých hodnot je použití vhodných předpon v názvech jednotek. Jejich seznam uvádí tab. 1.2. Každá předpona zastupuje příslušnou mocninu čísla 10. Předpona u kterékoli z jednotek SI signalizuje, že hodnotu veličiny je třeba vynásobit odpovídajícím koeficientem. Zadanou hodnotu elektrického výkonu nebo délku časového intervalu můžeme zapsat například takto:

$$1{,}27{\cdot}10^{9}\ \text{wattů} = 1{,}27\ \text{gigawattů} = 1{,}27\,\text{GW}, \quad (1.4)$$

$$2{,}35{\cdot}10^{-9}\,\text{s} = 2{,}35\ \text{nanosekundy} = 2{,}35\,\text{ns}. \quad (1.5)$$

Některé jednotky s předponami (např. decilitr, centimetr, kilogram nebo megabajt) se používají zcela běžně.

1.3 PŘEVODY JEDNOTEK

Při výpočtech číselných hodnot fyzikálních veličin často potřebujeme měnit jednotky, v nichž veličinu vyjadřujeme. Tento přepočet nazýváme **převod jednotek**. Převod můžeme snadno provést například tak, že vynásobíme původní zadanou či změřenou hodnotu **převodním koeficientem**. Tento koeficient je ve skutečnosti roven jedné, je však vyjádřen ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel udávají tutéž hodnotu v různých jednotkách. Uveďme příklad: Údaje 1 min a 60 s představují stejné časové intervaly. Můžeme proto psát

$$\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} = 1.$$

Tento zápis *neznamená*, že by snad platilo $\frac{1}{60} = 1$ nebo $60 = 1$. *Číselný údaj* a odpovídající *jednotka* tvoří ve výrazu pro převodní koeficient neoddělitelnou dvojici.

Vzhledem k tomu, že vynásobení libovolné veličiny jedničkou nezmění její hodnotu, můžeme takové převody provádět, kdykoli to považujeme za užitečné. Zbavíme se tak jednotek, které nechceme používat: jednoduše se vykrátí. Chceme-li například převést 2 min na sekundy, píšeme

$$2\,\text{min} = (2\,\text{min})(1) = (2\,\cancel{\text{min}})\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\cancel{\text{min}}}\right) = 120\,\text{s}. \quad (1.6)$$

Častou chybou při převodu jednotek je záměna čitatele a jmenovatele v převodním koeficientu. V tom případě se nežádoucí jednotky nevykrátí, a tak chybu snadno objevíme. Pro počítání s jednotkami platí stejná algebraická pravidla jako pro proměnné a čísla.

V dod. D a na vnitřní straně zadní obálky této knihy jsou uvedeny koeficienty pro převody mezi soustavou SI a jinými soustavami jednotek. Jednou z mála zemí, které nestanovily zákonem povinnost používat Mezinárodní soustavu jednotek, jsou i Spojené státy americké.

PŘÍKLAD 1.1

Průzkumná ponorka ALVIN se potápí rychlostí 36,5 sáhů za minutu.

(a) Vyjádřete tuto rychlost v metrech za sekundu. Jeden sáh je roven přesně 6 stopám (ft).

ŘEŠENÍ: Jednotky převádíme následujícím způsobem:

$$36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}} = \left(36{,}5\,\frac{\cancel{\text{sáhů}}}{\cancel{\text{min}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\,\text{s}}\right)\cdot \left(\frac{6\,\cancel{\text{ft}}}{1\,\cancel{\text{sáh}}}\right)\left(\frac{1\,\text{m}}{3{,}28\,\cancel{\text{ft}}}\right) = 1{,}11\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je tato rychlost v mílích (mi) za hodinu?

Tabulka 1.2 **Předpony jednotek SI**

NÁSOBEK	PŘEDPONA	ZNAČKA	NÁSOBEK	PŘEDPONA	ZNAČKA
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yokto-	y
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	**10^{-12}**	**piko-**	**p**
10^{9}	**giga-**	**G**	**10^{-9}**	**nano-**	**n**
10^{6}	**mega-**	**M**	**10^{-6}**	**mikro-**	**μ**
10^{3}	**kilo-**	**k**	**10^{-3}**	**mili-**	**m**
10^{2}	hekto-	h	**10^{-2}**	**centi-**	**c**
10^{1}	deka-	da	10^{-1}	deci-	d

Nejužívanější předpony jsou vytištěny tučně.

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě dostaneme

$$36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}} = \left(36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}}\right)\left(\frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{6\,\text{ft}}{1\,\text{sáh}}\right)\left(\frac{1\,\text{mi}}{5\,280\,\text{ft}}\right) =$$
$$= 2{,}49\,\text{mi/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Vyjádřete tuto rychlost ve světelných rocích za rok.

ŘEŠENÍ: Jeden světelný rok (ly z angl. light year) je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden rok. Je roven $9{,}46{\cdot}10^{12}$ km.

Užitím výsledku (a) dostaneme

$$1{,}11\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1} = \left(1{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\,\text{ly}}{9{,}46{\cdot}10^{12}\,\text{km}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1\,\text{km}}{1\,000\,\text{m}}\right)\left(\frac{3{,}16{\cdot}10^{7}\,\text{s}}{1\,\text{y}}\right) =$$
$$= 3{,}71{\cdot}10^{-9}\,\text{ly/y}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 1.2

Kolik čtverečných metrů má plocha o obsahu $6{,}0\,\text{km}^2$?

ŘEŠENÍ: Obsahuje-li údaj mocninu některé jednotky, je vhodné ji nejprve rozepsat jako součin a pak převést každý činitel zvlášť:

$$6{,}0\,\text{km}^2 = 6{,}0\,(\text{km})(\text{km}) =$$
$$= 6{,}0\,(\text{km})(\text{km})\left(\frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right) =$$
$$= 6{,}0{\cdot}10^{6}\,\text{m}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 1.1: *Platná místa a desetinná místa*

Při řešení př. 1.1a na kalkulačce se na jejím displeji pravděpodobně zobrazilo číslo 1,112 804 878. Přesnost, se kterou je toto číslo vyjádřeno, však nemá rozumný význam. Proto jsme je rovnou zaokrouhlili na hodnotu 1,11, která odpovídá přesnosti výchozích údajů. Zadaná rychlost 36,5 sáhů za minutu je určena třemi číslicemi. Říkáme, že je dána na tři **platná místa**. Čtvrtou číslici řádu setin již neznáme, a proto při převodu jednotek nemá smysl uvádět více číslic než tři.*

Žádný konečný výsledek by obecně neměl být zapsán číslem s větším počtem platných míst, než měly výchozí údaje.

V průběhu výpočtu vedeného v několika postupných krocích pracujeme s větším počtem platných míst, než měly výchozí údaje. Jakmile však dospějeme ke konečnému výsledku, zaokrouhlíme jej podle výchozích údajů. (Ve výsledcích řešených příkladů v této knize používáme zpravidla rovnítko „=“ i tehdy, byl-li mezivýsledek zaokrouhlen, a symbol „$\doteq$“ až u konečného zaokrouhlení.)

Počet platných míst v údajích 3,15 nebo $3{,}15{\cdot}10^3$ je zřejmý. Jak je tomu však u čísla 3 000? Je zadáno pouze na jedno nebo na čtyři platná místa (tedy jako $3{\cdot}10^3$ nebo $3{,}000\cdot10^3$)? V této knize budeme považovat všechny nuly v číslech typu 3 000 za platná místa. Při studiu literatury je však třeba dát pozor, zda autoři neužívají jinou dohodu.

Nezaměňujme *platná místa* s místy *desetinnými*. Uvažujme například údaje 35,6 mm, 3,56 m a 0,003 56 km. Všechny jsou zadány na tři platná místa, i když první z nich má jedno, druhý dvě a třetí dokonce pět desetinných míst.

1.4 DÉLKA

V roce 1792 byl v mladé Francouzské republice zaveden nový systém měr a vah. Jednotkou délky byl stanoven metr, definovaný jako jedna desetimiliontina vzdálenosti od severního pólu k rovníku. Z praktických důvodů se později od vazby na tento „zemský“ standard upustilo a metr byl definován jako vzdálenost mezi dvěma tenkými vrypy na tyči vyrobené ze slitiny platiny a iridia, tzv. **standardním metru**. Tento standard je dodnes uložen v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže. Jeho přesné kopie, nazývané **druhotnými standardy**, byly rozeslány do metrologických laboratoří po celém světě a jsou používány při výrobě dalších, mnohem snadněji dostupných, standardů. Každé zařízení pro měření délky poskytuje údaje odvozené od standardního metru.

V roce 1959 byl úředně definován yard jako

$$1\,\text{yard} = 0{,}914\,4\,\text{m (přesně)}. \qquad (1.7)$$

Tato definice je ekvivalentní se vztahem pro palec (inch):

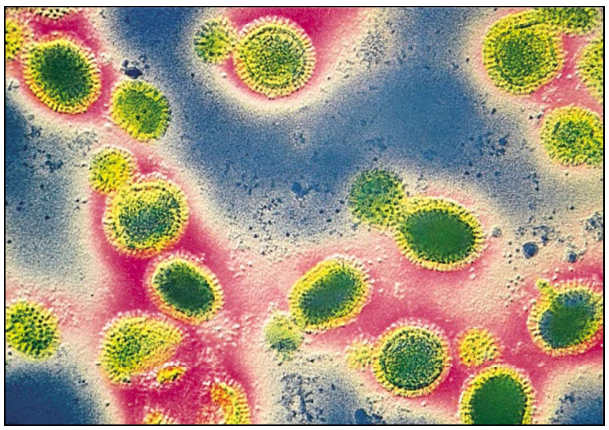
$$1\,\text{in} = 2{,}54\,\text{cm (přesně)}. \qquad (1.8)$$

V tab. 1.3 jsou uvedeny zajímavé údaje o délkových rozměrech některých objektů, včetně velikosti viru, jehož mnohonásobně zvětšený obraz získaný v elektronovém mikroskopu vidíme na obr. 1.1.

* Tento způsob počítání s čísly zadanými s omezenou přesností je jen velmi přibližný. Tak například každé z čísel 11 a 99 je zadáno na dvě platná místa. Nejistota obou údajů je řádu desetin. Jedna desetina (0,1) však představuje zhruba 1 % hodnoty 11 a pouze 0,1 % hodnoty 99. Veličina s hodnotou 99 je zadána přesněji než veličina, jejíž hodnota je 11. V odborné a vědecké práci zásadně opatřujeme hodnotu každé naměřené nebo vypočtené veličiny její *standardní odchylkou* neboli *chybou*, která vyjadřuje kvantitativně přesnost této veličiny.

Tabulka 1.3 **Řádové velikosti a rozměry**

DÉLKA	V METRECH
k nejvzdálenějšímu kvazaru (1996)	$2 \cdot 10^{26}$
k mlhovině v Andromedě	$2 \cdot 10^{22}$
k nejbližší hvězdě (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
k nejvzdálenější planetě (Pluto)	$6 \cdot 10^{12}$
poloměr Země	$6 \cdot 10^{6}$
výška Mount Everestu	$9 \cdot 10^{3}$
výška člověka	$2 \cdot 10^{0}$
tloušťka této stránky	$1 \cdot 10^{-4}$
vlnová délka světla	$5 \cdot 10^{-7}$
typická velikost viru	$1 \cdot 10^{-8}$
poloměr atomu vodíku	$5 \cdot 10^{-11}$
poloměr protonu	$1 \cdot 10^{-15}$



Obr. 1.1 Obarvený elektronový obraz chřipkového viru. Lipoproteiny hostitele (obarveny žlutě) obklopují jádro viru (zelené). Celkový průměr útvaru je menší než 50 nm.

Později vyžadovala moderní věda a technika ještě přesnější standard, než je vzdálenost mezi dvěma jemnými vrypy na kovové tyči. Proto byl v roce 1960 přijat nový standard metru, který vycházel z vlnové délky světla. Metr byl definován jako 1 650 763,73 násobek vlnové délky oranžově červeného světla, které při výboji emitují atomy kryptonu 86.* Tento zvláštní počet vlnových délek byl vybrán proto, aby nový standard byl co nejbližší dosavadnímu metru.

Atomy kryptonu 86, použité pro definici standardu délky, jsou dostupné kdekoli, jsou identické a všechny vyzařují světlo přesně stejné vlnové délky. V každém z nich je tak standard uschován lépe a bezpečněji než v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry (P. Morrison, MIT). Požadavky na přesnost však stále rostly, až dosáhly takového stupně, že jim už ani kryptonové atomy nedokázaly vyhovět. V roce 1983 byl v historii vývoje standardu délky zaznamenán výrazný pokrok. Metr byl nově definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu v přesně stanoveném časovém intervalu. Sedmnáctá generální konference pro váhy a míry přijala tuto definici metru:

Jeden metr je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sekundy.

Tato konkrétní volba délky časového intervalu v definici metru určuje přesně hodnotu rychlosti světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Rychlost světla už dokážeme měřit velmi přesně a také měření časových intervalů patří v současnosti k nejpřesnějším měřením vůbec. Jejich využití pro novou definici metru je proto velmi dobře odůvodněné.

PŘÍKLAD 1.3

Sprinterská trať mívala vedle délky 100 m, běžné v současném atletickém sportu, také délku 110 yardů.

(a) Která trať je delší?

ŘEŠENÍ: Z (1.7) snadno zjistíme, že vzdálenost 110 yardů je 100,58 m. Sprint na 110 yardů je tedy delší.

(b) O kolik stop (ft)?

ŘEŠENÍ: Označme ΔL rozdíl délek běžeckých tratí. (Symbol Δ — velké řecké „delta“ — značí rozdíl veličin.) Pak

$$\begin{aligned} \Delta L &= 110\ \text{yardů} - 100\ \text{m} = \\ &= 100{,}584\ \text{m} - 100\ \text{m} = 0{,}584\ \text{m} = \\ &= (0{,}584\ \text{m}) \left(\frac{3{,}28\ \text{ft}}{1\ \text{m}} \right) = \\ &= 1{,}916\ \text{ft} \doteq 1{,}9\ \text{ft}. \end{aligned}$$

(Odpověď)

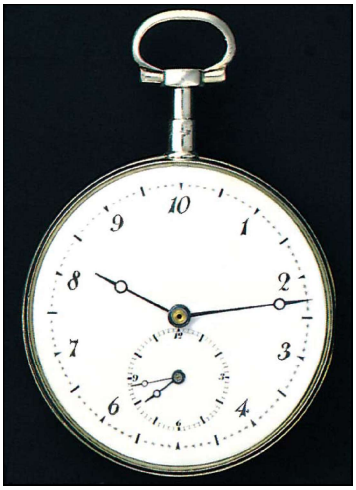
1.5 ČAS

Pojem čas můžeme chápat dvěma různými způsoby. V běžném životě a často i ve vědě potřebujeme znát denní čas (obr. 1.2), abychom mohli popsat sled událostí. Ve vědecké práci je zase většinou důležité, jak dlouho daná událost trvala. Každý standard času tedy musí umožňovat odpověď na dvě otázky: „*Kdy* se to stalo?“ a „*Jak dlouho* to trvalo?“ tab. 1.4 uvádí přehled některých časových intervalů.

Standardem času může být jakýkoli jev, který se pravidelně opakuje. Po staletí sloužilo tomuto účelu otáčení Země, které určovalo délku dne. I křemenné hodiny, ve kterých osciluje křemenný krystal v elektronickém obvodu, lze

* Číslo 86 v označení atomu (často užívaným označením je i ^{86}Kr nebo $^{86}_{36}$Kr) identifikuje jeden z pěti stabilních izotopů (stabilních nuklidů) kryptonu a nazývá se *hmotnostním* nebo *nukleonovým* číslem.

pomocí astronomických pozorování cejchovat vzhledem k rotaci Země a používat pak v laboratořích pro měření časových intervalů. Tato kalibrace však nemůže být provedena s přesností odpovídající požadavkům současné vědy a techniky.



Obr. 1.2 V návrhu metrické soustavy z roku 1792 byla hodina definována tak, aby den měl 10 hodin. Tato myšlenka se neujala. Tvůrce těchto desetihodinových hodinek byl prozíravý a opatřil je ještě malým ciferníkem ukazujícím tradiční dvanáctihodinový čas. Ukazují obojí hodinky stejný čas?

Tabulka 1.4 **Řádové doby vybraných dějů**

ČASOVÝ INTERVAL	SEKUNDY
doba života protonu (předpověď)	$1{\cdot}10^{39}$
stáří Vesmíru	$5{\cdot}10^{17}$
stáří Cheopsovy pyramidy	$1{\cdot}10^{11}$
průměrný věk člověka	$2{\cdot}10^{9}$
délka roku	$3{\cdot}10^{7}$
délka dne	$9{\cdot}10^{4}$
tep lidského srdce	$8{\cdot}10^{-1}$
doba života mionu	$2{\cdot}10^{-6}$
nejkratší světelný pulz (r. 1989)	$6{\cdot}10^{-15}$
doba života nejnestabilnějších částic	$1{\cdot}10^{-23}$
Planckův čas*	$1{\cdot}10^{-43}$

* nejkratší doba po Velkém třesku, po které již platí zákony fyziky v takové podobě, v jaké je známe nyní.

Snaha o získání lepšího standardu času vedla ke konstrukci atomových hodin. Na obr. 1.3 vidíme jeden typ takových hodin, umístěný v Národním ústavu pro standardy a technologii (NIST) v USA. Využívá charakteristické frekvence izotopu cesia 133 a určuje jednotný čas UTC. Jeho časové signály je možné získat z krátkovlnného rozhlasového vysílání (stanice WWV a WWVH) nebo telefonicky (v ČR na lince 14 122). (Pokud bychom chtěli seřídit nějaké místní hodiny s mimořádnou přesností, museli bychom uvážit dobu šíření signálu z vysílací stanice k nám.)

Na obr. 1.4 je záznam kolísání délky dne v průběhu čtyřletého období získaný srovnáním s cesiovými hodinami. Zjištěné rozdíly, zřejmě související s ročními obdobími, přisuzujeme nepravidelnosti rotace Země a věříme, že chod cesiových hodin je pravidelnější. Kolísání je pravděpodobně způsobeno slapovými jevy (vliv Měsíce) a rozsáhlým prouděním vzduchu v atmosféře.

Třináctá generální konference pro váhy a míry (1967) přijala standard **sekundy**, odvozený od frekvence kmitů atomů cesiových hodin:

> Jedna sekunda je doba trvání 9 192 631 770 period světelného záření, emitovaného při přechodu atomu cesia 133 mezi dvěma konkrétními hladinami jeho velmi jemné struktury.

Přesnost cesiových hodin je taková, že by trvalo 6 000 let, než by se dvoje hodiny rozešly o více než 1 s. I tato přesnost je však malá ve srovnání s hodinami, které se vyvíjejí v současnosti. Mají dosáhnout přesnosti $1 : 10^{18}$, která odpovídá odchylce pouhé 1 s za 10^{18} s (asi $3{\cdot}10^{10}$ let).

PŘÍKLAD 1.4*

Představme si, že pozorujeme západ Slunce vleže na břehu klidného moře. Spustíme stopky právě v okamžiku, kdy Slunce zcela zmizí. Poté vstaneme a zvýšíme tak polohu svých očí o 1,70 m. Stopky zastavíme v okamžiku, kdy nám Slunce zmizí podruhé. Jaký je poloměr Země, ukazují-li stopky 11,1 s?

ŘEŠENÍ: Z obr. 1.5 vidíme, že při pozorování vleže se zorný paprsek směřující k hornímu okraji slunečního kotouče dotýká povrchu Země v místě, ve kterém se právě nacházíme, tj. v bodě A. Při druhém pozorování západu Slunce je zorný paprsek tečnou v bodě B. Označme symbolem d vzdálenost mezi bodem B a polohou očí stojícího pozorovatele. Vzdálenosti bodů A a B od středu Země jsou rovny poloměru Země r. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2,$$

tj.

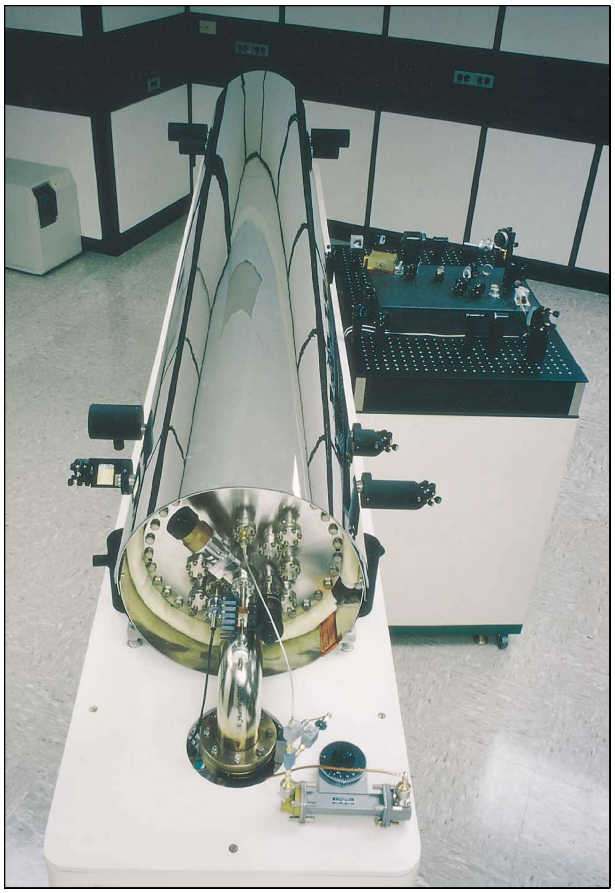
$$d^2 = 2rh + h^2. \qquad (1.9)$$

Výška h je ovšem zanedbatelná vzhledem k poloměru Země r. Proto je člen h^2 mnohem menší než člen $2rh$ a rov. (1.9) lze přepsat ve tvaru

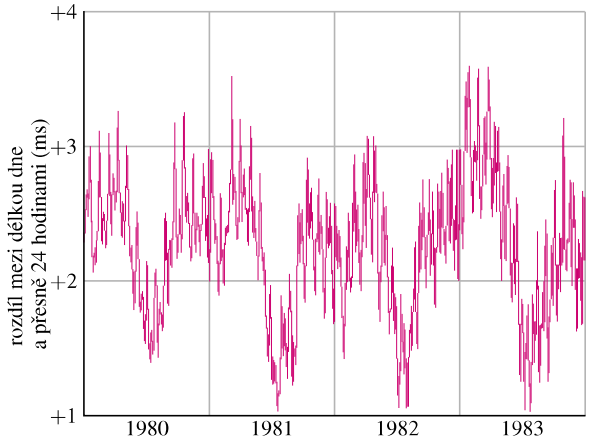
$$d^2 = 2rh. \qquad (1.10)$$

Symbolem θ jsme označili úhel mezi tečnami v bodech A a B (obr. 1.5). O stejný úhel se za změřenou dobu 11,1 s

* Převzato z článku Dennise Rawlinse „Doubling Your Sunsets, or How Anyone Can Measure the Earth's size with a Wristwatch and Meter Stick", *American Journal of Physics*, Feb. 1979, Vol. 47, pp. 126–128. Metoda dává nejlepší výsledky na rovníku.



Obr. 1.3 Cesiový frekvenční normál v Národním ústavu pro standardy a technologii v Boulderu (Colorado). Je standardem jednotky času pro Spojené státy americké. Časové signály Námořní observatoře lze získat na adrese http://tycho.usno.navy.mil /time.html; telefonicky v USA na lince (001)-303-499 7111, v ČR na lince 14 122.



Obr. 1.4 Kolísání délky dne v průběhu čtyřletého období. Všimněte si, že rozsah svislé stupnice je pouhé 3 ms (= 0,003 s).

otočí Slunce na své zdánlivé dráze kolem Země. Za celý den, tj. přibližně za 24 hodin, se Slunce kolem Země otočí o 360°. Pak můžeme psát

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24\ \mathrm{h}}.$$

Dosadíme-li $t = 11{,}1$ s, dostaneme

$$\theta = \frac{(360^\circ)(11{,}1\ \mathrm{s})}{(24\ \mathrm{h})(60\ \mathrm{min\cdot h^{-1}})(60\ \mathrm{s\cdot min^{-1}})} = 0{,}046\,25^\circ.$$

Z obr. 1.5 vidíme, že $d = r\,\mathrm{tg}\,\theta$. Dosazením do rov. (1.10) dostaneme

$$r^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta = 2rh,$$

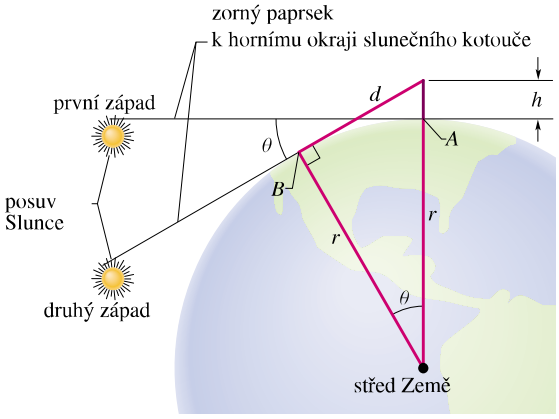
tj.

$$r = \frac{2h}{\mathrm{tg}^2\,\theta}.$$

Pro číselné hodnoty $\theta = 0{,}046\,25^\circ$ a $h = 1{,}70$ m máme konečně

$$r = \frac{2(1{,}70\ \mathrm{m})}{\mathrm{tg}^2\,0{,}046\,25^\circ} = 5{,}22\cdot 10^6\ \mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek se liší od známé hodnoty poloměru Země ($6{,}378\cdot 10^6$ m) o 20 %.

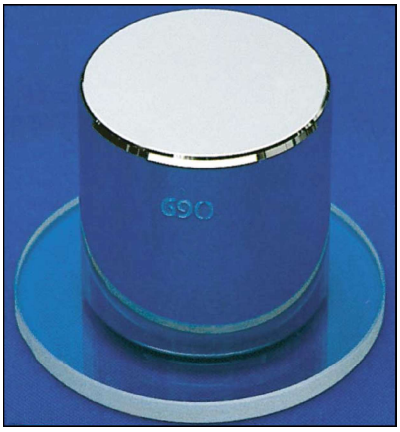


Obr. 1.5 Příklad 1.4. Zvedne-li se pozorovatel z polohy vleže (bod A) a zvýší tak polohu svých očí do výšky h, otočí se zorný paprsek vycházející z horního okraje slunečního kotouče o úhel θ. (Velikosti výšky h i úhlu θ jsou v obrázku mnohem větší, než odpovídá skutečnosti.)

1.6 HMOTNOST

Standardní kilogram

Standardní jednotkou hmotnosti v soustavě SI je **kilogram**. Původně byl definován jako hmotnost jednoho litru (tj. 1 dm^3) vody. Nyní je podle mezinárodní úmluvy určen hmotností válce vyrobeného ze slitiny platiny a iridia (obr. 1.6), který je uložen v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže. Přesné kopie tohoto etalonu byly rozeslány do laboratoří pro standardy v ostatních zemích. Hmotnost jiných těles pak můžeme měřit porovnáním s hmotností kterékoli z těchto kopií. V tab. 1.5 jsou uvedeny hmotnosti některých objektů.



Obr. 1.6 Mezinárodní hmotnostní standard 1 kg má tvar válce, jehož výška i průměr jsou 39 mm.

Bývalé Československo vlastnilo dva standardy hmotnosti ze slitiny platiny a iridia, které byly porovnávány s etalony v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry každých 15 až 20 let. Po rozdělení státu zůstaly oba národní etalony na Slovensku. Česká republika získala vlastní kopii standardního kilogramu na jaře roku 1999. Při posledním vážení v únoru 1999 byla naměřena hmotnost českého národního kilogramu 1 kg + 0,165 mg. Procedury srovnávání národních kilogramů budou jistě jednou nahrazeny spolehlivějším a přesnějším postupem, vycházejícím z hmotnosti atomu jakožto základního standardu.

Jiný standard hmotnosti

Porovnávat hmotnosti atomů mezi sebou dokážeme mnohem přesněji, než je srovnávat přímo se standardním kilogramem. Proto užíváme ještě dalšího standardu hmotnosti.

Tabulka 1.5 **Řádové hmotnosti vybraných objektů**

OBJEKT	KILOGRAMY
známý vesmír	$1{\cdot}10^{53}$
naše Galaxie	$2{\cdot}10^{41}$
Slunce	$2{\cdot}10^{30}$
Měsíc	$7{\cdot}10^{22}$
asteroid Eros	$5{\cdot}10^{15}$
hora	$1{\cdot}10^{12}$
zaoceánský parník	$7{\cdot}10^{7}$
slon	$5{\cdot}10^{3}$
člověk	$1{\cdot}10^{2}$
zrnko hroznu	$3{\cdot}10^{-3}$
prachová částečka	$7{\cdot}10^{-10}$
molekula penicilinu	$5{\cdot}10^{-17}$
atom uranu	$4{\cdot}10^{-25}$
proton	$2{\cdot}10^{-27}$
elektron	$9{\cdot}10^{-31}$

Je jím atom uhlíku $^{12}_{6}C$, jemuž byla mezinárodní úmluvou přisouzena hmotnost dvanácti tzv. **atomových hmotnostních jednotek** (u). Hmotnost atomové jednotky souvisí s hmotností standardního kilogramu vztahem

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}660\,540\,2{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg}. \qquad (1.11)$$

Poslední dvě desetinná místa jsou zatížena chybou ± 10. Tak lze s přiměřenou přesností porovnávat hmotnosti různých atomů s hmotností atomu uhlíku $^{12}_{6}C$. Zatím nám však chybí spolehlivý způsob, jak dosáhnout stejné přesnosti i při měření běžných hmotností, srovnatelných s hmotností kilogramu.

1.7 MNOŽSTVÍ

Zatímco standardní kilogram je typicky makroskopickou jednotkou, patří atomová hmotnostní jednotka do oblasti mikrosvěta. Při vyjádření makroskopických veličin pomocí mikroskopických jednotek lze použít jednotku **mol**, udávající přesně definovaný počet kusů (například atomů, molekul, apod.). Jeden mol má hodnotu $6{,}022{\cdot}10^{23}$. Původně byl zaveden jako počet atomů v 1 g nejjednoduššího prvku, vodíku. Nyní je definován pomocí izotopu uhlíku $^{12}_{6}C$. I když se ho většinou užívá pro vyjádření látkového množství, může být použitelný i jinak (např. pro počet dvojných vazeb či valenčních elektronů).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Fyzikální měření

Základem fyziky je měření fyzikálních veličin. Některé fyzikální veličiny byly vybrány za **základní** (například délka, čas a hmotnost). Každá z nich byla definována prostřednictvím **standardu** a dané **základní jednotky** (například metr, sekunda, kilogram). Jednotky ostatních fyzikálních veličin nazýváme **odvozené** a definujeme je pomocí jednotek základních.

Soustava SI

V této knize (až na výjimky v některých úlohách) používáme mezinárodní soustavu jednotek (SI). V úvodních kapitolách vystačíme jen se třemi základními veličinami, které jsou uvedeny v tab. 1.1. Mezinárodní dohodou byly pro tyto veličiny stanoveny standardy, které musí být dostupné a neměnné. Pomocí nich se vyjadřují výsledky všech fyzikálních měření základních i odvozených veličin. Zápis velmi velkých nebo velmi malých hodnot lze zjednodušit použitím předpon (viz tab. 1.2) nebo užitím exponenciálního tvaru.

Převod jednotek

Při převodu jednotek postupně násobíme původní hodnotu jednotkovými převodními koeficienty. Výrazy můžeme upravovat pomocí běžných algebraických pravidel.

Délka

Jednotkou délky je metr. Je definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za přesně stanovený časový interval. Jiné délkové jednotky, které se v některých zemích stále používají (například míle, yard, palec), jsou nyní definovány pomocí metru (1 míle = 1 609,344 m).

Čas

Jednotkou času je sekunda. Původně byla odvozena z rotace Země. Současná definice využívá frekvence světla vyzářeného atomy cesia $^{133}_{55}$Cs. Přesný časový signál se z laboratoří pro standardy vysílá rádiem do celého světa.

Hmotnost

Jednotkou hmotnosti je kilogram. Je definován pomocí prototypu, vyrobeného ze slitiny platiny a iridia a uloženého v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry. Pro měření hmotností elementárních částic, atomů a molekul se obvykle používá atomová hmotnostní jednotka u. Základem její definice je hmotnost atomu uhlíku $^{12}_{6}$C.

Množství

Jeden **mol** je roven počtu $6{,}02\cdot10^{23}$ (atomů, molekul, …). Užívá se zejména pro látkové množství.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 1.2 Mezinárodní soustava jednotek

1C. Přečtěte s použitím předpon z tab. 1.2: (a) 10^{-6}klima, (b) 10^{9}nt, (c) 10^{6}fon, (d) 10^{-12}la, (e) 10^{-3}on, (f) 10^{1}dent, (g) 10^{12}sa, (h) 10^{-6}fon, (i) 10^{15}rda, (j) 10^{2}r, (k) 10^{18}minátor.

2C. (a) Některé předpony soustavy SI se staly součástí hovorového jazyka, i když nejsou vždy používány správně. „Půjč mi tři kila“ (myšlen jistý obnos peněz). Kolik je to korun? V jiných případech používáme pro označení množství jen předponu bez uvedení jednotky. O jakou hodnotu které veličiny se jedná v následujících větách? (b) Kup asi kilo. (c) Dvě deci, prosím. (d) Deset deka bude stačit. (e) Pevný disk počítače má kapacitu 650 mega. Je-li pro uložení jednoho slova potřeba průměrně 8 bajtů, kolik slov může být na tomto pevném disku uloženo? (Zpravidla však *mega* v případě megabajtu znamená 1 048 576 (= 2^{20}), nikoli 1 000 000 a *kilobajt* je 1 024 (2^{10}) bajtů.)

ODST. 1.4 Délka

3C. Raketoplán obíhá kolem Země ve výšce 300 km. Vypočtěte jeho výšku v (a) mílích, (b) milimetrech.

4C. Jaká je vaše výška ve stopách?

5C. (a) Kolik mikrometrů má jeden kilometr? (b) Jakou část centimetru představuje 1 μm? (c) Kolik mikrometrů je jeden yard?

6C. Země má přibližně tvar koule s poloměrem 6 378 km. (a) Vypočtěte její obvod v m. (b) Jaký má povrch v m^2? (c) Jaký je její objem v m^3?

7C. Převeďte 20 mil na km jen s použitím následujících převodních vztahů: 1 míle = 5 280 stop, 1 stopa = 12 palců, 1 palec = 2,54 cm, 1 m = 100 cm a 1 km = 1 000 m.

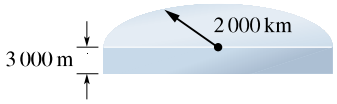
8C. Najděte převodní vztahy mezi (a) čtverečným yardem a čtverečnou stopou, (b) čtverečným palcem a čtverečným centimetrem, (c) čtverečnou mílí a čtverečným kilometrem, (d) krychlovým metrem a krychlovým centimetrem.

9C. Pro určení velikosti pozemků se často používá jednotka plochy zvaná **ar** (zkratka a), který je roven 10^2 m^2, a jednotka **hektar** (zkratka ha), představující 10^2 a. Povrchový uhelný důl odebírá každý rok 75 ha půdy do hloubky 26 m. Jaký objem půdy je každoročně odstraněn? Vyjádřete jej v km^3.

10C. Staročeské látro představovalo podle některých pramenů objem řezaného dřeva srovnaného do tvaru kvádru o délce 8 stop, šířce 4 stopy a výšce rovněž 4 stopy. Kolik láter dřeva je v 1 m^3? Kolik je tisíc láter v SI?

11C. Pokoj je dlouhý 20 stop 2 palce, široký 12 stop 5 palců a vysoký 12 stop 2,5 palce. Jaká je plocha podlahy v (a) čtverečných stopách a (b) čtverečných metrech? Jaký je objem pokoje v (c) krychlových stopách a (d) krychlových metrech?

12C. Antarktida má přibližně půlkruhový tvar o poloměru 2 000 km (obr. 1.7). Je přikryta ledem, jehož průměrná tloušťka je 3 000 m. Kolik krychlových centimetrů ledu je v Antarktidě? (Zakřivení zemského povrchu neuvažujte.)



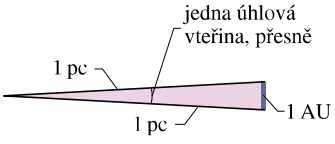
Obr. 1.7 Cvičení 12

13C. Malá kostka cukru má tvar krychle s hranou délky 1 cm. Jaká by musela být délka hrany krychlové krabice, do které bychom chtěli uložit jeden mol kostek cukru?

14C. Meteorologové často vyjadřují množství srážek v milimetrech vodního sloupce. Na město o rozloze 26 km^2 spadlo při silné bouři 50 mm srážek. Vyjádřete objem spadlé vody v litrech.

15C. Výrobce barev udává vydatnost vnějšího laku 11,3 m^2/l. Vyjádřete tuto hodnotu (a) ve čtverečných stopách na galon, (b) v jednotkách SI. (c) Jaký je fyzikální význam převrácené hodnoty tohoto čísla?

16C. Astronomické vzdálenosti jsou v porovnání s pozemskými tak obrovské, že je výhodné pro ně používat jiných délkových jednotek. **Astronomická jednotka** (AU z angl. *Astronomical unit*) je rovna střední vzdálenosti Země od Slunce, tj. $1{,}49 \cdot 10^8$ km. Jeden **parsek** (pc, z angl. *parsec*) je vzdálenost, ze které bychom viděli astronomickou jednotku pod zorným úhlem jedné úhlové vteřiny (obr. 1.8). **Světelný rok** (ly, z angl. *light year*) je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden rok. (a) Vyjádřete vzdálenost Země–Slunce v parsecích a světelných rocích. (b) Vyjádřete 1 pc a 1 ly v kilometrech. I když astronomové dávají přednost jednotce pc, v populární literatuře se častěji používají světelné roky.



Obr. 1.8 Cvičení 16

17C. Při úplném zatmění Slunce je sluneční kotouč téměř přesně zakryt Měsícem. (a) Určete poměr průměrů Slunce a Měsíce, víte-li, že Slunce je od Země asi 400krát vzdálenější než Měsíc. (b) V jakém poměru jsou jejich objemy? (c) Přidržujte před očima korunovou minci tak, aby právě zakryla měsíční kotouč, a změřte zorný úhel, pod kterým ji vidíte. Z výsledku měření a ze znalosti vzdálenosti Země–Měsíc ($3{,}8 \cdot 10^5$ km) odhadněte průměr Měsíce.

18Ú⋆. Standardní kilogram má tvar válce, jehož výška (39 mm) je rovna jeho průměru (obr. 1.6). Ukažte, že válec tohoto tvaru má při daném objemu nejmenší povrch. Tím lze omezit změnu hmotnosti tělesa při jeho otěru nebo znečištění povrchu.

ODST. 1.5 Čas

19C. Vyjádřete rychlost světla $3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$ (a) ve stopách za nanosekundu, (b) v milimetrech za pikosekundu.

20C. Enrico Fermi kdysi poznamenal, že standardní doba vyučovací hodiny (45 min) je přibližně rovna jednomu mikrostoletí. Vyjádřete jedno mikrostoletí v minutách a vypočtěte procentní odchylku výsledku od Fermiho odhadu.

21C. Pro přibližné výpočty se často hodí odhad, že rok (365,25 dne) má asi $\pi \cdot 10^7$ sekund. Jak je tento odhad přesný?

22C. Jisté kyvadlové hodiny (s dvanáctihodinovým ciferníkem) se zrychlují o 1 minutu za den. Nastavíme-li hodiny v určitém okamžiku správně, za jak dlouho ukážou správný čas znovu?

23C. Vyjádřete stáří vesmíru ve dnech (viz tab. 1.4).

24C. (a) Čeho je víc: sekund v týdnu nebo minut v roce? b) Člověk na Zemi existuje přibližně 10^6 let a stáří vesmíru je odhadováno na 10^{10} roků. Kolik „sekund“ by byla Země osídlena člověkem, kdybychom za stáří Vesmíru považovali jeden pomyslný „den“?

25C. Maximální rychlost, které jsou schopna dosáhnout různá zvířata, můžeme vyjádřit v mílích za hodinu takto: (a) hlemýžď: $3{,}0 \cdot 10^{-2}$; (b) pavouk: 1,2; (c) člověk: 23; (d) gepard: 70. Převeďte tyto hodnoty na metry za sekundu. (Pro všechny čtyři výpočty vystačíme s jediným převodním koeficientem. Je výhodné spočítat si jej předem a pro další výpočty uložit do paměti kalkulačky.)

26C. Vyjádřete rychlost světla ($3{,}0 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$) v astronomických jednotkách za minutu (viz cvič. 16).

27C. Až do roku 1883 se každé město ve Spojených státech řídilo svým vlastním časem. Cestujeme-li dnes, posouváme si hodinky jen tehdy, je-li časový posuv roven* celé hodině. Kolik stupňů zeměpisné délky a jakou vzdálenost na 45. rovnoběžce je třeba v průměru překonat, abychom museli posunout své hodinky právě o jednu hodinu?

28C. Délka pozemského dne se rovnoměrně zvyšuje o 0,001 s za každé století. O kolik sekund se prodloužil den za dvacet století uplynulých od začátku našeho letopočtu? (Zpomalování rotace Země bylo zjištěno sledováním zatmění Slunce během posledních dvou tisíciletí.)

29C. Na dvou *různých* stadionech byly pořádány závody v běhu na jednu míli. Vítězové dosáhli časů 3 min 58,05 s a 3 min 58,20 s. Délka běžecké trati však byla změřena jen s omezenou přesností. Jaký může být maximální rozdíl skutečných délek obou tratí, abychom mohli s jistotou tvrdit, že běžec, který dosáhl kratšího času, byl doopravdy rychlejší?

30C. V laboratoři byly testovány patery různé hodiny. V jednom týdnu byly každý den přesně v poledne zaznamenány údaje

* Časová pásma nejsou přesně určena zemskými poledníky, ale z praktických důvodů respektují státní útvary.

všech hodin do následující tabulky. Seřaďte hodiny podle přesnosti jejich chodu, od nejlepších po nejhorší.

HODINY	NE	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

31C. **Siderický měsíc** je doba, za kterou Měsíc zaujme při pozorování ze Země tutéž polohu vzhledem k hvězdnému pozadí. **Lunární měsíc** je doba mezi stejnými měsíčními fázemi. Lunární měsíc je delší než siderický. Proč a o kolik?

ODST. 1.6 Hmotnost

32C. S použitím údajů uvedených v textu této kapitoly určete, kolik je atomů v jednom kilogramu vodíku. Hmotnost jednoho atomu vodíku je 1,0 u.

33C. Molekula vody H_2O je tvořena dvěma atomy vodíku a jedním atomem kyslíku. Hmotnost atomu vodíku je 1,0 u a hmotnost atomu kyslíku je přibližně 16 u. (a) Jaká je celková hmotnost molekuly vody? (b) Kolik molekul vody je ve všech světových oceánech, obsahují-li přibližně $1{,}4\cdot10^{21}$ kg vody?

34C. Země má hmotnost $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. Průměrná hmotnost atomů, z nichž se skládá, je 40 u. Z kolika atomů je Země složena?

35C. Jaká je hmotnost vody, která napršší na město během silné bouře (viz cvič. 14)?

36C. Při redukční dietě můžeme ztratit za týden až 2,3 kg tělesné hmotnosti. Kolik miligramů v průměru ztrácíme každou sekundu?

37C. (a) Vyjádřete hustotu vody v $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, víte-li, že je rovna $1{,}0\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. (b) Nádrž o objemu $5\,700\ \mathrm{m^3}$ se naplní za 10 h. Přítok vody je stálý. Jaký je hmotnostní průtok vody v přívodním potrubí (v kilogramech za sekundu)?

38C. Jemná křemenná zrnka písku (SiO_2) z kalifornských pláží mají přibližně tvar kuliček o poloměru 50 μm. Hustota křemene je $2\,600\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Kolik kg písku má stejný povrch jako krychle o hraně 1 m?

39C. Železo má hustotu $7{,}87\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Hmotnost jednoho atomu železa je $9{,}27\cdot10^{-26}$ kg. (a) Jaký je objem jednoho atomu železa? (b) Jaká je vzdálenost mezi středy sousedních atomů za předpokladu, že atomy jsou krychlové a těsně uspořádané?

2
Přímočarý pohyb

V roce 1977 vytvořila Kitty O'Neilová rekord v závodech dragsterů. Dosáhla tehdy rychlosti 628,85 km/h za pouhých 3,72 s. Jiný rekord tohoto typu zaznamenal v roce 1958 Eli Beeding ml. při jízdě na saních s raketovým pohonem. Po klidovém startu dosáhly saně rychlosti 116 km/h za dobu 0,04 s, která představuje v pravém slova smyslu „okamžik". Je totiž kratší než mrknutí oka. Můžeme nějak porovnat tyto dva výkony, abychom měli představu, který z nich mohl přinést jezdci větší vzrušení nebo dokonce strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?

2.1 POHYB

Celý svět a všechno v něm se pohybuje. Dokonce i věci, které se zdají být v klidu, jako například silnice, se pohybují spolu s otáčením Země, jejím obíháním kolem Slunce, s pohybem Slunce kolem středu naší Galaxie i pohybem celé Galaxie vzhledem ke galaxiím ostatním. Část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles i tříděním a porovnáváním pohybů, se nazývá **kinematika**. Které charakteristiky pohybu vlastně máme měřit a jak je budeme srovnávat?

Než se pokusíme na tyto otázky odpovědět, všimněme si některých obecných vlastností pohybů. Naše úvahy budou prozatím omezeny třemi požadavky:

1. Pohyb se děje vůči Zemi (kterou pokládáme za nehybnou) výhradně po přímce. Ta může být svislá (pád kamene), vodorovná (jízda automobilu po dálnici), nebo libovolně skloněná. Vždy to ale musí být přímka. Takový pohyb nazýváme **přímočarý**. (Zatímco svět kolem nás je trojrozměrný, představuje pohyb po přímce pouze jednorozměrnou úlohu.)

2. Až do kap. 5 se nebudeme zabývat příčinami pohybu, pouze se budeme snažit pohyb *popsat*. Budeme zjišťovat, zda těleso zvyšuje či snižuje svou rychlost, zda se zcela zastavilo, nebo se začalo pohybovat opačným směrem. Půjde prostě o sledování změn pohybu v průběhu času.

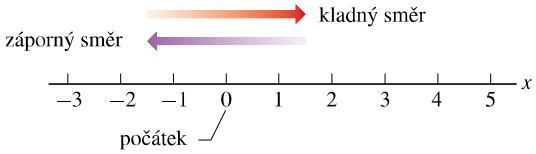
3. Pohybující se těleso nahradíme hmotným bodem. **Hmotný bod** je nejjednodušší myslitelný objekt, který zastupuje skutečné pohybující se těleso v případech, kdy pro popis jeho pohybu nejsou rozhodující jeho vlastní rozměry. Tento případ nastává zejména tehdy, pohybují-li se všechny části tělesa stejně rychle a ve stejném směru. Jako hmotný bod si můžeme představit i dítě, které sjíždí po přímé skluzavce na dětském hřišti. Představa hmotného bodu však již není vhodná pro otáčející se kolotoč, neboť jeho různé části se v daném okamžiku pohybují různě rychle a v různých směrech.

Hmotný bod je často užívaným a velmi funkčním fyzikálním modelem nejen při pouhém popisu pohybu těles, ale i v úvahách o příčinách jeho změn (kap. 5 a 6). Z tohoto obecnějšího pohledu nahrazuje hmotný bod skutečné těleso v případech, kdy je podstatná jeho celková hmotnost a nikoli jeho vlastní rozměry, tvar apod. Výstižnými výrazy zastupujícími pojem *hmotný bod* jsou **částice** nebo **bodový objekt**. Zadání příkladů a úloh v jednotlivých kapitolách jsou většinou formulována nikoli pro abstraktní hmotné body, částice, bodové objekty, ale pro konkrétní tělesa, s nimiž se setkáváme při fyzikálních experimentech i při každodenním dění (kostky, krabice, bedny, zvířata, lidé). V kapitolách 1 až 8, v nichž se jedná výhradně o posuvné pohyby těles, je všechna považujeme za hmotné body. S vědomím, že jsme právě přistoupili na tuto dohodu, se nebudeme úzkostlivě držet terminologické přesnosti a budeme používat jak názvy konkrétních objektů, tak termíny těleso či objekt.

2.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu objektu určujeme vždy vzhledem k nějakému vztažnému bodu, nejčastěji **počátku** souřadnicové osy (například osa x na obr. 2.1). Za **kladný směr** osy považujeme směr rostoucí souřadnice. Na obr. 2.1 je kladný směr orientován vpravo. Opačný směr nazýváme **záporný**.

Má-li například hmotný bod souřadnici $x = 5\,\text{m}$, znamená to, že je ve vzdálenosti 5 m od počátku, měřené v kladném směru. Pokud by měl souřadnici $x = -5\,\text{m}$, byl by od počátku stejně daleko, ale na opačné straně. Souřadnice $-5\,\text{m}$ je menší než souřadnice $-1\,\text{m}$ a ta je menší než souřadnice $+5\,\text{m}$.



Obr. 2.1 Polohu bodu na ose zadáváme ve vyznačených délkových jednotkách. Stupnici lze libovolně rozšířit v obou směrech.

Změnu polohy objektu z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 nazýváme posunutím a značíme Δx. Platí

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2.1)$$

(Podobně jako v př. 1.3 z kap. 1 označujeme symbolem Δ změnu veličiny, definovanou jako rozdíl její koncové a počáteční hodnoty.) Dosadíme-li za x_1 a x_2 konkrétní čísla, pak posunutí v kladném směru (na obr. 2.1 doprava) bude vždy kladné a posunutí v opačném směru (na obr. 2.1 doleva) vždy záporné. Přemístí-li se částice třeba z polohy $x_1 = 5\,\text{m}$ do polohy $x_2 = 12\,\text{m}$, je $\Delta x = (12\,\text{m}) - (5\,\text{m}) = (+7\,\text{m})$. Kladná hodnota posunutí nám říká, že se těleso pohnulo v kladném směru. Vrátí-li se těleso zpět do polohy $x = 5\,\text{m}$, bude celkové posunutí nulové. Při výpočtu posunutí není důležité, kolik metrů těleso skutečně urazilo. Podstatná je pouze výchozí a koncová poloha.

Není-li v dané úloze důležité znaménko (tj. směr) posunutí, hovoříme o **velikosti** posunutí $|\Delta x|$. Ta je vždy nezáporná (tj. kladná anebo nula).

Posunutí je příkladem **vektorové veličiny**, i když zatím jen jednorozměrné. Jako každý vektor je charakterizováno jak velikostí, tak směrem. Vektorům je věnována celá kap. 3. V tuto chvíli postačí, uvědomíme-li si, že posunutí

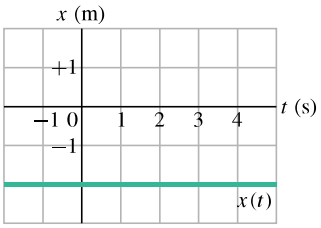
po přímce má dvě charakteristiky: (1) velikost, tj. vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem (například počet metrů) a (2) směr určený souřadnicovou osou orientovaný od počáteční ke koncové poloze a vyjádřený znaménkem plus či minus.

Následuje první z kontrol, jichž v této knize najdete celou řadu. Každá obsahuje jednu nebo více otázek, vyžadujících jednoduchou úvahu či výpočet (často jen „z hlavy“). Můžete si pomocí nich jednoduše ověřit, zda jste probranou látku pochopili. Správné odpovědi jsou uvedeny na konci knihy.

KONTROLA 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x. (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m. Která z nich jsou záporná?

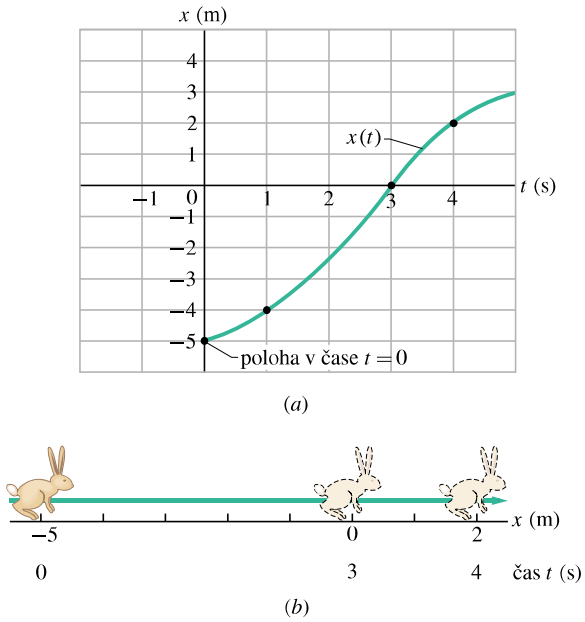
2.3 PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Přehlednou informaci o poloze tělesa získáme, zakreslíme-li do grafu závislost jeho polohy $x(t)$ na čase t. Zvláště jednoduchým příkladem je graf na obr. 2.2, představující závislost $x(t)$ pro králíka,* který sedí v poloze $x = -2$ m. Mnohem zajímavější situaci znázorňuje graf na obr. 2.3a. V tomto případě se totiž králík pohyboval. Poprvé jsme si jej všimli v poloze $x = -5$ m v čase $t = 0$. Pohyboval se směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým proběhl v okamžiku $t = 3$ s a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.



Obr. 2.2 Graf časové závislosti $x(t)$ polohy králíka sedícího v bodě o souřadnici $x = -2$ m. Jeho poloha se s časem nemění.

* Králíka považujeme za hmotný bod.



Obr. 2.3 (a) Graf časové závislosti polohy $x(t)$ běžícího králíka. (b) Obrázek skutečné dráhy králíka. Na stupnici pod osou x je vždy uveden okamžik, kdy králík dorazil do vyznačené polohy x.

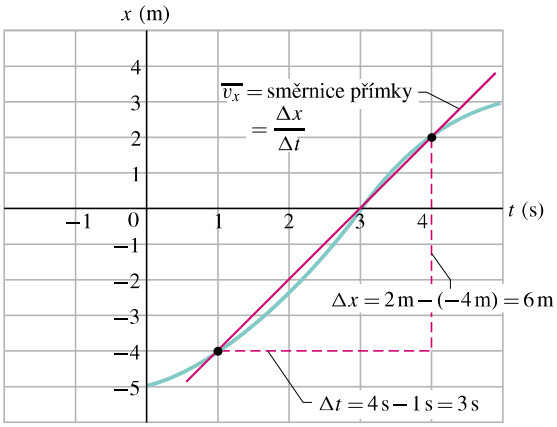
Na obr. 2.3b je zakreslen přímočarý pohyb králíka, jak bychom ho mohli vidět ve skutečnosti. Graf na obr. 2.3a je samozřejmě abstraktní: nic takového nemůžeme přímo pozorovat. Obsahuje však bohatší informaci o pohybu králíka. Umožňuje například zjistit, jak rychle se pohyboval. Ve skutečnosti je s otázkou „jak rychle“ spojeno několik různých fyzikálních veličin. Jednou z nich je tzv. **průměrná** neboli **střední rychlost** $\overline{v_x}$, kterou definujeme jako podíl posunutí Δx v určitém časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.2)$$

Označujeme* ji $\overline{v_x}$. V grafu $x(t)$ je průměrná rychlost $\overline{v_x}$ dána směrnicí přímky, která spojuje dva vybrané body křivky: polohu x_1 v čase t_1 (v grafu bod $[t_1, x_1]$) a polohu x_2 v čase t_2 (bod $[t_2, x_2]$). Podobně jako posunutí má i průměrná rychlost velikost i směr. (Je tedy dalším příkladem vektorové veličiny.) Je-li hodnota $\overline{v_x}$ kladná, pak křivka zleva doprava stoupá (funkce $x(t)$ je rostoucí). Je-li záporná, pak křivka zleva doprava klesá (funkce $x(t)$ je klesající). Průměrná rychlost $\overline{v_x}$ má vždy stejné znaménko jako posunutí, neboť hodnota Δt ve vztahu (2.2) je vždy kladná.

* Pruh nad *libovolnou* veličinou bude všude v této knize znamenat její střední hodnotu.

Obr. 2.4 dává návod, jak určit průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ běžícího králíka z obr. 2.3 v časovém intervalu od $t = 1\,\text{s}$ do $t = 4\,\text{s}$. Její hodnotu $\overline{v_x} = 6\,\text{m}/3\,\text{s} = +2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ jsme vypočetli jako směrnici spojnice dvou bodů na křivce grafu: první odpovídá začátku a druhý konci časového intervalu, během kterého jsme králíka sledovali.*



Obr. 2.4 Výpočet průměrné rychlosti v časovém intervalu od $t = 1\,\text{s}$ do $t = 4\,\text{s}$. Průměrná rychlost je určena jako směrnice přímky spojující dva body grafu, které odpovídají počátečnímu a koncovému okamžiku daného intervalu.

PŘÍKLAD 2.1

Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (0,450 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

ŘEŠENÍ: Pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ musíme znát celkové posunutí Δx a dobu Δt. Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy $x_1 = 0$) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je $x_2 = 10{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} = +12{,}8\,\text{km}$, a tedy $\Delta x = x_2 - x_1 = +12{,}8\,\text{km}$. Dobu jízdy $\Delta t'$ určíme z rovnice (2.2), po jejíž úpravě a dosazení dostaneme:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{\overline{v_{x'}}} = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(86\,\text{km/h})} = 0{,}121\,\text{h},$$

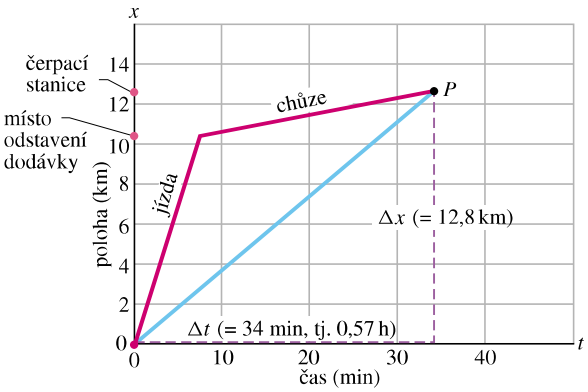
tj. asi 7,3 min. Jako $\Delta x' = 10{,}4\,\text{km}$ jsme označili vzdálenost, kterou dodávka ujela do okamžiku, kdy došlo palivo. Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je tedy

$$\Delta t = 0{,}121\,\text{h} + 0{,}450\,\text{h} = 0{,}571\,\text{h}.$$

Nakonec dosadíme za Δx a Δt do rovnice (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(12{,}8\,\text{km})}{(0{,}571\,\text{h})} = \\ = 22{,}4\,\text{km/h} \doteq 22\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ zjistíme ještě graficky. Nejprve narýsujeme graf funkce $x(t)$ (obr. 2.5). Výchozí bod grafu splývá s počátkem a koncový bod je označen písmenem P. Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující tyto dva body. Z délek přerušovaných čar je zřejmé, že směrnice má hodnotu $\overline{v_x} = 12{,}8\,\text{km}/0{,}57\,\text{h} = +22\,\text{km/h}$.



Obr. 2.5 Příklad 2.1. Přímkové úseky s označením „jízda“ a „chůze“ představují grafické znázornění časové závislosti polohy řidiče dodávky během jízdy, resp. během chůze k čerpací stanici. Směrnice přímky spojující počátek soustavy souřadnic s bodem P určuje jeho průměrnou rychlost.

PŘÍKLAD 2.2

Předpokládejme, že návrat k dodávce trvá řidiči 35 min. Musí totiž nést nádobu s palivem, a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě musíme určit celkové posunutí Δx a vydělit je celkovou dobou Δt. Řidičova cesta nyní končí návratem k automobilu. Její počáteční bod má opět souřadnici $x_1 = 0$, koncový bod je dán polohou odstaveného automobilu $x_2 = 10{,}4\,\text{km}$. Dostáváme

* V geometrii je směrnice přímky definována jako tangenta úhlu, který tato přímka svírá s nějakou vztažnou přímkou. Představuje-li však přímka například graf závislosti $x(t)$ polohy tělesa x na čase t, rozumíme směrnicí podíl přírůstku souřadnice Δx a odpovídajícího přírůstku času Δt, včetně uvážení příslušných jednotek. Je-li poloha měřena v metrech a čas v sekundách, vyjde směrnice v jednotkách $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Tangentě úhlu α mezi přímkou grafu a časovou osou (která v tomto případě hraje roli vztažné přímky) bude rovna tehdy, zvolíme-li na osách t a x stejně dlouhé jednotky. Pokud by jedna sekunda na časové ose byla reprezentována třeba úsečkou o délce 1 cm, museli bychom na ose poloh zvolit jako 1 m rovněž úsečku o délce 1 cm.

$\Delta x = 10{,}4\,\text{km} - 0 = 10{,}4\,\text{km}$. Celková doba jízdy a chůze k čerpací stanici a zpět je

$$\Delta t = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(86\,\text{km/h})} + (27\,\text{min}) + (35\,\text{min}) = \\ = 0{,}121\,\text{h} + 0{,}450\,\text{h} + 0{,}583\,\text{h} = 1{,}15\,\text{h}.$$

Je tedy

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(1{,}15\,\text{h})} = \\ = 9{,}04\,\text{km/h} \doteq 9{,}0\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná rychlost je v tomto případě menší než v příkladu 2.1. Je to pochopitelné, celkové posunutí je totiž menší a celková doba delší.

KONTROLA 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu x_1 rychlostí 80 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě?

Jinou představu o tom, „jak rychle“ se hmotný bod pohybuje, lze získat pomocí tzv. **průměrné velikosti rychlosti** $\overline{v}$. Zatímco pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, která je vektorovou veličinou, je rozhodující vektor posunutí Δx, je průměrná velikost rychlosti veličinou skalární a je určena celkovou dráhou, kterou hmotný bod urazí nezávisle na směru pohybu.* Je tedy

$$\overline{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celková doba pohybu}}. \qquad (2.3)$$

Průměrná velikost rychlosti $\overline{v}$ neobsahuje, na rozdíl od průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, informaci o směru pohybu. Je vždy nezáporná. V některých případech může být $\overline{v} = |\overline{v_x}|$, obecně to však neplatí. Výsledek následujícího příkladu to jasně dokumentuje.

PŘÍKLAD 2.3

Určete průměrnou velikost rychlosti pohybu v příkladu 2.2.

ŘEŠENÍ: Od počátku jízdy až po návrat zpět k vozu od čerpací stanice urazil řidič celkovou vzdálenost

$$10{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} = 15{,}2\,\text{km}$$

za dobu 1,15 h. Průměrná velikost jeho rychlosti má tedy hodnotu

$$\overline{v} = \frac{(15{,}2\,\text{km})}{(1{,}15\,\text{h})} = 13{,}2\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.1: *Rozumíme dobře zadanému problému?*

Společným problémem všech, kteří se teprve začínají zabývat řešením fyzikálních úloh, je správně pochopit zadání. Zda jsme zadání skutečně pochopili, si nejlépe ověříme tak, že se je pokusíme vyložit někomu jinému. Vyzkoušejte si to.

Když čteme zadání, zapíšeme si hodnoty známých veličin i s jednotkami a označíme je obvyklými symboly. Rozmyslíme si, kterou veličinu máme spočítat a rovněž ji označíme obvyklým symbolem. V příkladech 2.1 a 2.2 je neznámou veličinou průměrná rychlost, kterou značíme $\overline{v_x}$. Pokusíme se najít fyzikální vztahy mezi neznámou veličinou a veličinami zadanými. V příkladech 2.1 a 2.2 je to definice průměrné rychlosti, zapsaná vztahem (2.2).

Bod 2.2: *Používáme správně jednotky?*

Věnujme vždy pozornost tomu, abychom do vzorců dosadili všechny veličiny v odpovídajících jednotkách. V příkladech 2.1 a 2.2 je přirozené počítat vzdálenost v kilometrech, čas v hodinách a rychlost v kilometrech za hodinu. Někdy musíme před dosazením jednotky převést.

Bod 2.3: *Je získaný výsledek rozumný?*

Nad výsledkem se nakonec zamyslete a zvažujme, dává-li smysl. Není získaná hodnota příliš velká nebo naopak příliš malá? Má správné znaménko a jednotky? Správná odpověď v př. 2.1 je 22 km/h. Kdyby nám vyšlo třeba 0,000 22 km/h, −22 km/h, 22 km/s nebo 22 000 km/h, měli bychom hned poznat, že jsme ve výpočtu udělali chybu.

Bod 2.4: *Umíme dobře číst z grafů?*

Měli bychom být schopni dobře rozumět takovým grafům, jaké jsou například na obr. 2.2, 2.3a, 2.4 a 2.5. U všech vynášíme na vodorovnou osu čas (jeho hodnoty rostou směrem vpravo). Na svislé ose je poloha hmotného bodu x vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Poloha x roste směrem vzhůru.

Pozorně si všímejme jednotek, v nichž jsou veličiny na osách vyjádřeny (sekundy či minuty, metry nebo kilometry), nezapomínejme na znaménka proměnných.

2.4 OKAMŽITÁ RYCHLOST

Poznali jsme již dvě různé veličiny, které popisují, jak rychle se určité těleso nebo částice pohybuje: průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ a průměrnou velikost rychlosti $\overline{v}$. Obě určíme z měření prováděných v časovém intervalu Δt. Otázkou

* Je třeba rozlišovat *velikost vektoru průměrné rychlosti* $|\overline{v_x}|$ a *průměrnou velikost rychlosti* $\overline{v}$. První veličinu určíme prostě jako velikost vektoru definovaného vztahem (2.2) (viz také kap. 3), druhá je výsledkem středování velikosti rychlosti nezávisle na jejím směru, například z údaje rychloměru automobilu.

„jak rychle?“ však máme obvykle na mysli rychlost částice v daném okamžiku. Je popsána veličinou v_x, zvanou **okamžitá rychlost**, nebo jednoduše rychlost.

Okamžitou rychlost získáme z průměrné rychlosti tak, že budeme časový interval (neboli dobu) Δt, měřený od okamžiku t, zmenšovat bez omezení k nule. S poklesem hodnoty Δt se průměrná rychlost měřená v intervalu od t do $t + \Delta t$ blíží jisté limitní hodnotě, která pak definuje rychlost v okamžiku t:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.4)$$

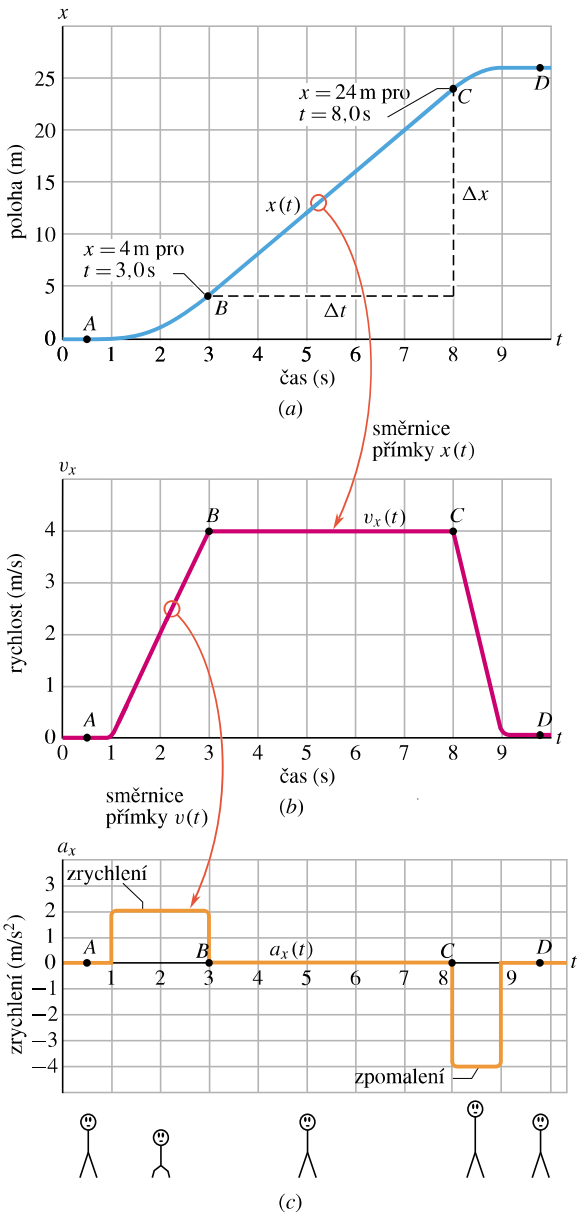
Okamžitá rychlost je další vektorovou veličinou, se kterou se setkáváme. Obsahuje totiž informaci i o směru pohybu částice. Určuje, jak rychle se v daném okamžiku mění poloha částice s časem. Názornou geometrickou představu o limitním přechodu od průměrné k okamžité rychlosti můžeme získat z obr. 2.4. Budeme-li bez omezení přibližovat bod určený koncovým okamžikem uvažovaného časového intervalu Δt k bodu počátečnímu, přejde červená přímka v tečnu ke křivce grafu, vedenou počátečním bodem. Matematicky je okamžitá rychlost rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$.

Velikost okamžité rychlosti neboli **velikost rychlosti** již postrádá informaci o směru pohybu a má vždy nezápornou hodnotu. Rychlosti $+5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $-5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ mají stejnou velikost $5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Rychloměr v automobilu měří jen velikost rychlosti, protože není schopen určit směr pohybu.

Angličtí studenti jsou na tom lépe. Obecná čeština užívá slova *rychlost* ve třech různých smyslech, pro které má angličtina tři různá slova, totiž *velocity* (vektor rychlosti), *speed* (velikost vektoru rychlosti) a *rate* (obecná změna v čase, např. rychlost hoření). Všechna tato slova jsou v angličtině zcela běžná. Ve fyzice užíváme slova *rychlost* pro *vektorovou veličinu*. Tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění, raději užijeme sousloví, jako je „rychlost o velikosti…“. Slova „rychlost“ namísto „velikost rychlosti“ lze užít pouze tam, kde je *opravdu* zaručeno, že na směru nezáleží (výroky typu „Rychlost světla ve vzduchu je větší než ve vodě.“) anebo kde je směr jasně dán a nemůže se měnit (rychlost vlaku).

PŘÍKLAD 2.4

Na obr. 2.6a je zakreslena časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu. Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat vzhůru (kladný směr souřadnicové osy) a opět se zastaví. Nakreslete závislost rychlosti kabiny na čase.



Obr. 2.6 Příklad 2.4. (a) Časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu pohybující se svisle vzhůru po ose x. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$. Všimněte si, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj. $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. (c) Časová závislost zrychlení kabiny $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj. $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$. Schematické nákresy postaviček v dolní části obrázku naznačují pocity pasažéra při urychlování kabiny.

ŘEŠENÍ: Úseky grafu obsahující body A a D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová. V úseku mezi body B a C se sklon křivky nemění a souřadnice kabiny stále roste. Kabina se pohybuje konstantní rychlostí. Směrnici tečny

(tedy rychlost) určíme jako podíl

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x = \frac{(24\,\mathrm{m} - 4{,}0\,\mathrm{m})}{(8{,}0\,\mathrm{s} - 3{,}0\,\mathrm{s})} = +4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Kladné znaménko ukazuje, že se výtah pohybuje v kladném směru. Hodnoty rychlosti $v_x = 0$ a $v_x = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jsou pro příslušné časové intervaly vyznačeny v grafu na obr. 2.6b. Při rozjezdu a opětovném zastavení, tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění, například podle obr. 2.6b. (K diskusi o obr. 2.6c přistoupíme až v čl. 2.5.)

Můžeme řešit i „obrácenou úlohu“, kdy potřebujeme ze znalosti funkce $v_x(t)$ (graf na obr. 2.6b) určit $x(t)$ (obr. 2.6a). Její řešení však není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o *změnách* polohy, nikoli o poloze samotné. Abychom určili změnu polohy v libovolném časovém intervalu, vypočteme „obsah plochy pod křivkou“ grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu.* Mezi třetí a osmou sekundou se kabina pohybuje dejme tomu konstantní rychlostí $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Změnu její polohy určíme jako „obsah plochy pod křivkou $v_x(t)$“ odpovídající tomuto časovému intervalu:

$$\text{„Obsah plochy pod křivkou“} = (4{,}0)(8{,}0 - 3{,}0) = +20.$$

(Tato hodnota je kladná, protože příslušná část křivky $v_x(t)$ leží nad časovou osou.) Získaný *číselný údaj* opatříme správnou jednotkou**, v tomto případě $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$. Obr. 2.6a potvrzuje, že hodnota souřadnice určující polohu kabiny se v uvažovaném časovém intervalu skutečně zvětšila o 20 m. Z obr. 2.6b však nemůžeme poznat, jaká byla její poloha na začátku a konci tohoto intervalu. K tomu bychom potřebovali další údaj.

PŘÍKLAD 2.5

Hmotný bod se pohybuje po ose x a jeho poloha je v závislosti na čase určena vztahem

$$x = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3. \qquad (2.5)$$

Jaká je jeho rychlost v okamžiku $t = 3{,}5$ s? Je jeho rychlost stálá, nebo se spojitě mění?

ŘEŠENÍ: Zadání pro jednoduchost neobsahuje jednotky. Můžeme si je však k číselným koeficientům doplnit takto: 7,8 m, 9,2 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$. Rychlost určíme pomocí rovnice (2.4), kde za x na pravé straně dosadíme závislost (2.5):

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3).$$

Dostaneme tak

$$v_x = 0 + 9{,}2 - (3)(2{,}1)t^2 = 9{,}2 - 6{,}3t^2. \qquad (2.6)$$

Pro $t = 3{,}5$ je

$$v_x = 9{,}2 - (6{,}3)(3{,}5)^2 = -68,$$
$$v_x = -68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V okamžiku $t = 3{,}5$ s se hmotný bod pohybuje v záporném směru osy x a má tedy rychlost $-68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (o směru pohybu vypovídá záporné znaménko). Na pravé straně vztahu (2.6) vystupuje čas a rychlost v_x se tedy s časem mění.

KONTROLA 3: Následující čtyři vztahy představují možné případy závislosti polohy částice na čase. V každém z nich je poloha x zadávána v metrech, čas t v sekundách a vždy platí $t > 0$. (1) $x = 3t - 2$, (2) $x = -4t^2 - 2$, (3) $x = 2/t^2$, (4) $x = -2$. (a) Ve kterých z uvedených případů je rychlost v_x částice konstantní? (b) Kdy je záporná? (c) Kdy se pohyb částice zpomaluje?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.5: *Derivace a sklon křivky*

Derivace funkce je určena sklonem křivky (grafu funkce) v daném bodě. Přesněji vyjádřeno je derivace rovna směrnici tečny ke křivce v tomto bodě. Ukázkou může být příklad 2.4: Okamžitá rychlost výtahu v libovolném okamžiku (vypočtená jako derivace funkce $x(t)$ podle (2.4)) je rovna směrnici tečny ke křivce na obr. 2.6a sestrojené v odpovídajícím bodě. Ukážeme si, jak je možné určit derivaci funkce graficky.

Na obr. 2.7 je graf funkce $x(t)$ pro pohybující se hmotný bod. Při grafickém určení jeho rychlosti v okamžiku $t = 1$ s budeme postupovat takto: Nejprve na křivce označíme bod, který tomuto času odpovídá. V tomto bodě narýsujeme tečnu ke křivce grafu. Pracujeme co nejpečlivěji. Dále sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Jeho konkrétní volba je libovolná, neboť přepony všech takových trojúhelníků mají stejný sklon. Zvolíme tedy trojúhelník co největší, abychom směrnici změřili co nejpřesněji. Pomocí měřítek na souřadnicových osách určíme Δx a Δt. Směrnice tečny ke křivce je dána podílem $\Delta x/\Delta t$. Z obr. 2.7 dostaneme

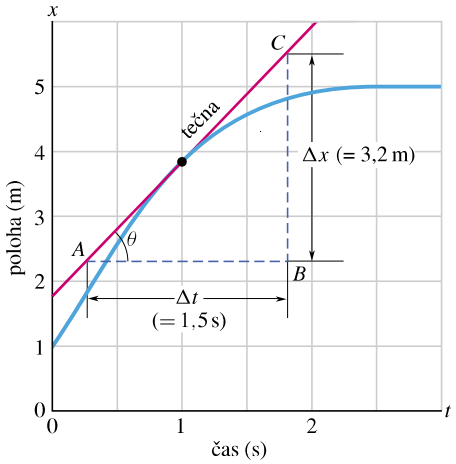
$$\text{směrnice tečny} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(5{,}5\,\mathrm{m} - 2{,}3\,\mathrm{m})}{(1{,}8\,\mathrm{s} - 0{,}3\,\mathrm{s})} =$$
$$= \frac{3{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{s}} = +2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Podle rovnice (2.4) je tato směrnice rovna rychlosti částice v okamžiku $t = 1$ s. Kdybychom změnili měřítko na některé souřadnicové ose, změnil by se sice jak tvar křivky, tak velikost úhlu θ, ale rychlost určená popsaným způsobem

* Tento postup zdůvodníme v článku 2.7.

** Její rozměr je určen součinem veličin na osách grafu.

by byla stejná. Známe-li matematické vyjádření funkce $x(t)$ (příklad 2.5), je vhodnější stanovit rychlost částice přímo, výpočtem její derivace. Grafická metoda je pouze přibližná.



Obr. 2.7 Derivace křivky v libovolném bodě je směrnicí tečny v tomto bodě. Směrnice tečny (a tedy i okamžitá rychlost $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$) v čase $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ je $\Delta x/\Delta t = +2{,}1\,\mathrm{m/s}$.

2.5 ZRYCHLENÍ

Jestliže se vektor rychlosti částice mění, říkáme, že se částice pohybuje se zrychlením. **Průměrné zrychlení** $\overline{a_x}$ v časovém intervalu Δt je definováno podílem

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \qquad (2.7)$$

Okamžité zrychlení (nebo prostě jen **zrychlení**) je určeno derivací rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.8)$$

Podle vztahu (2.8) je zrychlení v daném okamžiku rovno směrnici tečny ke křivce $v_x(t)$ v bodě určeném tímto okamžikem. Spojením rovnic (2.8) a (2.4) dostaneme

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (2.9)$$

Zrychlení hmotného bodu je tedy v každém okamžiku dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času. Nejužívanější jednotkou zrychlení je $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V příkladech a cvičeních se můžeme setkat i s jinými jednotkami, všechny však budou mít tvar délka·čas^{-2}. Zrychlení má velikost i směr, je tedy další vektorovou veličinou. Při pohybu podél osy x stačí k určení směru zrychlení zadat pouze příslušné znaménko, podobně jako u posunutí a rychlosti.

Na obr. 2.6c je graf časové závislosti zrychlení výtahové kabiny z příkladu 2.4. Porovnejme grafy $a_x(t)$ a $v_x(t)$: každý bod grafu $a_x(t)$ je určen derivací (tj. směrnicí tečny) grafu $v_x(t)$ v odpovídajícím bodě. Je-li rychlost v_x konstantní (buď 0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ nebo 4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$), je její derivace nulová. Zrychlení kabiny je rovněž nulové. Při rozjezdu kabiny je derivace rychlosti kladná, kladné je tedy i zrychlení $a_x(t)$. Při zpomalování má rychlost zápornou derivaci a zrychlení je záporné. Porovnejme nyní sklon dvou přímých úseků grafu $v_x(t)$, které odpovídají rozjezdu a brzdění výtahu. Sklon křivky odpovídající brzdění je strmější než sklon při rozjezdu. Brzdění totiž trvalo jen polovinu doby potřebné k rozjezdu. Velikost zrychlení výtahu při brzdění byla větší než při rozjezdu, což je zřejmé i z obr. 2.6c.

Jízda výtahem je doprovázena nepříjemnými pocity, jak výmluvně napovídají schematické kresby postaviček v dolní části obr. 2.6. Při rozjezdu kabiny jsme jakoby tlačeni směrem dolů, při zastavování naopak nadlehčováni. V mezidobí nic zvláštního nepociťujeme. Svými smysly můžeme vnímat zrychlení, nikoli rychlost. Jedeme-li autem rychlostí 90 km/h nebo letíme letadlem rychlostí 900 km/h, naše tělo si pohyb vůbec neuvědomuje. Pokud by však náhle auto či letadlo začalo měnit svou rychlost, pociťujeme tuto změnu velmi intenzivně až nepříjemně. Silné vzrušení, které zažíváme při jízdě na horské dráze v lunaparku, je částečně způsobeno právě prudkými změnami rychlosti pohybu našeho těla. Ukázka reakce lidského těla na velké zrychlení je na fotografiích obr. 2.8, které byly pořízeny při prudkém urychlení a následném brzdění raketových saní.

Velká zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách „g“, kde

$$1g = 9{,}806\,65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq \doteq 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\ \text{(jednotka } g\text{)}. \qquad (2.10)$$

Tato hodnota byla přijata jako **normální tíhové zrychlení** na 2. generální konferenci pro váhy a míry v r. 1901. Odpovídá severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny. (V čl. 2.8 se dovíme, že g je velikost zrychlení tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu.) Při jízdě na horské dráze dosahuje velikost zrychlení krátkodobě hodnoty až $3g$, tj. $3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Obr. 2.8 Plukovník J. P. Stapp v raketových saních při urychlování na vysokou rychlost (zrychlení směřuje ke čtenáři) a při brzdění (zrychlení směřuje od čtenáře).

PŘÍKLAD 2.6

(a) Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla největší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího automobilu?

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení je dáno vztahem (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(628{,}85\,\mathrm{km/h} - 0)}{(3{,}72\,\mathrm{s} - 0)} = \\ = \frac{174{,}68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}72\,\mathrm{s}} = 47\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq \\ \doteq 4{,}8g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Předpokládali jsme, že zrychlení má směr kladné osy x.)

(b) Jaké bylo průměrné zrychlení saní při jízdě Eliho Beedinga ml., který dosáhl rychlosti 116 km/h za 0,04 s?

ŘEŠENÍ: Opět použijeme vztahu (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(116\,\mathrm{km/h} - 0)}{(0{,}04\,\mathrm{s} - 0)} = \\ = \frac{32{,}22\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{0{,}04\,\mathrm{s}} = 806\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 80g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní se můžeme vrátit k otázce, kterou jsme si položili v úvodu kapitoly, kde jsme se o obou rekordních výkonech poprvé zmínili: „Jak rozhodneme, která jízda mohla přinést jezdci větší vzrušení? Máme porovnávat výslednou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?" Odpověď již známe: protože lidské tělo vnímá zrychlení a ne rychlost, měli bychom porovnávat právě zrychlení. V tomto srovnání „vítězí" sáňkař Beeding, i když jeho výsledná rychlost byla mnohem menší než rychlost automobilistky O'Neilové. Zrychlení, kterému byl Beeding vystaven, by bylo smrtelné, kdyby trvalo delší dobu.

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.6: *Znaménko zrychlení*

Vraťme se k příkladu 2.6 a všimněme si znaménka vypočteného zrychlení. Ve většině běžných situací mívá znaménko zrychlení následující význam: těleso má kladné zrychlení, jestliže se jeho rychlost zvyšuje, záporné zrychlení odpovídá klesající rychlosti (těleso brzdí). Tento výklad však nemůžeme přijmout bezmyšlenkovitě v každé situaci. Má-li například automobil rychlost $v_x = -27\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ $(= -97\,\mathrm{km/h})$ a zcela zastaví za 5 s, je jeho průměrné zrychlení při brzdění $\overline{a_x} = +5{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Toto zrychlení je kladné, i když se pohyb vozu zpomaloval. Rozhodující je, že zrychlení má opačné znaménko než počáteční rychlost.

Správná interpretace znaménka zrychlení je následující:

Má-li zrychlení částice stejné znaménko jako okamžitá rychlost, roste velikost její rychlosti a její pohyb se zrychluje. Má-li zrychlení opačné znaménko než okamžitá rychlost, klesá velikost rychlosti částice a její pohyb se zpomaluje.

Tato interpretace získá náležitý význam v kap. 4, kde se budeme podrobněji věnovat vektorové povaze rychlosti a zrychlení.

KONTROLA 4: Pes běží podél osy x. Jaké znaménko má jeho zrychlení, pohybuje-li se pes (a) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti roste, (b) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti klesá, (c) v záporném směru osy x s rostoucí velikostí rychlosti a (d) v záporném směru osy x s klesající velikostí rychlosti?

PŘÍKLAD 2.7

Poloha částice pohybující se podél osy x (obr. 2.1) závisí na čase takto:

$$x = 4 - 27t + t^3.$$

Číselné koeficienty jsou vyjádřeny v metrech, metrech za sekundu a v metrech za sekundu na třetí.

(a) Určete $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

ŘEŠENÍ: Rychlost $v_x(t)$ určíme jako derivaci polohy $x(t)$ podle času:

$$v_x = -27 + 3t^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zrychlení $a_x(t)$ je časovou derivací rychlosti $v_x(t)$:

$$a_x = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Je v některém okamžiku rychlost částice nulová?

ŘEŠENÍ: Položíme-li $v_x(t) = 0$, dostaneme rovnici

$$0 = -27 + 3t^2,$$

jejíž řešení je $t = \pm 3\,\text{s}$. (Odpověď)

(c) Popište pohyb částice pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Provedeme rozbor závislostí $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

V čase $t = 0$ je částice v bodě o souřadnici $x = +4\,\text{m}$ a pohybuje se doleva rychlostí $-27\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Její zrychlení je nulové.

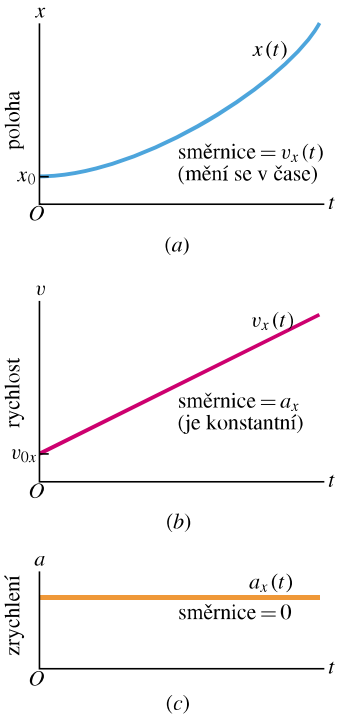
V časovém intervalu $0\,\text{s} < t < 3\,\text{s}$ se částice stále pohybuje doleva, její pohyb se však zpomaluje. Její zrychlení je totiž kladné a směřuje tedy doprava. Toto tvrzení ověříme tak, že do vztahů pro $v_x(t)$ a $a_x(t)$ zkusmo dosadíme některý okamžik ležící v uvedeném časovém intervalu (proveďte např. pro $t = 2\,\text{s}$). Zrychlení částice s časem roste, její pohyb směrem vlevo je čím dál pomalejší.

V okamžiku $t = 3\,\text{s}$ má částice nulovou rychlost ($v_x = 0$). Právě dosáhla nejvzdálenějšího bodu ležícího vlevo od počátku ($x = -50\,\text{m}$). Zrychlení zůstává kladné a jeho velikost neustále roste.

Pro $t > 3\,\text{s}$ narůstá kladné zrychlení. Rychlost, která nyní směřuje doprava, velmi prudce roste. (Všimněme si, že nyní má zrychlení stejné znaménko jako rychlost.) Částice neustále pokračuje v pohybu směrem doprava.

2.6 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: SPECIÁLNÍ PŘÍPAD

Velmi často se setkáváme s pohyby, jejichž rychlost se (alespoň přibližně) mění tak, že zrychlení je konstantní. Nazýváme je rovnoměrně zrychlené. Příkladem může být automobil, který se na křižovatce rozjíždí na zelenou. (Grafy časové závislosti polohy, rychlosti a zrychlení, odpovídající takové situaci, jsou schematicky zakresleny na obr. 2.9.) Stejně tak může být zrychlení automobilu konstantní i při brzdění.



Obr. 2.9 (a) Časová závislost polohy $x(t)$ částice pohybující se rovnoměrně zrychleně. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$ je v každém bodě určena směrnicí křivky $x(t)$ na obrázku (a). (c) Zrychlení částice $a_x(t)$ je stálé a je dáno (konstantní) směrnicí grafu $v_x(t)$.

Podobné případy jsou tak časté, že je vhodné mít pro jejich popis zvláštní rovnice. Se dvěma možnými způsoby jejich odvození se postupně seznámíme v tomto a následujícím článku.

Při studiu obou článků i při řešení úloh a cvičení je třeba mít neustále na paměti, že *tyto rovnice platí jen pro případ konstantního zrychlení* (nebo zrychlení, které lze v dobrém přiblížení za konstantní považovat).

Při rovnoměrně zrychleném pohybu je okamžité zrychlení shodné se zrychlením průměrným. S malou změnou označení tak můžeme rovnici (2.7) přepsat do tvaru

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}.$$

Symbolem v_{0x} je označena rychlost v okamžiku $t = 0$ (počáteční rychlost), a v_x je rychlost v libovolném pozdějším čase t. Rovnici můžeme ještě upravit takto:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \tag{2.11}$$

Všimněme si, že pro $t = 0$ vede tento vztah k očekávané rovnosti $v_x = v_{0x}$. Derivováním rovnice (2.11) podle času dostaneme $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = a_x$, v souhlasu s definičním vztahem pro zrychlení a_x. Těmito jednoduchými kontrolními výpočty jsme ověřili správnost odvozené rovnice. Na obr. 2.9b je graf funkce $v_x(t)$ dané rovnicí (2.11).

Obdobně lze přepsat rovnici (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

a odtud

$$x = x_0 + \overline{v_x} t. \tag{2.12}$$

x_0 je poloha částice v okamžiku $t = 0$ (počáteční poloha), $\overline{v_x}$ je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 0$ až do obecného okamžiku t.

Snadno zjistíme, že grafem funkce $v_x(t)$ dané vztahem (2.11) je přímka. Průměrná rychlost v libovolném časovém intervalu (a tedy i v intervalu od $t = 0$ po obecný okamžik t) je v tomto případě určena aritmetickým průměrem počáteční a koncové rychlosti (v_{0x} a v_x). Můžeme ji tedy zapsat ve tvaru

$$\overline{v_x} = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x). \tag{2.13}$$

Dosadíme-li za v_x pravou stranu rovnice (2.11), získáme po malých úpravách vztah

$$\overline{v_x} = v_{0x} + \tfrac{1}{2} a_x t. \tag{2.14}$$

Po dosazení z (2.14) do (2.12) nakonec dostaneme

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2. \tag{2.15}$$

Pro kontrolu můžeme dosadit $t = 0$ a dostáváme očekávaný výsledek $x = x_0$. Derivací vztahu (2.15) podle času získáme, opět podle očekávání, vztah (2.11). Graf funkce $x(t)$ dané vztahem (2.15) je na obr. 2.9a. Uvědomme si, že funkční předpis (2.15) pro $x(t)$ obsahuje veškeré dostupné informace o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu. Je-li zadáno zrychlení a_x (stálé v průběhu celého děje) a hodnoty x_0 a v_{0x}, určující počáteční stav částice, je možné určit v libovolném okamžiku t

(1) její polohu x z rovnice (2.15),
(2) její rychlost v_x z rovnice (2.11).

Vztah (2.15) lze z (2.11) jednoduše získat integrací, a obráceně vztah (2.11) vznikne z (2.15) derivováním.

Při řešení některých úloh sloužících k procvičení problematiky rovnoměrně zrychleného pohybu je však výhodnější jiný pohled na vztahy (2.11) a (2.15). Často se objevují zadání, která nesměřují k jejich využití jako předpisů pro *funkce*, ale týkají se jednotlivého okamžiku. V takových případech pak bývá vhodné hledět na tyto vztahy jako na soustavu dvou rovnic, obsahujících šest veličin t, x, x_0, v_x, v_{0x} a a_x. Čtyři z nich musí být zadány, abychom dvě zbývající mohli určit řešením soustavy. Tab. 2.1 shrnuje kromě rovnic (2.11) a (2.15) další tři rovnice, které lze získat jejich úpravou. Společným rysem všech pěti rovnic je nepřítomnost některé z veličin t, $x - x_0$, v_x, v_{0x} a a_x. Soupis může být snad užitečný těm, kteří neradi provádějí algebraické úpravy a dají přednost přímému dosazení zadaných číselných hodnot do rovnice, kterou vhodně vyberou podle typu zadání.

Tabulka 2.1 **Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb**

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
(2.15)	$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
(2.16)	$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	t
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x
(2.18)	$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Před použitím tabulky se ujistíme, že se úloha opravdu týká rovnoměrně zrychleného pohybu. Vzpomeňme si, že funkce (2.11) je derivací funkce (2.15). Zbývající tři rovnice vznikly algebraickou úpravou spočívající ve vyloučení některé z vyjmenovaných veličin z rovnic (2.11) a (2.15).

KONTROLA 5: Následující čtyři funkce popisují časovou závislost polohy hmotného bodu $x(t)$: (1) $x = 3t - 4$; (2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (3) $x = 2/t^2 - 4/t$; (4) $x = 5t^2 - 3$. Ve kterém z těchto případů můžeme použít rovnice z tab. 2.1?

PŘÍKLAD 2.8

Řidič spatří policejní vůz a začne brzdit. Na dráze 88 m zpomalí z rychlosti 75 km/h na 45 km/h.

(a) Určete zrychlení automobilu za předpokladu, že bylo během brzdění konstantní.

ŘEŠENÍ: Veličiny v_{0x}, v_x a $x - x_0$ jsou zadány, potřebujeme určit a_x. Čas se v zadání úlohy neobjevuje. Z tab. 2.1 proto vybereme rovnici (2.16) a vypočteme z ní neznámé zrychlení a_x.

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45\,\mathrm{km/h})^2 - (75\,\mathrm{km/h})^2}{2(0{,}088\,\mathrm{km})} =$$
$$= -2{,}05{\cdot}10^4\,\mathrm{km/h^2} \doteq -1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(V posledním kroku výpočtu je třeba věnovat pozornost převodu jednotky $\mathrm{h^{-2}}$ na $\mathrm{s^{-2}}$.) Všimněme si, že rychlosti jsou kladné a zrychlení záporné. Pohyb automobilu se opravdu zpomaluje.

(b) Jak dlouho řidič v této fázi pohybu brzdil?

ŘEŠENÍ: Nyní je neznámou veličinou čas a zrychlení se naopak v zadání nevyskytuje. Z tab. 2.1 volíme rovnici (2.17) a řešíme ji vzhledem k neznámé t:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{0x} + v_x} = \frac{2(0{,}088\,\mathrm{km})}{(75 + 45)\,\mathrm{km/h}} =$$
$$= 1{,}5{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h} = 5{,}4\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Řidič dále brzdí se zrychlením určeným v části (a). Za jak dlouho od začátku brzdění se automobil zcela zastaví?

ŘEŠENÍ: Při řešení této části úlohy nepotřebujeme uvažovat o posunutí $x - x_0$. Použijeme tedy rovnici (2.11) a vyjádříme t:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{0 - (75\,\mathrm{km/h})}{(-2{,}05{\cdot}10^4\,\mathrm{km/h^2})} =$$
$$= 3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h} = 13\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jakou dráhu urazí vůz od počátku brzdění do úplného zastavení?

ŘEŠENÍ: Hledaná dráha je přímo rovna posunutí. Užijeme rovnici (2.15):

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 =$$
$$= (75\,\mathrm{km/h})(3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h}) +$$
$$+\tfrac{1}{2}(-2{,}05{\cdot}10^4\,\mathrm{km{\cdot}h^{-2}})(3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{h})^2 =$$
$$= 0{,}137\,\mathrm{km} \doteq 140\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Je třeba dbát na to, abychom zrychlení a_x dosazovali se správným znaménkem!)

(e) Při další jízdě řidič opět potřebuje zastavit. Zpomaluje se stejným zrychlením jako v části (a), počáteční rychlost je však nyní taková, že automobil zcela zastaví na dráze 200 m. Jak dlouho trvá brzdění?

ŘEŠENÍ: V úloze nevystupuje počáteční rychlost. Použijeme proto rovnici (2.18). Dosadíme $v_x = 0$ (v okamžiku t automobil zastavil) a rovnici řešíme vzhledem k neznámé t:

$$t = \left(-\frac{2(x - x_0)}{a_x}\right)^{1/2} = \left(-\frac{2(200\,\mathrm{m})}{-1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\right)^{1/2} =$$
$$= 16\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.7: *Rozměrová zkouška*

Jednotkou rychlosti je $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, jednotkou zrychlení $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ apod. Sčítat či odčítat můžeme jen ty členy, které mají stejnou jednotku (stejný fyzikální rozměr). Pokud se chceme ujistit, že jsme při odvozování rovnice neudělali chybu, provedeme tzv. rozměrovou zkoušku, tj. zkontrolujeme fyzikální rozměry všech členů v rovnici.

Například na pravé straně rovnice (2.15) ($x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) musí mít každý člen rozměr délky, ve shodě s rozměrem posunutí na levé straně. Člen $v_{0x}t$ má jednotku $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\mathrm{s}) = \mathrm{m}$ a člen $\frac{1}{2}a_x t^2$ jednotku $(\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\,(\mathrm{s^2}) = \mathrm{m}$. Oba členy tedy mají správný rozměr a rovnice je podle rozměrové zkoušky v pořádku. Číselné konstanty, jako například $\frac{1}{2}$ nebo π, jsou bezrozměrové (mají rozměr 1).

2.7 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: JINÝ PŘÍSTUP

Článek je určen čtenářům obeznámeným se základy integrálního počtu.

V předchozím článku jsme odvodili vztahy (2.11) a (2.15) na základě skutečnosti, že při rovnoměrně zrychleném pohybu splývá průměrné zrychlení částice v libovolném časovém intervalu s jejím okamžitým zrychlením v libovolném okamžiku. Přesvědčili jsme se, že vztah (2.15) obsahuje úplnou informaci o průběhu rovnoměrně zrychleného pohybu, jsou-li zadány hodnoty x_0, v_{0x} a a_x. Vztah (2.11) je jeho derivací. Závislosti (2.11) a (2.15) lze odvodit i jiným způsobem, jehož předností je možnost zobecnění i na případy pohybu s libovolným zrychlením, závislým na čase. Postup spočívá v integraci zrychlení a_x, které je při rovnoměrně zrychleném pohybu konstantní. Podle definičního vztahu (2.8) platí

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},$$

tj.

$$\mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t.$$

Integrací obou stran rovnice dostáváme

$$\int \mathrm{d}v_x = \int a_x \,\mathrm{d}t.$$

Zrychlení je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál a píšeme

$$\int \mathrm{d}v_x = a_x \int \mathrm{d}t,$$

tj.

$$v_x = a_x t + C. \tag{2.19}$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky pro rychlost částice: v okamžiku $t = 0$ je rychlost $v_x = v_{0x}$. Dosadíme tyto hodnoty do vztahu (2.19), který platí pro libovolný okamžik, a tedy i pro $t = 0$. Dostaneme

$$v_{0x} = a_x \cdot 0 + C = C.$$

Zjištěnou hodnotu konstanty C dosadíme do (2.19) a získáváme časovou závislost rychlosti (2.11). Stejným postupem odvodíme závislost (2.15). Z definice rychlosti (2.4) přímo plyne

$$\mathrm{d}x = v_x \,\mathrm{d}t.$$

Integrací levé i pravé strany dostaneme

$$\int \mathrm{d}x = \int v_x \,\mathrm{d}t.$$

Z předchozích výsledků víme, že rychlost v_x závisí na čase podle (2.11). Nemůžeme ji tedy vytknout před integrál a přesně zopakovat postup použitý při integraci zrychlení. Místo v_x však dosadíme do integrálu funkci (2.11):

$$\int \mathrm{d}x = \int (v_{0x} + a_x t)\,\mathrm{d}t.$$

Počáteční rychlost v_{0x} je konstantní, takže integrál na pravé straně můžeme rozepsat do tvaru

$$\int \mathrm{d}x = v_{0x} \int \mathrm{d}t + a_x \int t \,\mathrm{d}t.$$

Integrace obou stran rovnice vede k výsledku

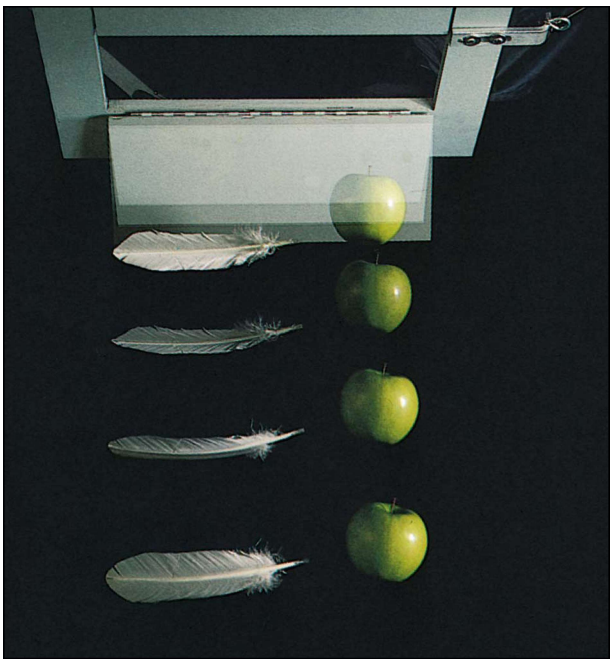
$$x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 + C', \tag{2.20}$$

kde C' je další integrační konstanta. Určíme ji opět z počáteční podmínky, tentokrát pro polohu částice: v čase $t = 0$ je $x = x_0$. Dosazením do (2.20) zjistíme, že hodnota konstanty C' je $C' = x_0$. Vztah (2.20) tak přejde na tvar (2.15).

2.8 SVISLÝ VRH

Představme si následující pokus: V blízkosti povrchu Země vrháme nějaké těleso svisle vzhůru nebo dolů (svislý směr udává např. volně visící olovnice) a nějak při tom zajistíme, aby se neuplatnil vliv odporu prostředí. Zjistíme, že se těleso s velkou přesností pohybuje se stálým zrychlením, směřujícím svisle dolů. Nazýváme je **tíhové zrychlení** a značíme písmenem g. Z experimentu víme, že tíhové zrychlení nezávisí na vlastnostech tělesa (hmotnosti, hustotě, tvaru, …) a je pro všechna tělesa stejné.

Zvláštním případem svislého vrhu je **volný pád**, při kterém těleso prostě upustíme. Vypouštíme ho tedy s nulovou počáteční rychlostí. Na obr. 2.10 vidíme fotografický záznam souběžného volného pádu dvou různých těles, pírka a jablka, ve vakuu. (Fotografie byly pořízeny v různých okamžicích s využitím stroboskopického efektu.) Při pádu obou těles se jejich rychlost zvyšuje se stejným zrychlením g.



Obr. 2.10 Pírko a jablko se při volném pádu ve vakuu pohybují se stejným zrychlením g. Nasvědčuje tomu rostoucí vzdálenost po sobě následujících fotografických obrazů objektů, které byly zaznamenány v rovnoměrně rozložených okamžicích.

Tíhové zrychlení se mírně mění se zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Při hladině moře ve středních zeměpisných šířkách má hodnotu zhruba $9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, viz vztah (2.10) a text za ním. Budeme jej používat v příkladech a cvičeních.

Rovnice popisující rovnoměrně zrychlený pohyb uvedené v tab. 2.1 platí i pro svislý vrh v blízkosti* zemského povrchu. Můžeme je tedy při řešení úloh o svislém vrhu těles používat, pokud je odpor vzduchu zanedbatelný. Tab. 2.1 přizpůsobíme nové situaci provedením dvou drobných změn: (1) Se svislým směrem, v němž se nyní odehrává pohyb tělesa, spojíme souřadnicovou osu y tak, aby směřovala vzhůru. (Osa x bývá častěji vyhrazena pro popis pohybu ve vodorovném směru.) Pro rychlost budeme používat označení v_y a pro zrychlení a_y. Tato změna usnadní i pozdější popis složitějších pohybů v rovině nebo v prostoru. (2) Tíhové zrychlení je při zvolené orientaci osy y záporné, a tak můžeme ve všech rovnicích zaměnit a_y za $-g$.

Po provedení popsaných úprav získáme obměnu tabulky 2.1 pro svislý vrh. Mějme na paměti:

Při zvolené orientaci osy y je tíhové zrychlení svislého vrhu $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jeho *velikost* je však $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Do rovnic (2.21) až (2.25) dosazujeme kladnou hodnotu g.

Dejme tomu, že vyhodíme jablko svisle vzhůru počáteční rychlostí v_{0y} a před dopadem je opět chytíme. Volný let jablka (od vyhození po zachycení) se řídí rovnicemi v tab. 2.2. Zrychlení je konstantní a směřuje dolů, tj. $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Rychlost se během letu mění podle vztahů (2.21) a (2.23). Při stoupání jablka velikost (kladné) rychlosti klesá až k nule. V okamžiku zastavení je jablko ve své nejvyšší poloze. Při pádu velikost (záporné) rychlosti roste.

Tabulka 2.2 **Rovnice pro svislý vrh**

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.21)	$v_y = v_{0y} - gt$	$y - y_0$
(2.22)	$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	v_y
(2.23)	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$	t
(2.24)	$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t$	g
(2.25)	$y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$	v_{0y}

* Pro ty nejpečlivější čtenáře: do výšek h zanedbatelně malých proti zemskému poloměru, tedy $h \ll 6{\cdot}10^3$ km.

PŘÍKLAD 2.9

Opravář upustil klíč do výtahové šachty vysokého domu.

(a) Jaká bude poloha klíče za 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Ze zadání je známa doba t, velikost zrychlení g a počáteční rychlost v_{0y}, o které můžeme předpokládat, že byla nulová. Chceme určit posunutí, chybějící veličinou je tedy rychlost v_y, která není zadána a její zjištění se v zadání nepožaduje. Této situaci odpovídá rovnice (2.22) z tab. 2.2. Počátek souřadnicové osy y zvolme v místě, kde opravář klíč upustil. Do rovnice (2.22) přímo dosadíme $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$ a $t = 1{,}5$ s. Dostaneme

$$y = 0(1{,}5\,\mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(1{,}5\,\mathrm{s})^2 \doteq$$
$$\doteq -11\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

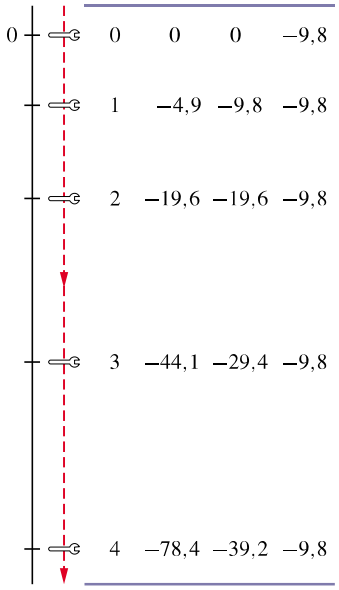
Záporné znaménko výsledku odpovídá očekávané skutečnosti, že se klíč po 1,5 s pádu nachází pod úrovní místa, kde opraváři vypadl.

(b) Jaká je rychlost klíče v okamžiku 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Rychlost je dána rovnicí (2.21)

$$v_y = v_{0y} - gt = 0 - (9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(1{,}5\,\mathrm{s}) \doteq$$
$$\doteq -15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko ukazuje, že rychlost klíče směřuje dolů. Tento výsledek opět není překvapivý. V obr. 2.11 jsou shrnuty základní údaje o letu klíče až do okamžiku $t = 4$ s.



t (s)	y (m)	v_y (m/s)	a_y (m/s^2)
0	0	0	−9,8
1	−4,9	−9,8	−9,8
2	−19,6	−19,6	−9,8
3	−44,1	−29,4	−9,8
4	−78,4	−39,2	−9,8

Obr. 2.11 Příklad 2.9. Poloha, rychlost a zrychlení volně padajícího tělesa.

PŘÍKLAD 2.10

V roce 1939 se Joe Sprinz z baseballového klubu v San Francisku pokusil překonat rekord v chytání baseballového míče padajícího z co největší výšky. Rok předtím dosáhli hráči klubu Cleveland Indians rekordního výkonu, když chytili baseballový míč po jeho pádu z výšky 210 m. Sprinz se pokusil zachytit míček padající z letadélka letícího přibližně ve výšce 240 m. Budeme předpokládat, že míček padal přesně z výšky 240 m a zanedbáme vliv odporu prostředí.

(a) Určete dobu letu míčku.

ŘEŠENÍ: Zvolme počátek svislé osy y v místě, kde byl míček vypuštěn a orientujme ji směrem vzhůru. Počáteční poloha je $y_0 = 0$, počáteční rychlost $v_{0y} = 0$. V zadání úlohy nevystupuje veličina v_y, použijeme proto rovnici (2.22):

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ -240\,\mathrm{m} &= 0t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2, \\ 4{,}9t^2 &= 240, \\ t &= 7\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Při výpočtu druhé odmocniny musíme výsledku přiřadit kladné nebo záporné znaménko. Vybrali jsme kladné znaménko, protože míč dopadl *poté*, co byl vypuštěn.

(b) Jaká byla rychlost míče těsně nad zemí?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet rychlosti přímo ze zadaných údajů (nikoliv z výsledku příkladu (a)) použijeme rovnici (2.23):

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) = \\ &= 0 - 2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(-240\,\mathrm{m}) = \\ &= 4{,}7{\cdot}10^3\,\mathrm{m^2\cdot s^{-2}}, \\ v_y &= -69\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\ (\doteq -250\,\mathrm{km/h}). \end{aligned}$$ (Odpověď)

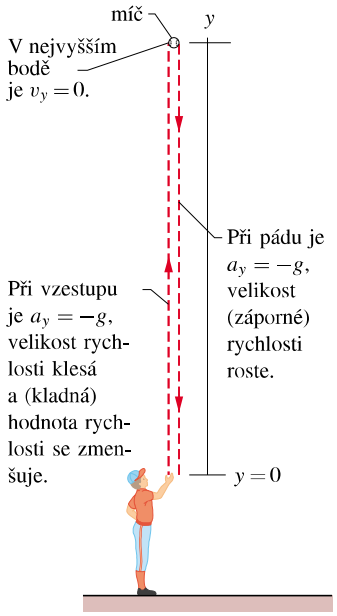
Znaménko výsledku je nyní záporné, neboť míček letí směrem dolů, v záporném směru osy y.

V popisovaném skutečném případě nebyl samozřejmě vliv odporu prostředí zanedbatelný. Kdybychom jej započítali, zjistili bychom, že let míčku trval déle a výsledná rychlost byla menší, než jsme vypočetli pro ideální situaci. I tak však byla rychlost míčku při dopadu značná. Když jej totiž Sprinz při pátém pokusu konečně zachytil do rukavice, byl náraz tak obrovský, že ho ruka s rukavicí udeřila do tváře, zlomila mu horní čelist na dvanácti místech a vyrazila pět zubů. Sprinz upadl do bezvědomí.

PŘÍKLAD 2.11

Nadhazovač vyhodí baseballový míč svisle vzhůru rychlostí $12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (obr. 2.12).

(a) Za jak dlouho dosáhne míč maximální výšky?



Obr. 2.12 Příklad 2.11. Hráč vrhá míč svisle vzhůru. Rovnice pro svislý vrh platí jak pro vzestup míče, tak pro jeho pád za předpokladu, že vliv odporu vzduchu lze zanedbat.

ŘEŠENÍ: V nejvyšším bodě letu je rychlost míče nulová. Z rovnice (2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{(12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) - 0}{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = \\ &= 1{,}2\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

(b) Jaká je maximální výška letu?

ŘEŠENÍ: Počátek osy y položme do místa vyhození míče. Do rovnice (2.23) dosadíme $y_0 = 0$ a vyjádříme z ní y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 - (0)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = \\ &= 7{,}3\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

V této části úlohy jsme také mohli s výhodou použít výsledku (a) a maximální výšku určit z rovnice (2.25). Ověřte si to!

(c) Za jak dlouho po vyhození dosáhne míč výšky 5 m?

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnici (2.22), která obsahuje pouze zadané veličiny a neznámý čas. Dosazením $y_0 = 0$ dostaneme

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

a tedy

$$5{,}0\,\mathrm{m} = (12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2.$$

Rovnici přepíšeme do tvaru (pro jednoduchost již nebudeme vypisovat jednotky):

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme*

$$t = 0{,}53\,\text{s} \quad \text{a} \quad t = 1{,}9\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Existují dvě možná řešení! To nás však nesmí překvapit: Míč skutečně prochází polohou $y = 5{,}0$ dvakrát. Jednou při výstupu a podruhé při pádu.

Provedeme ještě jednoduchou kontrolu získaných výsledků. Okamžik, kdy míč dosáhl maximální výšky, by měl na časové ose ležet právě uprostřed mezi oběma okamžiky, v nichž byla poloha míče určena souřadnicí 5 m. Je tomu skutečně tak. Aritmetický průměr těchto časových údajů

$$t = \tfrac{1}{2}(0{,}53\,\text{s} + 1{,}9\,\text{s}) = 1{,}2\,\text{s}$$

se shoduje s výsledkem příkladu (a).

KONTROLA 6: Jaké je znaménko posunutí míče v příkladu 2.11 (a) při vzestupu míče a (b) při jeho pádu? (c) Jaké je zrychlení v nejvyšším bodě letu?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.8: *Význam záporného znaménka*

Vzpomeňme si, že některé z hodnot polohy, rychlosti či zrychlení získané při řešení př. 2.9, 2.10 a 2.11 měly záporné znaménko. Je důležité, abychom význam záporného znaménka u těchto veličin uměli správně interpretovat. Při řešení úloh o svislém vrhu jsme svislou souřadnicovou osu y volili vždy tak, aby její kladný směr byl orientován vzhůru. Volba opačné orientace osy by byla stejně dobře možná. Počátek osy y jsme vybírali tak, aby to bylo při řešení konkrétní úlohy výhodné: v př. 2.9 byl počátek umístěn v poloze ruky opravářе, v př. 2.10 v letadélku a v př. 2.11 v ruce nadhazovače. Záporná hodnota souřadnice určující polohu tělesa znamená, že se těleso nachází *pod úrovní* počátku osy y.

Záporná rychlost znamená, že se těleso pohybuje tak, že hodnota jeho y-ové souřadnice klesá, v našich příkladech tedy dolů. Tato interpretace záporného znaménka rychlosti je správná nezávisle na okamžité poloze tělesa.

Ve všech řešených příkladech bylo zrychlení svislého vrhu záporné ($= -9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), bylo tedy orientováno proti kladnému směru osy y. Význam záporného znaménka zrychlení je v tomto případě následující: pohybuje-li se těleso vzhůru (jeho rychlost je kladná) je vlivem záporného zrychlení brzděno (velikost jeho rychlosti klesá). Naopak, těleso pohybující se dolů (rychlost je záporná) je vlivem záporného zrychlení urychlováno, velikost jeho rychlosti roste. Tato interpretace nezávisí na poloze a rychlosti tělesa.

* Řešení obecné kvadratické rovnice je uvedeno v dod. E.

Bod 2.9: *Neočekávané výsledky*

Stává se, že při výpočtu dostaneme i výsledky, které se na první pohled zdají nesmyslné, jako třeba v př. 2.11c. Získáme-li více výsledků, než jsme očekávali, nezavrhujme hned ty, které jsou zdánlivě nesprávné. Zvažujme je pečlivě a pokusme se nalézt jejich fyzikální význam. Často nějaký mají.

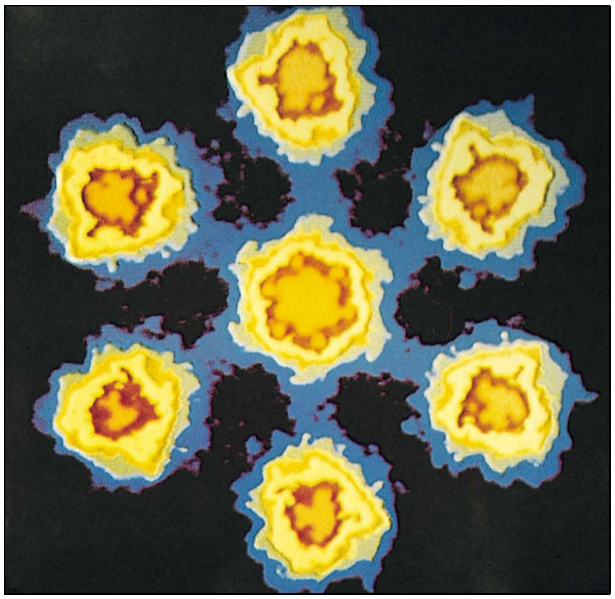
I záporný časový údaj má svůj dobrý smysl. Odpovídá události, která nastala dříve než v okamžiku $t = 0$, kdy jsme se (zcela libovolně) rozhodli spustit stopky.

2.9 ČÁSTICOVÁ FYZIKA

Na různých místech v knize občas odbočíme od popisu velkých objektů našeho světa, se kterými máme každodenní a bezprostřední zkušenosti, a všimneme si objektů mnohem menších. Doposud jsme pracovali s objektem zvaným hmotný bod, který má i přes své zanedbatelné rozměry konečnou hmotnost. Nahrazovali jsme jím reálná tělesa jako například dítě, míč, automobil. Zůstává však otázka, jak malé ve skutečnosti mohou reálné objekty být. Jaké jsou „nejposlednější“ částečky přírody? Tímto problémem se zabývá **fyzika elementárních částic**, moderní oblast fyziky, která poutá pozornost celé řady špičkových fyziků.

Poznání, že hmota není spojitá, ale je tvořena velmi malými objekty — atomy, bylo klíčové pro pochopení mnoha zákonitostí nejen ve fyzice, ale i v chemii. Pomocí moderních mikroskopů je možné jednotlivé atomy dokonce i zobrazit. Jedna z ukázek takového zobrazení je na obr. 2.13. Hmota tedy není spojitá, ale „zrnitá“. Také veličiny, které její chování popisují, nabývají **diskrétních** — **kvantovaných** hodnot (lat. *quantus* = jak mnoho). Mění se jen po určitých dávkách, zvaných **kvanta**. Kvantování je základní vlastností přírody. V dalším textu knihy poznáme mnohé fyzikální veličiny, které jsou kvantovány, pokud je zkoumáme v dostatečně jemném měřítku. Tato „všudypřítomnost“ kvantování dala jméno i fyzikální disciplíně zabývající se zákony mikrosvěta, **kvantové fyzice**.

Mezi světem velkých těles (makrosvětem) a světem kvantovým (mikrosvětem) není ostrá hranice. Zákony mikrosvěta jsou platné všeobecně. Jakmile však přejdeme od atomů k míčům a automobilům, stává se kvantování méně nápadným a nakonec je zcela neměřitelné. Diskrétnost (v matematice a fyzice protiklad spojitosti, nespojitost) se ztrácí a obecné zákony kvantové fyziky směřují ke speciálním limitním tvarům, tzv. zákonům **klasické fyziky**, které dobře popisují pohyb velkých těles.



Obr. 2.13 Šesterečné uspořádání atomů uranu je „zviditelněno“ pomocí zobrazení v rastrovacím prozařovacím elektronovém mikroskopu. Barvy jsou jednotlivým částem objektu uměle přiřazeny počítačovým zpracováním obrazu (tzv. „nepravé barvy“).

Stavba atomu

Atom je složen z velmi malého, nepředstavitelně hutného **jádra**. V jádru, které je obklopeno jedním nebo více lehkými **elektrony**, je soustředěna prakticky celá hmota atomu. Obvykle předpokládáme, že jádro i celý atom mají kulový tvar. Poloměr atomu je řádově 10^{-10} m, jádro je asi 100 000krát menší, přibližně 10^{-15} m. Soudržnost atomu je zajištěna vzájemným elektrickým přitahováním záporných elektronů v atomovém obalu s jádrem, obsahujícím kladné protony. Zákony popisující tuto přitažlivou interakci budeme studovat později. V této chvíli si pouze uvědomme, že bez ní by nemohly existovat atomy, a tedy ani my sami.

Stavba jádra

Nejmenší jádro, jádro běžného atomu vodíku, je tvořeno jediným protonem. Existují i dvě složitější varianty, zvané **izotopy** neboli **nuklidy** vodíku, jejichž jádro navíc obsahuje jeden nebo dva elektricky neutrální **neutrony**. Tyto izotopy nazýváme **deuterium** a **tritium**.

Vodík, ve všech variantách, je příkladem jednoho **prvku**. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atom s jedním protonem v jádře je vodík, atom se šesti protony v jádře je uhlík. Různé izotopy téhož prvku se liší počtem neutronů v jádře. Protony a neutrony nazýváme společně **nukleony**.

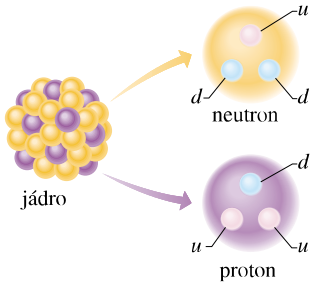
Roli neutronů v jádře lze velmi zhruba charakterizovat tak, že zabezpečují jeho „soudržnost“. Protony totiž mají kladný náboj, a elektrickými silami se proto velmi silně odpuzují. Mezi nukleony však při velmi malých vzdálenostech působí i přitažlivá síla, zvaná **silná interakce**. Jediný atom, který nepotřebuje neutrony k zajištění stability svého jádra, je běžný atom vodíku. Jeho jádro je totiž tvořeno jediným protonem. Všechna ostatní jádra by se bez neutronů rozpadla.

Mnoho izotopů běžných prvků je nestabilních. Naštěstí ty, na kterých bytostně závisí naše existence, mají též izotopy stabilní. Například 19 z 21 izotopů mědi je nestabilních, samovolně se rozpadají a mění v jiné prvky.

Měď, kterou známe jako celkem běžný kov a používáme ji v elektronice i jiných technologiích, je složena ze zbývajících dvou stabilních izotopů.

Struktura subatomárních částic

Elektron si sice někdy počíná velmi neobvykle, ale přesto je to jednoduchá částice. Při detekci se chová tak, jako by neměl žádné rozměry ani vnitřní strukturu. Elektron (značka e, někdy pro upřesnění e^-) patří do skupiny částic zvaných **leptony**. Je jich celkem šest. Vedle elektronu existují ještě dvěstěkrát těžší **mion** (značka μ, dříve nazývaný **mezon** μ) a více než třítisíckrát těžší **tauon** (značka τ). Každý z nich má své **neutrino** ν_e, ν_μ, ν_τ s hmotností téměř nulovou (možná i přesně nulovou). Ke každému leptonu existuje **antičástice**. Antičástici k elektronu nazýváme **pozitron** (značka e^+).



Obr. 2.14 Představa atomového jádra a protonů a neutronů, z nichž je složeno. Protony a neutrony jsou tvořeny kvarky „up“ (u) a „down“ (d).

Podle současných znalostí se protony a neutrony liší od elektronů a dalších leptonů tím, že se skládají ze tří jednodušších částic zvaných **kvarky**.* Proton se skládá ze dvou u-kvarků (angl. *up* = nahoru) a jednoho d-kvarku (angl. *down* = dolů). Neutron je tvořen jedním u-kvarkem

* Slovo „kvark“ pochází ze slovních hříček užitých v básni *Finnegans Wake* od Jamese Joyce.

a dvěma d-kvarky (obr. 2.14). I jiné částice, které jsme dříve považovali za elementární, se skládají z kvarků.

Je podivuhodné, že kvarků je známo šest druhů*, tedy stejný počet jako leptonů. Fyziky zajímá, zda má tato shoda hlubší smysl, nebo zda je zcela náhodná. Odpověď prozatím neznáme.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Poloha

Polohu hmotného bodu určujeme souřadnicí x vzhledem k **počátku** souřadnicové osy. Souřadnice může být jak kladná, tak i záporná, podle toho, na které straně od počátku osy se bod nachází. Je-li hmotný bod přímo v počátku, je jeho souřadnice nulová. Kladným směrem osy rozumíme směr, ve kterém souřadnice roste, opačný směr je záporný.

Posunutí

Posunutí Δx hmotného bodu je definováno jako změna jeho polohy:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

Posunutí je vektorová veličina. Při jednorozměrném pohybu je kladné, pokud se hmotný bod posunul v kladném směru osy x, v opačném případě je záporné.

Průměrná rychlost

Při přesunutí hmotného bodu z polohy x_1 do polohy x_2 za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ je jeho *průměrná rychlost*

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Znaménko průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ určuje směr pohybu ($\overline{v_x}$ je vektorová veličina). Průměrná rychlost nezávisí na trajektorii, kterou hmotný bod při svém pohybu skutečně prošel, ale pouze na výchozí a koncové poloze.

V grafu závislosti polohy na čase $x(t)$ je průměrná rychlost v časovém intervalu Δt rovna směrnici přímky spojující krajní body části křivky vymezené tímto časovým intervalem.

Průměrná velikost rychlosti

Průměrná velikost rychlosti hmotného bodu závisí na skutečně uražené dráze v daném časovém intervalu:

$$\overline{v} = \frac{\text{skutečně uražená dráha}}{\text{celá doba pohybu}}. \tag{2.3}$$

Průměrná velikost rychlosti *není totéž jako* velikost průměrné rychlosti.

Okamžitá rychlost

Budeme-li zmenšovat Δt v rovnici (2.2) bez omezení k nule, bude se průměrná rychlost $\overline{v_x}$ limitně blížit k jisté hodnotě v_x, kterou nazýváme *okamžitá rychlost* (zjednodušeně jen **rychlost**) hmotného bodu v daném okamžiku. Je tedy

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

Okamžitá rychlost je rovna směrnici tečny vedené ke grafu funkce $x(t)$ v bodě, který odpovídá danému okamžiku t.

Průměrné zrychlení

Průměrné zrychlení je definováno jako poměr změny rychlosti Δv_x a délky časového intervalu Δt, během něhož k uvedené změně došlo:

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.7}$$

Znaménko zrychlení $\overline{a_x}$ určuje jeho směr.

Okamžité zrychlení

Okamžité zrychlení (zjednodušeně jen **zrychlení**) získáme ze zrychlení průměrného analogickým limitním přechodem, jako v případě definice okamžité rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

Zrychlení je také druhou derivací polohy $x(t)$ podle času:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.9}$$

V grafu závislosti $v_x(t)$ je zrychlení a_x v okamžiku t dáno směrnicí tečny ke grafu sestrojené v bodě, který tomuto okamžiku odpovídá.

Rovnoměrně zrychlený pohyb

Na obr. 2.9 jsou zakresleny závislosti $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$ pro velmi důležitý případ (přímočarého) pohybu, totiž pohybu s konstantním zrychlením a_x. Tento pohyb nazýváme **rovnoměrně zrychlený**. Je popsán pěti rovnicemi shrnutými v tab. 2.1:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{2.11}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2, \tag{2.15}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0), \tag{2.16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t, \tag{2.17}$$

$$x - x_0 = v_x t - \tfrac{1}{2} a_x t^2. \tag{2.18}$$

Není-li zrychlení konstantní, pak tyto rovnice *neplatí*.

* Další typy jsou c (angl. *charm* = půvabný), s (angl. *strange* = podivný), t (angl. *top* = vršek) a b (angl. *bottom* = spodek).

Tíhové zrychlení

Důležitými a častými případy rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu jsou volný pád a svislý vrh tělesa v blízkosti zemského povrchu. Rovnice popisující obecný rovnoměrně zrychlený pohyb platí i pro tyto případy, je však výhodné je mírně upravit: (1) Polohu tělesa určujeme na svislé souřadnicové ose y orientované kladným směrem vzhůru. (2) Zrychlení a_y nahradíme hodnotou $-g$, kde g je velikost tíhového zrychlení. V blízkosti povrchu Země je $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Svislý vrh je popsán rovnicemi (2.21) až (2.25).

Stavba atomů

Všechny látky se skládají z atomů, které jsou tvořeny velmi hutným **jádrem** obklopeným lehkými **elektrony**. Jádro je složeno z neutronů a protonů. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atomy se stejným počtem protonů, ale odlišným počtem neutronů, se nazývají **izotopy** daného prvku.

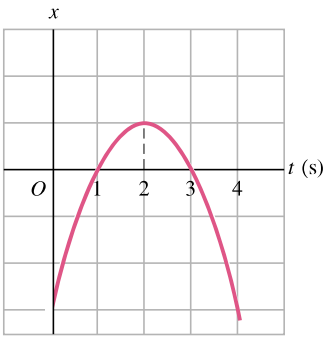
Kvarky a leptony

Elektrony se chovají jako částice bez vnitřní struktury. Protony a neutrony jsou složeny z ještě elementárnějších částic, které nazýváme **kvarky**. V současnosti je známo šest druhů kvarků a ke každému z nich existuje antičástice. Elektrony patří do skupiny **leptonů**, zahrnující rovněž šest druhů. Ke každému leptonu existuje antičástice.

OTÁZKY

1. (a) Může mít těleso současně nulovou rychlost a nenulové zrychlení? (b) Může se těleso pohybovat proměnnou rychlostí, jejíž velikost je konstantní? (c) Je možné, aby se směr pohybu tělesa změnil v opačný, má-li těleso konstantní zrychlení? (d) Může se velikost rychlosti tělesa zvyšovat za současného poklesu velikosti jeho zrychlení?

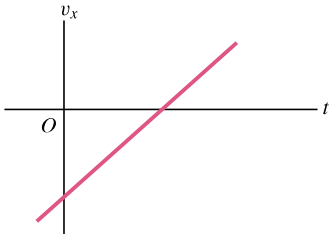
2. Na obr. 2.15 je zakreslen graf časové závislosti polohy tělesa $x(t)$. (a) Jaké je znaménko x-ové souřadnice tělesa v okamžiku $t = 0$? Rozhodněte, zda je v okamžicích (b) $t = 1\,\mathrm{s}$, (c) $t = 2\,\mathrm{s}$ a (d) $t = 3\,\mathrm{s}$ rychlost tělesa kladná, záporná, nebo nulová. (e) Kolikrát (během zobrazeného časového intervalu) prošlo těleso počátkem soustavy souřadnic $x = 0$?



Obr. 2.15 Otázka 2

3. Hmotný bod se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. V okamžiku $t_0 = 0$ je jeho poloha určena souřadnicí $x_0 = -20\,\mathrm{m}$. Sledujme znaménko jeho počáteční rychlosti v_0 (v čase t_0) a znaménko jeho zrychlení. Mohou nastat čtyři případy: (1) +, +, (2) +, −, (3) −, +, (4) −, −. (a) Ve kterém z nich se rychlost hmotného bodu v jistém okamžiku $t > 0$ anuluje? (b) Ve kterém z případů bod s jistotou projde počátkem soustavy souřadnic? (c) Ve kterém z nich počátkem nikdy neprojde? Ve všech částech úlohy uvažujte pouze o kladných hodnotách časové proměnné t.

4. Na obr. 2.16 je zakreslena časová závislost rychlosti částice pohybující se podél osy x. (a) Jaký je počáteční směr jejího pohybu? (b) Kterým směrem se bude částice pohybovat po velmi dlouhé době? (c) Je v některém okamžiku její rychlost nulová? (d) Určete znaménko jejího zrychlení. (e) Je její zrychlení konstantní nebo proměnné?



Obr. 2.16 Otázka 4

5. V následujících čtyřech situacích je zadána počáteční a výsledná rychlost hmotného bodu: (a) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (d) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Velikost zrychlení je ve všech případech stejná. Uspořádejte situace sestupně podle velikosti posunutí hmotného bodu, ke kterému došlo během sledované změny jeho rychlosti.

6. Následující vztahy popisují čtyři případy časové závislosti rychlosti tělesa: (a) $v_x = 3$; (b) $v_x = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $v_x = 3t - 4$; (d) $v_x = 5t^2 - 3$. Ve kterých z nich lze pro popis pohybu tělesa použít vztahů z tab. 2.1?

7. Z horkovzdušného balonu stoupajícího se zrychlením $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ vypadlo jablko. (a) Určete zrychlení jablka vůči Zemi. (b) Jaká je rychlost jablka (velikost a směr) bezprostředně po jeho upuštění, je-li v tom okamžiku rychlost balonu rovna $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

8. (a) Nakreslete závislosti $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující pohyb jablka, které vyhodíme svisle vzhůru z hrany útesu. Při pádu jablko útes těsně míjí a padá podél něj dolů. (b) Do grafů získaných v části (a) zakreslete tytéž veličiny, tj. $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$, pro případ, že jsme jablko z hrany útesu pouze volně vypustili.

9. Míč, který jsme vyhodili z hrany skalního útesu svisle vzhůru rychlostí o velikosti v_0, dopadl na zem pod úrovní útesu. Rozhodněte, zda by rychlost při dopadu míče byla větší, menší či

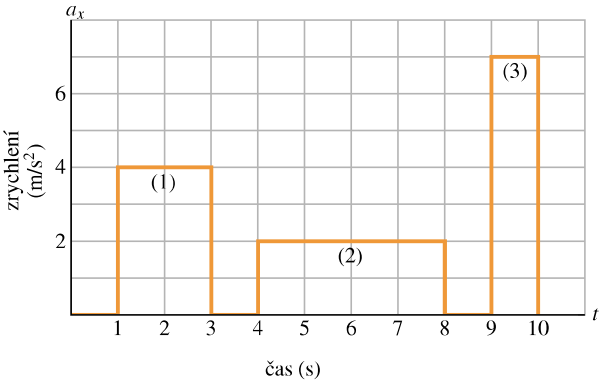
stejná jako v prvém případě, kdybychom jej hodili svisle dolů stejně velkou rychlostí v_0? (*Tip*: Použijte rovnici (2.23).)

10. Řidička jede v autě rychlostí 100 km/h. Náhle si uvědomí, že už už dohání autobus, který jede stejným směrem rychlostí 60 km/h. Musí začít brzdit. Jaká může být nejvyšší rychlost jejího auta v okamžiku, kdy autobus dostihne, nemá-li dojít ke srážce? (Příprava na úlohu 57.)

11. Motocyklista stojící v místě o souřadnici $x = 0$ se začne rozjíždět v okamžiku $t = 0$. Jeho zrychlení má konstantní velikost 2,0 m·s^{-2} a míří podél kladné osy x. O dvě sekundy později projíždí bodem $x = 0$ automobil, který jede stejným směrem. Jeho rychlost má v tomto okamžiku velikost 8 m·s^{-1}. Auto zvyšuje svou rychlost s konstantním zrychlením 3,0 m·s^{-2}. Zapište dvojici rovnic, jejichž řešením lze určit polohu místa, v němž řidič auta předjede motocyklistu. (Příprava na úlohu 56.)

12. Na obr. 2.17 je znázorněna časová závislost zrychlení částice $a_x(t)$. Částice je postupně urychlována ve třech fázích svého pohybu. Seřaďte jednotlivé fáze sestupně podle přírůstku rychlosti.

13. Dítě upustilo z balkonu dva stejné míče v časovém odstupu 1 s. Rozhodněte, zda se během pádu míčů bude vzdálenost mezi nimi zvětšovat, zmenšovat, nebo zůstane stejná.



Obr. 2.17 Otázka 12

CVIČENÍ & ÚLOHY

Úkolem některých cvičení je nakreslit graf časové závislosti polohy, rychlosti nebo zrychlení. Postačí jen schematický náčrtek, vždy je však třeba pečlivě popsat osy a zřetelně odlišit přímé a zakřivené části grafu. Při kreslení grafu je možné použít počítač nebo programovatelnou kalkulačku.

ODST. 2.3 Průměrná rychlost

1C. Carl Lewis uběhne sprinterskou trať 100 m přibližně za 10 s. Bill Rodgers dokáže absolvovat maraton (42 km 194 m) asi za 2 h 10 min. (a) Jaké jsou průměrné velikosti rychlostí obou běžců? (b) Za jak dlouho by Lewis uběhl maraton, kdyby vydržel po celou dobu sprintovat?

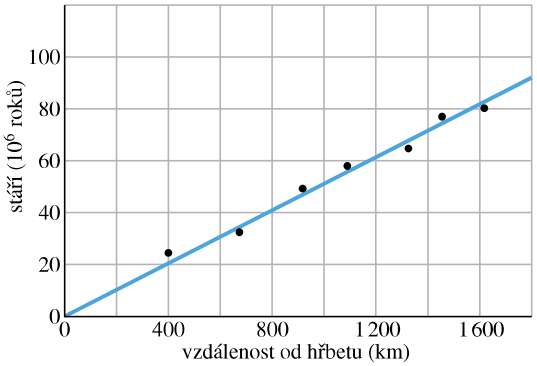
2C. Při silném kýchnutí zavře člověk oči asi na 0,50 s. Jakou vzdálenost urazí za tuto dobu automobil, jede-li rychlostí 90 km/h?

3C. Průměrné mrknutí trvá asi 100 ms. Jakou dráhu urazí stíhačka Mig 25 při mrknutí pilota, letí-li rychlostí 3 380 km/h?

4C. Nadhazovač v baseballu dokáže vyhodit míček vodorovnou rychlostí 160 km/h. Za jak dlouho míček doletí k pálkaři vzdálenému 18,4 m?

5C. Hornina uvolněná z oceánského hřbetu se pomalu vzdaluje od jeho paty přibližně konstantní rychlostí. Graf na obr. 2.18 znázorňuje tuto vzdálenost jako funkci času. Vypočtěte rychlost posuvu horniny v cm za rok.

6C. O kolik minut se zkrátila doba jízdy po dálnici z Prahy do Brna po zvýšení rychlostního limitu ze 110 km/h na 130 km/h? Předpokládejte, že řidič projede celou trasu nejvyšší povolenou rychlostí.



Obr. 2.18 Cvičení 5

7C. S použitím tabulek v dodatku D určete rychlost světla ($3{\cdot}10^8$ m·s^{-1}) v mílích za hodinu, stopách za sekundu, světelných rocích za rok.

8C. Automobil jede po rovné silnici rychlostí 30 km/h. Poté, co urazil dráhu 40 km, zvýší rychlost na 60 km/h a pokračuje v jízdě dalších 40 km. (a) Jaká je průměrná rychlost automobilu na celé osmdesátikilometrové trati? (Zvolte soustavu souřadnic tak, aby osa x byla souhlasně rovnoběžná se směrem jízdy automobilu a určete průměrnou rychlost včetně znaménka.) (b) Jaká je průměrná velikost rychlosti automobilu? (c) Určete průměrnou rychlost graficky (pomocí grafu $x(t)$).

9Ú. Vypočtěte průměrnou rychlost pohybu člověka ve dvou případech: (a) Chůze 72 m rychlostí 1,2 m·s^{-1} a běh 72 m rychlostí 3 m·s^{-1}. (b) Chůze 1 min rychlostí 1,2 m·s^{-1} a běh 1 min rychlostí 3 m·s^{-1}. (c) V obou případech určete průměrnou rychlost graficky (z grafu $x(t)$).

10Ú. Automobil jede do kopce rychlostí 40 km/h. Nahoře ne-

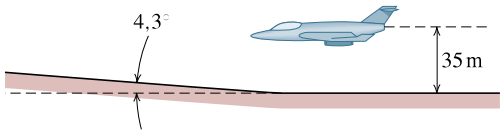
čeká a vrací se stejnou cestou zpět, tentokrát rychlostí 60 km/h. Určete průměrnou velikost rychlosti pro celou trasu.

11Ú. Nákladní automobil jede z Brna do Olomouce (77 km). V první polovině jízdní *doby* udržuje konstantní rychlost o velikosti 56 km/h, ve druhé polovině pak 89 km/h. Na zpáteční cestě projede první polovinu *vzdálenosti* rychlostí o velikosti 56 km/h a druhou rychlostí o velikosti 89 km/h. Jaká je průměrná velikost rychlosti jízdy (a) z Brna do Olomouce, (b) z Olomouce do Brna a (c) na celé cestě? (d) Jaká je průměrná rychlost (vektor) na celé cestě? Zvolte soustavu souřadnic tak, aby trasa z Brna do Olomouce vedla podél kladné osy x. Nakreslete graf $x(t)$ pro tuto část cesty a určete z něj průměrnou rychlost.

12Ú. Poloha tělesa pohybujícího se po ose x je dána vztahem $x = 3t - 4t^2 + t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaká je poloha tělesa v okamžicích $t = 1$ s, 2 s, 3 s a 4 s? (b) Jaké je posunutí tělesa v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4$ s? (c) Jaká je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 2$ s do $t = 4$ s? (d) Nakreslete graf funkce $x(t)$ pro $0 \leqq t \leqq 4$ s a použijte jej pro grafické řešení úkolu (c).

13Ú. Poloha hmotného bodu je dána vztahem $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, kde x je v centimetrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost hmotného bodu v časovém intervalu od $t = 2{,}00$ s do $t = 3{,}00$ s, okamžitou rychlost v okamžicích (b) $t = 2{,}00$ s, (c) $t = 3{,}00$ s a (d) $t = 2{,}50$ s, (e) okamžitou rychlost v bodě ležícím uprostřed mezi polohami, v nichž se hmotný bod nachází v okamžicích $t = 2{,}00$ s a $t = 3{,}00$ s. (f) Předchozí úkoly vyřešte i graficky. Použijte grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$.

14Ú. Při testování radarové navigace letí tryskové letadlo ve výšce 35 m nad zemí. Náhle dorazí k místu, kde se terén počíná zvedat s mírným, snadno přehlédnutelným, sklonem 4,3° (obr. 2.19). V jakém nejzazším okamžiku musí být dokončena korekce letu, aby letadlo nenarazilo na zem? Rychlost letounu je 1 300 km/h.



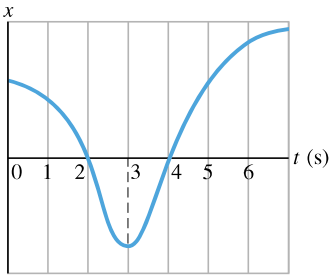
Obr. 2.19 Úloha 14

15Ú. Dva vlaky jedou po přímé trati proti sobě, každý rychlostí 30 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 60 km, vyletí od jednoho z nich pták rychlostí 60 km/h a zamíří k druhému. Jakmile k němu doletí, obrátí se a vrací se zpět k prvnímu vlaku. Zde se opět obrátí a takto létá, dokud se vlaky nesetkají. Nezabývejte se pohnutkami, které vedou ptáka právě k tomuto pohybu a určete, (a) kolikrát pták přelétne vzdálenost mezi oběma vlaky a (b) jakou celkovou dráhu při tom urazí?

ODST. 2.4 Okamžitá rychlost

16C. (a) Poloha částice je dána rovnicí $x = 4 - 12t + 3t^2$ (kde t je v sekundách a x v metrech). Pro okamžik $t = 1$ s určete (a) rychlost částice, (b) směr jejího pohybu a (c) velikost její rychlosti. (d) Rozhodněte, zda je velikost rychlosti částice pro $t > 1$ s větší či menší než pro $t = 1$ s. Následující dvě otázky se pokuste zodpovědět bez výpočtu. (e) Existuje okamžik, ve kterém má částice nulovou rychlost? (f) Nastane pro $t > 3$ s okamžik, kdy se směr pohybu částice obrátí?

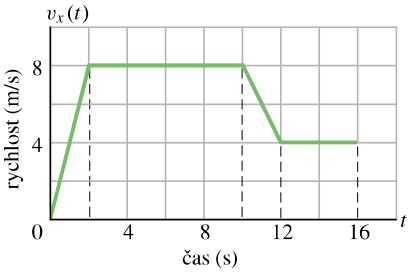
17C. Obr. 2.20 popisuje pohyb pásovce, který běhá podél osy x střídavě doleva (záporný směr) a doprava. (a) Je pásovec v některém okamžiku (kterém) nalevo od počátku osy x? Je v některém okamžiku (kterém) jeho rychlost (b) záporná, (c) kladná, nebo (d) nulová?



Obr. 2.20 Cvič. 17

18C. Myš je uvězněna v úzkém průchodu (osa x) a hledá cestu ven. Při tom zmateně pobíhá sem a tam: (1) běží vlevo (v záporném směru osy) konstantní rychlostí o velikosti 1,2 m·s^{-1}, (2) postupně zpomaluje až na rychlost 0,6 m·s^{-1}, (3) opět zrychluje na 2,0 m·s^{-1} a stále běží doleva. (4) Zpomaluje do zastavení, rozběhne se doprava a dosáhne rychlosti o velikosti 1,2 m·s^{-1}. Nakreslete graf $x(t)$. Určete časové intervaly, v nichž je sklon křivky grafu největší a nejmenší.

19Ú. Jakou vzdálenost urazí za 16 s běžec, jehož rychlost $v_x(t)$ je v závislosti na čase popsána grafem na obr. 2.21?

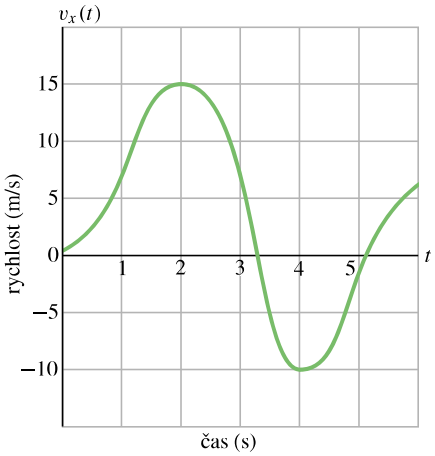


Obr. 2.21 Úloha 19

ODST. 2.5 Zrychlení

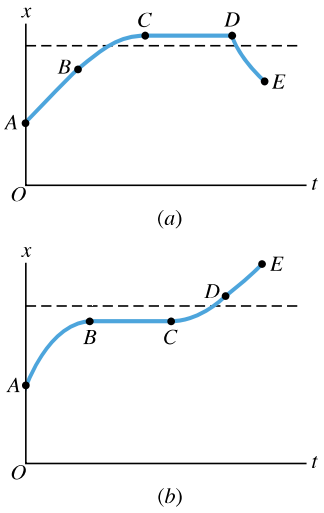
20C. Částice má počáteční rychlost 18 m·s^{-1}. V průběhu následujících 2,4 s se její rychlost změní tak, že dosáhne velikosti 30 m·s^{-1}, míří však v opačném směru. (a) Jaká je velikost průměrného zrychlení částice v tomto časovém intervalu? (b) Průměrné zrychlení určete také pomocí grafu $v_x(t)$.

21C. Těleso se pohybuje po přímce a jeho rychlost je popsána grafem na obr. 2.22. Načrtněte graf závislosti zrychlení tělesa na čase.



Obr. 2.22 Cvičení 21

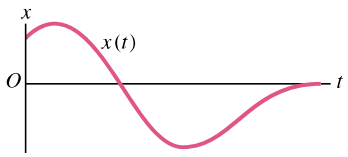
22C. Časová závislost polohy částice pohybující se podél osy x je zadána grafem na obr. 2.23a. (a) Ve kterém z úseků AB, BC, CD a DE je rychlost v_x kladná, záporná, nebo nulová? Ve kterém z nich je zrychlení a_x kladné, záporné, nebo nulové? (Neuvažujte krajní body intervalů). (b) Je v některém ze zmíněných úseků zrychlení tělesa zjevně proměnné? (c) Změní se nějak odpovědi na předchozí otázky, posunou-li se souřadnicové osy tak, že osa t splyne s přerušovanou čarou?



Obr. 2.23
Cvičení 22 a 23

23C. Zodpovězte otázky ze cvičení 22 pro případ pohybu znázorněného na obr. 2.23b.

24C. Částice se pohybuje podél osy x. Časový průběh její polohy $x(t)$ je zadán grafem na obr. 2.24. Nakreslete grafy $v_x(t)$ a $a_x(t)$.



Obr. 2.24
Cvičení 24

25C. Nakreslete schematicky možný tvar grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$, pohybujícího se podél osy x tak, že v okamžiku $t = 1$ s je (a) jeho rychlost nulová a zrychlení kladné, (b) rychlost nulová a zrychlení záporné, (c) rychlost záporná a zrychlení kladné, (d) rychlost záporná a zrychlení záporné. (e) Ve kterém z těchto případů velikost rychlosti v okamžiku $t = 1$ s roste?

26C. Uvažujme veličiny definované výrazy $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2$ a $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. (a) Představují tyto výrazy tutéž veličinu? (b) Jaké jsou jejich jednotky v soustavě SI?

27C. Částice se pohybuje podél osy x. Její poloha je popsána rovnicí $x = 50t + 10t^2$, kde x je zadáno v metrech a t v sekundách. Vypočtěte (a) průměrnou rychlost částice během prvních tří sekund jejího pohybu, (b) rychlost částice v okamžiku $t = 3$ s, (c) zrychlení částice v okamžiku $t = 3$ s. (d) Zodpovězte otázku (a) pouze užitím grafu $x(t)$. (e) Pomocí téhož grafu řešte i úkol (b). (f) Nakreslete graf $v_x(t)$ a použijte jej k řešení úkolu (c).

28C. Poloha hmotného bodu je dána rovnicí $x = 20t - 5t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Je v některém okamžiku rychlost hmotného bodu nulová? V kladném případě tento okamžik určete. (b) Kdy je zrychlení a_x hmotného bodu nulové? (c) Kdy je a_x záporné, kladné? (d) Nakreslete grafy $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

29Ú. Muž čeká na jednom místě od okamžiku $t = 0$ do $t = 5{,}00$ min a potom jde svižným krokem stále jedním směrem. Jeho rychlost je konstantní a má velikost $2{,}20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Chůze trvá 5 minut, tj. od okamžiku $t = 5{,}00$ min do $t = 10{,}0$ min. Určete průměrnou rychlost a průměrné zrychlení pohybu člověka v následujících časových intervalech: (a) od 2,0 min do 8,0 min, (b) od 3,0 min do 9,0 min. (c) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ a vyřešte úkoly (a) a (b) také graficky.

30Ú. Poloha tělesa závisí na čase vztahem $x = 2{,}0t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost a (b) průměrné zrychlení tělesa v časovém intervalu od $t = 1{,}0$ s do $t = 2{,}0$ s. Vypočtěte jeho (c) okamžitou rychlost a (d) okamžité zrychlení v okamžicích $t = 1{,}0$ s a $t = 2{,}0$ s. (e) Porovnejte průměrné a okamžité hodnoty odpovídajících si veličin a rozdíly vysvětlete. (f) Řešte úkoly (a) až (d) pomocí grafů $x(t)$ a $v_x(t)$.

31Ú. Při jedné videohře se světelná stopa na monitoru pohybuje podle rovnice $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, kde x je vzdálenost od levého okraje monitoru měřená v centimetrech a t je čas v sekundách. Jakmile stopa dorazí k levému ($x = 0$) nebo pravému ($x = 15{,}0$ cm) okraji obrazovky, čas t se vynuluje a pohyb stopy se opakuje v souhlasu se zadanou časovou závislostí $x(t)$. (a) Určete, ve kterém okamžiku od počátku pohybu se rychlost stopy anuluje. (b) Ve kterém místě obrazovky k tomu dojde? (c) Jaké je v tom okamžiku zrychlení stopy? (d) Kterým směrem se stopa pohybovala bezprostředně před tím, než dosáhla nulové rychlosti? (e) Kterým směrem potom její pohyb pokračoval? (f) Za jakou dobu od počátku pohybu dorazila stopa poprvé k okraji obrazovky?

32Ú. Poloha částice, pohybující se podél osy x, závisí na čase vztahem $x = at^2 - bt^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaký je fyzikální rozměr konstant a a b? Předpokládejme, že tyto konstanty mají v jednotkách SI hodnoty $a = 3{,}0$ a $b = 1{,}0$. (b) Určete okamžik, v němž má souřadnice x částice největší hodnotu. (c) Jakou vzdálenost urazí částice během prvních 4,0 sekund pohybu? (d) Vypočtěte její posunutí v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (e) Určete její rychlost v okamžicích $t = 1{,}0$ s; 2,0 s; 3,0 s a 4,0 s. (f) Jaké je v těchto okamžicích její zrychlení?

ODST. 2.6 Rovnoměrně zrychlený pohyb: speciální případ

33C. Pohyb hlavy útočícího chřestýše je tak prudký, že její zrychlení může dosáhnout až hodnoty 50 m·s^{-2}. Představme si, že by takového zrychlení mohl dosáhnout rozjíždějící se automobil. Za jakou dobu by dosáhl rychlosti 100 km/h, pokud by byl zpočátku v klidu?

34C. Těleso se pohybuje s konstantním zrychlením +3,2 m·s^{-2}. V jistém okamžiku má rychlost +9,6 m·s^{-1}. Zjistěte jeho rychlost o (a) 2,5 s dříve, (b) 2,5 s později.

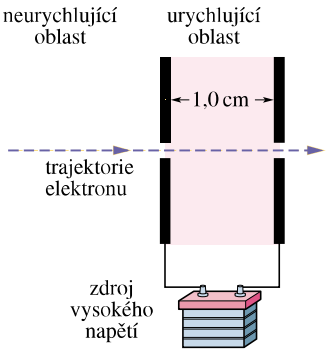
35C. Automobil plynule zvýší svou rychlost z 25 km/h na 55 km/h během 0,50 min. Cyklista se rovnoměrně rozjíždí z klidu a dosáhne rychlosti 30 km/h také za 0,50 min. V obou případech určete zrychlení.

36C. Kosmická loď se pohybuje s konstantním zrychlením 9,8 m·s^{-2}, aby se podmínky pro pobyt posádky co nejvíce blížily pozemským. (a) Za jak dlouho dosáhne loď jedné desetiny rychlosti světla ve vakuu, startuje-li z klidu? Jakou dráhu přitom urazí?

37C. Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně 360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé 1,8 km?

38C. Elementární částice mion μ^- vlétne do elektrického pole rychlostí $5{,}00 \cdot 10^6$ m·s^{-1}. V něm se rovnoměrně zpomaluje se zrychlením o velikosti $1{,}24 \cdot 10^{14}$ m·s^{-2}. (a) Jakou dráhu urazí do okamžiku zastavení? (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ charakterizující její pohyb.

39C. Elektron s počáteční rychlostí $1{,}50 \cdot 10^5$ m·s^{-1} je v úseku své trajektorie dlouhém 1,0 cm urychlován elektrickým polem (obr. 2.25). V okamžiku, kdy pole opouští, má rychlost $5{,}70 \cdot 10^6$ m·s^{-1}. Určete jeho průměrné zrychlení v poli. (Zadání úlohy odpovídá reálné situaci v elektronových tryskách používaných v televizních obrazovkách a osciloskopech.)



Obr. 2.25 Cvičení 39

40C. Automobil jedoucí rychlostí 100 km/h začne rovnoměrně brzdit a zastaví na dráze 43 m. (a) Určete velikost jeho zrychlení v jednotkách SI a jednotkách g. (b) Jak dlouho trvá brzdění? Kolikrát je doba brzdění delší než reakční doba řidiče, která činí 400 ms?

41C. 19. března 1954 dosáhl plukovník John P. Stapp pozemního rychlostního rekordu při jízdě na raketových saních. Rekordní rychlost měla velikost 1 020 km/h. Poté byly sáně zabrzděny za dobu 1,4 s (obr. 2.8). Jakému zrychlení byl jezdec vystaven? Výsledek vyjádřete v jednotkách g.

42C. Na kvalitní suché silnici může automobil s neopotřebenými pneumatikami brzdit se zrychlením o velikosti 4,92 m·s^{-2}. (a) Za jak dlouho automobil zastaví, je-li jeho počáteční rychlost 24,6 m·s^{-1}? (b) Jak dlouhá bude brzdná dráha? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ během brzdění.

43C. Při zkoumání fyziologických účinků velkého zrychlení na lidský organismus se používá raketových saní. Saně se pohybují přímočaře a při klidovém startu mohou dosáhnout rychlosti 1 600 km/h za pouhých 1,8 s. Za předpokladu, že se saně pohybují rovnoměrně zrychleně, určete (a) jejich zrychlení v jednotkách g a (b) dráhu potřebnou k dosažení maximální rychlosti.

44C. Automobil může brzdit se zrychlením 5,2 m·s^{-2}. (a) Za jak dlouho lze vůz zabrzdit z rychlosti 130 km/h na předepsaný rychlostní limit 90 km/h poté, co řidič zahlédne dopravního policistu? (Výsledek ukáže, že je zcela beznadějné před policejním radarem brzdit.) (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$, charakterizující pohyb automobilu.

45C. Motocykl se pohybuje rychlostí 30 m·s^{-1} v okamžiku, kdy řidič začne rovnoměrně brzdit. Za 3,0 s se jeho rychlost sníží na 15 m·s^{-1}. Jakou dráhu urazí motocykl od počátku brzdění až do úplného zastavení?

46Ú. Sportovní automobil typu „hot rod“* startující z klidu může dosáhnout rychlosti 60 km/h za 5,4 s. (a) Určete odpovídající průměrné zrychlení v m·s^{-2}. (b) Jakou dráhu automobil urazí za 5,4 s, je-li jeho zrychlení konstantní? (c) Za jak dlouho by urazil vzdálenost 0,25 km, kdyby jeho zrychlení bylo po celou dobu jízdy konstantní a mělo velikost vypočtenou v části (a)?

47Ú. Rychlík stojí ve stanici. V okamžiku $t = 0$ se začne rozjíždět s konstantním zrychlením a v okamžiku t_1 má rychlost 30 m·s^{-1}. Poté, co za dobu τ urazí dalších 160 m, zvýší se jeho rychlost na 50 m·s^{-1}. Vypočtěte (a) zrychlení vlaku, (b) dobu τ, (c) dobu t_1, potřebnou k dosažení rychlosti 30 m·s^{-1}, a (d) vzdálenost, kterou za tuto dobu urazí. (e) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu vlaku.

* Výkonný automobil většinou amatérské konstrukce za použití levných dílů z vrakovišť. Cílem konstruktéra je docílit vedle dobrého výkonu motoru i co nejneobvyklejšího vzhledu. Vozy jsou oblíbené téměř výhradně ve Spojených státech, kde se účastní závodů ve zrychlení s pevným startem na vzdálenosti 1/4 míle nebo 1 míle.

48Ú. Automobil jede rychlostí 56,0 km/h. Řidič zpozoruje na silnici překážku a ve vzdálenosti 24,0 m před ní začne rovnoměrně brzdit. Auto narazí do překážky za 2,00 s od tohoto okamžiku. (a) Určete zrychlení automobilu. (b) Jakou rychlostí narazí automobil do překážky?

49Ú. Automobil se pohybuje s konstantním zrychlením a urazí vzdálenost 60,0 m za 6,00 s. Na konci tohoto úseku jede rychlostí 15 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou rychlost měl na začátku šedesátimetrového úseku? (b) Jaké je jeho zrychlení? (c) V jaké vzdálenosti před měřeným úsekem se auto začalo rozjíždět? (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu automobilu.

50Ú. Dvě zastávky metra jsou vzdálené 1 100 m. Souprava se první polovinu cesty rozjíždí s konstantním zrychlením $+1{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a ve druhé polovině brzdí se zrychlením $-1{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jaký je celkový čas jízdy mezi stanicemi a (b) největší rychlost soupravy? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ pro celou jízdu.

51Ú. Vyžaduje-li dopravní situace, aby řidič náhle zastavil, nezačne vůz brzdit hned. Od okamžiku, kdy si řidič uvědomí nutnost zabrzdit, uplyne nejprve jistá reakční doba řidiče a brzdového systému a teprve poté automobil rovnoměrně brzdí. Určete (a) celkovou reakční dobu a (b) velikost zrychlení automobilu při rovnoměrném brzdění z těchto údajů: Od okamžiku, kdy si řidič automobilu jedoucího rychlostí 80 km/h uvědomil nutnost zastavit, urazil ještě dráhu 57 m. Při rychlosti 48 km/h mu stačila dráha 24 m.

52Ú. Vůz se blíží ke světelné křižovatce, když se náhle rozsvítí oranžové světlo. Vůz jede největší povolenou rychlostí 50 km/h a může brzdit se zpomalením $5{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Celková reakční doba řidiče a brzdového systému je $T = 0{,}75$ s. Řidič nechce vjet do křižovatky na červenou. Má začít brzdit nebo pokračovat v jízdě nezměněnou rychlostí? Vzdálenost vozu od křižovatky v okamžiku změny světelné signalizace je (a) 40 m, doba, po kterou svítí oranžové světlo, je 2,8 s, (b) 32 m a 1,8 s.

53Ú. Vzdálenost potřebná pro náhlé zastavení vozidla je dána součtem „reakční vzdálenosti“ (součin počáteční rychlosti a reakční doby) a „brzdné vzdálenosti“, kterou vozidlo urazí během brzdění. Typické hodnoty těchto veličin jsou uvedeny v následující tabulce:

Počáteční rychlost ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)	Reakční vzdálenost (m)	Brzdná vzdálenost (m)	Celková vzdálenost (m)
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

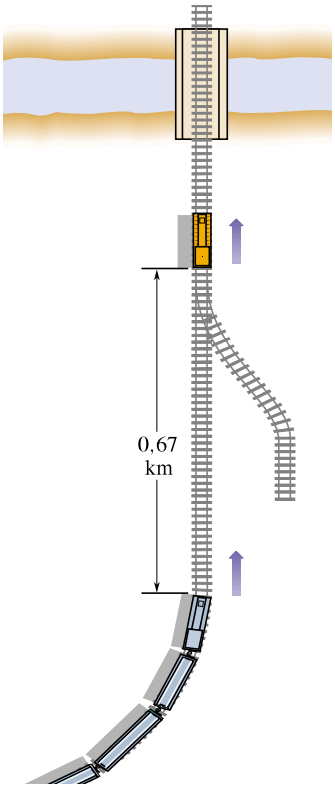
(a) Jaká reakční doba byla použita při výpočtu této tabulky? (b) Jakou celkovou vzdálenost automobil urazí, má-li náhle zastavit při počáteční rychlosti 25 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

54Ú. Největší povolené zrychlení soupravy podzemní dráhy je $1{,}34\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jaká je nejvyšší rychlost, které smí souprava dosáhnout při jízdě mezi stanicemi vzdálenými 806 m? (b) Jaká je odpovídající doba jízdy? (c) Předpokládejte, že souprava stojí ve stanici 20 s. Určete její maximální průměrnou rychlost v časovém intervalu mezi výjezdy ze dvou sousedních stanic. (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$.

55Ú. Délka dráhy kabiny výtahu v newyorském mrakodrapu Marquis Marriott je 190 m. Kabina se pohybuje nejvýše rychlostí 305 $\mathrm{m{\cdot}min^{-1}}$. Její zrychlení při rozjezdu i brzdění má velikost $1{,}22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jakou vzdálenost urazí kabina od chvíle, kdy se začne rozjíždět, do okamžiku, kdy dosáhne nejvyšší rychlosti? (b) Za jak dlouho vyjede z dolního podlaží až nahoru, započteme-li rozjezd i brzdění?

56Ú. Osobní automobil se začne rozjíždět se zrychlením $a = 2{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ přesně v okamžiku, kdy se na semaforech rozsvítí zelená. Ve stejném okamžiku ho ve vedlejším pruhu předjíždí kamion jedoucí konstantní rychlostí 9,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jak daleko za semafory automobil opět předjede kamion? (b) Jaké rychlosti v tomto okamžiku dosáhne?

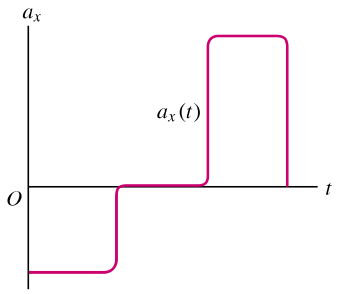
57Ú. Rychlík vyjíždí ze zatáčky rychlostí 160 km/h. Strojvůdce náhle spatří ve vzdálenosti 0,67 km lokomotivu, která jede po téže koleji stejným směrem rychlostí 29 km/h (obr. 2.26). Strojvůdce rychlíku začne okamžitě brzdit. (a) Určete nejmenší možné zpomalení rychlíku, při němž ještě nedojde ke srážce. (b) Okamžiku, kdy strojvůdce rychlíku zahlédl lokomotivu, přisoudíme hodnotu $t = 0$ a počátek osy x (tj. $x = 0$) zvolíme v místě, ve kterém se rychlík v tomto okamžiku nacházel. Nakreslete grafy časových závislostí $x(t)$ obou vlaků pro případ, že se tak tak podařilo srážku odvrátit.



Obr. 2.26 Úloha 57

58Ú. Dva vlaky jedou proti sobě po přímém úseku jednokolejné trati rychlostmi 72 km/h a 144 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 950 m, spatří oba strojvůdci protijedoucí vlak a začnou okamžitě brzdit se zrychlením o velikosti 1,0 $m \cdot s^{-2}$. Dojde ke srážce?

59Ú. Nakreslete graf $v_x(t)$ odpovídající grafu $a_x(t)$ z obr. 2.27.



Obr. 2.27 Úloha 59

ODST. 2.8 Svislý vrh

60C. Dělníkovi na stavbě spadl nešťastnou náhodou hasák a narazil na zem rychlostí 24 $m \cdot s^{-1}$. (a) Z jaké výšky padal? (b) Jak dlouho trval jeho pád? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$.

61C. (a) Jakou rychlostí musíme svisle vyhodit míč, aby dosáhl výšky 50 m? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na zem? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující let míče. V prvních dvou z nich vyznačte okamžik, kdy je míč právě ve výšce 50 m.

62C. Kapka deště dopadne na zem z mraku ve výšce 1 700 m. Jakou rychlostí by dopadla, kdyby její let nebyl brzděn odporem vzduchu? Bylo by v tomto případě bezpečné setrvávat během bouře venku?

63C. Nákladní stavební výtah je upevněn na jediném laně. Lano se náhle přetrhne, když výtah stojí v nejvyšším patře budovy, ve výšce 120 m. (a) Jakou rychlostí dopadne kabina na zem? (b) Jak dlouho poletí? (c) Jakou rychlost bude mít právě v polovině vzdálenosti měřené od výchozího bodu k zemi? (d) Za jak dlouho urazí první polovinu této vzdálenosti?

64C. Zlý výrostek Hugo hází kamením svisle dolů ze střechy budovy vysoké 30 m. Počáteční rychlost kamene má velikost 12,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Za jak dlouho dopadne kámen na zem? (b) Jak velká bude jeho rychlost při dopadu?

65C. Ve výzkumném ústavu pro beztížný stav agentury NASA Lewis Research Center je i 145 m vysoká experimentální věž, z níž je vyčerpán vzduch. Jedním z experimentů, k nimž věž slouží, je volný pád koule o průměru 1 m, ve které jsou umístěny měřicí přístroje. (a) Jak dlouho trvá pád koule? (b) Jaká je její rychlost těsně před dopadem na záchytné zařízení ve spodní části věže? (c) Při záchytu je koule brzděna s průměrným zrychlením o velikosti $25g$ až do úplného zastavení. Jaká dráha je potřebná k zastavení koule?

66C. Model rakety poháněný hořícím palivem startuje svisle vzhůru. Nakreslete schematické grafy časových závislostí její polohy y, rychlosti v_y a zrychlení a_y. V grafech vyznačte, ve kterém místě došlo palivo, kdy model dosáhl největší výšky a kdy dopadl zpátky na zem.

67C. Kámen volně vypustíme z útesu vysokého 100 m. Za jakou dobu urazí (a) prvních 50 m dráhy, (b) druhých 50 m?

68Ú. Vyplašený pásovec vyskočí do výšky 0,544 m za 0,200 s (obr. 2.28). (a) Jaká je jeho počáteční rychlost? (b) Jaká je jeho rychlost v zadané výšce? (c) Jak vysoko ještě vyletí?

Obr. 2.28 Úloha 68

69Ú. Těleso padá z mostu, který je ve výšce 45 m nad hladinou řeky. Spadne přímo do loďky, která pluje pod mostem konstantní rychlostí. V okamžiku uvolnění tělesa na mostě byla loďka vzdálena právě 12 m od místa dopadu. Jaká je její rychlost?

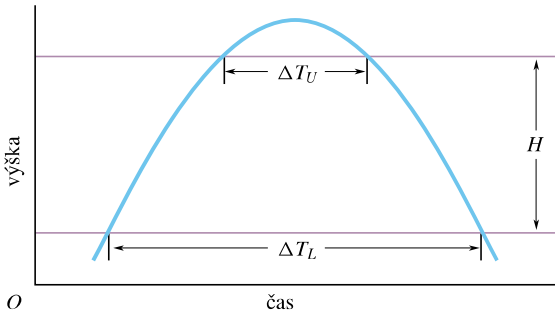
70Ú. Model rakety je odpálen svisle vzhůru a stoupá s konstantním zrychlením 4,00 $m \cdot s^{-2}$ po dobu 6,00 s. Pak dojde palivo a raketa letí bez pohonu. (a) Jaké maximální výšky dosáhne? (b) Jaká je celková doba jejího letu od startu až po pád na zem?

71Ú. Basketbalista, který doskakuje pod košem, vyskočí svisle do výšky 76 cm. Jak dlouho setrvává (a) blíže než 15 cm od nejvyššího bodu své dráhy, (b) blíže než 15 cm od podlahy? Výsledek tohoto výpočtu nám pomůže pochopit, proč se zdá, že basketbalista při výskoku chvíli visí ve vzduchu.

72Ú. V Národní fyzikální laboratoři v Anglii měřili tíhové

zrychlení g pomocí svislého vrhu tělesa ve vyčerpané trubici. Při letu byly registrovány průchody tělesa dvěma body v různých výškách dráhy letu (obr. 2.29). Označme ΔT_L dobu, která uplynula mezi dvěma průchody dolním bodem, ΔT_U dobu mezi průchody horním bodem a H svislou vzdálenost těchto dvou bodů. Ukažte, že

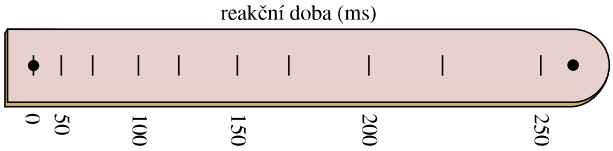
$$g = \frac{8H}{\Delta T_L^2 - \Delta T_H^2}.$$



Obr. 2.29 Úloha 72

73Ú. Koule z vlhké hlíny padá z výšky 15,0 m. Po dopadu na zem se po dobu 20 ms plasticky deformuje, než se její pohyb zcela zastaví. Jaké je průměrné zrychlení koule při této deformaci? (Při řešení nahraďte kouli hmotným bodem.)

74Ú. Z výšky h hodíme svisle *dolů* míč s počáteční rychlostí v_{0y}. (a) Jaká bude rychlost míče těsně před dopadem? (b) Za jak dlouho míč dopadne? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), vyhodíme-li míč svisle vzhůru z téže výšky stejnou rychlostí? Než začnete řešit příslušné rovnice, rozvažte předem, zda hodnoty získané v části úkolu (c) budou větší, menší či stejné jako výsledky úloh (a) a (b).



Obr. 2.30 Úloha 75

75Ú. Na obr. 2.30 je jednoduché zařízení pro měření reakční doby člověka. Je vyrobeno z pásku lepenky s nakresleným měřítkem a dvěma velkými tečkami. Reakční dobu si můžeme sami změřit takto: Náš pomocník uchopí pásek mezi palec a ukazováček v místě tečky umístěné na obr. 2.30 vpravo a drží jej měřítkem svisle dolů. Přiblížíme ruku k pásku tak, aby procházel mezi palcem a ukazováčkem právě v místě druhé tečky. Je třeba, aby palec a ukazováček byly co nejblíže u sebe, nesmíme se však pásku dotýkat. Náhle náš přítel pásek pustí a my se jej snažíme co nejrychleji chytit. Reakční dobu zjistíme podle značky v místě, kde se nám podaří pásek zachytit. (a) V jaké vzdálenosti od dolní tečky musí být nakreslena značka s údajem 50 ms? (b) V kolikrát větší vzdálenosti od dolní tečky musí být zakresleny značky s údaji 100 ms, 150 ms, 200 ms a 250 ms? (Myslíte, že například značka 100 ms je v dvojnásobné vzdálenosti od dolní tečky než značka 50 ms? Lze v odpovědích na otázku (b) najít nějakou zákonitost?)

76Ú. Žonglér vyhazuje míč do jisté výšky. Kolikrát výše musí míč vyhodit, aby jeho let trval dvojnásobnou dobu?

77Ú. Kámen je vržen svisle vzhůru. Při vzestupu míjí jistý bod A rychlostí v a další bod B rychlostí $\frac{1}{2}v$. Bod B je o 3,00 m výše než bod A. Určete (a) rychlost v a (b) největší výšku, do které kámen vyletí nad úroveň bodu B.

78Ú. Kvalitu tenisového míčku můžeme ověřit například tak, že zjišťujeme, jak skáče. Volně jej upustíme z výšky 4,00 m. Míč se odrazí a vyskočí do výšky 3,00 m. Jaké bylo průměrné zrychlení při odrazu, trval-li 10 ms? Odpor prostředí zanedbejte.

79Ú. Voda kape na podlahu ze sprchové růžice upevněné ve výšce 200 cm. Kapky padají v pravidelných intervalech. Právě v okamžiku dopadu první kapky začíná pád čtvrté. Jaká je poloha druhé a třetí kapky v tomto okamžiku?

80Ú. Olověná koule je vržena do jezera z plošiny umístěné 5,20 m nad hladinou. Koule dopadne na hladinu určitou rychlostí a začne se potápět. Klesá při tom ke dnu stejnou rychlostí, se kterou dopadla na hladinu. Na dno dosedne za 4,8 s od okamžiku, kdy byla z plošiny vypuštěna. (a) Jak je jezero hluboké? (b) Jaká je průměrná rychlost koule? Představme si, že vodu z jezera vypustili. Kouli vyhodíme ze stejné plošiny a požadujeme, aby na dno jezera dopadla opět za 4,8 s. Jaká musí být její počáteční rychlost?

81Ú. Těleso volně padá z výšky h. Za poslední sekundu pádu urazí dráhu $0{,}50h$. Určete (a) dobu pádu a (b) výšku h. Objasněte fyzikální význam obou kořenů kvadratické rovnice, jejíž řešení je součástí výpočtu.

82Ú. Dívka spadla ze střechy budovy vysoké 44 m a dopadla na plechovou konstrukci vzduchotechniky. Stropní stěna konstrukce se při tom promáčkla o 46 cm. Dívka pád přežila bez vážnějšího poranění. Předpokládejte, že její zrychlení v průběhu brzdění pádu bylo konstantní a určete je. Výsledek vyjádřete v jednotkách SI i v násobcích g.

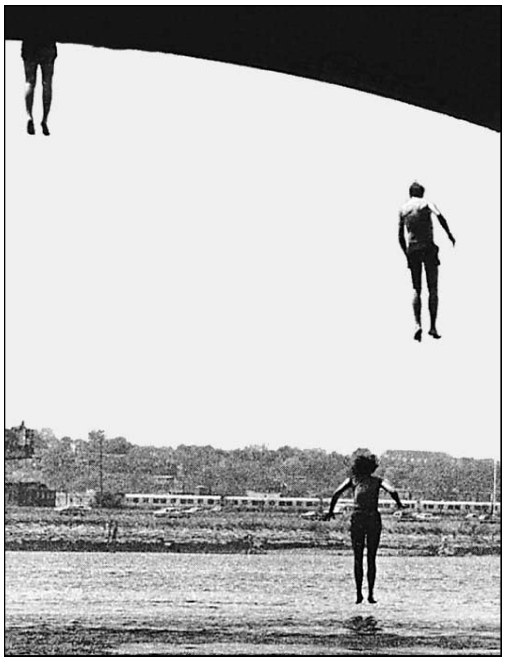
83Ú. Kámen byl volně upuštěn do vody z mostu vysokého 44 m. Za jednu sekundu poté byl svisle dolů hozen druhý kámen. Oba kameny dopadly do vody současně. (a) Jaká byla počáteční rychlost druhého kamene? (b) Nakreslete grafy časové závislosti rychlosti obou kamenů. (Počátek časové osy přisoudíme okamžiku, kdy začal padat první kámen.)

84Ú. Parašutistka padá po výskoku z letadla nejprve volným pádem a urazí 50 m. Poté otevře padák, který zpomaluje její pohyb se zrychlením o velikosti 2,0 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Na zem dopadne rychlostí 3,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jak dlouho trval její let? (b) V jaké výšce nad zemí vyskočila z letadla?

85Ú. Dvě tělesa jsou volně vypuštěna ze stejné výšky v časovém odstupu 1 s a letí volným pádem. Za jak dlouho od okamžiku, kdy začalo padat první z nich, je jejich vzdálenost 10 m?

86Ú. Klára a Jan seskočili těsně po sobě z mostu (obr. 2.31). Za jak dlouho po Kláře seskočil Jan? Předpokládejte, že Jan je

vysoký 170 cm a místo, odkud oba skočili, je právě na horním okraji obrázku. Číselné hodnoty nutné pro výpočet je třeba získat přímo měřením na fotografii.



Obr. 2.31 Úloha 86

87Ú. Horkovzdušný balon stoupá rychlostí 12 m·s^{-1}. Ve výšce 80 m vyhodí posádka balíček. Určete (a) dobu jeho pádu a (b) jeho rychlost při dopadu.

88Ú. Otevřená výtahová klec stoupá vzhůru konstantní rychlostí 10 m·s^{-1}. Chlapec jedoucí ve výtahu si hraje s míčem a vyhazuje jej svisle vzhůru. Ve výšce 2 m nad podlahou výtahu má míč vzhledem k výtahu rychlost 20 m·s^{-1}. V tom okamžiku je podlaha výtahu právě 28 m nad zemí. (a) Do jaké největší výšky nad zemí míč vyletí? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na podlahu výtahu?

89Ú. Koule z tvrzené gumy je volně puštěna ze střechy budovy. Při svém pádu míjí okno vysoké 1,20 m a její let podél okna trvá 0,125 s. Dopadne na chodník, kde se pružně odrazí, takže při výstupu prolétne kolem téhož okna opět za dobu 0,125 s. Doba mezi oběma průchody kolem dolního okraje okna je 2,00 s. Jak je budova vysoká?

90Ú. Podřimující kočka zahlédne otevřeným oknem letící květináč, který nejprve stoupá vzhůru a pak opět padá. Celková doba, po kterou je květináč vidět v okně, je 0,50 s. Okno je vysoké 2,00 m. Jak vysoko nad horní okraj okna květináč vyletěl?

PRO POČÍTAČ

Úlohy v této části řešíme pomocí počítače.

91Ú. Zkušební jezdec testuje brzdy automobilu vybaveného systémem ABS, který zajišťuje maximální brzdný účinek bez prokluzu pneumatik. Testovací jízdy probíhají na přímém a suchém úseku zkušební dráhy. Úkolem jezdce je zastavit vůz na nejkratší možné dráze od okamžiku, kdy zahlédne světelný signál. Dráha potřebná k zastavení je pro šest různých počátečních rychlostí uvedena v následující tabulce. (a) Najděte závislost brzdné dráhy d na velikosti počáteční rychlosti $v_{\mathrm{i},x}$, reakční době řidiče T_{R} a velikosti a_x konstantního zrychlení automobilu. Metodou nejmenších čtverců určete (b) a_x a (c) T_{R}.

$v_{\mathrm{i},x}$ (m·s^{-1})	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00
d (m)	4,6	12,1	22,3	35,2	51,0	69,5

92Ú. Motocyklista se rozjíždí (z klidu) po vodorovné přímé silnici, na které jsou v pravidelných desetimetrových rozestupech umístěny fotobuňky. První z nich je právě u startu. (Pomocí fotobuňky je možné měřit okamžik průjezdu motocyklu daným místem.) V následující tabulce jsou shrnuty výsledky měření. (a) Najděte závislost uražené dráhy d na zrychlení a_x. Předpokládejte, že zrychlení je konstantní. (b) Hodnoty z tabulky zakreslete do grafu znázorňujícího závislost dráhy d na druhé mocnině času t^2. (c) Metodou lineární regrese určete ze zadaných údajů zrychlení motocyklu a_x.

Pořadové číslo fotobuňky	1	2	3	4	5	6
Vzdálenost (m)	0	10	20	30	40	50
Čas (s)	0	1,63	2,33	2,83	3,31	3,79

93Ú. Motocyklista z předchozí úlohy se opět rozjíždí s konstantním zrychlením na přímé testovací dráze, na které jsou umístěny měřicí body s rozestupy $d_0 = 10$ m. První bod je v neznámé vzdálenosti d od startu jezdce. V následující tabulce jsou výsledky měření rychlosti motocyklu v těchto bodech. (a) Najděte závislost čtverce rychlosti $v_{j,x}^2$ v j-tém bodě na rychlosti $v_{1,x}$ v prvním bodě, na vzdálenosti d_0, na konstantním zrychlení a_x a na pořadovém čísle měřicího bodu j. (b) Nakreslete graf závislosti $v_{j,x}^2$ na $(j-1)$. Metodou lineární regrese určete (c) zrychlení a_x a (d) vzdálenost d.

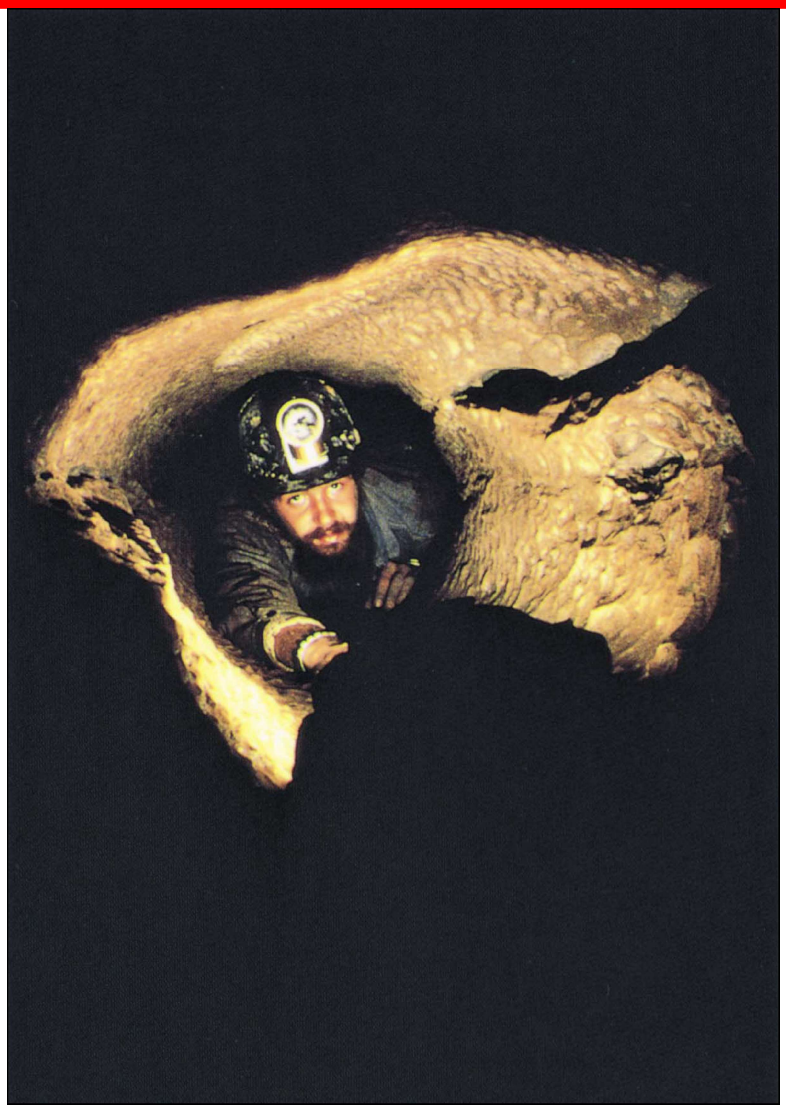
Vztažný bod číslo	1	2	3	4	5	6
Rychlost (m·s^{-1})	14,0	18,3	21,7	24,6	27,5	30,0

94Ú. Předpokládejme, že časová závislost polohy částice při jejím pohybu podél osy x je dána vztahem

$$x(t) = -32{,}0 + 24{,}0t^2\mathrm{e}^{-0{,}0300t},$$

kde x je měřeno v metrech a t v sekundách. (a) Najděte vztahy pro rychlost v_x a zrychlení a_x částice jako funkce času. (b) Nakreslete grafy časových závislostí její polohy, rychlosti a zrychlení pro časový interval od 0 do 100 s. (c) Určete, ve kterém okamžiku je částice v počátku soustavy souřadnic ($x = 0$). Určete její rychlost a zrychlení v tomto okamžiku. (d) Určete, ve kterém okamžiku je její rychlost nulová, a vypočtěte odpovídající polohu a zrychlení.

3
Vektory



Po dvě desetiletí prozkoumávali speleologové 200 km dlouhý systém Mamutí jeskyně a jeskyně Flint Ridge. Věřili, že jsou propojeny, a doufali, že se jim podaří spojovací chodby odhalit. Na fotografii je zachycen jeden z členů úspěšného týmu Richard Zopf, jak spouští batoh průlezem Tight Tube, ležícím hluboko v nitru jeskynního labyrintu Flint Ridge. Po dvanácti hodinách postupu se Zopf a jeho šest druhů protáhli proudem ledové vody a octli se v Mamutí jeskyni. Komplex Mamutí–Flintovy jeskyně se tak stal nejdelší jeskyní na světě. Lze nějak jednoduše charakterizovat vzájemnou polohu východiska a cíle cesty průzkumného družstva, aniž bychom podrobně popisovali celou spletitou trasu?

3.1 VEKTORY A SKALÁRY

Pohyb částice po přímce se může dít pouze ve dvou směrech. Jeden z nich můžeme označit za kladný, druhý bude záporný. V trojrozměrném prostoru však již pouhé dvě možnosti, odlišené znaménky plus a minus, pro určení směru pohybu nestačí. Je třeba použít vektorů.

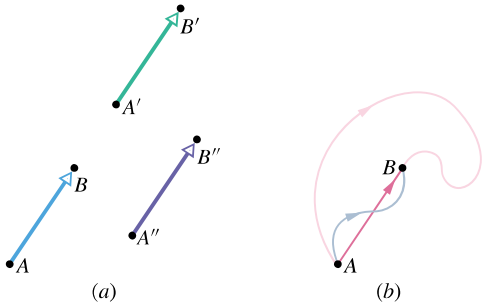
Vektor je zadán směrem a velikostí. S vektory lze počítat podle určitých pravidel, jimiž se za chvíli budeme podrobněji zabývat. **Vektorová veličina** má také směr a velikost. K fyzikálním veličinám, které mohou být popsány vektory (mají tzv. vektorový charakter), patří například posunutí, rychlost a zrychlení.

Některým fyzikálním veličinám nelze přisoudit směr. Například teplota, tlak, energie, hmotnost a čas žádný směr nemají. Takovým veličinám říkáme skaláry a při počítání s nimi používáme pravidla běžné algebry. **Skalár** je určen jediným číslem (například 12,3 kg, 25 J, apod.).* Nejjednodušší vektorovou veličinou je posunutí (změna polohy). Nazýváme ji **vektor posunutí**. (Podobně mluvíme i o vektoru rychlosti a vektoru zrychlení.) Přejde-li pohybující se částice z bodu A do bodu B (obr. 3.1a), lze její posunutí znázornit šipkou směřující z A do B. Šipka je grafickým vyjádřením vektoru. Abychom na dalších obrázcích odlišili vektory od šipek s jiným významem, budeme v koncovém bodě každého vektoru kreslit malý trojúhelník.

Šipky z A do B, z A' do B' a z A'' do B'' na obr. 3.1a představují stejnou změnu polohy hmotného bodu a nebudeme je rozlišovat. Všechny mají stejnou velikost a směr a určují tedy stejný vektor posunutí.

Známe-li pouze vektor posunutí částice, nedokážeme určit její skutečnou trajektorii mezi počátečním a koncovým bodem tohoto posunutí. Na obr. 3.1b jsou zakresleny tři různé trajektorie spojující body A a B. Odpovídá jim stejné výsledné posunutí jako na obr. 3.1a. Posunutí nepopisuje detaily pohybu, určuje pouze jeho celkový výsledek.

* Nezaměňujme skaláry se **souřadnicemi vektorů** na přímce (v jednorozměrném prostoru). Vektor na orientované přímce je číselně reprezentován jedinou souřadnicí. Proto při pevné volbě souřadnicové osy často hovoříme o této souřadnici jako o samotném vektoru, jako tomu bylo v celé kap. 2. Kladné či záporné znaménko souřadnice vektoru rozhoduje o tom, zda je jeho směr souhlasný či nesouhlasný s kladným směrem orientované přímky. Změníme-li orientaci přímky, změní se znaménko souřadnice zadaného vektoru. V případě skaláru patří znaménko k hodnotě. Hodnoty skalárních veličin jsou zcela nezávislé na jakékoli volbě soustavy souřadnic. Při popisu volného pádu tělesa o hmotnosti m v blízkosti povrchu Země máme dvojí možnost volby kladné orientace souřadnicové osy y: nahoru nebo dolů. V případě první volby budou rychlost i zrychlení tělesa (přesněji jejich y-ové souřadnice) v každém okamžiku záporné, v případě druhého způsobu volby budou kladné. Hmotnost tělesa však bude v obou případech stejná.



Obr. 3.1 (a) Všechny vyznačené šipky představují stejné posunutí. (b) Všechny tři trajektorie spojující dva body odpovídají témuž posunutí.

Místo grafického vyjádření lze vektor posunutí zadat velikostí a úhly, které tento vektor svírá se dvěma zvolenými vztažnými směry. Přesvědčíme se o tom při řešení příkladu 3.1.

PŘÍKLAD 3.1

Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mamutí jeskyní a jeskynním systémem Flint Ridge, absolvovala cestu od Austinova vchodu k řece Echo v Mamutí jeskyni (obr. 3.2a). Ušla při tom 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle vzhůru. Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?

ŘEŠENÍ: Nejprve zjistíme velikost posunutí ve vodorovném směru, kterou označíme d_h. Na obr. 3.2b je znázorněn průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny (pohled shora). Pomocí Pythagorovy věty dostaneme

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\,\mathrm{km})^2 + (3{,}9\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km}.$$

Průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny svírá se směrem východ-západ úhel θ, určený výrazem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(3{,}9\,\mathrm{km})}{(2{,}6\,\mathrm{km})} = 1{,}5,$$

tj.

$$\theta = 56^\circ.$$

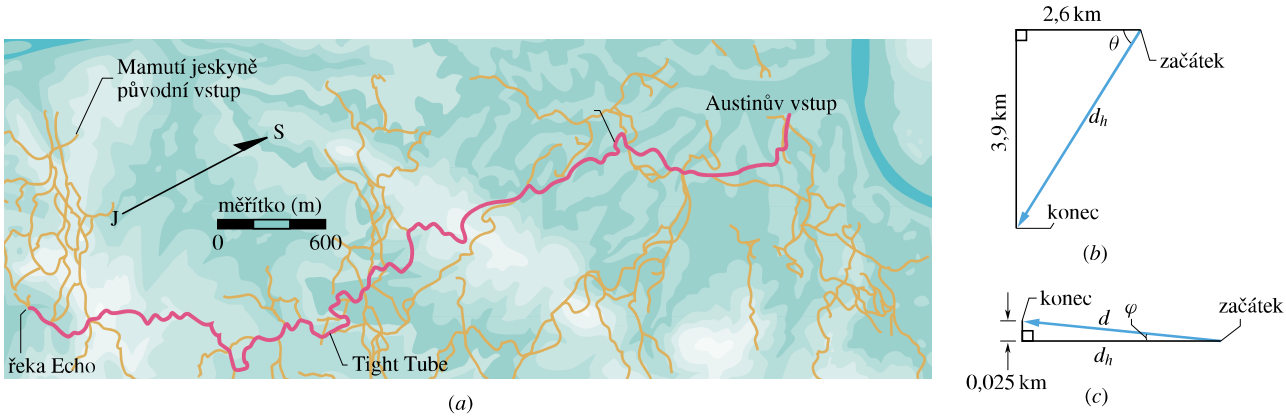
Celkové posunutí $\boldsymbol{d}$ již snadno určíme z obr. 3.2c (boční pohled). Má velikost

$$d = \sqrt{(4{,}69\,\mathrm{km})^2 + (0{,}025\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km} \doteq 4{,}7\,\mathrm{km}$$

a svírá s vodorovnou rovinou úhel φ,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(0{,}025\,\mathrm{km})}{(4{,}69\,\mathrm{km})} = 0{,}005\,3,$$
$$\varphi = 0{,}3^\circ.$$

Vektor posunutí, určující změnu polohy speleologické skupiny, má velikost 4,7 km, svírá se směrem východ-západ

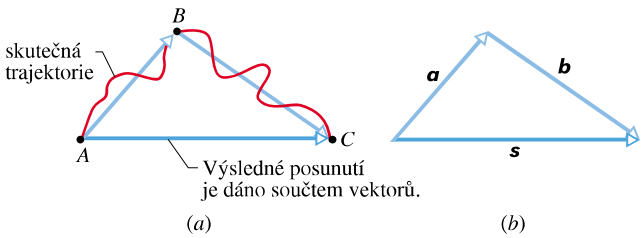


Obr. 3.2 Příklad 3.1. (a) Mapka části systému Mamutí–Flintova jeskyně s vyznačením trasy speleologické skupiny od Austinova vchodu k řece Echo. (b) Průmět posunutí skupiny do vodorovné roviny (nadhled). (c) Boční pohled. (Upraveno podle oficiální mapy.)

úhel 56° a od vodorovné roviny je odkloněn směrem vzhůru o úhel 0,3°. Celkové posunutí ve svislém směru je zanedbatelné v porovnání s pohybem ve vodorovné rovině. Ve skutečnosti však museli průzkumníci nesčetněkrát šplhat nahoru a dolů. Cesta, kterou prošli, se nijak nepodobala vektoru posunutí, který představuje pouze spojnici výchozího a koncového bodu.

3.2 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: GRAFICKÁ METODA

Uvažujme částici, která se pohybuje nejprve z bodu A do bodu B a poté z bodu B do C (obr. 3.3a). Její celkové posunutí je určeno dvěma dílčími posunutími AB a BC bez ohledu na to, jaká byla její skutečná trajektorie. Výsledkem těchto dvou po sobě následujících posunutí je posunutí jediné: z bodu A do bodu C. Posunutí AC nazýváme vektorovým součtem posunutí AB a BC.



Obr. 3.3 (a) AC je vektorovým součtem vektorů AB a BC. (b) Jiné označení vektorů z obrázku (a).

Obr. 3.3b znázorňuje vektory překreslené z obr. 3.3a a označené tučnými písmeny $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{s}$. Tento způsob značení vektorů budeme používat v celém dalším textu. V zápisech psaných ručně značíme vektory šipkou nad příslušným symbolem, např. $\vec{a}$. Pro označení velikosti vektoru používáme obyčejnou kurzívu, např. a, b a s. Tučný symbol zahrnuje tedy úplnou informaci o vektoru, tj. o jeho velikosti i směru. Pro zápis velikosti vektoru, zejména u složitějších výrazů, lze použít i následujícího značení: $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

Vztah mezi vektory na obr. 3.3b můžeme zapsat jedinou vektorovou rovnicí

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \text{(sčítání)}, \tag{3.1}$$

která vyjadřuje skutečnost, že vektor $\boldsymbol{s}$ je součtem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Uvědomme si, že symbol + a slova „součet“ a „sčítat“ mají nyní jiný význam, než je běžné v algebře čísel.

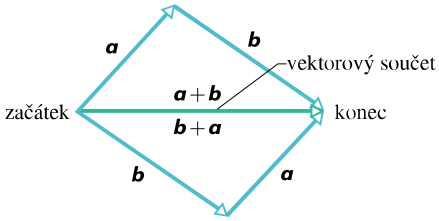
Obr. 3.3 je návodem, jak sečíst dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ graficky. (1) Nejprve narýsujeme vektor $\boldsymbol{a}$ ve vhodném měřítku a odpovídajícím směru. (2) Počáteční bod vektoru $\boldsymbol{b}$ umístíme do koncového bodu vektoru $\boldsymbol{a}$. Dbáme na to, aby oba vektory byly zakresleny ve stejném měřítku a svíraly správný úhel. (3) Vektorový součet $\boldsymbol{s}$ získáme jako spojnici počátečního bodu vektoru $\boldsymbol{a}$ s koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{b}$. Všimněte si, že popsaný postup pracuje jak s velikostí, tak se směrem obou vektorů. Jistě jej dokážete snadno zobecnit pro případ součtu většího počtu vektorů.

Právě definovaný vektorový součet má dvě důležité vlastnosti.

(1) Výsledek nezávisí na pořadí sčítanců, tj.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{(komutativní zákon)}. \tag{3.2}$$

O platnosti komutativního zákona nás přesvědčí obr. 3.4. Z něj je také zřejmé, proč se někdy mluví o pravidlu rovnoběžníka: součet $\boldsymbol{s}$ tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

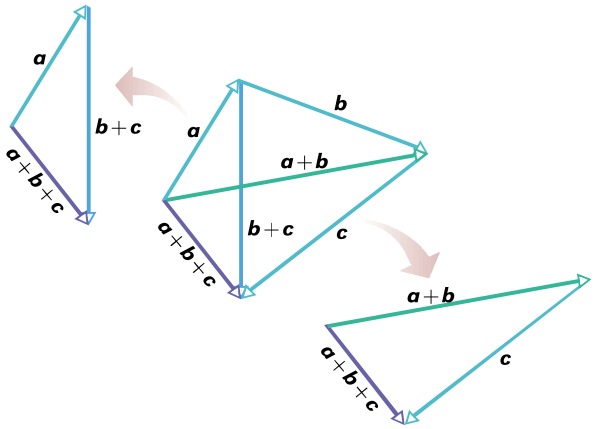


Obr. 3.4 Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ lze sčítat v libovolném pořadí (vztah (3.2)).

(2) Sčítáme-li několik vektorů, je lhostejné, jak je při tom seskupíme. Máme-li například určit součet vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, můžeme nejprve sečíst třeba vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a k výsledku pak přičíst vektor $\boldsymbol{c}$. Stejně dobře však můžeme sečíst napřed vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ a k jejich součtu nakonec přičíst vektor $\boldsymbol{a}$. Výsledek bude v obou případech stejný. Matematický zápis tohoto pravidla je následující:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{(asociativní zákon).} \quad (3.3)$$

Platnost asociativního zákona ilustruje grafická konstrukce na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ lze při sčítání libovolně seskupit (viz vztah (3.3)).

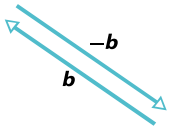
Vektor $\boldsymbol{0}$ nulové velikosti nazýváme **nulový**. Jeho směr není definován. Nulový vektor má mezi vektory stejné postavení jako nula mezi čísly: pro každý vektor $\boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$. Symbolem $-\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor, který má stejnou velikost jako vektor $\boldsymbol{b}$, avšak **opačný** směr (obr. 3.6). Nazýváme jej **vektorem opačným** k $\boldsymbol{b}$. Vektor opačný k opačnému je opět původní vektor, tj. $-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$. Snadno se přesvědčíme, že součtem navzájem opačných vektorů je nulový vektor:

$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

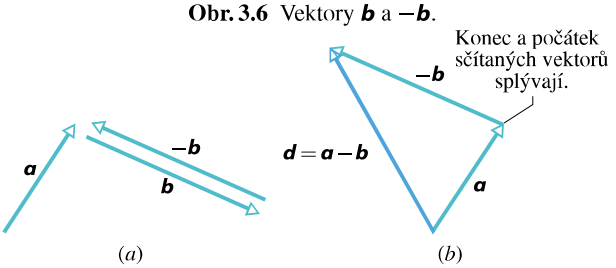
Této vlastnosti využijeme k definici rozdílu dvou vektorů. Rozdílem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \quad \text{(odčítání),} \quad (3.4)$$

který označujeme $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Získáme jej tak, že k vektoru $\boldsymbol{a}$ *přičteme* vektor $-\boldsymbol{b}$. Příklad grafické konstrukce je na obr. 3.7.



Obr. 3.6 Vektory $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.7 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$. (b) Odečtení vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ je ekvivalentní sečtení vektorů $\boldsymbol{a}$ a $-\boldsymbol{b}$.

I když jsme pravidla pro sčítání a odečítání vektorů zaváděli pro vektory posunutí, je samozřejmě možné jich použít pro jakékoli vektory, bez ohledu na to, zda představují nějakou fyzikální veličinu (sílu, rychlost apod.), či nikoliv. Tak jako při počítání se skaláry má však smysl sčítat pouze vektory stejného druhu (ve fyzice vektory odpovídající téže fyzikální veličině).

Můžeme sečíst například dvě posunutí nebo dvě rychlosti, nelze však sčítat posunutí a rychlost. Byl by to stejný nesmysl jako chtít sečíst 21 sekund a 12 metrů.

KONTROLA 1: Dvě posunutí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti 3 m a 4 m. Označme $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Jak je třeba volit úhel obou posunutí, aby velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ byla (a) co největší, (b) co nejmenší? V obou případech velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ určete.

PŘÍKLAD 3.2

Při branném závodě je úkolem soutěžícího vzdálit se co možná nejvíce od startu třemi postupnými přímočarými přesuny: (a) $\boldsymbol{a}$: 2,0 km na východ, (b) $\boldsymbol{b}$: 2,0 km severovýchodním směrem, svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 30°, (c) $\boldsymbol{c}$: 1,0 km na západ. Pořadí přesunů může závodník volit a kterýkoliv z vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ může zaměnit vektorem opačným. Do jaké největší vzdálenosti od startu (měřeno vzdušnou čarou) se dokáže dostat?

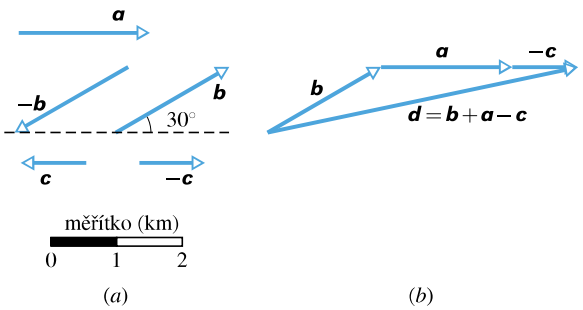
ŘEŠENÍ: Ve vhodném měřítku zakreslíme vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8a). Vybereme některou z povolených trojic posunutí a v souladu s pravidlem pro sčítání vektorů je nakreslíme tak, aby počáteční bod každého následujícího vektoru splynul s koncovým bodem předcházejícího. (Volba pořadí vektorů při sčítání je samozřejmě libovolná, neboť neovlivní výsledek.) Počáteční bod prvního vektoru z vybrané trojice pak označuje místo startu, koncový bod třetího určuje cílovou polohu přesunu. Vektorový součet $\boldsymbol{d}$, spojující tyto dva body, je vektorem výsledného posunutí. Jeho velikost d představuje dosaženou vzdálenost závodníka od startu.

Snadno zjistíme, že největší vzdálenosti lze docílit volbou trojice přesunů určených vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8b):

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

Změříme-li velikost vektoru $\boldsymbol{d}$ přímo v obrázku a použijeme-li vyznačeného měřítka, dostaneme vzdálenost d v kilometrech:

$$d = 4{,}8\,\text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 3.8 Příklad 3.2. (a) Soubor vektorů pro výběr povolené trojice posunutí. (b) Závodník dosáhne největší vzdálenosti od startu, zvolí-li pro přesun trojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$. Obrázek zachycuje jedno z možných pořadí přesunů. Výsledný vektor posunutí je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$.

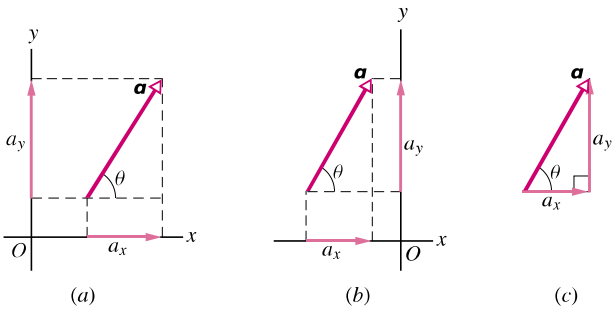
3.3 SLOŽKY VEKTORŮ

Grafické sčítání vektorů je zdlouhavé a málo přesné. Daleko elegantnější a snazší je metoda algebraická, při níž je však třeba vyjádřit vektory v souřadnicích. Pravoúhlou soustavu souřadnic volíme obvykle tak, že osy x a y umístíme do roviny nákresu (obr. 3.9a). Osu z pak vedeme počátkem soustavy souřadnic kolmo k nákresně. Prozatím budeme pracovat pouze s vektory v rovině a osu z nebudeme potřebovat.

Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9 leží v rovině xy. Vedeme-li jeho počátečním i koncovým bodem kolmice k souřadnicovým osám, vzniknou na osách úseky a_x a a_y. Nazýváme je **složky vektoru** $\boldsymbol{a}$ ve směrech x a y. Tento postup představuje rozklad vektoru do složek. Obecně pracujeme s vektory v trojrozměrném prostoru, kde mají tři složky. Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9a má v tomto obecném pojetí třetí složku nulovou. Posuneme-li vektor tak, aby jeho směr zůstal zachován, jeho složky se nezmění (obr. 3.9b). Pomocí pravoúhlého trojúhelníka na obr. 3.9a snadno najdeme výrazy pro složky vektoru $\boldsymbol{a}$:

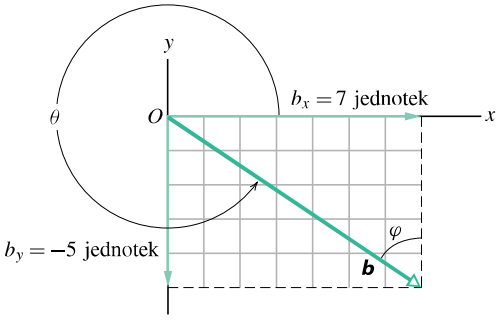
$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \qquad (3.5)$$

kde θ je úhel, který vektor $\boldsymbol{a}$ svírá s kladným směrem osy x a a je velikost vektoru. Z obr. 3.9c vidíme, že vektor a jeho x-ová a y-ová složka tvoří pravoúhlý trojúhelník. Je také zřejmé, jak sestrojíme vektor pomocí jeho složek: použijeme stejnou geometrickou konstrukci jako při sčítání vektorů.



Obr. 3.9 (a) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$. (b) Při posunutí vektoru (při zachování jeho velikosti i směru) se jeho složky nezmění. (c) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$ tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, jehož přeponou je vektor $\boldsymbol{a}$.

V závislosti na hodnotě úhlu θ mohou být složky vektorů kladné, záporné nebo nulové. Pro vyznačení znaménka složek používáme v obrázcích malých plných šipek. Podle běžné dohody je šipka orientována v kladném směru osy, je-li příslušná složka vektoru kladná a naopak. Vektor $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.10 má složku b_x kladnou a složku b_y zápornou.



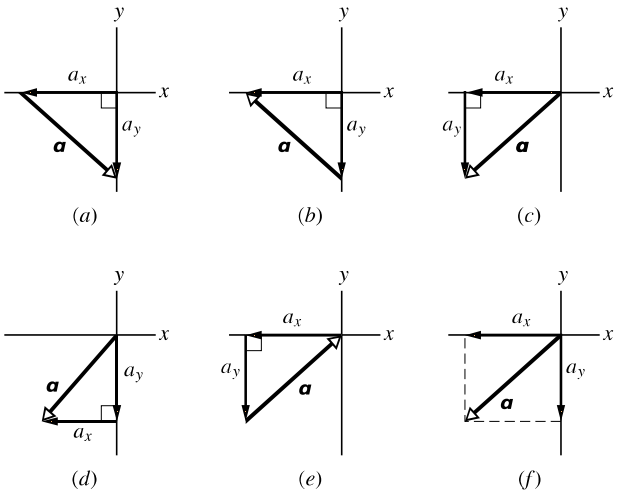
Obr. 3.10 Složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru osy x je kladná, složka ve směru osy y je záporná.

Vektor je svými složkami jednoznačně zadán stejně dobře jako svou velikostí a směrem. Všimněme si znovu obr. 3.9a. Vektor $\boldsymbol{a}$, ležící v rovině tvořené osami x a y, je v každém případě plně určen dvojicí čísel: velikostí a a úhlem θ, nebo složkami a_x a a_y. Každá z těchto dvojic obsahuje tutéž výslednou informaci. Podle potřeby můžeme přecházet od jednoho způsobu vyjádření vektoru k druhému. Známe-li např. složky a_x a a_y, vypočteme velikost a a úhel θ takto (obr. 3.9c):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Při řešení úloh můžeme vektor vyjadřovat *jak* pomocí jeho složek a_x a a_y, *tak* i pomocí dvojice a a θ.

KONTROLA 2: Který z následujících obrázků představuje správný rozklad vektoru $\boldsymbol{a}$ do složek?



PŘÍKLAD 3.3

Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od výchozího letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°. Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním a východním směru?

ŘEŠENÍ: Na obr. 3.11 je situace zakreslena v pravoúhlé soustavě souřadnic xy, jejíž počátek jsme pro jednoduchost umístili do polohy letiště. Osa x směřuje na východ, osa y na sever. Vektor $\boldsymbol{d}$ spojuje počátek soustavy souřadnic s místem, kde byl letoun opět spatřen.

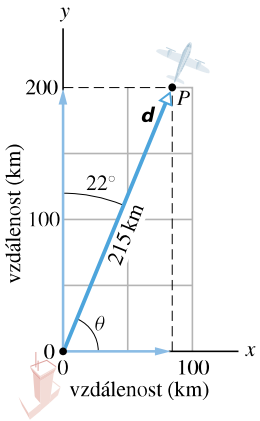
Na otázku položenou v zadání úlohy snadno odpovíme, určíme-li složky vektoru $\boldsymbol{d}$. Použijeme rov. (3.5), kam dosadíme $\theta = 68°$ ($= 90° - 22°$). Dostaneme

$$d_x = d\cos\theta = (215\,\text{km})(\cos 68°) = \\ = 81\,\text{km} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$d_y = d\sin\theta = (215\,\text{km})(\sin 68°) = \\ = 199\,\text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo bylo spatřeno 199 km severně a 81 km východně od letiště.



Obr. 3.11 Příklad 3.3. Letadlo odstartovalo z počátku soustavy souřadnic O a později bylo spatřeno v bodě P.

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.1: *Úhly — stupně a radiány*

Měříme-li úhel od kladného směru osy x, považujeme jeho hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček za kladnou, hodnotu měřenou po směru hodinových ručiček za zápornou.* Tak například hodnoty 210° a −150° udávají stejný směr. Proto velmi často nerozlišujeme mezi úhly, které se liší o 360°, tj. o plný úhel — např. právě úhel 210° a −150°.

Většina kalkulaček připouští při výpočtu goniometrických funkcí úhlů obě možnosti. (Vyzkoušejte si tu svou.) Nejběžnějšími jednotkami pro měření úhlů jsou stupně (°) a radiány (rad). Jejich vzájemné přepočty jsou velmi snadné. Stačí si zapamatovat, že plný úhel je roven 360° a 2π rad. Potřebujeme-li například převést 40° na radiány, píšeme

$$40° \frac{2\pi\,\text{rad}}{360°} = 0{,}70\,\text{rad}.$$

Zkusme rychle ověřit, je-li získaný výsledek v pořádku. 40° je jedna devítina plného úhlu 2π rad ($\doteq 6{,}3$ rad). Výsledkem přepočtu by tedy měla být hodnota $\frac{1}{9} \cdot 6{,}3$. Vidíme, že jsme přepočet provedli správně. Správnost převodu můžeme velmi snadno posoudit také tehdy, zapamatujeme-li si přibližný vztah 1 rad $\doteq 57°$.

Kalkulačky jsou po zapnutí většinou automaticky nastaveny tak, že počítají úhly ve stupních. Chceme-li zadávat úhly

* Jen tak budou rov. (3.5) v souladu s přijatou konvencí pro znaménka složek vektorů. Viz také bod 3.4.

v radiánech, je třeba kalkulačku přepnout do příslušného pracovního režimu. Vyzkoušejte si to, než začnete řešit konkrétní úlohy.

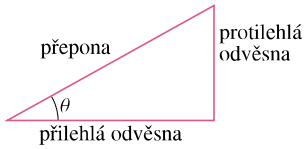
Bod 3.2: *Goniometrické funkce*

Nejužívanější goniometrické funkce sinus, kosinus a tangens je nutno dobře ovládat. Vědecké a technické výpočty se bez nich totiž neobejdou. Definice těchto funkcí jsou shrnuty v obr. 3.12. Označení jednotlivých stran pravoúhlého trojúhelníka není rozhodující a hodnoty $\sin\theta$, $\cos\theta$ a $\mathrm{tg}\,\theta$ nezávisí ani na jeho „velikosti“. Pro všechny tzv. podobné trojúhelníky jsou stejné.

$$\sin\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$



Obr. 3.12 Definice goniometrických funkcí. Viz též dod. E.

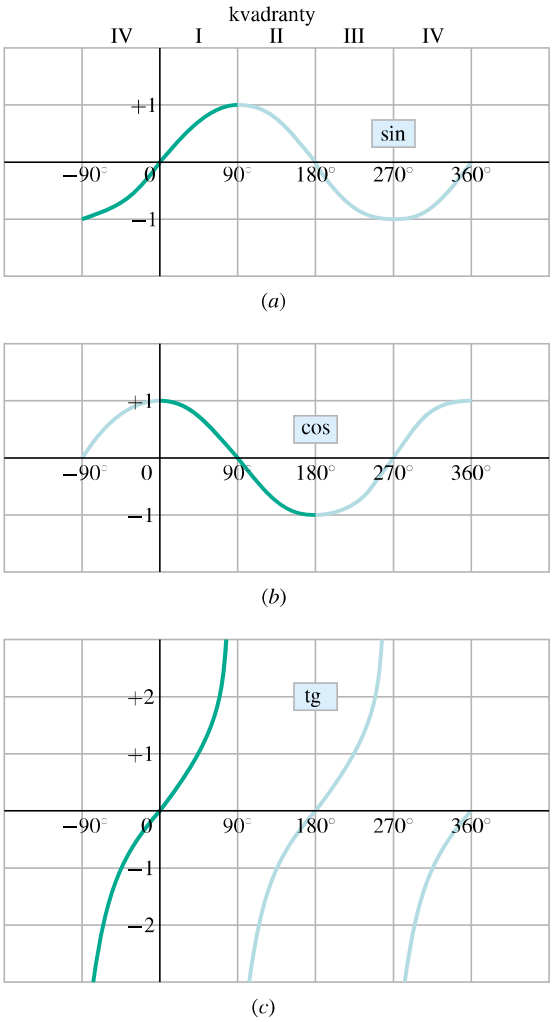
V případě potřeby bychom také měli umět hbitě si vybavit grafy goniometrických funkcí (obr. 3.13). Je výhodné si pamatovat, jaká jsou znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

Bod 3.3: *Cyklometrické funkce*

Cyklometrickými funkcemi rozumíme funkce inverzní ke goniometrickým. Nejdůležitější z nich jsou arcsin, arccos a arctg. Používáme-li pro jejich výpočet opět kalkulačku, musíme vždy dobře uvážit, je-li získaný výsledek v pořádku. Kalkulačka totiž zobrazí pro zadanou hodnotu y vybrané goniometrické funkce $f(x)$ (například sin) jen jedno z možných řešení x rovnice $y = f(x)$ ($y = \sin x$). Intervaly, v nichž leží řešení získaná na kalkulačce, jsou pro funkce $\sin x$, $\cos x$ a $\mathrm{tg}\,x$ vymezeny v obr. 3.13 zesílením odpovídající části grafu. Rovnici $0{,}5 = \sin x$ vyhovují hodnoty 30° a 150° a všechny další, které se od nich liší o celočíselný násobek plného úhlu. (O existenci různých řešení se můžeme snadno přesvědčit, najdeme-li průsečíky přímky $y = 0{,}5$ s grafem funkce sinus.) Při výpočtu na kalkulačce se však na displeji objeví právě výsledek 30°, který leží ve vyznačeném intervalu. Jak poznáme, které z možných řešení odpovídá zadané úloze? Vraťme se k příkladu 3.1, kde jsme mj. zjišťovali úhel θ na základě znalosti jeho tangenty, $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}5$. Na kalkulačce dostaneme hodnotu $\theta = 56°$. Snadno však zjistíme, že také tangenta úhlu $\theta = 236°$ ($= 180° + 56°$) má požadovanou hodnotu 1,5. Který z obou úhlů je správný? Z fyzikální úvahy je zřejmé, že zadání úlohy vyhovuje hodnota 56° (obr. 3.2b).

Bod 3.4: *Měření úhlů mezi vektory*

Vztahy (3.5) a (3.6) platí v případě, že je symbolem θ označen úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Je-li v úloze zadán úhel vektoru s jiným vztažným směrem, nemůžeme jej do vztahů (3.5) a (3.6) bezmyšlenkovitě dosadit. Pokud by byl například písmenem θ označen úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy y, museli bychom goniometrické funkce sin a cos ve vztazích (3.5) mezi sebou vyměnit a zlomek ve vztahu (3.6) převrátit. Možné chybě se snadno vyhneme tím, že pomocí zadaného úhlu určujícího směr vektoru vypočteme úhel θ sevřený vektorem a kladným směrem osy x. Přesně tak jsme to provedli při řešení příkladu 3.3.

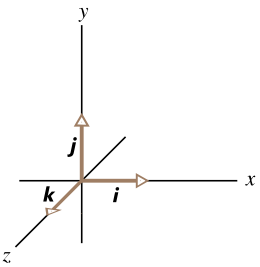


Obr. 3.13 Grafy tří nejužívanějších goniometrických funkcí. Část křivky určující obor hodnot odpovídající *cyklometrické* funkce je v každém grafu zvýrazněna. Vyznačené obory splývají s rozmezím hodnot cyklometrických funkcí běžných kalkulaček.

3.4 JEDNOTKOVÉ VEKTORY

Jako **jednotkový** je definován každý vektor, který má přesně jednotkovou velikost, bez ohledu na směr. Nepřisuzujeme mu fyzikální rozměr, a tedy ani jednotku. (Říkáme

také, že jeho fyzikální rozměr je 1.) Má jediný význam: určuje směr. Jednotkové vektory určující kladné směry souřadnicových os x, y a z označujeme často $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ (obr. 3.14).* Orientace souřadnicových os na obr. 3.14 je volena tak, aby tvořily **pravotočivou soustavu** (odpovídá po řadě palci, ukazováku a prostředníku na pravé ruce, když prsteník a malík jsou v dlani). Při jejím libovolném otočení zůstane tato vlastnost zachována. Pravotočivou soustavu souřadnic určenou navzájem kolmými jednotkovými vektory nazýváme zkráceně **kartézskou**. V dalším textu budeme používat výhradně kartézských souřadnicových soustav.



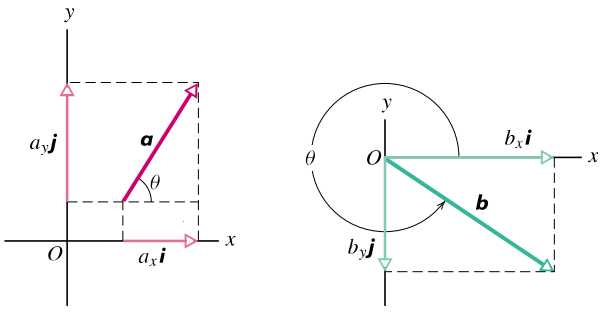
Obr. 3.14 Jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ definují kartézskou soustavu souřadnic.

Pomocí kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ můžeme velmi snadno vyjádřit každý další vektor. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ z obr. 3.9 a 3.10 zapíšeme například takto:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}. \tag{3.8}$$

Geometrický význam těchto rovnic ilustruje obr. 3.15. Vektory $a_x\boldsymbol{i}$ a $a_y\boldsymbol{j}$ jsou tzv. **pravoúhlé průměty** vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Rozlišujme mezi *složkami* (a_x, a_y) a *průměty* $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$.



Obr. 3.15 (a), (b) Pravoúhlé průměty vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

* Dalšími užívanými symboly pro jednotkový vektor příslušný vektoru $\vec{a}$ jsou $\hat{a}$, $\vec{a}_0$, a^0 apod.

Vraťme se ještě na chvíli k popisu cesty speleologické skupiny v příkladu 3.1. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její počátek splýval s polohou Austinova vchodu, vektory $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ směřovaly východním a severním směrem a vektor $\boldsymbol{k}$ svisle vzhůru. Vyjádření vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od Austinova vchodu k řece Echo je při této volbě soustavy souřadnic velmi přehledné:

$$\boldsymbol{d} = -(2{,}6\,\text{km})\,\boldsymbol{i} - (3{,}9\,\text{km})\,\boldsymbol{j} + (0{,}025\,\text{km})\,\boldsymbol{k}.$$

3.5 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: ALGEBRAICKÁ METODA

Při grafické konstrukci součtu vektorů jsme si mohli všimnout, že je poměrně pracná a nepříliš přesná. V trojrozměrném prostoru je navíc takřka neschůdná. Přímá *algebraická metoda* sčítání vektorů, s níž se seznámíme v tomto článku, je při praktických výpočtech velmi účelná. Využívá vyjádření vektorů pomocí jejich složek ve vhodně zvolené soustavě souřadnic.

Uvažujme o vektorovém součtu tvaru

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}. \tag{3.9}$$

Podle tohoto vztahu je vektor $\boldsymbol{r}$ shodný s vektorem $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Jeho složky r_x, r_y a r_z musí být tedy shodné s odpovídajícími složkami součtu $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$

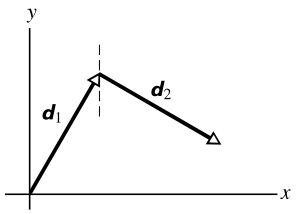
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Stručněji, dva vektory jsou si rovny právě tehdy, jsou-li jejich stejnojmenné složky shodné. Rov. (3.10) až (3.12) přímo obsahují návod pro výpočet složek součtu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$: (1) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozložíme do složek. (2) Sečtením stejnojmenných složek získáme odpovídající složky vektorového součtu $\boldsymbol{r}$ a (3) vektor $\boldsymbol{r}$ pomocí nich v případě potřeby zapíšeme. Můžeme zvolit dvojí způsob zápisu vektoru $\boldsymbol{r}$: pomocí jednotkových vektorů nebo zadáním velikosti a směru. Směr vektoru v dvojrozměrném prostoru je určen jedním úhlem (například obr. 3.9), v trojrozměrném prostoru je třeba zadat dvojici úhlů.* Často se spokojíme jen se zápisem složek vektoru, nejlépe ve tvaru (a_x, a_y, a_z).

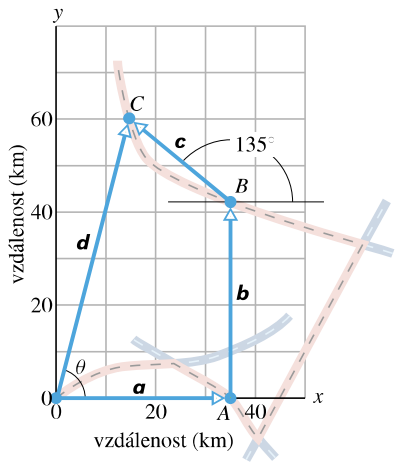
* Nejčastěji volíme zadání směru vektoru $\boldsymbol{r}$ pomocí úhlu θ, který vektor $\boldsymbol{r}$ svírá s kladným směrem osy z (tzv. **sférický úhel**) a úhlu φ mezi průmětem vektoru $\boldsymbol{r}$ do souřadnicové roviny (xy) a osou x (**azimutální úhel**).

KONTROLA 3: (a) Jaká znaménka mají x-ové a (b) y-ové složky vektorů $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$ v následujícím obrázku? (c) Jaká jsou znaménka x-ové a y-ové složky vektoru $(\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2)$?



PŘÍKLAD 3.4

Trasa mototuristické soutěže je vymezena následujícími pokyny: Od místa startu jeďte po nejbližší silnici ke kontrolnímu stanovišti A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další kontrola B leží 42 km severně od A. Cíl C je od stanoviště B vzdálen 25 km na severozápad. (Silnice s kontrolními stanovišti jsou zakresleny na obr. 3.16.)



Obr. 3.16 Příklad 3.4. Plánek trasy mototuristické soutěže s vyznačením kontrolních stanovišť A, B a C a vhodnou volbou soustavy souřadnic.

(a) Určete velikost a směr vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od startu do cíle C.

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic v rovině trasy (souřadnicová rovina (xy)) co nejvhodnějším způsobem. Příklad vhodné volby je zachycen na obr. 3.16. V obrázku jsou vyznačeny i vektory posunutí příslušné třem přesunům popsaným v pokynech soutěže. Vektor $\boldsymbol{d}$ má složky

$$d_x = a_x + b_x + c_x = 36\,\text{km} + 0 + (25\,\text{km})(\cos 135^\circ) =$$
$$= (36 + 0 - 17{,}7)\,\text{km} = 18{,}3\,\text{km}$$

a

$$d_y = a_y + b_y + c_y = 0 + 42\,\text{km} + (25\,\text{km})(\sin 135^\circ) =$$
$$= (0 + 42 + 17{,}7)\,\text{km} = 59{,}7\,\text{km}.$$

Velikost a směr vektoru $\boldsymbol{d}$ určíme pomocí vztahu (3.6).

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18{,}3\,\text{km})^2 + (59{,}7\,\text{km})^2} =$$
$$= 62\,\text{km}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{(59{,}7\,\text{km})}{(18{,}3\,\text{km})} = 3{,}26,$$
$$\theta = 73^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Význam úhlu θ je zřejmý z obr. 3.16.

(b) Vyjádřete vektor $\boldsymbol{d}$ pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$.

ŘEŠENÍ: Vektor $\boldsymbol{d}$ zapíšeme jednoduše ve tvaru

$$\boldsymbol{d} = (x\text{-ová složka})\boldsymbol{i} + (y\text{-ová složka})\boldsymbol{j} =$$
$$= (18{,}3\,\text{km})\boldsymbol{i} + (59{,}7\,\text{km})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 3.5

Vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ ležící v souřadnicové rovině (xy) jsou zadány takto:

$$\boldsymbol{a} = 4{,}2\boldsymbol{i} - 1{,}6\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{b} = -1{,}6\boldsymbol{i} + 2{,}9\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{c} = -3{,}7\boldsymbol{j}.$$

Určete jejich vektorový součet $\boldsymbol{r}$. Pro jednoduchost nepracujeme s jednotkami, pro pořádek je však možné si představit, že složky vektorů jsou zadány v metrech.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si nejprve, že z-ové složky vektorů ležících v souřadnicové rovině (xy) jsou nulové, proto vektor $\boldsymbol{k}$ v jejich zápisech chybí. Podle rov. (3.10) až (3.12) platí

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4{,}2 - 1{,}6 + 0 = 2{,}6,$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1{,}6 + 2{,}9 - 3{,}7 = -2{,}4$$

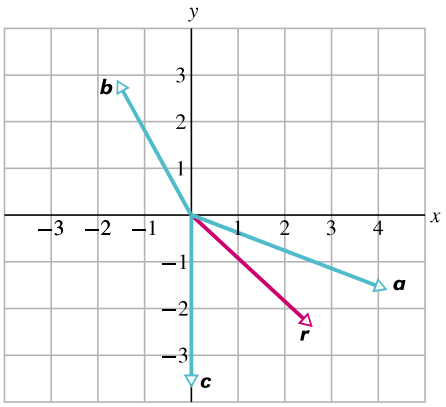
a

$$r_z = a_z + b_z + c_z = 0 + 0 + 0 = 0,$$

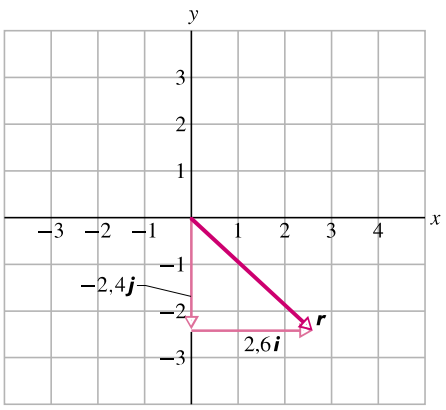
tj.

$$\boldsymbol{r} = 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} =$$
$$= 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zadání příkladu i jeho výsledek vidíme na obr. 3.17a. Rozklad vektoru $\boldsymbol{r}$ do složek je na obr. 3.17b.



(a)



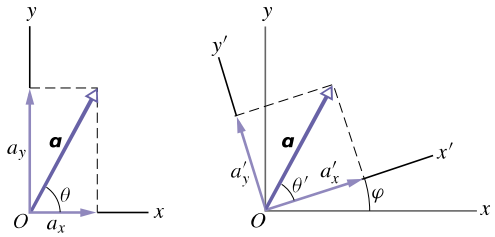
(b)

Obr. 3.17 Příklad 3.5. Vektor ***r*** je součtem tří vektorů

3.6 VEKTORY A FYZIKÁLNÍ ZÁKONY

Ve všech obrázcích jsme doposud kreslili osy soustavy souřadnic rovnoběžně s okraji stránky. Složky a_x a a_y vektoru ***a*** byly tedy rovněž měřeny podél těchto okrajů (například obr. 3.18a). Tato volba však nemá žádné hlubší matematické či fyzikální opodstatnění, jedinou její předností je pěkný vzhled obrázků. Klidně bychom mohli soustavu souřadnic otočit o úhel φ podle obr. 3.18b (vektor ***a*** neotáčet!). V nové soustavě souřadnic budou mít složky vektoru pochopitelně jiné hodnoty. Označme je a'_x a a'_y. Různých otočení soustavy souřadnic φ je ovšem nekonečně mnoho, a tak může být jeden a týž vektor ***a*** zadán nekonečným počtem různých dvojic svých složek.

Která z nich je ta pravá? Odpověď je jednoduchá: Všechna zadání jsou rovnocenná, neboť reprezentují týž vektor v různých soustavách souřadnic. Každou dvojici údajů (a_x, a_y) je však třeba spojit s informací, k *jaké soustavě souřadnic* jsou údaje vztaženy. Výpočet velikosti a směru vektoru pomocí kterékoli z rovnocenných dvojic složek vede ke stejnému výsledku (obr. 3.18):



(a) (b)

Obr. 3.18 (a) Vektor ***a*** a jeho složky ve zvolené soustavě souřadnic. (b) Složky téhož vektoru v soustavě souřadnic otočené o úhel φ.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}, \tag{3.13}$$

$$\theta = \theta' + \varphi. \tag{3.14}$$

Předchozí úvahy jsou dokladem značné libovůle při výběru soustavy souřadnic. Vztahy pro vektory i vektorové součty (rov. (3.1)), jsou totiž nezávislé jak na poloze jejího počátku, tak na orientaci souřadnicových os. Totéž platí i pro fyzikální vztahy a zákony: jsou nezávislé na volbě soustavy souřadnic. Připojme k tomu jednoduchost a bohatost vektorové algebry a pochopíme, proč je řada fyzikálních zákonů vyjádřena vektorovými rovnicemi: jediná vektorová rovnice (3.9) zastupuje hned tři rovnice skalární, (3.10), (3.11) a (3.12).

3.7 NÁSOBENÍ VEKTORŮ*

Existuje více různých způsobů násobení vektorů.

Násobení vektoru skalárem

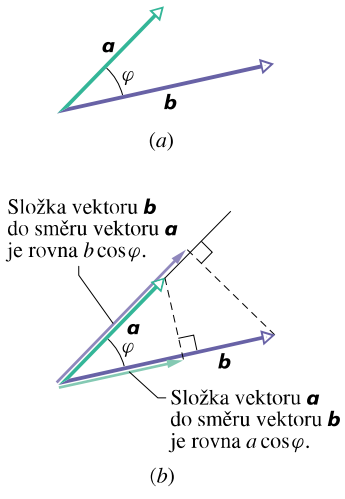
Výsledkem násobení vektoru ***a*** skalárem s je opět vektor. Jeho velikost je součinem velikosti vektoru ***a*** a absolutní hodnoty skaláru s. Je-li hodnota s kladná, je směr výsledného vektoru shodný se směrem vektoru ***a***, pro zápornou hodnotu s je opačný. Dělením vektoru ***a*** nenulovým skalárem s rozumíme násobení jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalárem s může být jak číslo (fyzikálně bezrozměrová konstanta), tak fyzikální veličina. V druhém případě je výsledkem násobení vektorová fyzikální veličina jiné povahy než ***a***.

* Pojmy vyložené v tomto článku budeme potřebovat až v pozdějších kapitolách (skalární součin v kapitole 7 a vektorový součin v kapitole 12). Studium článku lze v tuto chvíli ještě odložit.

Skalární součin vektorů

V matematice jsou definovány dvě různé operace, které mohou být nazývány násobením dvou vektorů. Výsledkem prvé z nich je skalár, výsledkem druhé je další vektor. Studenti tyto operace často zaměňují, a tak je budeme od prvopočátku pečlivě rozlišovat.



Obr. 3.19 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ svírají úhel φ. (b) Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{b}$ je $a\cos\varphi$, složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$ je $b\cos\varphi$.

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (zapisujeme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je definován vztahem (obr. 3.19a)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \qquad (3.15)$$

kde a a b jsou velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, φ je úhel mezi nimi.* Všimněme si, že na pravé straně rovnice (3.15) vystupují pouze skaláry (a, b a $\cos\varphi$). Výraz $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ na levé straně je tedy rovněž *skalární* veličinou. Přepíšeme-li definiční rovnici (3.15) do tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a\cos\varphi)(b) = (a)(b\cos\varphi), \qquad (3.16)$$

vidíme, že skalární součin je možné interpretovat i jako součin (1) velikosti prvého z obou vektorů a (2) složky druhého z nich ve směru prvého. Výsledek je samozřejmě na pořadí vektorů nezávislý. Na obr. 3.19b jsou znázorněny obě možnosti: Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{b}$ má hodnotu $a\cos\varphi$. Určíme ji tak, že koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{a}$ vedeme kolmici k přímce určující směr vektoru $\boldsymbol{b}$. Podobně lze zjistit, že složka vektoru $\boldsymbol{b}$ do směru $\boldsymbol{a}$ má hodnotu $b\cos\varphi$. Pro $\varphi = 0^\circ$ (resp. $\varphi = 180^\circ$) má průmět kteréhokoli z obou vektorů do směru druhého největší možnou velikost a skalární součin nabývá své největší (resp. nejmenší) hodnoty.

Pro $\varphi = 90^\circ$ jsou oba průměty nulové a odpovídající hodnota skalárního součinu je tedy rovněž nulová. Pro skalární součin platí komutativní zákon

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

Při zápisu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ pomocí jednotkových vektorů můžeme skalární součin vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \qquad (3.17)$$

a při další úpravě použít distributivního zákona: každý sčítanec v prvé závorce skalárně vynásobíme postupně všemi sčítanci ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Dostaneme poměrně složitý výraz s devíti sčítanci, který však vzápětí dokážeme opět zjednodušit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Uvažujme například první z těchto devíti skalárních součinů. Vektory $(a_x\boldsymbol{i})$ a $(b_x\boldsymbol{i})$ mají stejný směr. V souhlasu s obr. 3.19 má jejich skalární součin hodnotu a_xb_x. Obdobně je $(a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) = a_yb_y$ a $(a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) = a_zb_z$. V ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů, který je nulový. Skalární součin vektorů lze tedy pomocí jejich složek v *kartézské* soustavě souřadnic vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

KONTROLA 4: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky, vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, má-li jejich skalární součin $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$ hodnotu (a) nulovou, (b) 12 jednotek, (c) -12 jednotek?

* Úhlem mezi dvěma vektory rozumíme úhel mezi jejich *orientovanými* směry. V případě vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.18 je jím úhel φ, nikoli $360^\circ - \varphi$.

* Zatímco komutativnost skalárního součinu je okamžitě zřejmá hned z definičního vztahu (3.15), u distributivního zákona tomu tak není. Pomocí přímých, i když poměrně pracných výpočtů využívajících elementárních vztahů z trigonometrie by však bylo schůdné jeho platnost dokázat (dobří počtáři se o to mohou pokusit).

PŘÍKLAD 3.6

Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (3.15) má skalární součin zadaných vektorů hodnotu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= ab\cos\varphi = \\ &= \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2}\sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2}\cos\varphi = \\ &= 18{,}0\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Podle rov. (3.17) je současně

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}).$$

Užitím distributivního zákona dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}) + \\ & + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Každý ze skalárních součinů na pravé straně předchozí rovnosti vyčíslíme pomocí rov. (3.15). Vektory $3{,}0\boldsymbol{i}$ a $-2{,}0\boldsymbol{i}$ v prvém z nich svírají úhel $0°$, ve všech ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů. Dostáváme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) = \\ &= -6{,}0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Výsledek můžeme ověřit vyjádřením skalárního součinu vektorů pomocí jejich složek:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0)(-2{,}0) + (-4{,}0)(0) + (0)(3{,}0) = -6{,}0.$$

Získaná hodnota se ovšem musí shodovat s pravou stranou rovnice (3.18), tj.

$$18{,}0\cos\varphi = -6{,}0$$

a odtud

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{-6{,}0}{18{,}0} = -0{,}333, \\ \varphi &= 109° \doteq 110°. \end{aligned} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektorový součin

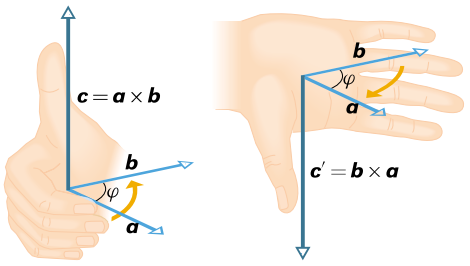
Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Výsledkem je vektor $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Jeho velikost je definována vztahem

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde a a b jsou opět velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a φ je úhel mezi nimi. Jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rovnoběžné, ať již souhlasně či nesouhlasně, je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (píšeme $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$) nabývá největší možné hodnoty, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ kolmé.

Výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ je definován jako vektor kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Jeho orientace je určena tzv. pravidlem pravé ruky, které je znázorněno na obr. 3.20a:

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ umístíme do společného počátečního bodu. Zachováme přitom jejich směry. Společným počátkem vedeme kolmici k rovině určené oběma vektory. Kolmici „uchopíme“ *pravou* rukou tak, aby prsty ukazovaly od vektoru $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ „cestou“ menšího z obou úhlů (úhel φ v obr. 3.20). Vztyčený palec ukazuje správně orientovaný směr vektoru $\boldsymbol{c}$.



(a) (b)

Obr. 3.20 Pravidlo pravé ruky pro vektorový součin. (a) Natočte pravou ruku tak, aby vektor $\boldsymbol{a}$ byl ve směru ukazováčku a $\boldsymbol{b}$ ve směru prostředníku. Pak palec ukazuje směr $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. (b) Vidíme, že $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

Na rozdíl od skalárního součinu je pořadí činitelů při vektorovém násobení důležité. Obr. 3.20b ukazuje použití pravidla pravé ruky při určení směru vektoru $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. Prsty nyní směřují od $\boldsymbol{b}$ k $\boldsymbol{a}$ a palec ukazuje opačným směrem, než na obr. 3.20a. Vektor $\boldsymbol{c}'$ je tedy opačný k vektoru $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{3.21}$$

Pro vektorový součin neplatí komutativní zákon.

Pomocí jednotkových vektorů můžeme psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times \\ & \times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Při úpravě opět použijeme distributivní zákon: každý člen první závorky vektorově vynásobíme každým sčítancem ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Roznásobte závorky na pravé straně rov. (3.22) a porovnejte výsledek se vztahy v dod. E.

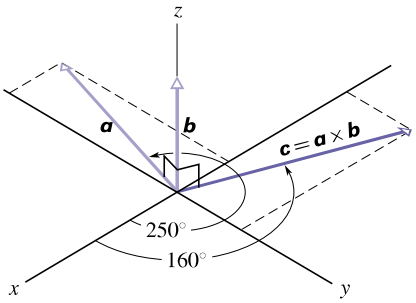
Pomocí vektorového součinu lze snadno rozhodnout, zda je zvolená soustava souřadnic pravotočivá. V kladném případě musí být splněna rovnost $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$. Ověřte její platnost pro souřadnicovou soustavu na obr. 3.14.

* Platnost distributivního zákona pro vektorový součin lze opět dokázat užitím pravidel elementární geometrie a užitím skalárního součinu.

KONTROLA 5: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky a vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, (a) je-li vektor $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ nulový, (b) má-li vektor $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ velikost 12 jednotek?

PŘÍKLAD 3.7

Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy (obr. 3.21). Má velikost 18 jednotek a s kladným směrem osy x svírá úhel 250°. Vektor $\boldsymbol{b}$ má velikost 12 jednotek a je souhlasně rovnoběžný s kladným směrem osy z.



Obr. 3.21 Příklad 3.7. Vektorové násobení

(a) Vypočtěte skalární součin zadaných vektorů.

ŘEŠENÍ: Vektory svírají úhel $\varphi = 90°$. Podle rov. (3.15) tedy platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\varphi = (18)(12)(\cos 90°) = 0. \quad \text{(Odpověď)}$$

Skalární součin kolmých vektorů má vždy nulovou hodnotu. Odpovídá to skutečnosti, že průmět kteréhokoli z nich do směru druhého je nulový.

(b) Vypočtěte vektorový součin $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

ŘEŠENÍ: Velikost vektorového součinu určíme z definičního vztahu (3.20).

$$ab \sin\varphi = (18)(12)(\sin 90°) = 216. \quad \text{(Odpověď)}$$

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Je tedy kolmý k ose z, neboť vektor $\boldsymbol{b}$ v ní leží. Vektor $\boldsymbol{c}$ tedy leží v souřadnicové rovině (xy). Pomocí obr. 3.21 určíme ještě jeho směr: Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý i k vektoru $\boldsymbol{a}$. S kladným směrem osy x tedy svírá úhel buď $250° - 90° = 160°$, nebo $250° + 90° = 340°$. Užitím pravidla pravé ruky se snadno přesvědčíme, že správná je první možnost (obr. 3.21).

PŘÍKLAD 3.8

Určete $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$.

ŘEŠENÍ: Dosazením do rov. (3.22) dostaneme výraz

$$\boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) \times (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}),$$

který rozepíšeme pomocí distributivního zákona:

$$\boldsymbol{c} = -(3\boldsymbol{i} \times 2\boldsymbol{i}) + (3\boldsymbol{i} \times 3\boldsymbol{k}) + (4\boldsymbol{j} \times 2\boldsymbol{i}) - (4\boldsymbol{j} \times 3\boldsymbol{k}).$$

Pro každý z těchto čtyř vektorových součinů vypočteme podle rov. (3.20) jeho velikost a užitím pravidla pravé ruky určíme jeho směr. U prvého z nich je $\varphi = 0°$, u ostatních $\varphi = 90°$. Nakonec dostaneme

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k} - 12\boldsymbol{i} = \\ = -12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.5: *Časté chyby při výpočtu vektorového součinu*

Při výpočtu vektorového součinu se můžeme snadno dopustit některé z následujících chyb. (1) Je-li grafické zadání úlohy nevhodné pro výpočet vektorového součinu (vektory jsou zakresleny například tak, že počáteční bod jednoho z nich splývá s koncovým bodem druhého) potřebujeme umístit vektory do společného počátečního bodu. Někdy přitom zapomeneme, že nesmíme změnit směr vektorů. (2) Stane se, že chybně použijeme pravidlo pravé ruky, třeba když v ní současně držíme kalkulačku nebo pero. (3) K omylu může snadno dojít i tehdy, je-li potřeba při použití pravidla pravé ruky ruku nepřirozeně zkroutit, nebo když se snažíme směr výsledného vektoru jen odhadnout. (4) Výsledek bude chybný, nepracujeme-li v pravotočivé soustavě souřadnic (obr. 3.14).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Skaláry a vektory

Skaláry (skalární veličiny) jsou jednoznačně určeny jediným číslem a příslušnou jednotkou (například teplota 82 °C). Při počítání se skaláry používáme běžných pravidel aritmetiky a algebry čísel. *Vektory* mají velikost a směr (například posunutí 5 m severně). Při výpočtech platí zvláštní pravidla vektorové algebry.

Grafická metoda sčítání vektorů

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ narýsujeme ve vhodném měřítku tak, že počáteční bod kteréhokoli z nich umístíme do koncového bodu druhého. Jejich součtem je vektor $\boldsymbol{s}$ spojující počáteční bod prvého vektoru s koncovým bodem druhého (obr. 3.3). Tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ podle obr. 3.4. Při odečítání vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ změníme směr vektoru $\boldsymbol{b}$ a získáme tak vektor opačný $-\boldsymbol{b}$, který přičteme k $\boldsymbol{a}$ (obr. 3.7). Pro vektorové sčítání platí komutativní a asociativní zákon.

Složky vektoru

Složky vektoru v rovině jsou určeny jeho kolmými průměty do směrů souřadnicových os x a y. Složky a_x a a_y vektoru $\boldsymbol{a}$ jsou dány vztahy

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

kde θ je úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Znaménko složky určuje orientaci odpovídajícího průmětu vektoru vzhledem ke kladnému směru souřadnicové osy. Pomocí složek vektoru můžeme určit jeho velikost i směr

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Jednotkové vektory

Vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou definovány jako navzájem kolmé vektory jednotkové velikosti, jejichž směry jsou souhlasně rovnoběžné s osami x, y a z pravotočivé soustavy souřadnic. Libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ můžeme pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{3.7}$$

kde $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$ a $a_z\boldsymbol{k}$ jsou kolmé průměty vektoru $\boldsymbol{a}$ do souřadnicových os a a_x, a_y a a_z jsou jeho složky.

Algebraická metoda sčítání vektorů

Algebraická metoda výpočtu součtu $\boldsymbol{r}$ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je založena na použití pravidla „sčítání po složkách“:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$

$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Vektory a fyzikální zákony

Při řešení fyzikálních problémů vyžadujících vektorový popis lze použít kteroukoli z mnoha přípustných souřadnicových soustav. Její výběr většinou podřizujeme požadavku co největšího zjednodušení formulace a řešení dané úlohy. Vztahy mezi vektorovými veličinami i fyzikální zákony samy jsou na volbě soustavy souřadnic nezávislé.

Násobení vektoru skalárem

Výsledkem násobení vektoru $\boldsymbol{v}$ skalárem s je vektor o velikosti $|s|\,|\boldsymbol{v}|$. Pro $s > 0$ je jeho směr souhlasný se směrem vektoru $\boldsymbol{v}$, pro $s < 0$ je opačný. Vektor $\boldsymbol{v}$ dělíme skalárem $s \neq 0$, násobíme-li jej jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalární součin

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (značíme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je *skalární* veličina, definovaná vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.15}$$

kde φ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. V závislosti na hodnotě φ může být skalární součin kladný, záporný nebo nulový. Z obr. 3.19b je zřejmé, že skalární součin vektorů lze získat vynásobením velikosti kteréhokoli z nich složkou druhého vektoru ve směru vektoru prvého. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů píšeme

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \tag{3.17}$$

a při úpravě použijeme distributivního zákona. Skalární součin je komutativní, tj. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Je to vektor $\boldsymbol{c}$ o velikosti

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde φ je úhel vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (menší z obou úhlů sevřených přímkami, v nichž vektory leží). Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu určenou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a jeho směr je dán pravidlem pravé ruky (obr. 3.20). Platí $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů je vektorový součin dán výrazem

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}), \tag{3.22}$$

který lze ještě upravit užitím distributivního zákona, viz úlohu 49.

OTÁZKY

1. Vektor posunutí $\boldsymbol{N}$ ležící v rovině xy spojuje body o souřadnicích (5 m, 3 m) (počáteční bod) a (7 m, 6 m) (koncový bod). Z následujících posunutí vyberte ta, která jsou ekvivalentní vektoru $\boldsymbol{N}$: vektor $\boldsymbol{A}$ směřující z bodu (−6 m, −5 m) do bodu (−4 m, −2 m); vektor $\boldsymbol{B}$ z bodu (−6 m, 1 m) do bodu (−4 m, 4 m); vektor $\boldsymbol{C}$ z bodu (−8 m, −6 m) do bodu (−10 m, −9 m).

2. Vektor $\boldsymbol{d}$ je definován vztahem $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{c})$. Rozhodněte, zda platí i následující vztahy (a) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b})$, (b) $\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$, (c) $\boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

3. Rovnost (3.2) je vyjádřením komutativního zákona pro sčítání vektorů. Rozhodněte, zda je komutativní i odečítání vektorů, tj. platí-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

4. Ve hře s trojrozměrným bludištěm je třeba přesunout hrací kámen z výchozího bodu o souřadnicích $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ do cílového bodu (−2 cm, 4 cm, −4 cm). Pro pohyb kamene povolují pravidla hry pouze posunutí $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$,

$$\boldsymbol{p} = -7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{s} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Souřadnice jsou uváděny v centimetrech. Ocitne-li se kámen při hře v polohách (−5 cm, −1 cm, −1 cm) nebo (5 cm, 2 cm, −1 cm), je hra prohraná. Jaký výběr přípustných vektorů posunutí a jejich pořadí vede k výhře?

5. Co dokážeme říci o vektorech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, pro něž platí
(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a + b = c$,
(b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$,
(c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a^2 + b^2 = c^2$?

6. (a) Může mít vektor současně nulovou velikost a nenulovou některou ze svých složek? (b) Můžeme sečtením dvou vektorů různé velikosti dostat nulový vektor? Může být součet tří vektorů nulový, jestliže tyto vektory (c) leží, (d) neleží v jedné rovině?

7. Může být velikost rozdílu dvou vektorů větší než (a) velikost některého z nich, (b) velikost každého z nich, (c) velikost jejich součtu?

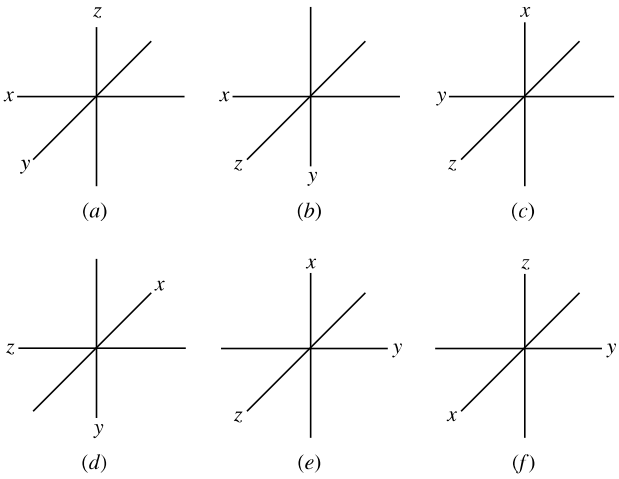
8. Může být součet velikostí dvou vektorů roven velikosti jejich součtu? Pokud ne, proč? Pokud ano, kdy?

9. Která ze souřadnicových soustav na obr. 3.22 je pravotočivá? Kladný směr každé souřadnicové osy je označen jejím popisem.

10. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ jsou zadány svými složkami:

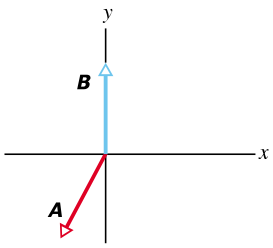
$$a_x = 3; \quad a_y = 3; \quad c_x = -3; \quad c_y = -3;$$
$$b_x = -3; \quad b_y = 3; \quad d_x = 3; \quad d_y = -3.$$

K výpočtu úhlu θ mezi každým z nich a osou x používáme vztah (3.6). Výpočty provádíme na kalkulačce. Pro které ze zadaných vektorů se na displeji kalkulačky přímo objeví správný výsledek? K odpovědi použijte nejprve obr. 3.13 a teprve pak ověřte její správnost výpočtem na kalkulačce.



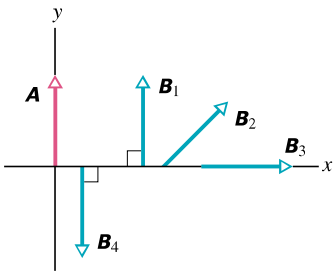
Obr. 3.22 Otázka 9

11. Vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou zadány na obr. 3.23. Jaká jsou znaménka x-ových a y-ových složek vektorů (a) $\boldsymbol{A}$ a (b) $\boldsymbol{D}$, kde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$?



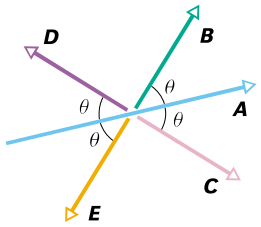
Obr. 3.23 Otázka 11

12. Na obr. 3.24 je nakreslen vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři různé možnosti volby vektoru $\boldsymbol{B}$, lišící se pouze směrem. Seřaďte vektory $\boldsymbol{B}$ podle velikosti absolutní hodnoty součinu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. (Zvolte sestupné řazení.)



Obr. 3.24 Otázka 12

13. Na obr. 3.25 je zadán vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři další vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$ shodných velikostí. (a) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ stejný? (b) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ záporný?

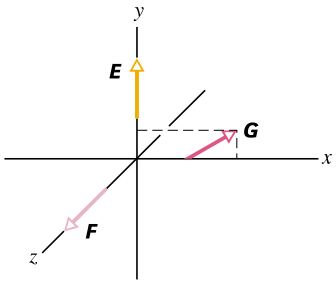


Obr. 3.25 Otázka 13

14. Jsou dány vektory $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{B} = 7\boldsymbol{k}$. Určete $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

15. Předpokládejme, že platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. Znamená to, že jsou vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ stejné?

16. Vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ jsou zadány na obr. 3.26. Vektor $\boldsymbol{G}$ leží v rovině xy. Určete směry vektorů (a) $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, (b) $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{E}$ a (c) $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{E}$. Změní se odpověď na otázku (c), posuneme-li vektor $\boldsymbol{G}$ rovnoběžně s osou z beze změny jeho směru?



Obr. 3.26 Otázka 16

17. Je dán vektor $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. Určete $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, je-li (a) $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$ a (b) $\boldsymbol{B} = -8\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j}$. (Odpovědi lze vyslovit i bez výpočtu.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 3.2 Sčítání vektorů: grafická metoda

1C. Dva vektory posunutí mají velikosti 3 m a 4 m. Jak je třeba volit jejich směry, má-li mít výsledné posunutí velikost (a) 7 m, (b) 1 m a (c) 5 m?

2C. Žena ušla 250 m severovýchodním směrem svírajícím s místním poledníkem úhel 30°. Poté zamířila přímo na východ a ušla dalších 175 m. (a) Grafickou metodou určete její celkové posunutí. (b) Porovnejte velikost tohoto posunutí se skutečnou délkou chůze.

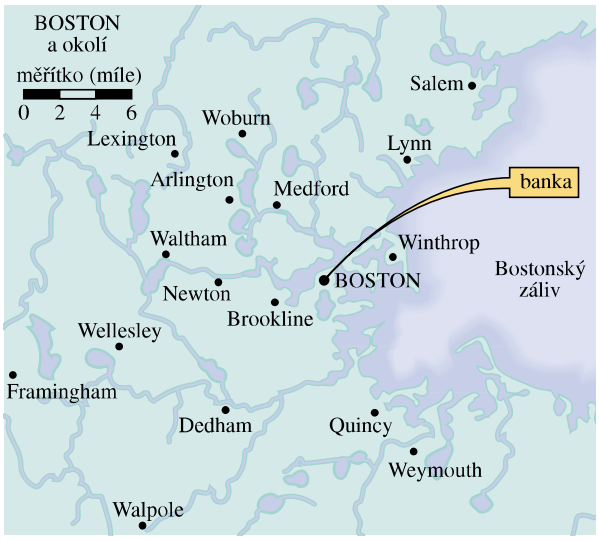
3C. Turista ušel 3,1 km na sever, pak 2,4 km na západ a nakonec 5,2 km na jih. (a) Sestrojte vektorový diagram popisující jeho pohyb. (b) Jak daleko a v jakém směru by musel letět pták, aby ze stejného výchozího místa doletěl do stejného cíle? Let ptáka je přímočarý.

4C. Automobil jede 50 km východním směrem, poté 30 km severně a dále 25 km na severovýchod pod úhlem 30° vzhledem k místnímu poledníku. Sestrojte vektorový diagram pohybu a určete celkové posunutí automobilu.

5Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ má velikost 5,0 jednotek a směřuje přímo na východ. Vektor $\boldsymbol{b}$ je odkloněn od severního směru na západ o 35° a jeho velikost činí 4,0 jednotky. Určete graficky $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Z nákresu odhadněte velikosti a směry výsledných vektorů.

6Ú. V jedné z bostonských bank došlo k loupeži (mapka na obr. 3.27). Při útěku použili lupiči vrtulník a letěli po trase tvořené třemi po sobě následujícími přímými úseky: 20 mil přesně na jihovýchod, 33 mil na severozápad, 26° od místní rovnoběžky, 16 mil na jihovýchod, 18° od místního poledníku. Při posledním přistání byli dopadeni. Ve kterém městě to bylo? (Vektory posunutí sčítejte grafickou metodou přímo v mapě.)

7Ú. Tři vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ mají stejnou velikost 50 jednotek a leží v rovině xy. S kladnou částí osy x svírají postupně úhly 30°, 195° a 315°. Určete graficky velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a (c) vektor $\boldsymbol{d}$ tak, aby $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$.



Obr. 3.27 Úloha 6

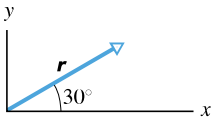
ODST. 3.3 Složky vektorů

8C. (a) Převeďte úhly 20,0°, 50,0° a 100° na radiány. (b) Převeďte úhly 0,330 rad, 2,10 rad a 7,70 rad na stupně.

9C. Určete x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{a}$, který leží v rovině xy a svírá s kladnou částí osy x úhel 250° měřený proti směru otáčení hodinových ručiček. Velikost vektoru je 7,3 jednotek.

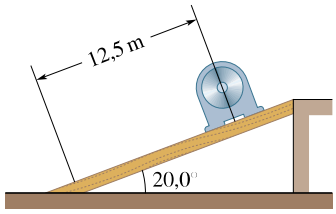
10C. Vektor v rovině xy má složky $a_x = -25{,}0$ jednotek a $a_y = +40{,}0$ jednotek. (a) Jakou má velikost? (b) Jaký úhel svírá s kladným směrem osy x?

11C. Vektor posunutí $\boldsymbol{r}$ leží v rovině xy a má velikost 15 m (obr. 3.28). Určete jeho složky.



Obr. 3.28 Cvičení 11

12C. Těžkou strojní součástku zvedali v dílně tak, že ji vlekli vzhůru po desce odkloněné od vodorovné roviny o úhel 20,0° (obr. 3.29). Součástku se podařilo posunout po desce o 12,5 m. (a) Jak vysoko se při tom zvedla? (b) Jaké bylo její posunutí ve vodorovném směru?



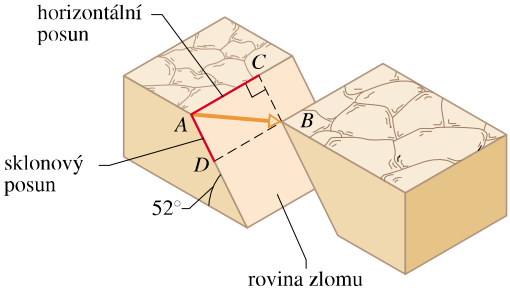
Obr. 3.29 Cvičení 12

13C. Minutová ručička nástěnných hodin měří od osy otáčení po špičku 10 cm. Jaký je vektor posunutí špičky (a) od čtvrt na čtyři do půl čtvrté, (b) za další půlhodinu a (c) za další hodinu?

14C. Loď se chystá na cestu dlouhou 120 km severním směrem. Náhlá bouře ji zanese 100 km východně od výchozího bodu. Jak musí kapitán změnit pokyny k plavbě (vzdálenost a směr), aby loď dosáhla původně plánovaného cíle?

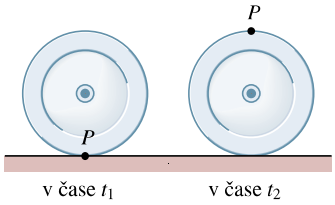
15Ú. Dvě kontrolní stanoviště A a B orientačního běhu jsou od sebe vzdálena 3,40 km. Stanoviště B leží severovýchodně od A ve směru svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 35,0°. Pravidla závodu dovolují postupovat pouze severojižním nebo východozápadním směrem. Jakou nejmenší vzdálenost musí závodník uběhnout ze stanoviště A do B?

16Ú. Tektonickým zlomem se nazývá vzájemné posunutí dvou sousedních skalních bloků (obr. 3.30). Před skluzem body A a B splývaly. Celkové posunutí AB leží v rovině zlomu. Vodorovný průmět AC celkového posunutí se nazývá *horizontální posun*, průmět směřující dolů podél roviny zlomu AD je tzv. *sklonový posun*. (a) Jaká je celková délka posunutí AB, je-li horizontální posun 22,0 m a sklonový posun 17,0 m? (b) Jak velká je svislá složka posunutí AB, je-li rovina zlomu skloněna o 52° vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 3.30 Úloha 16

17Ú. Kolo o poloměru 45,0 cm se valí bez prokluzu po vodorovné podlaze (obr. 3.31). Na obvodu kola označíme bod P, který se v okamžiku t_1 právě dotkne podlahy. V pozdějším okamžiku t_2 je kolo otočeno o polovinu otáčky. Jaké je posunutí bodu P za dobu od t_1 do t_2?



Obr. 3.31 Úloha 17

18Ú. Místnost má půdorysné rozměry 3,7 m × 4,3 m a výšku 3,3 m. Moucha vyletí z jednoho rohu místnosti, chvíli poletuje a skončí v protilehlém rohu. (a) Jaká je velikost s jejího posunutí? (b) Může být dráha jejího letu kratší než s? Může být delší? Může být stejná? (c) Zaveďte vhodnou soustavu souřadnic a vyjádřete v ní složky vektoru posunutí. (d) Jakou nejkratší dráhu by moucha musela urazit, kdyby jen lezla po zdi? (Na tuto otázku lze odpovědět i bez výpočtu).

ODST. 3.5 Sčítání vektorů: algebraická metoda

19C. Určete složky vektoru $\boldsymbol{r}$, který je součtem dvou posunutí $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ se složkami $c_x = 7{,}4$ m, $c_y = -3{,}8$ m, $c_z = -6{,}1$ m, $d_x = 4{,}4$ m, $d_y = -2{,}0$ m, $d_z = 3{,}3$ m.

20C. (a) Pomocí jednotkových vektorů zapište součet vektorů $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -13\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. (b) Určete jeho velikost a směr.

21C. Určete složky, velikost a směr vektorů (a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ a (b) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j}$.

22C. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. (c) Najděte vektor $\boldsymbol{c}$, pro který je $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

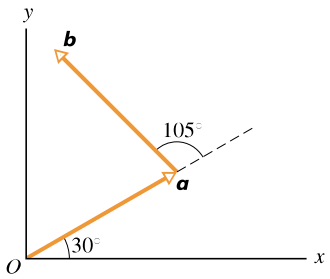
23C. Jsou dány dva vektory $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 6{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Určete velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a}$, (b) $\boldsymbol{b}$, (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (d) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (e) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Jaký je vztah mezi vektory vypočtenými v části (d) a (e)?

24Ú. Určete vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

25Ú. Přičteme-li vektor $\boldsymbol{B}$ k vektoru $\boldsymbol{A}$, dostaneme vektor $6{,}0\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j}$. Pokud vektor $\boldsymbol{B}$ od vektoru $\boldsymbol{A}$ odečteme, je výsledkem vektor $-4{,}0\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{A}$?

26Ú. Součet vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ je $3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ má směr souhlasný s osou y a velikost shodnou s vektorem $\boldsymbol{C}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{B}$?

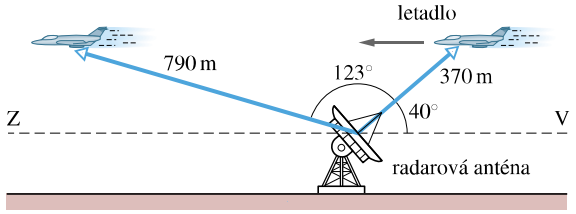
27Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají stejnou velikost 10,0 jednotek. Jejich směry jsou zakresleny v obr. 3.32. Označme jejich součet symbolem $\boldsymbol{r}$. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{r}$, (b) jeho velikost a (c) úhel, který svírá s kladným směrem osy x.



Obr. 3.32 Úloha 27

28Ú. Golfista umístil míček do jamky třemi údery. První směřoval na sever a měřil 3,7 m, druhý byl dlouhý 1,8 m a byl veden jihovýchodním směrem, třetí mířil na jihozápad a měl délku 0,9 m. Kterým směrem a do jaké vzdálenosti by hráč musel vyslat míček, aby trefil jamku napoprvé?

29Ú. Radarová stanice zaznamenala letoun, který se k ní blížil přesně z východu. V té chvíli byl letoun ve vzdálenosti 370 m od stanice a byl vidět pod elevačním úhlem 40° (nad vodorovnou rovinou). Radar sledoval letoun až do okamžiku, kdy byl od stanice vzdálen 790 m na západ a velikost pozorovacího úhlu činila 123° (obr. 3.33). Určete posunutí letounu během doby sledování.



Obr. 3.33 Úloha 29

30Ú. (a) Turista šel ze stanového tábora nejprve 1000 m na východ a pak 2 000 m na sever. Při krátkém odpočinku na skalním útesu vysokém 500 m vyndal z kapsy minci a pohrával si s ní. Ve chvíli nepozornosti mu mince upadla a letěla s útesu svisle dolů. Zvolte vhodnou kartézskou soustavu souřadnic a pomocí jejích jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ vyjádřete vektor výsledného posunutí mince od výchozího stanoviště turisty až k místu jejího dopadu pod útesem. (b) Turista se vrátil do tábora jinou cestou. Určete jeho celkové posunutí během výletu.

31Ú. Částice vykoná tři následující přesuny: 4,00 m jihozápadně, 5,00 m východně a 6,00 m severovýchodním směrem svírajícím úhel 60° s místní rovnoběžkou. Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa y směřovala na sever a osa x na východ. Určete (a) složky každého ze tří uvedených posunutí, (b) složky celkového posunutí částice, (c) velikost a směr celkového posunutí a (d) velikost a směr vektoru posunutí, při kterém by se částice vrátila do výchozího bodu.

32Ú. Ověřte následující tvrzení: Je-li součet dvou vektorů kolmý na jejich rozdíl, mají oba vektory stejnou velikost.

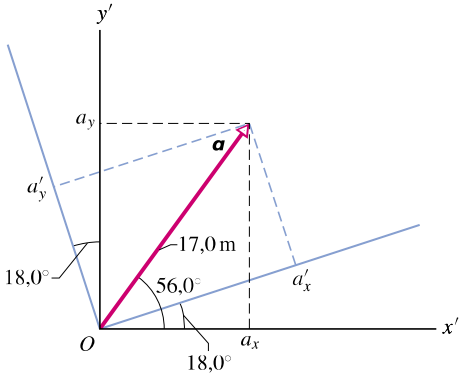
33Ú. Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ s velikostmi a a b jsou umístěny tak, že jejich počáteční body splývají. Vektory svírají úhel θ. Rozkladem vektorů do složek ukažte, že jejich součet $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ má velikost

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

34Ú. (a) Pomocí jednotkových vektorů vyjádřete tělesovou úhlopříčku krychle v závislosti na velikosti její strany a. (b) Určete úhly, které svírá tělesová úhlopříčka s hranami krychle, které ji protínají. (c) Určete délku tělesové úhlopříčky.

ODST. 3.6 Vektory a fyzikální zákony

35C. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy, má velikost 17,0 m a od osy x je odkloněn proti směru otáčení hodinových ručiček o 56,0° (obr. 3.34). (a) Určete jeho složky a_x a a_y. Druhá (čárkovaná) soustava souřadnic je vzhledem k první (nečárkované) otočena o úhel 18,0°. Určete složky a'_x a a'_y vektoru $\boldsymbol{a}$ v čárkované soustavě souřadnic.



Obr. 3.34 Cvičení 35

ODST. 3.7 Násobení vektorů

36C. Vektor $\boldsymbol{d}$ má velikost 2,5 m a směřuje na sever. Určete velikost a směr vektorů (a) $4{,}0\boldsymbol{d}$ a (b) $-3{,}0\boldsymbol{d}$.

37C. Vektor $\boldsymbol{a}$ je souhlasně rovnoběžný s osou x soustavy souřadnic, vektor $\boldsymbol{b}$ s osou y. Dále je zadán skalár d. Jaký směr má vektor $\boldsymbol{b}/d$ je-li hodnota d (a) kladná, (b) záporná? Vypočtěte (c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ a (d) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/d$. Určete směr vektoru (e) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a (f) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. (g) Určete velikosti vektorových součinů z části (e) a (f)? (h) Určete velikost a směr vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}/d$.

38C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

39C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

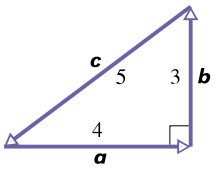
40C. Ukažte, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ platí $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2$ a $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

41C. Určete následující součiny jednotkových vektorů: (a) „sever × západ“, (b) „dolů · jih“, (c) „východ × nahoru“, (d) „západ · · západ“ a (e) „jih × jih“.

42C. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti $a = 10$ jednotek, $b = 6{,}0$ jednotek a svírají úhel 60°. Určete (a) jejich skalární součin a (b) velikost jejich vektorového součinu $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

43C. Vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$ leží v rovině xy. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost 4,50 jednotek a svírá s kladným směrem osy x úhel 320° (měřeno proti směru otáčení hodinových ručiček). Vektor $\boldsymbol{s}$ má velikost 7,30 jednotek a je od kladného směru osy x odkloněn o úhel 85,0°. Určete (a) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$ a (b) $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$.

44C. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ jsou zadány podle obr. 3.35. Vypočtěte (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.



Obr. 3.35 Cvičení 44 a 45

45C. Pro vektory z obr. 3.35 určete součiny (a) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

46Ú. *Výpočet skalárního součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro skalární součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

47Ú. (a) Určete složky a velikost vektoru $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, je-li $\boldsymbol{a} = 5{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j} - 6{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 4{,}0\boldsymbol{i} + +3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (b) Vypočtěte úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy z.

48Ú. Užitím definice skalárního součinu $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\theta$ a vztahu $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (úloha 46) vypočtěte úhel mezi vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$.

49Ú. *Výpočet vektorového součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro vektorový součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

50Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$. Určete (a) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ a (c) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$.

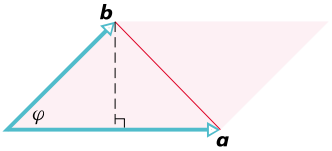
51Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou zadány svými složkami (v libovolných jednotkách): $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$, $b_y = 4{,}5$. (a) Určete úhel těchto vektorů. (b) Vypočtěte složky vektoru $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$, leží v rovině xy a má velikost 5,0 jednotek.

52Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině yz, svírá s kladným směrem osy y úhel 63°, má kladnou z-ovou složku a jeho velikost je 3,20 jednotek. Vektor $\boldsymbol{b}$ leží v rovině xz, svírá s kladným směrem osy x úhel 48°, má kladnou z-ovou složku a velikost 1,40 jednotek. Určete (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

53Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -1{,}0\boldsymbol{i} - -4{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 1{,}0\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, (b) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ a (c) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

54Ú. Vypočtěte úhly mezi tělesovými úhlopříčkami krychle s délkou hrany a (úloha 34).

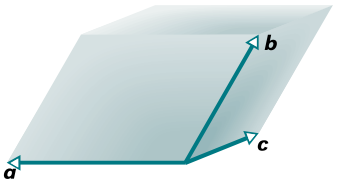
55Ú. Ukažte, že trojúhelník určený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (obr. 3.36) má obsah $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.



Obr. 3.36 Úloha 55

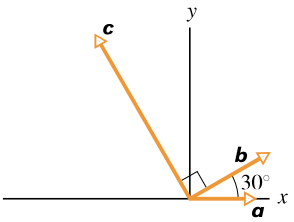
56Ú. (a) Ukažte, že výraz $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ je nulový pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. (b) Označte φ úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a určete $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

57Ú. Ukažte, že výraz $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ určuje objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ podle obr. 3.37.



Obr. 3.37 Úloha 57

58Ú. Vektory na obr. 3.38 mají velikosti $a = 3{,}00$, $b = 4{,}00$ a $c = 10{,}0$. (a) Vypočtěte jejich x-ové a y-ové složky. (b) Určete čísla p a q tak, aby platilo $\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.38 Úloha 58

4
Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

Cirkusové umění odjakživa přitahovalo pozornost diváků. Proto také bylo ve své době velmi rozšířené po celém světě a ve známých artistických rodinách se dědilo z generace na generaci. V roce 1922 užaslo obecenstvo nad číslem rodiny Zacchiniových, při kterém se jeden z nich nechal vystřelit z děla. Přeletěl celou cirkusovou arénu a dopadl do záchranné sítě. Divácky úspěšný kousek se v průběhu dalších let postupně zdokonaloval. Až nakonec, někdy kolem roku 1939 nebo 1940, se podařilo Emanuelu Zacchiniovi překonat vzdálenost 68,6 m a přeletět tři ruská kola v zábavním parku. Jak ale mohl vědět, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že dosáhne takové výšky, aby obrovská kola bez úhony přeletěl?

4.1 DVOJROZMĚRNÝ A TROJROZMĚRNÝ POHYB

V této kapitole rozšíříme dosavadní úvahy na případ pohybu, který již nebude omezen pouze na přímku. Budeme sledovat pohyb částice v rovině i v prostoru. Nejdůležitější pojmy týkající se popisu pohybu (poloha, rychlost, zrychlení) převezmeme z kap. 2. Vícerozměrné definice a vztahy budou sice poněkud složitější než u přímočarého pohybu, avšak pomocí vektorové algebry z kap. 3 bude možné je vyjádřit velmi přehledně. Při studiu této kapitoly se občas vraťte ke kapitolám předchozím a osvěžte si potřebné znalosti.

4.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu částice nejčastěji popisujeme jejím **polohovým vektorem** $\boldsymbol{r}$, který spojuje předem zvolený vztažný bod (obvykle počátek soustavy souřadnic) s touto částicí. V kartézské soustavě souřadnic zapisujeme vektor $\boldsymbol{r}$ ve tvaru

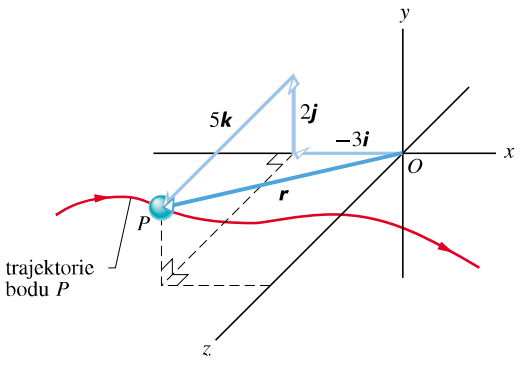
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{4.1}$$

kde $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou jeho průměty do souřadnicových os a x, y a z jsou jeho složky. (Nové značení se poněkud liší od zápisů v kap. 3. Snadno se však můžete přesvědčit, že oba způsoby jsou ekvivalentní.)

Koeficienty x, y a z udávají polohu částice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, zadané osami a počátkem. Říkáme, že částice má **kartézské souřadnice** (x, y, z). Poloha malého tělíska P na obr. 4.1 je zadána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$

Jeho kartézské souřadnice jsou $(-3, 2, 5)$. Znamená to, že tělísko P najdeme ve vzdálenosti tří jednotek od počátku proti směru osy x, tj. ve směru vektoru $-\boldsymbol{i}$, dvou jednotek ve směru osy y (ve směru vektoru $+\boldsymbol{j}$) a pěti jednotek ve směru osy z (ve směru vektoru $+\boldsymbol{k}$).



Obr. 4.1 Polohový vektor částice P je vektorovým součtem svých průmětů do souřadnicových os.

Při pohybu částice se mění i její polohový vektor. Jeho koncový bod se pohybuje spolu s částicí a počáteční bod trvale splývá s počátkem soustavy souřadnic. Složky polohového vektoru $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou tedy funkcemi času, polohový vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ je *vektorovou funkcí času*. Je-li poloha částice v okamžiku t_1 určena vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v následujícím okamžiku $t_1 + \Delta t$ vektorem $\boldsymbol{r}_2$, je *posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$ částice v časovém intervalu Δt dáno rozdílem

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Pomocí vztahu (4.1) lze posunutí zapsat také ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}),$$

tj.

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{4.3}$$

Souřadnice (x_1, y_1, z_1) určují polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ a souřadnice (x_2, y_2, z_2) polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Ve vztahu pro posunutí často označujeme $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$ a $\Delta z = (z_2 - z_1)$.

PŘÍKLAD 4.1

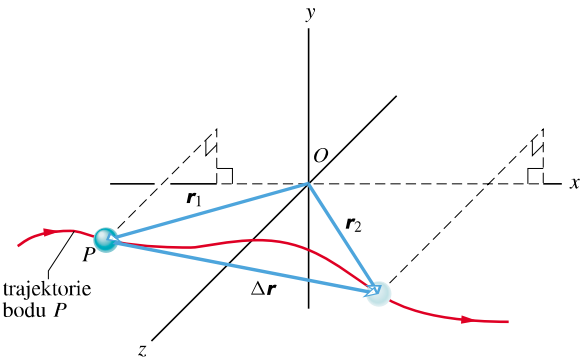
Počáteční poloha částice je dána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},$$

koncová poloha je určena vektorem

$$\boldsymbol{r}_2 = 9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

(obr. 4.2). Určete posunutí částice.



Obr. 4.2 Příklad 4.1. Posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ spojuje koncové body vektorů $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$.

ŘEŠENÍ: Vektory sčítáme (nebo odečítáme) po složkách, přesně podle pravidel uvedených v kap. 3. Užitím vztahu (4.2) dostaneme

$$\Delta\boldsymbol{r} = (9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) - (-3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) = \\ = 12\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor posunutí je rovnoběžný se souřadnicovou rovinou xz, neboť jeho y-ová složka je nulová. Uvědomme si, že z číselného zápisu vektoru posunutí je tato skutečnost patrná mnohem lépe než z grafického znázornění situace na obr. 4.2.

KONTROLA 1: (a) Netopýr vyletěl z místa o souřadnicích (−2 m, 4 m, −3 m) a po chvíli opět usedl, tentokrát v místě (6 m, −2 m, −3 m). Určete jeho vektor posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a vyjádřete jej pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. (Údaje jsou vztaženy ke kartézské soustavě souřadnic.) (b) Zjistěte, zda je vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ rovnoběžný s některou souřadnicovou rovinou či osou.

4.3 PRŮMĚRNÁ A OKAMŽITÁ RYCHLOST

Průměrná rychlost částice v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$ je definována jako podíl odpovídajícího vektoru posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a délky časového intervalu Δt:

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \qquad (4.4)$$

Po rozepsání pomocí složek dostaneme

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}}{\Delta t} = \\ = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}. \qquad (4.5)$$

Okamžitá rychlost (zkráceně rychlost) $\boldsymbol{v}$ je limitou průměrné rychlosti $\overline{\boldsymbol{v}}$ pro $\Delta t \to 0$, tj. derivací polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ podle času

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad (4.6)$$

Dosazením polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ z rovnice (4.1) dostaneme

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

a přepíšeme ve tvaru

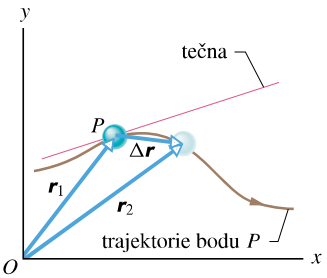
$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.7)$$

kde

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad (4.8)$$

jsou složky rychlosti $\boldsymbol{v}$.

Na obr. 4.3 je zakreslena trajektorie částice P, jejíž pohyb je omezen na souřadnicovou rovinu xy. Při pohybu částice po křivce směrem vpravo se v tomtéž směru odklání i její polohový vektor. V okamžiku t_1 je její poloha určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v okamžiku $t_1 + \Delta t$ polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_2$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje *posunutí částice* v časovém intervalu Δt. Průměrná rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ v intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ je dána rovnicí (4.4) a má stejný směr jako posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$.



Obr. 4.3 Trajektorie částice P s vyznačením její polohy v okamžicích t_1 a $t_1 + \Delta t$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje posunutí částice v tomto časovém intervalu. Červeně je znázorněna tečna k trajektorii v okamžiku t_1.

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nule si můžeme všimnout následujícího chování vektorů charakterizujících pohyb částice: (1) vektor $\boldsymbol{r}_2$ se přibližuje vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a $\Delta\boldsymbol{r}$ vektoru nulovému, (2) směr vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$ a s ním i směr průměrné rychlosti $\overline{\boldsymbol{v}}$ se sklánějí ke směru tečny k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$ a konečně (3) průměrná rychlost $\overline{\boldsymbol{v}}$ se blíží k okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$.

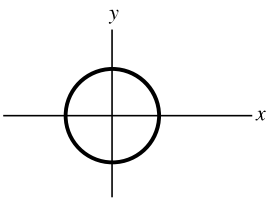
Pro $\Delta t \to 0$ je $\overline{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v}$. Vektor okamžité rychlosti je tedy tečný k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$.

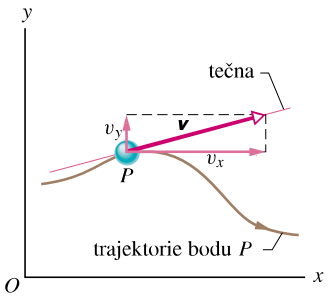
Okamžitá rychlost částice $\boldsymbol{v}$ má vždy směr tečny k trajektorii.

V obr. 4.4 je zakreslen vektor okamžité rychlosti částice P a jeho rozklad do složek. Úvahy o rychlosti lze zobecnit i na případ pohybu částice v trojrozměrném prostoru, bez jakýchkoli omezení: Vektor okamžité rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je vždy tečný k její trajektorii.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po kružnici (viz obrázek) a v jistém okamžiku má rychlost $\boldsymbol{v} = (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete, ve kterém kvadrantu částici v tomto okamžiku najdeme, pohybuje-li

se (a) ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) proti směru otáčení hodinových ručiček.





Obr. 4.4 Rychlost částice P a její rozklad do složek. Rychlost má směr tečny k trajektorii.

4.4 PRŮMĚRNÉ A OKAMŽITÉ ZRYCHLENÍ

Předpokládejme, že v průběhu časového intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ dojde ke změně rychlosti částice z $\boldsymbol{v}_1$ na $\boldsymbol{v}_2$. Podíl

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{4.9}$$

nazýváme **průměrným zrychlením** v tomto časovém intervalu. Při přechodu $\Delta t \to 0$ se průměrné zrychlení blíží svému limitnímu případu, takzvanému **okamžitému zrychlení** $\boldsymbol{a}$ (zkráceně *zrychlení*):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

Nenulové zrychlení signalizuje, že se mění velikost nebo směr rychlosti částice. (Obě změny mohou samozřejmě probíhat současně.) Dosazením rychlosti $\boldsymbol{v}$ ze vztahu (4.7) do (4.10) dostaneme

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

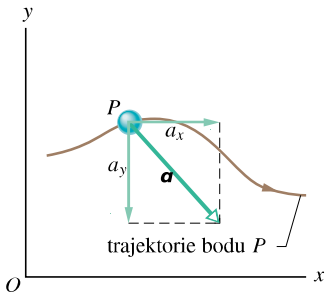
tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

jsou složky zrychlení $\boldsymbol{a}$. Pohyb částice P na obr. 4.5 je omezen na rovinu xy. V obrázku je zakreslen vektor zrychlení částice a jeho rozklad do složek.



Obr. 4.5 Rozklad zrychlení částice do složek

PŘÍKLAD 4.2

Králík vběhl na parkoviště, kde si předtím hrály děti a nakreslily tam křídou dvě kolmé přímky. Můžeme je považovat za osy x a y soustavy souřadnic. Okamžitá poloha králíka vzhledem k této soustavě je popsána funkcemi

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28,$$
$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

Čas t je měřen v sekundách a souřadnice x a y v metrech. Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je tedy tvaru

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}.$$

(a) Určete velikost a směr polohového vektoru v okamžiku $t = 15$ s.

ŘEŠENÍ: V okamžiku $t = 15$ s má polohový vektor $\boldsymbol{r}$ složky

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66$$

a

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57.$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho rozklad do složek znázorňuje obr. 4.6a. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\ \mathrm{m})^2 + (-57\ \mathrm{m})^2} = 87\ \mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Pro úhel vektoru $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy x platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \left(\frac{-57\ \mathrm{m}}{66\ \mathrm{m}}\right) = -0{,}864,$$
$$\theta = -41^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 139°$, který však neodpovídá znaménkům složek vektoru $\boldsymbol{r}$.)

(b) Určete polohu králíka v okamžicích $t = 0\,\text{s}, 5\,\text{s}, 10\,\text{s}, 20\,\text{s}$ a $25\,\text{s}$ a schematicky nakreslete jeho trajektorii.

ŘEŠENÍ: Pro každý ze zadaných okamžiků zopakujeme výpočet podle (a) a získáme následující hodnoty x, y, r a θ:

t/ s	x/ m	y/ m	r/ m	θ
0	28	30	41	+47°
5	56	−10	57	−10°
10	69	−39	79	−29°
15	66	−57	87	−41°
20	48	−64	80	−53°
25	14	−60	62	−77°

Trajektorie králíka je znázorněna na obr. 4.6b.

PŘÍKLAD 4.3

Určete velikost a směr rychlosti králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\text{s}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (4.8) je x-ová složka vektoru rychlosti

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2.$$

Pro $t = 15\,\text{s}$ dostaneme

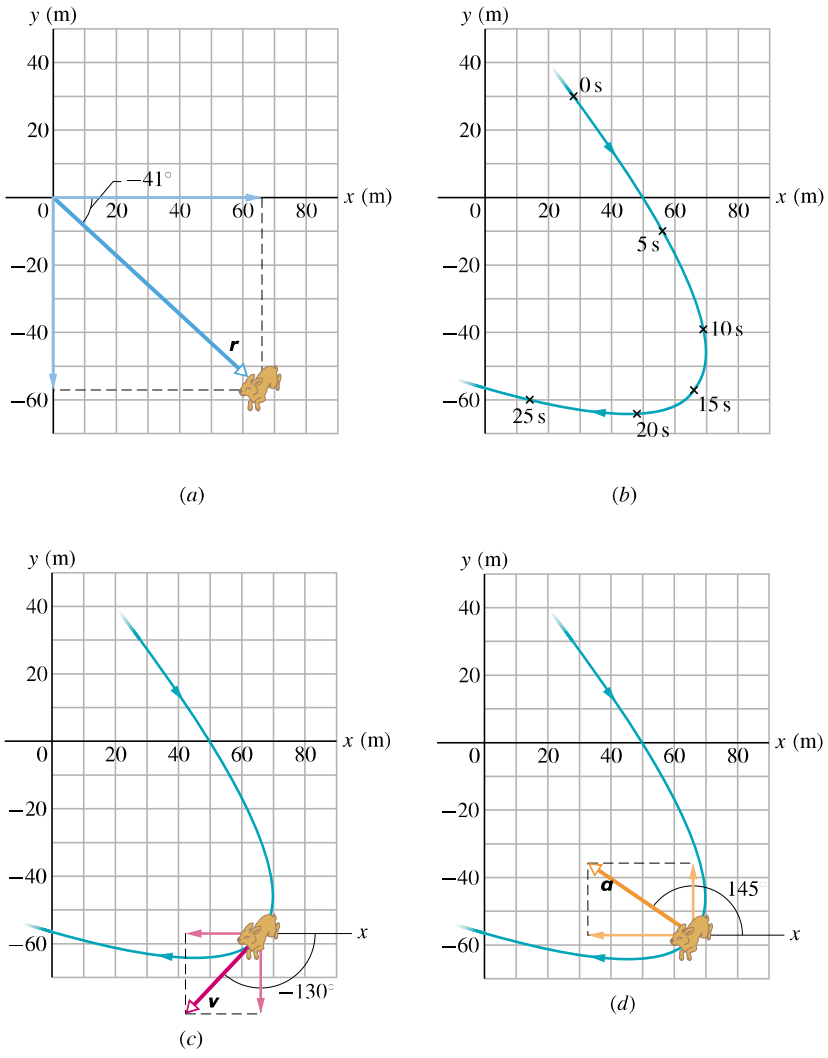
$$v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1\,\text{m·s}^{-1}.$$

Obdobně je

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1$$

a pro $t = 15\,\text{s}$

$$v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5\,\text{m·s}^{-1}.$$



Obr. 4.6 Příklady 4.2, 4.3 a 4.4. (a) Vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho složky v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{r}$ je 87 m. (b) Trajektorie pohybu králíka po parkovišti s vyznačením poloh v okamžicích uvedených v zadání úlohy. (c) Rychlost $\boldsymbol{v}$ králíka v okamžiku $t = 15\,\text{s}$ má směr tečny k trajektorii v bodě určujícím polohu králíka v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. (d) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. Zrychlení je konstantní, tj. stejné ve všech bodech trajektorie.

Vektor rychlosti a jeho složky jsou zakresleny v obr. 4.6c.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ a úhel θ určující jeho směr platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + (-2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ = 3{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{-2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{-2{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}\right) = 1{,}19,$$

tj.

$$\theta = -130^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Stejná hodnota tangenty odpovídá i úhlu 50°. V souhlasu se znaménky složek rychlosti však správný úhel θ leží ve třetím kvadrantu, tj. $\theta = 50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$.) Rychlost je tečným vektorem k trajektorii a určuje směr, kterým králík běží v okamžiku $t = 15$ s (obr. 4.6c).

PŘÍKLAD 4.4

Určete velikost a směr zrychlení $\boldsymbol{a}$ králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15$ s.

ŘEŠENÍ: Složky zrychlení jsou dány vztahem (4.12):

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62$$

a

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}44t + 30) = 0{,}44.$$

Vidíme, že zrychlení nezávisí na čase, je konstantní. Dvojím derivováním časová proměnná zmizela. Zrychlení a jeho složky jsou vyznačeny v obr. 4.6d pro okamžik $t = 15$ s. Jeho velikost a směr jsou určeny vztahy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2 + (0{,}44\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2} = \\ = 0{,}76\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x} = \left(\frac{0{,}44\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{-0{,}62\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\right) = -0{,}710,$$

tj.

$$\theta = 145^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velikost ani směr vektoru zrychlení se podél trajektorie králíka nemění. Těžko říci, co bylo příčinou toho, že králík neustále „urychloval“ svůj běh severozápadním směrem. Můžeme si myslet, že třeba vál silný jihovýchodní vítr.

KONTROLA 3: Následující vztahy popisují čtyři možnosti pohybu hokejového kotouče po ledové ploše, ležící v souřadnicové rovině xy (poloha je zadána v metrech):

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ a $y = 6t^2 - 4t$,
(2) $x = -3t^3 - 4t$ a $y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{r} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

V jednotlivých případech rozhodněte, zda je některá ze složek vektoru zrychlení konstantní. Je v některém z nich konstantní vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$?

PŘÍKLAD 4.5

Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$. Vektor zrychlení má velikost $a = 3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a s kladným směrem osy x svírá úhel $\theta = 130^\circ$. V okamžiku $t = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v metrech za sekundu). Určete její rychlost v okamžiku $t = 2$ s a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Určete i její velikost a směr.

ŘEŠENÍ: Při řešení této úlohy si připomeneme výsledky odvozené v kap. 2 pro přímočarý pohyb s konstantním zrychlením. Opravdu jich budeme moci využít? V našem případě je sice zrychlení stálé, pohyb částice však není přímočarý (počáteční rychlost má jiný směr než zrychlení). Díky pravidlům vektorové algebry můžeme úlohu řešit „po složkách“ a vztah (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$), platný pro rychlost přímočarého pohybu se stálým zrychlením, použít pro každou ze složek v_x a v_y vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Lze tedy psát

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{a} \quad v_y = v_{0y} + a_y t,$$

kde v_{0x} $(= -2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$ a v_{0y} $(= 4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$ jsou složky počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$. Složky vektoru zrychlení $\boldsymbol{a}$, a_x a a_y, určíme užitím vztahů (3.5):

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\cos 130^\circ = -1{,}93\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}},$$
$$a_y = a\sin\theta = (3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\sin 130^\circ = +2{,}30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic pro složky rychlosti v_x a v_y dostaneme

$$v_x = -2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + (-1{,}93\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}0\ \mathrm{s}) = -5{,}9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}},$$
$$v_y = 4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + (+2{,}30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}0\ \mathrm{s}) = 8{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Zapíšeme-li výsledky pomocí rozkladu (4.7), dostáváme rychlost částice v okamžiku $t = 2$ s ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = (-5{,}9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (8{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro velikost a směr rychlosti platí

$$v = \sqrt{(-5{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 + (8{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \left(\frac{8{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{-5{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}\right) = -1{,}458,$$

tj.

$$\theta = 124^\circ \doteq 120^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poslední výsledek přepočtěte na kalkulačce. Co myslíte? Zobrazí se na displeji hodnota 124° nebo $-55{,}5^\circ$? Nakreslete vektor $\boldsymbol{v}$ a jeho složky a rozhodněte, která z obou hodnot představuje správné řešení úlohy. Proč někdy získáme na kalkulačce matematicky správný, ale fyzikálně nepřijatelný výsledek? Vysvětlení viz bod 3.3.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.1: *Goniometrické funkce a úhly*

V příkladu 4.3 bylo třeba určit úhel θ z rovnice $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}19$. Zopakujme si použitý postup: Při výpočtu pomocí kalkulačky se na jejím displeji téměř jistě zobrazí hodnota $\theta = 50^\circ$. V grafu na obr. 3.13c si můžeme všimnout, že stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 230^\circ$ $(= 50^\circ + 180^\circ)$. Pomocí znamének složek vektoru rychlosti v_x a v_y (obr. 4.6c) dokážeme rozhodnout, že správným řešením úlohy je druhá z obou hodnot úhlu θ. (Některé dokonalejší kalkulačky umožňují rovnou získat správný výsledek.)

Nakonec je třeba zvolit pro zápis výsledku jednu ze dvou možností, 230° nebo -130°. Obě hodnoty představují týž směr (bod 3.1). Výběr zápisu záleží na tom, pracujeme-li raději s úhly v intervalu od 0° do 360° nebo v intervalu od -180° do $+180^\circ$. V příkladu 4.3 jsme si vybrali druhou možnost, tj. $\theta = -130^\circ$.

Bod 4.2: *Grafický záznam vektorů*

Při kreslení vektorů můžeme užít následujícího postupu (např. obr. 4.6): (1) Určíme počáteční bod vektoru. (2) Vedeme jím přímku souhlasně rovnoběžnou s osou x. (3) Od jejího kladného směru odměříme úhloměrem zadaný úhel θ. Je-li úhel θ kladný, měříme jej proti směru otáčení hodinových ručiček a naopak.

Vektor $\boldsymbol{r}$ v obr. 4.6a je zakreslen přesně v měřítku použitém pro popis souřadnicových os. Délka šipky znázorňující tento vektor tak skutečně odpovídá jeho velikosti. Pro grafické znázornění rychlosti (obr. 4.6c) ani zrychlení (obr. 4.6d) jsme žádnou stupnici nezvolili, a tak je můžeme kreslit libovolně dlouhé.

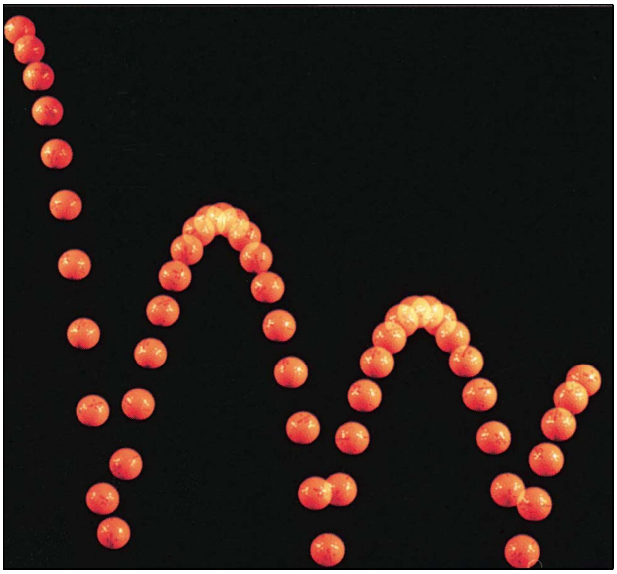
Nemá smysl přemýšlet o tom, zda má být například vektor rychlosti delší či kratší než vektor posunutí. Jde o různé fyzikální veličiny s odlišnými jednotkami. Volba společného měřítka pro jejich grafický záznam by neměla žádné fyzikální opodstatnění.

KONTROLA 4: Poloha kuličky je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ (poloha je zadána v metrech a čas v sekundách). V jakých jednotkách jsou zadány koeficienty 4, -2 a 3?

4.5 ŠIKMÝ VRH

V čl. 2.8 jsme se poměrně podrobně zabývali zvláštním případem pohybu částice s konstantním zrychlením, tzv. *svislým vrhem*. Pozornost věnovaná této speciální situaci nebyla přehnaná. Odpovídající experimenty totiž můžeme velmi pohodlně realizovat v „pozemských podmínkách" s minimálním přístrojovým vybavením. Připomeňme si jen stručně hlavní výsledky, k nimž jsme v článku 2.8 dospěli: těleso volně vypuštěné v blízkosti povrchu Země padá se stálým zrychlením, podaří-li se v dostatečné míře omezit vliv odporu prostředí. Toto *tíhové* zrychlení $\boldsymbol{g}$ je pro všechna tělesa stejné. Trajektorií padajícího tělesa je přímka definující *svislý směr*. Udělíme-li tělesu na počátku experimentu nenulovou rychlost ve svislém směru (vzhůru či dolů), pohybuje se opět se zrychlením $\boldsymbol{g}$ a jeho pohyb je také opět přímočarý.

Experimenty ukazují víc. Ať je totiž při vrhu udělena tělesu počáteční rychlost *v jakémkoliv směru* — nejen svislém — letí těleso vždy se stejným zrychlením $\boldsymbol{g}$. Jeho trajek-



Obr. 4.7 Stroboskopický záznam pohybu golfového míčku při odrazech na tvrdém podkladu. Mezi jednotlivými odrazy se pohyb blíží šikmému vrhu. Odchylky jsou způsobeny vlivem odporu prostředí, který v reálných situacích pochopitelně nelze odstranit.

torie nyní leží ve svislé rovině určené vektorem tíhového zrychlení a směrem počáteční rychlosti tělesa. Tento pohyb nazýváme **šikmý vrh**. Jeho příkladem je let golfového míčku (obr. 4.7), tenisového či fotbalového míče, dělové střely apod. V dalších úvahách se budeme zabývat podrobným rozborem tohoto pohybu. Pro úplnost dodejme, že zanedbáváme odpor vzduchu, vlastní rotaci Země a předpokládáme, že změny výšky tělesa nad povrchem Země jsou zanedbatelné vůči jejím rozměrům.

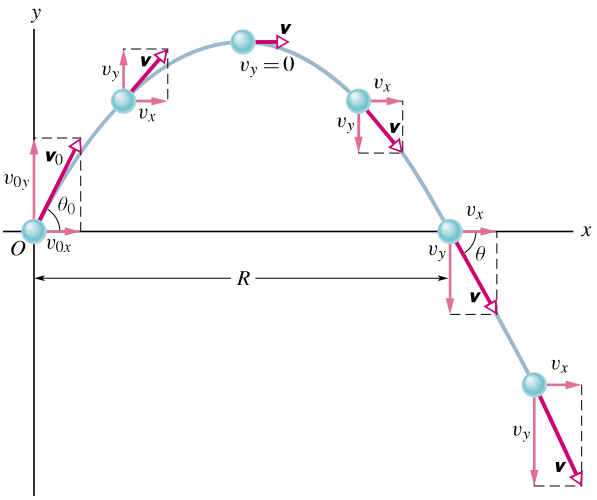
Řekněme, že sledovaným tělesem je podle obr. 4.8 kulka vystřelená počáteční rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}. \tag{4.13}$$

Složky v_{0x} a v_{0y} této rychlosti lze zapsat pomocí její velikosti v_0 a úhlu θ_0 (tzv. elevační úhel), který svírá vektor $\boldsymbol{v}_0$ s kladným směrem osy x:

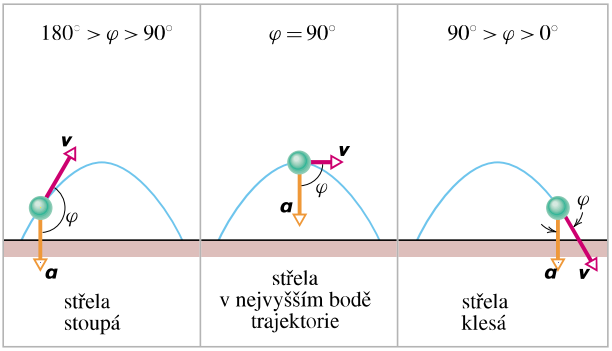
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{a} \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0. \tag{4.14}$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ i rychlost střely $\boldsymbol{v}$ se při jejím pohybu ve svislé rovině neustále mění. Její zrychlení $\boldsymbol{a}$ je však stálé a *vždy* míří svisle dolů. (Vodorovná složka zrychlení je nulová.) Na obr. 4.9 je vidět, jak se mění i úhel mezi zrychlením a rychlostí.



Obr. 4.8 Střela vyletí z počátku soustavy souřadnic v okamžiku $t = 0$ rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. V jednotlivých bodech trajektorie jsou zakresleny vektory rychlosti a jejich rozklad do složek. Všimněte si, že vodorovná složka rychlosti se v průběhu pohybu nemění, na rozdíl od složky svislé. *Doletem* R rozumíme vodorovnou vzdálenost střely od místa výstřelu měřenou v okamžiku, kdy střela projde bodem ležícím *v téže výšce nad povrchem Země* jako ústí hlavně.

I když pohyb těles na obr. 4.7 až 4.9 může někomu připadat docela složitý, bude jeho matematický popis velmi prostý. Zjednodušení je dáno jednak vektorovým charakterem veličin popisujících pohyb (poloha, rychlost a zrychlení), s nimiž tak lze nakládat podle pravidel vektorové algebry, jednak neměnností zrychlení při pohybu těles. Obojí souhlasí s výsledky experimentů.



Obr. 4.9 Rychlost a zrychlení střely v různých fázích jejího pohybu. Úhel mezi rychlostí a zrychlením může být v daném okamžiku libovolný.

Vodorovné a svislé složky veličin popisujících vrh jsou na sobě nezávislé. Neovlivňují se navzájem.

Pohyb částice v rovině můžeme tedy získat složením dvou pohybů přímočarých, vodorovného a svislého.

Nezávislost vodorovných a svislých složek veličin popisujících šikmý vrh nyní doložíme ukázkou dvou jednoduchých experimentů.

Dva golfové míčky

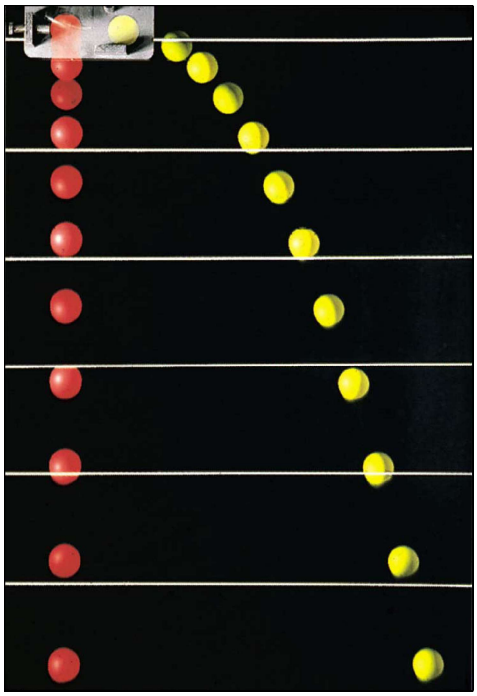
Sledujme stroboskopický záznam pohybu dvou golfových míčků na obr. 4.10. Jeden z nich vypustili experimentátoři volně, druhý vystřelili ve vodorovném směru pomocí pružiny. Všímáme-li si pohybu míčků pouze ve svislém směru, vidíme, že se oba záznamy shodují. Ve stejných časových intervalech urazily míčky stejnou svislou vzdálenost.

Skutečnost, že se jeden z míčků současně pohybuje i ve vodorovném směru, nijak neovlivňuje průmět jeho pohybu do svislého směru. Experiment můžeme domýšlet až k extrémním situacím: střela z pušky, vystřelená vodorovně vysokou rychlostí, dopadne (při zanedbatelném odporu vzduchu) na zem *současně* s kuličkou, kterou jsme ve stejném okamžiku volně vypustili z dlaně ve stejné výšce.

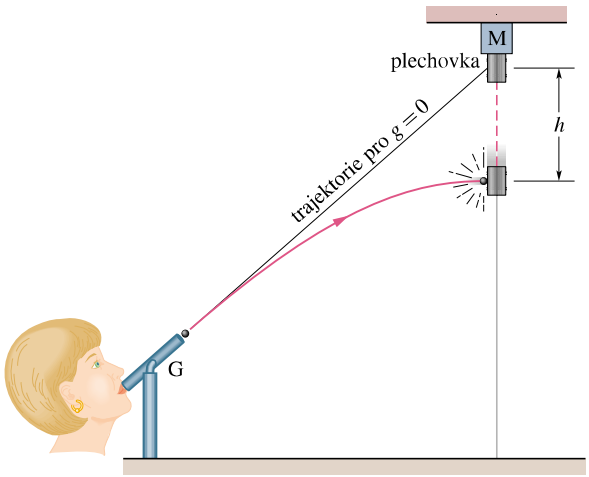
Přesný zásah

Pokus na obr. 4.11 už jistě napomohl oživit řadu fyzikálních přednášek. Vyzkoušejme si jej také. Potřebujeme foukačku G s malými kuličkami jako střelivem. Terčem může být plechovka zavěšená na magnetu M. Trubici foukačky

namíříme přesně na plechovku. Ještě je třeba zařídit, aby magnet uvolnil plechovku přesně v okamžiku, kdy střela vyletí z trubičky a můžeme střílet.



Obr. 4.10 Jeden z míčků je volně vypuštěn, druhý je vystřelen vodorovným směrem. Průměty jejich pohybu do svislého směru jsou totožné.



Obr. 4.11 Kulička vždy zasáhne padající plechovku. V časovém intervalu mezi výstřelem a zásahem obě klesnou o stejnou svislou vzdálenost h měřenou od místa, ve kterém by došlo k jejich srážce v tzv. beztížném stavu ($\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$).

Při nulovém tíhovém zrychlení (tzv. stav beztíže) by střela letěla po přímce (obr. 4.11). Plechovka by se vznášela stále na místě i po uvolnění od magnetu a kulička by ji zcela jistě neminula.

Při skutečném experimentu je ovšem tíhové zrychlení *nenulové*. *A přesto* kulička cíl zasáhne! V obr. 4.11 je vyznačena svislá vzdálenost h, o kterou kulička i plechovka při pokusu poklesnou vzhledem k místu pomyslné srážky při $g = 0$. K zásahu dojde při libovolně silném fouknutí: při silnějším dostane kulička větší počáteční rychlost, zkrátí se doba letu a zmenší se vzdálenost h.

4.6 ŠIKMÝ VRH: MATEMATICKÝ POPIS

Výsledky předchozích úvah nyní uplatníme při důsledném matematickém rozboru šikmého vrhu. Víme již, že při něm můžeme využít zjednodušení spočívající v možnosti rozkladu skutečného pohybu na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a svislém směru.

Obr. 4.12 Svislý průmět rychlosti skatebordisty se mění. Její vodorovný průmět je však trvale shodný s vodorovnou rychlostí skateboardu. Při výskoku je sportovec neustále nad skateboardem a bez problémů na něj opět doskočí.

Pohyb ve vodorovném směru

Vodorovná složka tíhového zrychlení je *nulová*. Vodorovná složka rychlosti šikmého vrhu se tedy s časem nemění. Neustále si udržuje svou počáteční hodnotu v_{0x} (obr. 4.12). Posunutí částice ve vodorovném směru $x - x_0$ je dáno

vztahem (2.15) pro $a_x = 0$:

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Po dosazení $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, dostaneme

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4.15}$$

Pohyb ve svislém směru

Průmětem pohybu částice do svislého směru je svislý vrh. Pro jeho popis použijeme rovnic (2.21) až (2.25), které jsme odvodili již v článku 2.8. Z rovnice (2.22) například rovnou dostaneme vztah pro svislou složku vektoru posunutí

$$y - y_0 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \\ = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.16}$$

Svislou složku počáteční rychlosti v_{0y} jsme nahradili ekvivalentním výrazem $v_0 \sin\theta_0$. Využít můžeme i rovnic (2.21) a (2.23), když je nejprve vhodně upravíme:

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4.17}$$

a

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Z rovnice (4.17) je zřejmé (a obr. 4.12 to intuitivně potvrzuje), že časová závislost svislé složky rychlosti je naprosto stejná jako závislost rychlosti míče vyhozeného svisle vzhůru. Na počátku letu je kladná a její velikost postupně klesá k nule. V okamžiku, kdy je $v_y = 0$, je těleso *ve vrcholu své trajektorie*. Znaménko svislé složky rychlosti se obrací a její velikost s časem opět roste.

Rovnice trajektorie

Vztahy (4.15) a (4.16) představují tzv. parametrické rovnice trajektorie částice při šikmém vrhu. (Parametrem je zde čas t.) Její kartézskou rovnici získáme tak, že z rovnic (4.15) a (4.16) tento parametr vyloučíme. Nejjednodušší je vyjádřit čas z rovnice (4.15) a dosadit jej do (4.16). Po malých úpravách dostaneme

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \quad \text{(trajektorie)}. \tag{4.19}$$

Získali jsme rovnici trajektorie znázorněné na obr. 4.8. Při výpočtu jsme ve vztazích (4.15) a (4.16) pro jednoduchost zvolili $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Veličiny g, θ_0 a v_0 jsou konstanty, a tak lze rovnici (4.19) zapsat ve tvaru $y = ax + bx^2$, kde a a b jsou rovněž jisté konstanty. Poznáváme v něm rovnici paraboly s koeficienty a a b. Částice se tedy pohybuje po *parabole*, má parabolickou dráhu.

Dolet

Dolet R definujeme jako vodorovnou vzdálenost, kterou střela urazí od okamžiku výstřelu do okamžiku návratu do počáteční výšky nad povrchem Země. V tomto okamžiku je poloha střely dána souřadnicemi $x = R$ a $y = y_0$. Jejich dosazením do rovnic (4.15) a (4.16) můžeme dolet snadno určit:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t = R$$

a

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Vyloučíme čas a dostaneme

$$R = \frac{2{v_0}^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

(Totéž bychom získali dosazením $x = R$ a $y = 0$ do (4.19).) Užitím identity $\sin 2\theta_0 = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ z dod. E nakonec upravíme výsledek do tvaru

$$R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

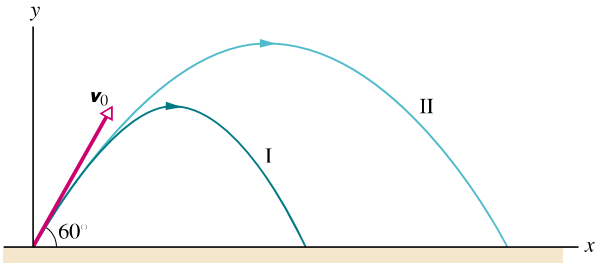
Můžeme si všimnout, že při pevně zvolené velikosti počáteční rychlosti docílíme největšího doletu při elevačním úhlu θ, který splňuje podmínku $\sin 2\theta_0 = 1$, tj. $2\theta_0 = 90^\circ$ a $\theta_0 = 45^\circ$.

Dolet R nabývá největší hodnoty, je-li elevační úhel roven 45°.

Vliv odporu prostředí

Do této chvíle jsme předpokládali, že vliv okolního vzduchu na pohyb tělesa je zanedbatelný. Tento předpoklad může být celkem dobře splněn při nízkých rychlostech. Ve skutečnosti však okolní prostředí klade pohybu tělesa jistý odpor, který může vést ke značným odchylkám idealizovaných výpočtů od skutečnosti, zejména při vyšších rychlostech. Jako příklad porovnání pohybu ve vakuu a skutečného letu tělesa vzduchem poslouží obr. 4.13. Jsou v něm schematicky znázorněny trajektorie dvou tenisových míčků odpálených úderem rakety. Velikost počáteční rychlosti je v obou případech 160 km/h a elevační úhel 60°. Trajektorie I odpovídá skutečnému pohybu míčku, trajektorie II je vypočtena pro případ jeho pohybu ve vakuu. Číselné hodnoty uvedené v tab. 4.1 jsme převzali z článku „The Trajectory of a Fly Ball" publikovaného v časopisu *The Physics Teacher* v lednu 1985. Pohybu v odporujícím prostředí se budeme podrobněji věnovat v kap. 6.

KONTROLA 5: Jak se mění (a) vodorovná a (b) svislá složka rychlosti šikmo vrženého míče? Určete (c) vodorovnou a (d) svislou složku jeho zrychlení ve vzestupné i sestupné části trajektorie i v jejím vrcholu. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 4.13 (I) Dráha tenisového míčku vypočtená (na počítači) s uvážením odporu vzduchu. (II) Dráha míčku ve vakuu, vypočtená pro stejnou počáteční rychlost pomocí vztahů odvozených v této kapitole. Důležité číselné údaje o obou trajektoriích jsou shrnuty v tab. 4.1.

Tabulka 4.1 **Dva míčky v letu**

	DRÁHA I (VZDUCH)	DRÁHA II (VAKUUM)
dolet	98,5 m	177 m
největší výška	53,0 m	76,8 m
doba letu	6,6 s	7,9 s

Elevační úhel je 60° a počáteční rychlost má velikost 160 km/h (obr. 4.13).

PŘÍKLAD 4.6

Záchranný letoun letí na pomoc tonoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1 200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu člověka (obr. 4.14). Rychlost letadla má velikost 430 km/h. Při jakém zorném úhlu φ musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost vaku $\boldsymbol{v}_0$ je shodná s rychlostí letadla. Má tedy velikost 430 km/h a vodorovný směr. Poněvadž víme, v jak velké výšce je vak vypuštěn, můžeme snadno určit dobu jeho pádu na hladinu. Do rovnice (4.16), zapsané ve tvaru

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

dosadíme $y - y_0 = -1\,200$ m (záporné znaménko je dáno orientací osy y) a $\theta_0 = 0$:

$$-1\,200\ \text{m} = 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \text{m·s}^{-2})t^2.$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé t dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{2(1\,200\ \text{m})}{(9{,}8\ \text{m·s}^{-2})}} = 15{,}65\ \text{s}.$$

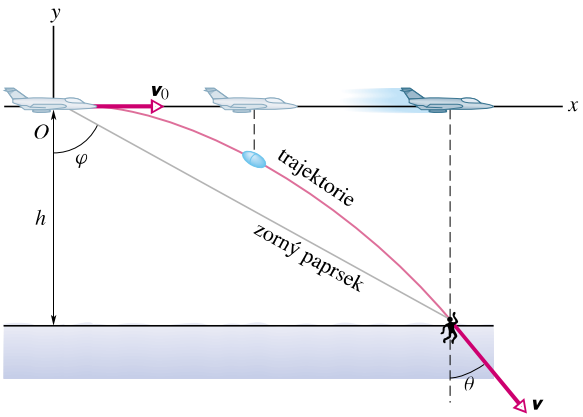
Za tuto dobu urazí vak i letadlo ve vodorovném směru vzdálenost určenou vztahem (4.15):

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t = \\ = (430\ \text{km·h}^{-1})(\cos 0°)(15{,}65\ \text{s})\left(\frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}}\right) = \\ = 1{,}869\ \text{km} = 1\,869\ \text{m}.$$

Pro $x_0 = 0$ je tedy $x = 1\,869$ m. Výpočet zorného úhlu φ je již zřejmý z obr. 4.14.

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{x}{h} = \left(\frac{1\,869\ \text{m}}{1\,200\ \text{m}}\right) = 1{,}558,$$
$$\varphi = 57°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vodorovný průmět rychlosti vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla, takže pilot vidí letící vak neustále pod sebou.



Obr. 4.14 Příklad 4.6. Letadlo letí ve vodorovném směru stálou rychlostí. Během letu vyhodí pilot záchranný vak. Vodorovný průmět rychlosti padajícího vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla. Vak dopadne na hladinu rychlostí $\boldsymbol{v}$, která svírá se svislým směrem úhel θ.

PŘÍKLAD 4.7

Při filmování honičky na ploché střeše má kaskadér přeskočit na střechu sousední budovy (obr. 4.15). Ještě předtím ho prozíravě napadne, zda vůbec může tento úkol zvládnout, běží-li po střeše nanejvýš rychlostí 4,5 m·s^{-1}. Poradíme mu?

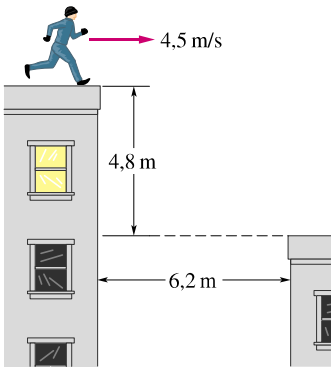
ŘEŠENÍ: Skok z výšky 4,8 m trvá po dobu t, kterou určíme z rovnice (4.16). Dosadíme $y - y_0 = -4{,}8$ m (pozor na znaménko) a $\theta_0 = 0$ a po drobné úpravě dostaneme

$$t = \sqrt{-\frac{2(y - y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-4{,}8\ \text{m})}{(9{,}8\ \text{m·s}^{-2})}} = 0{,}990\ \text{s}.$$

Nyní je třeba určit, jak daleko doletí kaskadér za tuto dobu ve vodorovném směru. Odpověď získáme z rovnice (4.15):

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t = \\ = (4{,}5\ \text{m·s}^{-1})(\cos 0°)(0{,}990\ \text{s}) = 4{,}5\ \text{m}.$$

Sousední budova je však ve vzdálenosti 6,2 m. Rada je jasná: neskákat.



Obr. 4.15 Příklad 4.7. Má kaskadér skočit?

PŘÍKLAD 4.8

Pirátská loď je zakotvena 560 m od pobřežní pevnosti, která chrání vjezd do ostrovního přístavu (obr. 4.16). Obránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny, které může vystřelit náboj rychlostí 82 m·s^{-1}.

(a) Pod jakým elevačním úhlem musí být nastavena hlaveň, aby náboj pirátskou loď zasáhl?

ŘEŠENÍ: Hledaný úhel θ_0 zjistíme přímo z rovnice (4.20):

$$\sin 2\theta_0 = \frac{gR}{v_0^2} = \frac{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} = \\ = 0{,}816.$$

Této hodnoty nabývá funkce sin pro dva různé úhly z intervalu od 0° do 360°: 54,7° a 125,3°. Získáváme tedy dvě hodnoty elevačního úhlu,

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(54{,}7^\circ) \doteq 27^\circ \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(125{,}3^\circ) \doteq 63^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zvolí-li velitel pevnosti kteroukoli z nich, bude pirátská loď zničena (za předpokladu, že pohyb střely není ovlivněn odporem vzduchu).

(b) Pro oba elevační úhly vypočtené v části (a) určete dobu letu střely.

ŘEŠENÍ: Dobu t vyjádříme z rovnice (4.15) a postupně dosadíme oba úhly. Pro $\theta_0 = 27^\circ$ dostaneme

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 27^\circ} = \\ = 7{,}7\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

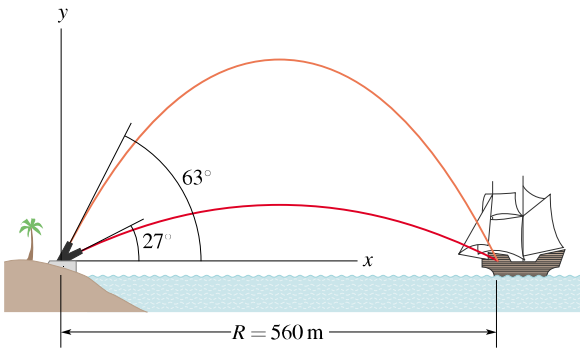
Pro $\theta_0 = 63^\circ$ vychází $t = 15$ s. Podle očekávání trvá let střely při větším elevačním úhlu déle.

(c) V jaké vzdálenosti od pevnosti již bude pirátská loď mimo dostřel?

ŘEŠENÍ: Víme, že dolet střely je největší při elevačním úhlu $\theta_0 = 45^\circ$. Dosazením této hodnoty do rovnice (4.20) dostaneme

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 = \frac{(82\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}\sin(2\cdot 45^\circ) = \\ = 690\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

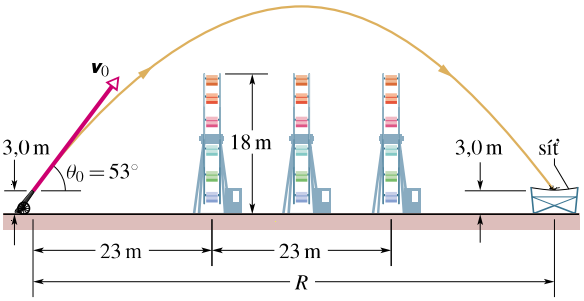
Vydá-li se pirátská loď na ústup, začnou se hodnoty obou elevačních úhlů postupně sbližovat a splynou v okamžiku, kdy bude loď od pevnosti vzdálena 690 m. Jejich společná hodnota je $\theta_0 = 45^\circ$. Ve vzdálenosti větší než 690 m jsou již piráti v bezpečí.



Obr. 4.16 Příklad 4.8. Náboj vystřelený z děla v přístavní pevnosti zasáhne pirátskou loď, míří-li hlaveň ve směru určeném kterýmkoli ze dvou možných elevačních úhlů.

PŘÍKLAD 4.9

Obr. 4.17 znázorňuje historický přelet Emanuela Zacchiniho nad třemi ruskými koly vysokými 18 m. Jejich rozmístění je z obrázku zřejmé. Zacchini byl vystřelen ze speciálního děla rychlostí o velikosti 26,5 m·s^{-1} pod elevačním úhlem $\theta_0 = 53^\circ$. Ústí hlavně i záchranná síť byly ve výšce 3,0 m nad zemí.



Obr. 4.17 Příklad 4.9. Let „lidské střely“ nad ruskými koly v zábavním parku. Umístění záchranné sítě.

(a) Ověřte si, že artista skutečně přeletěl nad prvním kolem.

ŘEŠENÍ: Počátek soustavy souřadnic zvolme v ústí hlavně. Při této volbě je $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Abychom zodpověděli položenou otázku, musíme určit y-ovou souřadnici artisty pro $x = 23\,\mathrm{m}$. Použijeme k tomu rovnici (4.19):

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} =$$
$$= (\operatorname{tg}53^\circ)(23\,\mathrm{m}) - \frac{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(23\,\mathrm{m})^2}{2(26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2(\cos 53^\circ)^2} =$$
$$= 20{,}3\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výška artisty nad zemí je však v tomto okamžiku 23,3 m, neboť počátek soustavy souřadnic je umístěn ve výšce 3,0 m. Artista proletí $23{,}3 - 18 = 5{,}3\,\mathrm{m}$ nad prvním kolem.

(b) Předpokládejme, že vrchol trajektorie leží právě nad prostředním kolem. Jak vysoko nad ním artista proletí?

ŘEŠENÍ: Ve vrcholu trajektorie je $v_y = 0$ a rovnice (4.18) nabude tvaru

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Jejím řešením vzhledem k neznámé y dostaneme

$$y = \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2(\sin 53^\circ)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} = 22{,}9\,\mathrm{m}.$$

Výšková „rezerva“ při průletu artisty nad prostředním kolem činí 7,9 m.

(c) Určete dobu celého letu.

ŘEŠENÍ: Dobu letu můžeme určit několika způsoby. Jednu z možností nabízí rovnice (4.16) s uvážením skutečnosti, že při dopadu je $y = 0$. Dostáváme

$$y = (v_0\sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tj.

$$t = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{2(26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\sin 53^\circ}{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})} =$$
$$= 4{,}3\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jak daleko od děla je třeba umístit záchrannou síť?

ŘEŠENÍ: Dolet R získáme například z rov. (4.15) pro $x_0 = 0$, do níž dosadíme dobu letu.

$$R = (v_0\cos\theta_0)t =$$
$$= (26{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 53^\circ)(4{,}3\,\mathrm{s}) =$$
$$= 69\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní již umíme zodpovědět úvodní otázku celé kapitoly: Jak Zacchini zjistil, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že ruská kola skutečně přeletí? Ať již to byl on sám nebo kdokoli jiný, musel provést stejné výpočty jako my před chvílí. Složitými úvahami, které by umožnily respektovat vliv prostředí, se Zacchini pochopitelně nezabýval. Věděl však, že odpor vzduchu jeho let zbrzdí a zmenší tak skutečný dolet ve srovnání s hodnotou vypočtenou z jednoduchých vztahů. Proto použil rozměrnou síť a posunul ji o něco blíže k dělu. Zabezpečil si tak poměrně dobrou bezpečnost letu v různých konkrétních situacích, lišících se především podmínkami určujícími vliv okolního prostředí. Tak jako tak musela být nepředvídatelnost vlivu prostředí zdrojem určitého pocitu nejistoty a napětí před každou reprízou tohoto odvážného kousku.

Při podobných pokusech jsou artisté vystaveni ještě jinému nebezpečí. I při kratších letech je totiž zrychlení v hlavní děla tak velké, že způsobí krátkou ztrátu vědomí. Kdyby artista dopadl do sítě ještě v bezvědomí, mohl by si zlomit vaz. Artisté proto absolvují speciální trénink, aby se dokázali včas probrat. Lety předváděné v cirkusové manéži jsou podstatně kratší než let Emanuela Zacchiniho. Navíc jsou dnes daleko lépe technicky zabezpečeny. Problém bezvědomí tak prakticky představuje jejich jediné riziko.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.3: *Číselný a algebraický výpočet*

Zaokrouhlovacím chybám při číselném výpočtu se můžeme vyhnout tak, že problém řešíme nejprve obecně (algebraicky) a číselné hodnoty dosadíme až do výsledného vztahu. Při řešení př. 4.6 až 4.9 by takový postup byl celkem snadný a zkušenější řešitelé úloh by jej jistě použili. V úvodních kapitolách však raději volíme postupné numerické řešení, abychom získali jasnější představu o hodnotách mezivýsledků. Později dáme přednost řešení algebraickému.

4.7 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Pohyb částice po kružnici nebo jejím oblouku nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**, je-li velikost rychlosti částice konstantní. Možná nás překvapí, že i když se velikost rychlosti nemění, je *zrychlení částice nenulové*. Zrychlení totiž často spojujeme se změnou velikosti rychlosti a zapomínáme, že rychlost $\boldsymbol{v}$ je vektorovou veličinou, a má tedy i směr. Při jakékoli změně rychlosti, i kdyby šlo pouze o změnu směru, je zrychlení částice nenulové. Právě takovým případem je rovnoměrný pohyb po kružnici.

Velikost a směr jeho zrychlení určíme pomocí obr. 4.18. Částice na obrázku se pohybuje po kružnici o poloměru r a její rychlost má konstantní velikost v. Ve dvou bodech P

a Q umístěných symetricky vzhledem k ose y jsou zakresleny vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$. Tyto vektory mají sice stejnou velikost, ale liší se směrem. Jsou proto různé. Jejich x-ové a y-ové složky jsou

$$v_{Px} = +v\cos\theta, \quad v_{Py} = +v\sin\theta$$

a

$$v_{Qx} = +v\cos\theta, \quad v_{Qy} = -v\sin\theta.$$

Částice, jejíž rychlost má stálou velikost, přejde z bodu P do bodu Q za dobu

$$\Delta t = \frac{\text{arc}(PQ)}{v} = \frac{r(2\theta)}{v}, \tag{4.21}$$

kde $\text{arc}(PQ)$ označuje délku kruhového oblouku spojujícího body P a Q.

Nyní již dokážeme určit složky průměrného zrychlení částice $\overline{\boldsymbol{a}}$ v časovém intervalu Δt. Pro x-ovou složku dostáváme

$$\overline{a}_x = \frac{v_{Qx} - v_{Px}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0.$$

Tento výsledek není nikterak překvapivý a je zřejmý ze symetrie obr. 4.18. V bodě P je x-ová složka rychlosti stejná jako v bodě Q.

Složku $\overline{a}_y$ určíme z rovnice (4.21):

$$\overline{a}_y = \frac{v_{Qy} - v_{Py}}{\Delta t} = \frac{-v\sin\theta - v\sin\theta}{\Delta t} = \\ = -\frac{2v\sin\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right).$$

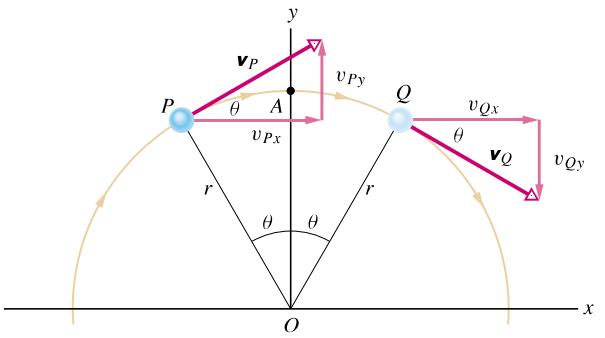
Záporné znaménko znamená, že průmět zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ do osy y v obr. 4.18 směřuje svisle dolů.

Při limitním přechodu úhlu θ v obr. 4.18 k nulové hodnotě se budou body P i Q blížit k bodu A ležícímu v nejvyšším bodě kružnice. Limitním případem průměrného zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$, jehož složky jsme právě určili, bude okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ v bodě A.

Okamžité zrychlení v bodě A na obr 4.18 míří v obrázku svisle dolů, *do středu kružnice*. Při zmenšování úhlu θ se totiž směr průměrného zrychlení nemění a zůstane tedy zachován i při limitním přechodu. Abychom určili *velikost* a vektoru okamžitého zrychlení, potřebujeme znát limitní hodnotu podílu $\sin\theta/\theta$ při velmi malých úhlech θ. Z matematiky je známo, že tato hodnota je rovna jedné. Ze vztahu pro y-ovou složku průměrného zrychlení již snadno dostaneme velikost okamžitého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení)}. \tag{4.22}$$

Při rovnoměrném pohybu částice rychlostí o velikosti v po kružnici o poloměru r (nebo jejím oblouku) směřuje zrychlení částice trvale do středu kružnice a má konstantní velikost v^2/r.



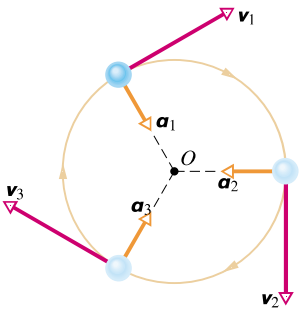
Obr. 4.18 Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru r. Velikost její rychlosti je v, $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rychlosti částice v bodech P a Q, symetricky položených vzhledem k ose y. Rychlosti $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rozloženy do složek. Okamžité zrychlení částice v libovolném bodě trajektorie míří do středu kružnice a má velikost v^2/r.

Částice oběhne celý obvod kružnice (vzdálenost $2\pi r$) za dobu T

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(perioda)}, \tag{4.23}$$

zvanou **doba oběhu**, neboli **perioda**. V obecnějším pojetí rozumíme periodou dobu, za kterou vykoná částice právě jeden oběh po uzavřené trajektorii.

Na obr. 4.19 jsou zakresleny vektory okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v různých fázích rovnoměrného pohybu po kružnici. Oba mají stále stejnou velikost, jejich směr se však během pohybu spojitě mění. Rychlost je vždy tečnou ke kružnici, orientovanou ve směru pohybu. Zrychlení trvale směřuje do středu kružnice, a proto je nazýváme **zrychlením dostředivým**.



Obr. 4.19 Rychlost a zrychlení částice při rovnoměrném pohybu po kružnici. Vektory mají stálou velikost, ale proměnný směr.

Zrychlení určující změnu směru rychlosti je stejně skutečné jako zrychlení, které souvisí se změnou její velikosti. Fotografie na obr. 2.8 zachycují tvář plukovníka Johna P. Stappa při prudkém brzdění raketových saní. Je jasné, že zřetelné fyziologické obtíže jsou způsobeny prudkou změnou *velikosti* rychlosti, neboť směr pohybu saní byl při tomto experimentu stálý. Kosmonaut při tréninku na centrifuze je naopak vystaven výrazným změnám *směru* rychlosti, zatímco její velikost je stálá. Fyziologické pocity vznikající v důsledku zrychlení jsou v obou případech stejné.

KONTROLA 6: Těleso se pohybuje v souřadnicové rovině xy po kruhové dráze se středem v počátku soustavy souřadnic. Bodem o x-ové souřadnici $x = -2\,\mathrm{m}$ prochází rychlostí $-(4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete (a) rychlost a (b) dostředivé zrychlení tělesa v bodě o y-ové souřadnici $y = 2\,\mathrm{m}$.

PŘÍKLAD 4.10

Stíhací piloti se oprávněně obávají příliš prudkých zatáček. Je-li totiž tělo pilota vystaveno velkému dostředivému zrychlení v situaci, kdy hlava směřuje do středu křivosti zatáčky, dochází k odkrvení mozku a poruše mozkových funkcí.

Úplné ztrátě vědomí předchází několik varovných příznaků: Je-li velikost dostředivého zrychlení mezi hodnotami $2g$ a $3g$, cítí se pilot být jakoby „těžký“. Při hodnotě $4g$ začíná vidět pouze černobíle a jeho zorný úhel se zmenšuje (tzv. tunelové vidění). Je-li takovému zrychlení vystaven delší dobu anebo se velikost zrychlení dokonce ještě zvětší, přestává pilot vidět úplně a vzápětí ztrácí vědomí. Tento stav se nazývá g-LOC z anglického „g-induced loss of consciousness“.

Jaké je dostředivé zrychlení pilota (v jednotkách g) stíhačky F-22 při průletu kruhové zatáčky o poloměru 5,80 km rychlostí o velikosti $v = 2\,580\,\mathrm{km/h}$ $(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$?

ŘEŠENÍ: Dosazením číselných údajů do vztahu (4.22) dostaneme

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{5\,800\,\mathrm{m}} = \\ = 88{,}39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 9{,}0g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pilot, který by byl natolik neopatrný, že by skutečně navedl stroj do takové zatáčky, by téměř okamžitě upadl do bezvědomí bez jakýchkoliv varovných příznaků.

PŘÍKLAD 4.11

Umělá družice Země je na oběžné dráze ve výšce $h = 200\,\mathrm{km}$ nad zemským povrchem. V této výšce má gravitační zrychlení $\boldsymbol{g}$ (viz kap. 6) velikost $9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je oběžná rychlost v družice?

ŘEŠENÍ: Družice se pohybuje kolem Země rovnoměrně po kružnici. Dostředivým zrychlením je zrychlení gravitační. Oběžnou rychlost v určíme z rovnice (4.22), do které dosadíme $a = g$ a $r = R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země (viz vnitřní strana obálky nebo dod. C):

$$g = \frac{v^2}{R_Z + h}.$$

Odtud

$$v = \sqrt{g(R_Z + h)} = \\ = \sqrt{(9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m} + 200{\cdot}10^3\,\mathrm{m})} = \\ = 7\,770\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 7{,}77\,\mathrm{km/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Snadno se přesvědčíme, že doba oběhu družice kolem Země, tedy perioda jejího pohybu, je rovna 1,47 h.

4.8 VZÁJEMNÝ POHYB PO PŘÍMCE

Představme si, že pozorujeme kachnu, jak letí řekněme na sever rychlostí o velikosti 30 km/h. Vzhledem k jiné kachně, která letí spolu s ní, se však naše kachna nepohybuje. Je zřejmé, že rychlost pohybu tělesa závisí na vztažné soustavě pozorovatele, který provádí měření. Obecně budeme **vztažnou soustavou** rozumět vhodně zvolený objekt, s nímž spojíme soustavu souřadnic.

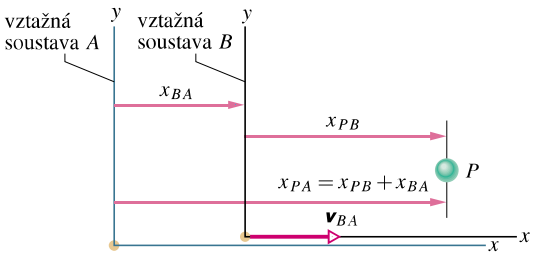
Nejpřirozenější vztažnou soustavou je pochopitelně ta, kterou neustále používáme, aniž si to snad uvědomujeme — zem pod našima nohama. Sdělí-li dopravní policista řidiči, že jel rychlostí 100 km/h, má samozřejmě na mysli rychlost vzhledem k souřadnicové soustavě spojené s povrchem Země. A řidič tomu také tak rozumí.

Pro pozorovatele v letadle nebo třeba v kosmické lodi nemusí být vztažná soustava spojená se Zemí právě nejvhodnější (například pro popis pohybu okolních předmětů). Můžeme si ovšem vybrat kteroukoli jinou, neboť výběr vztažných soustav není nijak omezen. Když už se však pro některou z nich rozhodneme, je důležité se této volby držet a všechna měření vztahovat k vybrané vztažné soustavě.

Problém popisu pohybu částice v různých vztažných soustavách vyložíme pomocí jednoduchého příkladu: Aleš (vztažná soustava A) sedí v autě zaparkovaném na dálnici v odstavném pruhu a sleduje rychlé auto P (částice), které právě projelo kolem v levém pruhu. Barbora (vztažná soustava B) jede v pravém pruhu stálou rychlostí. Také ona pozoruje automobil P. Dejme tomu, že oba pozorovatelé ve stejném okamžiku změří polohu sledovaného vozidla. Z obr. 4.20, který znázorňuje celou situaci, je zřejmé, že

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \qquad (4.24)$$

Všechny členy v této rovnici jsou složky vektorů a mohou být jak kladné, tak záporné. Slovy můžeme rovnici (4.24) vyjádřit takto: „Souřadnici částice P měřenou pozorovatelem ve vztažné soustavě A určíme tak, že k souřadnici částice P měřené pozorovatelem v soustavě B *přičteme* souřadnici pozorovatele B měřenou pozorovatelem A.“ Všimněte si významu veličin obsažených v rovnici (4.24) v souvislosti s jejich označením pomocí indexů.



Obr. 4.20 Aleš (vztažná soustava A) a Barbora (vztažná soustava B) pozorují vozidlo P. Všechna vozidla se pohybují podél společné osy x obou vztažných soustav. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A). Trojice měření vyznačených poloh je provedena v jediném okamžiku.

Derivací rovnice (4.24) podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{PA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{PB}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{BA}),$$

tj. (vzhledem k tomu, že $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \qquad (4.25)$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi rychlostmi téhož objektu (automobil P), měřenými v různých vztažných soustavách. Tyto rychlosti jsou obecně různé. Vztah (4.25) lze velmi jednoduše vyjádřit slovy: „Rychlost částice P měřená ve vztažné soustavě A je součtem její rychlosti měřené v soustavě B a rychlosti soustavy B měřené v soustavě A.“ Symbolem v_{BA} značíme rychlost vztažné soustavy B vzhledem k soustavě A (obr. 4.20), neboli relativní rychlost B vůči A; rychlost v_{PA} se též nazývá relativní rychlost (automobilu) vůči vztažné soustavě A.

Zatím uvažujeme pouze o takových vztažných soustavách, které se navzájem pohybují konstantní rychlostí. Barbora (soustava B) tedy musí jet vzhledem k Alešovi (soustava A) stálou rychlostí. Pohyb automobilu P není omezen ničím, může být zrychlený či zpožděný, automobil může i zastavit nebo couvat.

Derivací rovnice (4.25) dostaneme vztah pro zrychlení

$$a_{PA} = a_{PB}. \qquad (4.26)$$

(Uvědomte si, že rychlost v_{BA} je konstantní. Její časová derivace je tedy nulová.) Informace obsažená ve vztahu (4.26) je velmi důležitá:

Částice má stejné zrychlení ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi.

Jinými slovy:

Pozorovatelé v různých vztažných soustavách, pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi, naměří u zkoumané částice totéž zrychlení.

KONTROLA 7: V následující tabulce jsou uvedeny rychlosti (v km/h) Barbořiny vztažné soustavy B a vozidla P pro tři různé situace. Doplňte chybějící údaje a určete, jak se mění vzdálenost vozidel P a B.

SITUACE	v_{BA}	v_{PA}	v_{PB}
1	+50	+50	
2	+30		+40
3		+60	−20

PŘÍKLAD 4.12

Aleš parkuje na okraji silnice, která vede od východu na západ. Sleduje automobil P jedoucí západním směrem. Barbora jede na východ rychlostí $v_{BA} = 52\,\mathrm{km/h}$, a také pozoruje vůz P. Směr od západu k východu považujeme za kladný.

(a) V určitém okamžiku Aleš zjistil, že se vozidlo P pohybuje rychlostí 78 km/h. Jakou rychlost vozidla P naměří v tomto okamžiku Barbora?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (4.25) dostaneme

$$v_{PB} = v_{PA} - v_{BA}.$$

Víme, že $v_{PA} = -78\,\mathrm{km/h}$. Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že se vůz P pohybuje západním (tedy záporným) směrem. Rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A je rovněž zadána, $v_{BA} = 52\,\mathrm{km/h}$. Je tedy

$$v_{PB} = (-78\,\mathrm{km/h}) - (52\,\mathrm{km/h}) = \\ = -130\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby byl vůz P spojen s vozem Barbory lanem navinutým na cívce, odvíjelo by se lano z cívky právě touto rychlostí.

(b) Aleš zpozoruje, že vůz P se po 10 s brzdění zastavil. Jaké zrychlení vozu P Aleš naměřil za předpokladu, že automobil brzdil rovnoměrně?

ŘEŠENÍ: Z rovnice (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$) dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{0 - (-78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \left(\frac{78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{10\,\mathrm{s}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}\right) = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaké zrychlení vozu P naměří Barbora?

ŘEŠENÍ: V části (a) této úlohy jsme zjistili, že počáteční rychlost vozu P vzhledem k Barboře je $-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vůz P na dálnici zastavil, je tedy v klidu vzhledem k Alešově vztažné soustavě. V soustavě Barbořině se však pohybuje rychlostí o velikosti $52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ směrem na západ. Rychlost automobilu P vzhledem k Barboře je tedy $-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Užitím vztahu $v_x = v_{0x} + a_x t$ dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}) - (-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Barbořin výsledek je, podle očekávání, stejný jako Alešův. Ve výpočtech jsme tedy neudělali žádnou chybu.

4.9 VZÁJEMNÝ POHYB V ROVINĚ

Vzájemný pohyb těles v rovině (případně i v prostoru) lze nejlépe popsat pomocí vektorů.

Na obr. 4.21 jsou znázorněny vztažné soustavy A a B našich dvou pozorovatelů, kteří opět sledují pohyb částice P, tentokrát v rovině. Soustavy se stejně jako v předchozím případě pohybují konstantní vzájemnou (neboli relativní) rychlostí $\boldsymbol{v}_{BA}$. Pro zjednodušení výpočtů navíc předpokládejme, že odpovídající si osy obou soustav (x-ové a y-ové) jsou trvale rovnoběžné.

Pozorovatelé v soustavách A a B v určitém okamžiku změří polohu částice P. Z vektorového trojúhelníka na obr. 4.21 je na první pohled zřejmý vztah mezi jejími polohovými vektory v obou soustavách:

$$\boldsymbol{r}_{PA} = \boldsymbol{r}_{PB} + \boldsymbol{r}_{BA}. \qquad (4.27)$$

Tato vektorová transformační rovnice odpovídá skalární rovnici (4.24), platné pro pohyb po přímce.

Derivujeme-li ji podle času, získáme vztah mezi rychlostmi částice naměřenými pozorovateli v soustavách A a B:

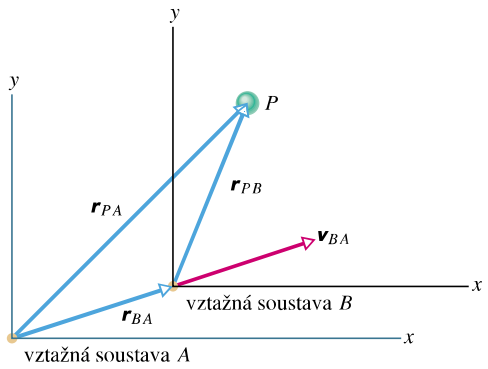
$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}. \qquad (4.28)$$

Tento vztah je dvojrozměrným ekvivalentem skalární rovnice (4.25). Význam indexů je stejný jako v rovnici (4.25) a $\boldsymbol{v}_{BA}$ opět představuje (konstantní) rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A.

Dalším derivováním rovnice (4.28) dostaneme vztah pro zrychlení

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \qquad (4.29)$$

Důležitý výsledek, který jsme získali pro případ pohybu po přímce, zůstává v platnosti i při pohybu v rovině či prostoru: při konstantních vzájemných rychlostech vztažných soustav naměří všichni pozorovatelé stejné zrychlení pohybující se částice.



Obr. 4.21 Vztažné soustavy v rovině. Vektory $\boldsymbol{r}_{PA}$ a $\boldsymbol{r}_{PB}$ určují polohu částice v soustavách A a B, $\boldsymbol{r}_{BA}$ je polohový vektor počátku soustavy B v soustavě A. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k A). Předpokládáme, že tato rychlost je konstantní.

PŘÍKLAD 4.13

Netopýr letící rychlostí $\boldsymbol{v}_{NZ}$ zaregistruje mouchu, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$. Rychlosti jsou zadány na obr. 4.22a a jsou vztaženy k zemi. Určete rychlost $\boldsymbol{v}_{MN}$ mouchy vzhledem k netopýrovi a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 4.22a jsou rychlosti mouchy a netopýra vzhledem k zemi dány vztahy

$$\boldsymbol{v}_{MZ} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{v}_{NZ} = (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j}.$$

Úhly odměřujeme od kladného směru osy x. Při výpočtu vyjdeme ze skutečnosti, že rychlost $\boldsymbol{v}_{MN}$ *mouchy vzhledem k netopýrovi* je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}_{MZ}$ *mouchy*

vzhledem k zemi a rychlosti $\boldsymbol{v}_{ZN}$ země vzhledem k netopýrovi. Pak

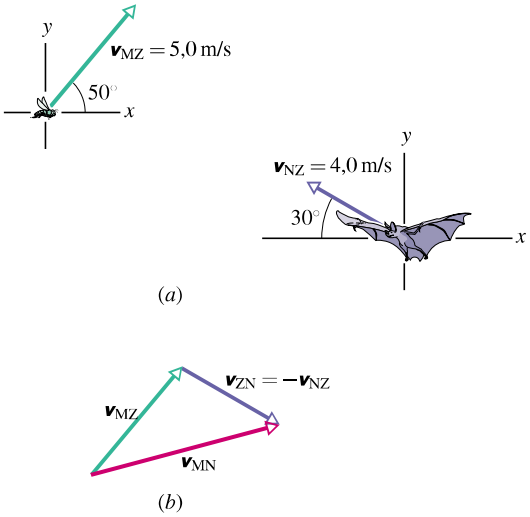
$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + \boldsymbol{v}_{ZN}$$

(obr. 4.22b). (Všimněte si, že „vnitřní“ indexy (bližší znaménku „plus“) na pravé straně této rovnice jsou stejné. Vnější indexy pravé strany se shodují s indexy na levé straně a na obou stranách rovnice vystupují ve stejném pořadí.) Vektor $\boldsymbol{v}_{ZN}$ je ovšem definován jako opačný k vektoru $\boldsymbol{v}_{NZ}$, tj. $\boldsymbol{v}_{ZN} = -\boldsymbol{v}_{NZ}$, dostáváme proto

$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + (-\boldsymbol{v}_{NZ}).$$

Dosazením rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$ a $\boldsymbol{v}_{NZ}$ (obr. 4.22) do předchozího vztahu dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{MN} &= (5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j} - \\ &\quad - (4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} - \\ &\quad - (4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j} = \\ &= 3{,}21\boldsymbol{i} + 3{,}83\boldsymbol{j} + 3{,}46\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} \doteq \\ &\doteq (6{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (1{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$



Obr. 4.22 Příklad 4.13. (a) Netopýr zaregistroval mouchu. (b) Vektory rychlosti mouchy a netopýra.

PŘÍKLAD 4.14

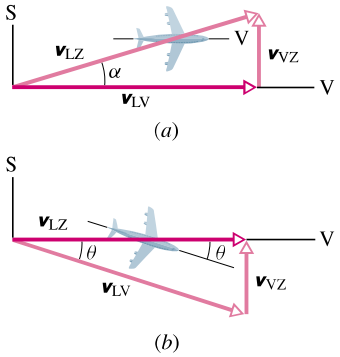
Kompas na palubě letadla ukazuje, že letadlo směřuje k východu. Palubní rychloměr udává hodnotu 215 km/h vzhledem k okolnímu vzduchu. Vane stálý jižní vítr rychlostí 65,0 km/h.

(a) Jaká je rychlost letadla vzhledem k zemi?

ŘEŠENÍ: Pohybujícím se tělesem je nyní letadlo (L). Letadlo (L) zde považujeme za hmotný bod. Jedna ze vztažných soustav je spojena se zemí (Z) a druhá se vzduchem (V). Podle rovnice (4.28) platí

$$\boldsymbol{v}_{LZ} = \boldsymbol{v}_{LV} + \boldsymbol{v}_{VZ}, \qquad (4.30)$$

kde $\boldsymbol{v}_{LZ}$ je rychlost letadla vzhledem k zemi, $\boldsymbol{v}_{LV}$ rychlost letadla vzhledem k okolnímu vzduchu a $\boldsymbol{v}_{VZ}$ rychlost vzduchu vzhledem k zemi (rychlost větru). Vektory rychlosti vystupující v rovnici (4.30) lze zakreslit tak, aby tvořily strany trojúhelníka podle obr. 4.23a. V obrázku si všimněte, že letadlo je orientováno přídí k východu, přesně tak, jak ukazuje palubní kompas. To však ještě neznamená, že se tímto směrem také skutečně pohybuje.



Obr . 4.23 Příklad 4.14. (a) Letadlo, jehož pilot udržuje východní kurs, je unášeno severním směrem. (b) Má-li letadlo letět východně, musí mířit částečně proti větru.

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme z vektorového trojúhelníka na obr. 4.23a:

$$\begin{aligned}v_{LZ} &= \sqrt{v_{LV}^2 + v_{VZ}^2} = \\ &= \sqrt{(215\ \mathrm{km/h})^2 + (65{,}0\ \mathrm{km/h})^2} = \\ &= 225\ \mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Úhel α na obr. 4.23a je dán vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\ \mathrm{km/h})}{(215\ \mathrm{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\alpha = 16{,}8^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo letí vzhledem k zemi rychlostí o velikosti 225 km/h ve směru, který je od východního kursu odkloněn o 16,8° na sever. Vzhledem k zemi se tedy letadlo pohybuje rychleji než vůči okolnímu vzduchu.

(b) Jaký kurs musí pilot udržovat, chce-li skutečně letět na východ? (Kurs je určen údajem na palubním kompasu.)

ŘEŠENÍ: Aby letadlo letělo vzhledem k zemi přesně východním směrem, musí směřovat částečně proti větru a kompenzovat tak jeho unášivý vliv. Rychlost větru je stejná jako

v části (a). Diagram rychlostí odpovídající této situaci je na obr. 4.23b. Vektory $\boldsymbol{v}_{LV}$, $\boldsymbol{v}_{VZ}$, $\boldsymbol{v}_{LZ}$ tvoří opět pravoúhlý trojúhelník, podobně jako na obr. 4.23a a stále platí rovnice (4.30).

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme podle obr. 4.23b:

$$v_{LZ} = \sqrt{v_{LV}^2 - v_{VZ}^2} = \\ = \sqrt{(215\,\mathrm{km/h})^2 - (65{,}0\,\mathrm{km/h})^2} = \\ = 205\,\mathrm{km/h}.$$

Z obrázku je rovněž zřejmé, že pilot musí udržovat kurs určený úhlem

$$\sin\theta = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\,\mathrm{km/h})}{(215\,\mathrm{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\theta = 17{,}6^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Rychlost letadla vzhledem k zemi je nyní menší než vzhledem k okolnímu vzduchu.

4.10 VZÁJEMNÝ POHYB PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

I když kosmické lety již před časem opustily oblast pouhé fantazie a staly se skutečností, stále na nás působí dojmem něčeho mimořádného. Vyvolávají především představu objektů pohybujících se velkými rychlostmi. Tak třeba typická velikost rychlosti družice na oběžné dráze kolem Země je 27 400 km/h. Máme-li ji však zařadit do kategorie „velkých rychlostí“, musíme se dohodnout, s jakými rychlostmi ji budeme porovnávat. Příroda sama nabízí jako standard rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \text{ (rychlost světla ve vakuu).} \quad (4.31)$$

Později se přesvědčíme, že se žádný hmotný objekt nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu, a to bez ohledu na volbu vztažné soustavy, ve které jej pozorujeme. Všechny objekty běžných rozměrů se ve srovnání s tímto „světelným standardem“ pohybují velice pomalu. Přitom se nám jejich rychlost může zdát obrovská, posuzujeme-li ji našimi lidskými měřítky. Velikost rychlosti družice činí pouhých 0,002 5 % rychlosti světla. Na druhé straně se však rychlosti elementárních částic, například protonů nebo elektronů, mohou této hodnotě velmi přiblížit. Nemohou jí však v žádném případě dosáhnout či dokonce překročit.

Experimenty potvrzují, že elektron získá při urychlení napětím 10 milionů voltů rychlost o velikosti $0{,}998\,8c$. Použijeme-li pro jeho urychlení napětí 20 milionů voltů, velikost jeho rychlosti se sice ještě zvýší, avšak už jen na hodnotu $0{,}999\,7c$. Rychlost světla představuje hranici, ke které se rychlosti hmotných těles mohou přiblížit, ale nikdy jí nedosáhnou. Lety nadsvětelnými rychlostmi jsou možné jen ve fantastických literárních příbězích. A tak „warpový pohon“, známý z populárního seriálu *Star Trek* a umožňující kosmonautům letět rychlostí $c \cdot 2^n$ (n je číslo „warpu“), zůstane navždy jen ve světě fantazie.

Platí vůbec kinematika, kterou jsme právě vybudovali pro popis pohybu běžných (a tedy velmi pomalých) objektů, také pro velmi rychlé částice, například elektrony či protony? Odpověď, kterou může dát jedině experiment, je záporná. Zákonitosti běžné kinematiky *neplatí* pro tělesa s rychlostmi blízkými rychlosti světla. Pro popis pohybu takových těles musíme použít Einsteinovu **speciální teorii relativity**, která souhlasí s experimentem pro *libovolnou* rychlost.

Kinematické vztahy pro běžná tělesa získáme z rovnic odvozených v rámci Einsteinovy relativistické teorie přechodem k „malým“ rychlostem. Rovnice nerelativistické kinematiky, kterou bychom mohli nazývat „kinematikou pomalých těles“, souhlasí s experimentem o to hůře, čím je rychlost sledovaných těles větší. Uveďme příklad: vztah (4.25)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad \text{(malé rychlosti)}$$

vyjadřuje souvislost mezi rychlostmi tělesa P měřenými dvěma pozorovateli v různých vztažných soustavách A a B. Odpovídající rovnice Einsteinovy teorie má tvar

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \quad \text{(libovolné rychlosti).} \quad (4.32)$$

Pro $v_{PB} \ll c$ a $v_{BA} \ll c$ (splněno pro běžná tělesa) je hodnota jmenovatele zlomku velmi blízká jedničce a rovnice (4.32) přechází v rovnici (4.25).

Rychlost světla c je ústřední konstantou Einsteinovy teorie a vystupuje ve všech relativistických rovnicích. Každá z nich v případě „malých“ rychlostí přejde na odpovídající nerelativistický tvar. Ověření této skutečnosti je snadné. Při neomezeném zvyšování rychlosti světla se *všechny* rychlosti budou jevit jako malé a bude platit „kinematika pomalých těles“. Dosadíme-li například $c \to \infty$ do rovnice (4.32), dostaneme její nerelativistický tvar (4.25).

PŘÍKLAD 4.15

(Malé rychlosti) Pro $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}000\,1c$ určete v_{PA} z rovnic (4.25) a (4.32).

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c = \\ = 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32)

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c}{1 + (0{,}000\,1c)^2/c^2} = \\ = \frac{0{,}000\,2c}{1{,}000\,000\,01} \doteq 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro rychlosti běžných hmotných těles vedou vztahy (4.25) a (4.32) ke stejným výsledkům. V takových případech můžeme celkem automaticky používat rovnici (4.25).

PŘÍKLAD 4.16

(Vysoké rychlosti) Určete v_{PA} ze vztahů (4.25) a (4.32), je-li $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}65c$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}65c + 0{,}65c = \\ = 1{,}30c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32) plyne

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}65c + 0{,}65c}{1 + (0{,}65c)(0{,}65c)/c^2} = \\ = \frac{1{,}30c}{1{,}423} = 0{,}91c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro vysoké rychlosti jsou výsledky kinematiky pomalých těles a výsledky speciální teorie relativity velmi rozdílné. Klasická kinematika neklade na velikost rychlosti objektů žádná omezení. V jejím rámci jsou tedy přípustné i hodnoty větší než rychlost světla ve vakuu (jako v př. 4.16). Ve speciální teorii relativity naopak nikdy nemůže mít hmotný objekt vůči pozorovateli větší rychlost než světelnou, bez ohledu na to, jak vysoké rychlosti skládáme. Experiment závěry speciální teorie relativity plně potvrzuje.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Polohový vektor

Poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic je popsána *polohovým vektorem* $\boldsymbol{r}$, zapsaným pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic ve tvaru

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (4.1)$$

Vektory $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou *průměty* polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ do směrů souřadnicových os, x, y a z jsou odpovídající *složky*. Polohový vektor je určen buď velikostí a jedním či dvěma úhly, nebo svými složkami.

Posunutí

Přemístění částice z polohy určené polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ do polohy dané vektorem $\boldsymbol{r}_2$ je popsáno *vektorem posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \qquad (4.2)$$

Jiný zápis posunutí využívá opět jednotkových vektorů:

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}, \qquad (4.3)$$

kde (x_1, y_1, z_1) jsou složky vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a (x_2, y_2, z_2) složky vektoru $\boldsymbol{r}_2$.

Průměrná rychlost

Průměrná rychlost částice $\overline{\boldsymbol{v}}$ v časovém intervalu od t do $t + \Delta t$ je definována jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad (4.4)$$

kde $\Delta\boldsymbol{r}$ je posunutí částice v tomto intervalu.

Rychlost

Okamžitou rychlostí částice $\boldsymbol{v}$ rozumíme limitu její průměrné rychlosti, blíží-li se doba Δt k nule,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.6)$$

tj.

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.7)$$

kde $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ a $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Směr vektoru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ je v každém okamžiku tečný k trajektorii částice.

Průměrné zrychlení

Změní-li se rychlost hmotného bodu za časový interval Δt z hodnoty $\boldsymbol{v}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{v}_2$, je *průměrné zrychlení* $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto intervalu definováno jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \qquad (4.9)$$

Zrychlení

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nulové hodnotě nabude průměrné zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ limitní hodnoty $\boldsymbol{a}$, kterou nazýváme (okamžitým) *zrychlením*,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.10)$$

tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ a $a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$.

S jednotlivými složkami vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$ můžeme pracovat odděleně a používat vztahů pro jednorozměrný pohyb, odvozených v kap. 2.

Šikmý vrh

Při šikmém vrhu se částice s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pohybuje ve svislé rovině s tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$. Je-li její počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ zadána velikostí v_0 a úhlem, který vektor $\boldsymbol{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou, má její trajektorie následující parametrické rovnice:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \tag{4.15}$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.16}$$

Pro složky rychlosti platí

$$v_x = v_0\cos\theta_0, \qquad v_y = v_0\sin\theta_0 - gt, \tag{4.17}$$

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Trajektorií částice je parabola o rovnici

$$y = (\mathrm{tg}\,\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \tag{4.19}$$

při takové volbě počátku soustavy souřadnic, při níž jsou počáteční souřadnice x_0 a y_0 nulové. Doletem částice rozumíme její vodorovnou vzdálenost od místa výstřelu v okamžiku, kdy je její výška nad povrchem Země stejná jako v okamžiku výstřelu. Platí

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Obíhá-li částice po kružnici o poloměru r rychlostí o stálé velikosti v, nazýváme její pohyb *rovnoměrným pohybem po kružnici*.

Velikost zrychlení částice má hodnotu

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4.22}$$

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ trvale směřuje do středu kružnice nebo kruhového oblouku. Nazýváme je dostředivým zrychlením. Doba oběhu částice

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.23}$$

se též nazývá *perioda* pohybu.

Vzájemný pohyb

Rychlosti částice měřené ve vztažných soustavách A a B jsou obecně různé. Je-li vzájemný (relativní) pohyb vztažných soustav pouze translační, jsou okamžité rychlosti částice měřené v těchto soustavách vázány transformačním vztahem

$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}, \tag{4.28}$$

kde $\boldsymbol{v}_{BA}$ je rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A. Je-li rychlost vzájemného pohybu vztažných soustav $\boldsymbol{v}_{BA}$ konstantní, naměří pozorovatelé v obou vztažných soustavách stejné zrychlení částice, tj.

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \tag{4.29}$$

Při rychlostech blízkých rychlosti světla je třeba použít místo vztahu (4.25) ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) vztah vyplývající ze **speciální teorie relativity**. Pro přímočarý pohyb má tento vztah tvar

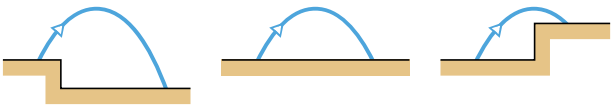
$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + \dfrac{v_{PB}v_{BA}}{c^2}} \tag{4.32}$$

a pro velmi malé rychlosti (zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla) přejde v rovnici (4.25).

OTÁZKY

1. Rychlost hokejového kotouče pohybujícího se v rovině xy je dána následujícími výrazy (v metrech za sekundu)
(1) $v_x = 3t^2 + 4t - 2$ a $v_y = 6t - 4$,
(2) $v_x = -3$ a $v_y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{v} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v} = -2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.
Ve kterém z uvedených případů je některá ze složek a_x a a_y vektoru zrychlení konstantní? Kdy je konstantní vektor zrychlení? Jaké musí být v případě (4) jednotky koeficientů -2 a 3, je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ zadána v metrech za sekundu a čas t v sekundách?

2. Náboje na obr. 4.24 jsou ve všech případech vystřeleny stejnou rychlostí pod stejným elevačním úhlem, dopadnou však do různých míst. Seřaďte uvedené situace sestupně podle velikosti rychlosti dopadu střel.



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 4.24 Otázka 2

3. Ve kterém bodě trajektorie střely z otázky 2 je její rychlost (a) největší, (b) nejmenší?

4. V jistém okamžiku je rychlost letícího míče rovna $\boldsymbol{v} = 25\boldsymbol{i} - 4{,}9\boldsymbol{j}$. (Osa x je vodorovná, osa y svislá a orientovaná směrem

vzhůru, rychlost $\boldsymbol{v}$ je dána v metrech za sekundu). Prošel již míč nejvyšším bodem dráhy?

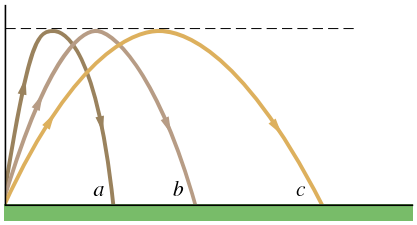
5. Raketa má být vystřelena z povrchu Země počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, pro kterou připadají v úvahu následující možnosti:
(1) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(2) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(3) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$.
Osa x kartézské soustavy souřadnic je vodorovná, osa y je svislá a orientovaná vzhůru. (a) Uspořádejte vektory počáteční rychlosti sestupně podle velikosti. (b) Uspořádejte uvedené možnosti sestupně podle doby letu střely.

6. Chlapec stojící v jámě vyhodí sněhovou kouli z úrovně vodorovného chodníku počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem 45°. Koule dopadne znovu na chodník. Jak se změní (a) délka letu, (b) doba letu, zvolí-li chlapec při příštím hodu větší elevační úhel?

7. Ve výšce 2 m nad vodorovným povrchem vyhodíme hroudu hlíny počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jaká je rychlost hroudy při dopadu?

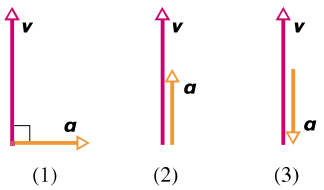
8. Letadlo letí rychlostí o velikosti 350 km/h ve stálé výšce nad povrchem Země. Pilot vypustí balík se zásobou potravin. Jaká je (a) vodorovná, (b) svislá složka počáteční rychlosti balíku? (c) Jaká je vodorovná složka jeho rychlosti těsně před dopadem na zem? (d) Jak by se změnila doba pádu balíku, kdyby letadlo letělo rychlostí 450 km/h? Vliv odporu prostředí neuvažujte.

9. Fotbalový míč letí po některé z trajektorií znázorněných na obr. 4.25. Seřaďte je podle (a) doby letu míče, (b) svislé složky jeho počáteční rychlosti, (c) vodorovné složky počáteční rychlosti, (d) velikosti počáteční rychlosti. Volte vždy sestupné řazení. Odpor prostředí zanedbejte.



Obr. 4.25 Otázka 9

10. Obr. 4.26 znázorňuje tři možné okamžité situace při pohybu částice. Rozhodněte, ve které z nich (a) velikost rychlosti částice roste, (b) klesá, (c) nemění se. Ve kterém z případů je skalární součin (d) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}$ kladný, (e) záporný, (f) nulový?



Obr. 4.26 Otázka 10

11. Osobní vůz jede stálou rychlostí těsně za nákladní dodávkou. Z dodávky vypadne přepravka. (a) Řidič osobního auta nebrzdí a nesnaží se přepravce vyhnout. Narazí auto do přepravky ještě před jejím dopadem na silnici? (b) Rozhodněte, zda je vodorovná složka rychlosti přepravky během jejího pádu větší, menší, nebo stejná jako rychlost dodávky.

12. (a) Je možné, aby těleso mělo nenulové zrychlení a přitom se neměnila velikost jeho rychlosti? Je možné projíždět zatáčkou (b) s nulovým zrychlením, (c) se zrychlením stálé velikosti?

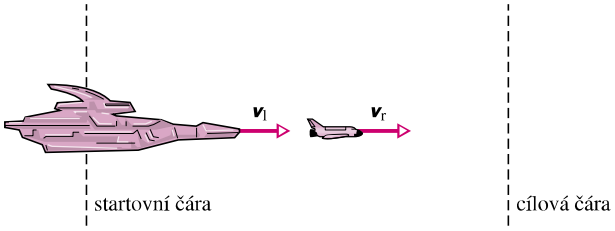
13. Dítě si během jízdy v autě pohrává s míčkem a najednou jej vyhodí svisle vzhůru. V následujících případech rozhodněte, zda míček spadne před dítě nebo za ně, anebo se mu vrátí zpět přímo do ruky: (a) auto jede konstantní rychlostí, (b) zrychluje, (c) brzdí.

14. Člověku jedoucímu ve výtahu vypadne z ruky mince ve chvíli, kdy výtah klesá konstantní rychlostí. Rozhodněte, zda je zrychlení mince větší, menší, nebo shodné s tíhovým zrychlením vzhledem k (a) člověku ve výtahu, (b) pozorovateli na schodišti.

15. Kapsářka stojí na otevřené zadní plošině tramvaje jedoucí konstantní rychlostí. Ve vhodném okamžiku se vykloní přes zábradlí plošiny a upustí ukradenou peněženku, na kterou již čeká její společnice. Popište trajektorii peněženky z hlediska (a) kapsářky, (b) její společnice a (c) policisty, který stojí v tramvaji jedoucí po vedlejší koleji opačným směrem, rovněž konstantní rychlostí.

16. Při ostřelování Paříže ze vzdálenosti 110 km používali Němci dělostřelecký kanón VWI přezdívaný „Tlustá Berta“. Náboje byly vystřelovány pod úhlem větším než 45°. Němci totiž zjistili, že tak dosáhnou téměř dvojnásobného doletu ve srovnání s doletem při elevačním úhlu 45°. Lze z této informace usoudit, jak se mění hustota vzduchu s nadmořskou výškou?

17. Obr. 4.27 představuje jednu ze čtyř kosmických lodí při speciálním závodu. V okamžiku průletu startovní čarou vypustí každá z nich raketu, která směřuje k cílové čáře. Rychlosti kosmických lodí vzhledem ke startovní čáře v_l a rychlosti raket vzhledem k mateřským lodím v_r jsou postupně (1) $v_\mathrm{l} = 0{,}70c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}40c$, (2) $v_\mathrm{l} = 0{,}40c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}70c$, (3) $v_\mathrm{l} = 0{,}20c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}90c$ a (4) $v_\mathrm{l} = 0{,}50c$, $v_\mathrm{r} = 0{,}60c$. Bez počítání rozhodněte, (a) kdo zvítězí a (b) kdo bude poslední.



Obr. 4.27 Otázka 17

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 4.2 Poloha a posunutí

1C. Meloun leží v místě o souřadnicích $x = -5{,}0\,\text{m}$, $y = 8{,}0\,\text{m}$ a $z = 0\,\text{m}$. Vyjádřete jeho polohový vektor (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru. (c) Načrtněte polohový vektor v kartézské soustavě souřadnic. Meloun se posune do místa o souřadnicích $(x, y, z) = (3{,}00\,\text{m}, 0\,\text{m}, 0\,\text{m})$. Určete vektor posunutí a vyjádřete jej (d) pomocí jednotkových vektorů, (e) pomocí velikosti a směru.

2C. Poloha elektronu je zadána vektorem $\boldsymbol{r} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). (a) Určete jeho velikost a (b) zakreslete jej v kartézské soustavě souřadnic.

3C. Proton se přemístí z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ do polohy $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny složky v metrech). (a) Určete vektor posunutí. (b) S jakou souřadnicovou rovinou je tento vektor rovnoběžný?

4C. Vektor posunutí pozitronu v určitém časovém intervalu je $\Delta\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 6{,}0\boldsymbol{k}$ a jeho výsledná poloha je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = 3{,}0\boldsymbol{j} - 4{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). Jaký byl polohový vektor pozitronu na počátku časového intervalu?

ODST. 4.3 Průměrná a okamžitá rychlost

5C. Letadlo letí z města A do C s mezipřistáním ve městě B. Město B leží východně od A ve vzdálenosti 300 km, město C je od B vzdáleno 600 km na jih. Prvá část letu trvá 45,0 min, druhá 1,50 h. (a) Určete vektor posunutí z A do C, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrnou velikost rychlosti během celého letu.

6C. Vlak jede na východ stálou rychlostí o velikosti 60,0 km/h. Po 40,0 min jízdy odbočí k severovýchodu a směr jeho dalšího pohybu svírá s místním poledníkem úhel 50,0°. Vlak pokračuje v jízdě dalších 20,0 min. Posledních 50,0 min jízdy míří vlak na západ. Určete jeho průměrnou rychlost.

7C. Balon se během 3,50 h letu dostal do výšky 2,88 km nad povrch Země a posunul se o 21,5 km severně a 9,70 km východně od místa startu. Určete (a) velikost vektoru jeho průměrné rychlosti a (b) úhel, který tento vektor svírá s vodorovnou rovinou.

8C. Poloha iontu se během 10 s změní z hodnoty $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje jsou v metrech). Jaká je jeho průměrná rychlost v tomto časovém intervalu?

9C. Poloha elektronu je dána vztahem $\boldsymbol{r} = 3{,}0t\boldsymbol{i} - 4{,}0t^2\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (Čas t je měřen v sekundách a složky vektoru $\boldsymbol{r}$ v metrech.) (a) Určete časovou závislost rychlosti elektronu $\boldsymbol{v}(t)$. (b) Jakou rychlost má elektron v okamžiku $t = 2{,}0$ s? Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (c) Určete velikost a směr rychlosti elektronu v tomto okamžiku.

ODST. 4.4 Průměrné a okamžité zrychlení

10C. Rychlost protonu se během 4,0 s změní z hodnoty $\boldsymbol{v}_1 = 4{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{v}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje v metrech za sekundu). (a) Určete průměrné zrychlení protonu $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto časovém intervalu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete, jaká je velikost a směr vektoru $\overline{\boldsymbol{a}}$.

11C. Polohový vektor částice závisí na čase vztahem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$. Všechny veličiny jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Určete časovou závislost (a) rychlosti, (b) zrychlení částice.

12C. Částice se pohybuje v rovině xy. Její poloha se mění s časem podle vztahu $\boldsymbol{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\boldsymbol{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Určete její (a) polohu $\boldsymbol{r}$, (b) rychlost $\boldsymbol{v}$ a (c) zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 2{,}00$ s. (d) Jaký je v tomto okamžiku směr tečny k trajektorii?

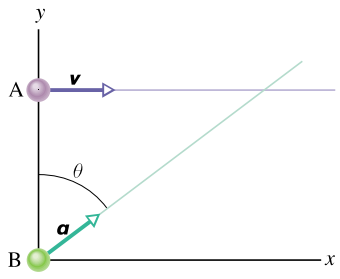
13C. Saně s plachtou jsou hnány větrem po zamrzlém jezeře. V jistém okamžiku t mají rychlost $(6{,}30\boldsymbol{i} - 8{,}42\boldsymbol{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Během dalších tří sekund dojde k náhlé změně podmínek a saně se zastaví. Určete jejich průměrné zrychlení v časovém intervalu od t do $t + 3$ s.

14Ú. Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $(4{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. V okamžiku $t = 0$ prochází počátkem soustavy souřadnic rychlostí $8{,}0\boldsymbol{j}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Určete její y-ovou souřadnici v okamžiku, kdy má její x-ová souřadnice hodnotu 29 m. (b) V tomtéž okamžiku určete velikost její rychlosti.

15Ú. Částice vyletí z počátku soustavy souřadnic s počáteční rychlostí $3{,}00\boldsymbol{i}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a pohybuje se s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a} = (-1{,}00\boldsymbol{i} - 0{,}500\boldsymbol{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy její x-ová souřadnice nabývá největší hodnoty? (b) Jaká je v tomto okamžiku její poloha?

16Ú. Rychlost částice pohybující se v souřadnicové rovině xy je dána vztahem $\boldsymbol{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Složky rychlosti jsou měřeny v metrech za sekundu a čas ($t > 0$) v sekundách. (a) Jaké je její zrychlení v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Ve kterém okamžiku je její zrychlení nulové? (c) Kdy je nulová její rychlost? (d) Ve kterém okamžiku má velikost její rychlosti hodnotu $10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$?

17Ú. Částice A se pohybuje po přímce $y = 30$ m rovnoběžně s kladným směrem osy x. Její rychlost $\boldsymbol{v}$ je konstantní a má velikost $v = 3{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Částice B vyletí z počátku soustavy souřadnic s nulovou počáteční rychlostí právě v okamžiku, kdy částice A prochází osou y (obr. 4.28). Částice B se pohybuje



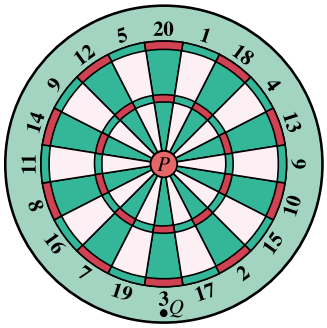
Obr. 4.28 Úloha 17

s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$ o velikosti $a = 0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jak je třeba volit úhel θ mezi zrychlením $\boldsymbol{a}$ částice B a kladným směrem osy y, aby se částice srazily? (Jestliže při řešení úlohy dospějete k rovnici čtvrtého stupně pro neznámou t, převeďte ji substitucí $u = t^2$ na kvadratickou rovnici s neznámou u.)

ODST. 4.6 Šikmý vrh: matematický popis

Při řešení následujících úloh zanedbáme odpor prostředí, i když to v některých případech nebude opodstatněné. Bez tohoto zjednodušení by totiž výpočty nebyly schůdné.

18C. Hráč hodil šipku vodorovnou rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Mířil přitom přesně na střed terče P (obr. 4.29). Za 0,19 s zasáhla šipka bod Q na okraji terče. (a) Určete vzdálenost PQ a (b) vzdálenost hráče od terče.



Obr. 4.29 Cvičení 18

19C. Střelec míří na terč umístěný ve vzdálenosti 30,5 m od ústí hlavně. V okamžiku výstřelu je hlaveň vodorovná a směřuje přímo do středu terče. Kulka zasáhne terč 1,9 cm pod jeho středem. (a) Určete dobu letu kulky a (b) její rychlost bezprostředně po výstřelu.

20C. Pohyb všech hmotných objektů v blízkosti povrchu Země je ovlivněn tíhovým zrychlením. Týká se to i protonů, elektronů a ostatních hmotných částic. Uvažujme elektron, který opustí elektronovou trysku s vodorovnou rychlostí o velikosti $v = 3{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Určete jeho pokles ve svislém směru po průletu vodorovnou evakuovanou trubicí délky 1,0 m. (b) Jak se změní tento výsledek při vyšší počáteční rychlosti elektronu?

21C. Elektronový svazek v katodové trubici opouští elektronovou trysku rychlostí o velikosti $1{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ a vstoupí do oblasti mezi dvěma vodorovnými vychylovacími deskami. Desky jsou čtvercové a jejich strany měří 2 cm. Elektrostatické pole mezi nimi uděluje elektronům zrychlení o velikosti $1{,}0 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$, které míří svisle dolů. Určete (a) dobu průletu elektronu vychylovací soustavou, (b) svislou složku jeho posunutí v tomto časovém intervalu (nenarazí elektron do některé z desek?) a (c) jeho rychlost v okamžiku, kdy opustí prostor mezi deskami (výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů).

22C. Míč se skutálel z vodorovné desky stolu vysokého 1,2 m a dopadl na podlahu ve vodorovné vzdálenosti 1,5 m od hrany stolu. (a) Jak dlouho míč letěl? (b) S jakou rychlostí opustil desku stolu?

23C. Při zkušební střelbě z pistole stojí střelec na ocelové konstrukci ve výšce 45,0 m nad vodorovným povrchem Země. Střela opustí hlaveň vodorovnou rychlostí o velikosti $250\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho a (b) v jaké vzdálenosti od paty konstrukce dopadne střela na zem? (c) Jaká je v tom okamžiku svislá složka její rychlosti?

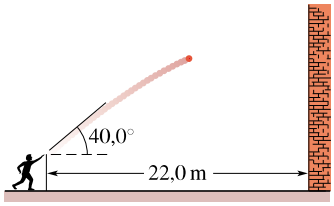
24C. Nadhazovač vyhodí baseballový míč vodorovnou rychlostí o velikosti 160 km/h. Pálkař stojí ve vzdálenosti 20 m. (a) Za jak dlouho urazí míč (a) první, resp. druhou polovinu této (vodorovné) vzdálenosti? (b) Určete svislou složku posunutí míče po průletu prvním, resp. (c) druhým z obou úseků. (d) Jak to, že nejsou výsledky částí (b) a (c) shodné? (Vliv odporu prostředí zanedbejte.)

25C. Střela je vystřelena počáteční rychlostí $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 60°. Určete velikost a směr její rychlosti po uplynutí doby (a) 2,0 s a (b) 5,0 s.

26C. Kámen je vržen počáteční rychlostí $20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0°. Určete vodorovnou i svislou složku jeho posunutí po uplynutí doby (a) 1,10 s, (b) 1,80 s, (c) 5,00 s od počátku pohybu.

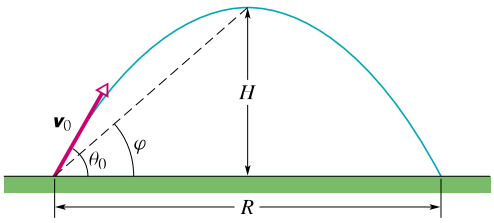
27C. Kdosi hodil míč ze skalního útesu počáteční rychlostí o velikosti $15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem −20,0° (pozor na znaménko). Určete (a) vodorovnou i (b) svislou složku jeho posunutí po 2,30 sekundách letu.

28C. Chlapec chytá míč po odrazech od zdi vzdálené 22,0 m. Jeho spoluhráč vyhodí míč rychlostí $25{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0° (obr. 4.30). (a) Za jak dlouho a (b) jak vysoko nad úrovní místa, z něhož byl vyhozen, narazí míč do zdi? (c) Určete vodorovnou a svislou složku rychlosti míče v okamžiku nárazu. (d) Zjistěte, zda míč projde ještě před nárazem vrcholem své trajektorie.



Obr. 4.30 Cvičení 28

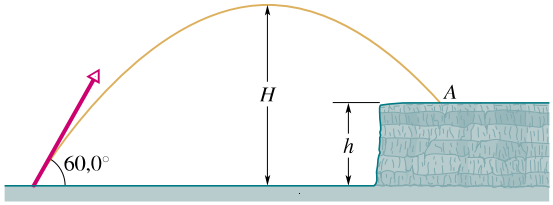
29C. (a) Dokažte, že poměr maximální výšky H a doletu R náboje vystřeleného pod elevačním úhlem θ_0 je dán vztahem $H/R = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Lze zvolit úhel θ_0 tak, aby platilo $H = R$?



Obr. 4.31 Cvičení 29 a 30

30C. Střela vyletí z místa na zemském povrchu pod elevačním úhlem θ_0. (a) Ukažte, že zorný úhel φ, pod kterým je z místa výstřelu vidět vrchol její trajektorie, je $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Vypočtěte hodnotu φ pro $\theta_0 = 45°$.

31C. Kluci házejí kameny na skalní vyvýšeninu o výšce h. Počáteční rychlost kamene má velikost 42,0 m·s^{-1} a elevační úhel je 60,0° (obr. 4.32). Kámen dopadne na vyvýšeninu po 5,50 s letu. Určete (a) výšku h, (b) velikost rychlosti dopadu, (c) výšku vrcholu trajektorie nad zemským povrchem.



Obr. 4.32 Cvičení 31

32Ú. Velikost počáteční rychlosti střely je rovna pětinásobku její hodnoty ve vrcholu trajektorie. Určete elevační úhel výstřelu.

33Ú. (a) Určete velikost rychlosti záchranného vaku z př. 4.6 při jeho dopadu na vodní hladinu. (b) Vypočtěte úhel θ zakreslený v obr. 4.14.

34Ú. Celých 23 let odolával světový rekord Boba Beamona ve skoku do dálky. Teprve na atletickém mistrovství světa v Tokiu v roce 1991 se podařilo Miku Powellovi překonat jej o plných 5 cm skokem 8,95 m (obr. 4.33). Předpokládejte, že odrazová rychlost při rekordním skoku byla 9,5 m·s^{-1} (přibližně rychlost běhu sprintera). Tíhové zrychlení v Tokiu má velikost 9,80 m·s^{-2}. Určete největší možný dolet skokana v idealizovaných podmínkách, tj. bez odporu prostředí.

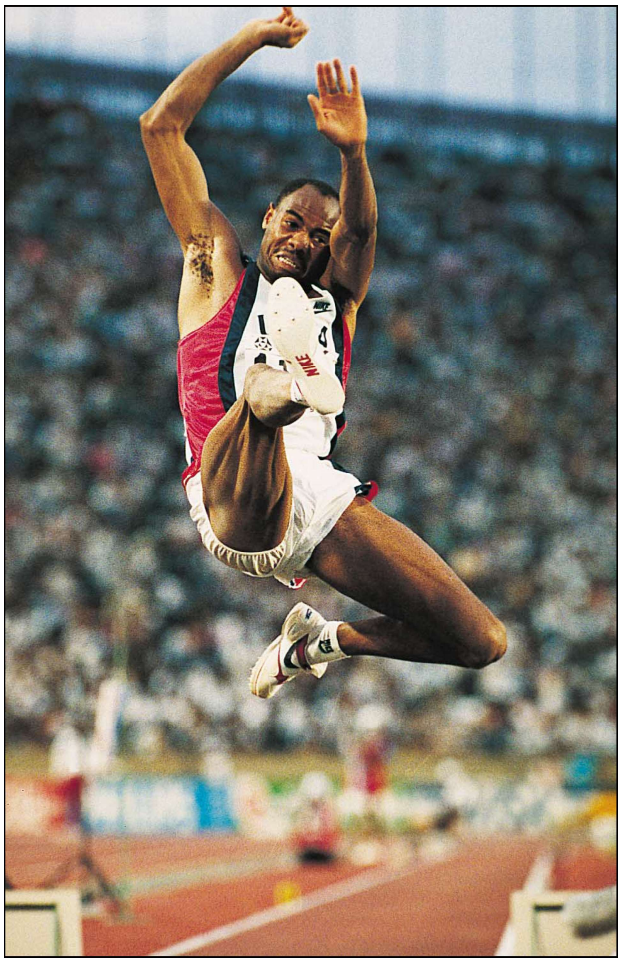
35Ú. Při sportovní střelbě na cíl vzdálený 46 m zvolil závodník zbraň, jejíž střely mají počáteční rychlost 460 m·s^{-1}. Jak vysoko nad cíl musí být hlaveň zbraně namířena v okamžiku výstřelu, aby se podařilo cíl zasáhnout?

36Ú. Ukažte, že největší možná výška vrcholu trajektorie střely nad vodorovným povrchem je $y_{\max} = \frac{1}{2}(v_0 \sin\theta_0)^2/g$.

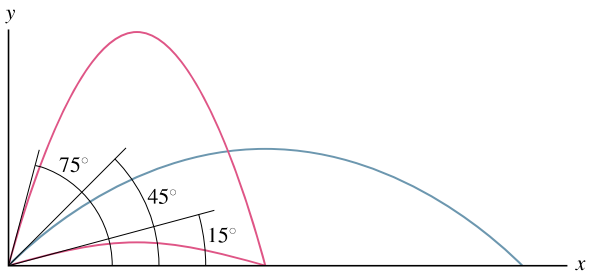
37Ú. V laboratoři prováděli speciální měření s cílem zjistit rychlost fotbalového míče při prudkém výkopu. Letící míč měl ve výšce 9,1 m rychlost $\boldsymbol{v} = 7{,}6\boldsymbol{i} + 6{,}1\boldsymbol{j}$. (Údaje jsou v metrech za sekundu, směr vektoru $\boldsymbol{i}$ je vodorovný a směr vektoru $\boldsymbol{j}$ svislý). (a) Do jaké největší výšky míč vystoupil? (b) Jaký byl jeho dolet? (c) Určete rychlost míče při výkopu a (d) těsně před dopadem na zem (velikost a směr).

38Ú. V detektivce objevila policie tělo pohřešovaného pod otevřeným oknem, ve vzdálenosti 4,6 m od domu. Okno je ve výšce 24 m nad zemí. Inspektor má podezření, že příčinou smrti nebyla nehoda. Odhadněte, zda může mít pravdu. Odhad zdůvodněte.

39Ú. V Galileiově díle „Rozpravy o dvou nových vědách“ se dočteme: „… pro dva různé elevační úhly, lišící se od úhlu 45° o stejnou hodnotu, je délka letu stejná…“ Dokažte pravdivost tohoto tvrzení (obr. 4.34).



Obr. 4.33 Úloha 34. Mike Powell při rekordním výkonu

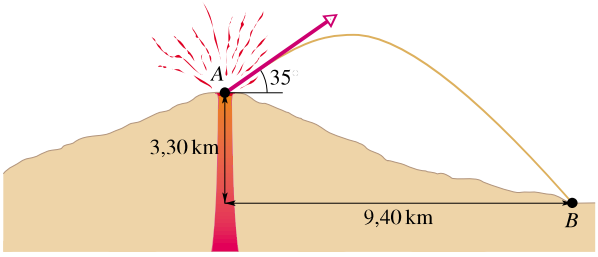


Obr. 4.34 Úloha 39

40Ú. Dolet při šikmém vrhu tělesa nezávisí jen na počáteční rychlosti, určené velikostí v_0 a elevačním úhlem θ_0, ale i na hodnotě tíhového zrychlení g. Ta je ovšem na různých místech zemského povrchu různá. Na olympijských hrách v Berlíně ($g = 9{,}812\,8$ m·s^{-2}) v roce 1936 překonal Jesse Owens dosavadní světový rekord ve skoku do dálky výkonem 8,09 m. Jakého výkonu by dosáhl v Melbourne v roce 1956 ($g = 9{,}799\,9$ m·s^{-2}) při stejných hodnotách v_0 a θ_0?

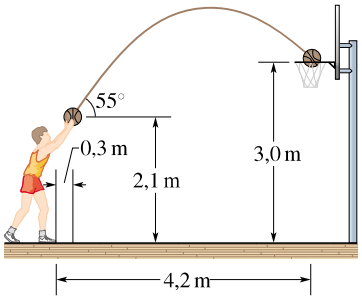
41Ú. Při baseballovém utkání chce hráč z třetí mety dohodit míč na první metu vzdálenou 38,7 m. Největší rychlost, kterou dokáže míč vyhodit, má velikost 137 km/h. (a) Jak daleko od první mety míč dopadne, vyhodí-li jej hráč vodorovným směrem ve výšce 0,9 m nad zemí? (b) Pod jakým elevačním úhlem musí hráč míč vyhodit, aby jej spoluhráč na první metě zachytil ve výšce 0,9 m nad zemí? (c) Jak dlouho v tomto případě míč poletí?

42Ú. Při sopečné erupci bývají z kráteru vymršťovány velké balvany. Na obr. 4.35 je znázorněn řez japonskou sopkou Fuji. (a) Jak velkou počáteční rychlost by musely balvany mít, aby při elevačním úhlu 35° dopadly do bodu B na úpatí sopky? (b) Jaká by byla doba jejich letu? V obou případech zanedbáváme vliv odporu prostředí. (c) Jak by se změnil výsledek části (a), kdybychom odpor prostředí vzali v úvahu?



Obr. 4.35 Úloha 42

43Ú. Jak velkou počáteční rychlostí musí basketbalista na obr. 4.36 vyhodit míč pod elevačním úhlem 55°, aby dopadl přímo do koše?

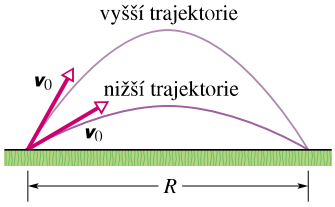


Obr. 4.36 Úloha 43

44Ú. Po 4,5 sekundách letu dopadl fotbalový míč do vodorovné vzdálenosti 46 m od místa výkopu. Jaká byla jeho počáteční rychlost (velikost a směr), jestliže mu ji hráč udělil při výskoku, ve výšce 1,5 m nad zemí?

45Ú. Golfista odpálil míček počáteční rychlostí o velikosti 43 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. Míček doletěl do vzdálenosti 180 m. Předpokládejte, že golfové hřiště je v tomto místě vodorovné. (a) Jak vysoko míček vyletěl? (b) Jak velká byla jeho rychlost těsně před dopadem?

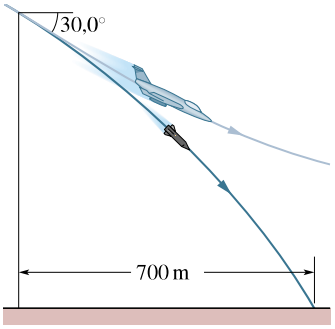
46Ú. Projektil byl vystřelen ze země počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = 30{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a zasáhl cíl ležící na zemi ve vzdálenosti 20,0 m (obr. 4.37). Určete obě možné hodnoty elevačního úhlu.



Obr. 4.37 Úloha 46

47Ú. Hráč baseballu dokáže dohodit míč do vzdálenosti 60 m. Určete největší možnou výšku takového hodu.

48Ú. Letadlo sestupuje pod úhlem 30° rychlostí o velikosti 290 km/h. Pilot uvolní „radarovou návnadu“ (obr. 4.38), která dopadne na zem ve vodorovné vzdálenosti 700 m od místa uvolnění. (a) V jaké výšce pilot návnadu uvolnil? (b) Jak dlouho trval její pád?



Obr. 4.38 Úloha 48

49Ú. Hráč vykopne míč rychlostí 20 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 45°. V tomtéž okamžiku vyběhne jeho spoluhráč, vzdálený o 55 m, míči naproti. Jakou průměrnou rychlostí musí běžet, aby zachytil míč těsně před jeho dopadem na zem? Odpor prostředí zanedbejte.

50Ú. Míč se kutálí po plošině nad schodištěm rychlostí 1,5 m/s a směřuje přímo ke schodišti. Šířka i výška každého schodu mají stejnou hodnotu 20 cm. Na který schod shora míč poprvé doskočí?

51Ú. Při sestupu svírá rychlost letadla se svislým směrem úhel 53°. Ve výšce 730 m uvolní pilot bombu, která dopadne na zem po 5,00 s letu. (a) Jaká je velikost rychlosti letadla? (b) Do jaké vodorovné vzdálenosti od místa uvolnění bomba dopadne? (c) Určete vodorovnou a svislou složku její rychlosti těsně před dopadem.

52Ú. Míč je vržen vodorovným směrem z místa ve výšce 20 m nad zemí. Na zem dopadne trojnásobnou rychlostí. Jaká byla jeho počáteční rychlost?

53Ú. (a) Při podání odpálil tenista míček vodorovně rychlostí o velikosti 23,6 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. K úderu došlo ve výšce 2,37 m nad povrchem kurtu. V jaké výšce přeletí míček nad horním okrajem sítě, je-li síť ve vzdálenosti 12 m a je vysoká 0,90 m? (b) Při dalším podání má míček stejně velkou rychlost, úder však směřuje 5,00° pod vodorovnou rovinu. Zdaří se podání?

54Ú. V příkladu 4.8 jsme zjistili, že největší dolet střely vypálené z přístavní pevnosti je 690 m. O jakou vzdálenost by musela pirátská loď ještě ustoupit, kdyby bylo dělo umístěno ve výšce 30 m nad hladinou moře?

55Ú. Pálkař odehraje míček ve výšce 1,2 m nad zemí pod elevačním úhlem 45°. Dolet míčku je 107 m. Pravidla hry zaručují zisk bodu, přeletí-li míček plot vysoký 7,3 m a vzdálený 98 m. Zjistěte, zda hráč získal bod a v kladném případě určete, jak vysoko nad plotem míček přeletěl.

56Ú*. Fotbalista dokáže odehrát míč rychlostí 25 m·s^{-1}. Určete interval, v němž musí ležet elevační úhel, aby hráč skóroval. Branka je ve vzdálenosti 50 m a její břevno je 3,44 m nad zemí. (Využijte vztahu $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, vyjádřete $1/\cos^2\theta$ pomocí $\mathrm{tg}^2\,\theta$ a řešte získanou kvadratickou rovnici pro $\mathrm{tg}\,\theta$.)

ODST. 4.7 Rovnoměrný pohyb po kružnici

57C. Jeden z modelů atomu vodíku je založen na představě elektronu obíhajícího kolem protonu po kruhové dráze o průměru $5{,}28\cdot10^{-11}$ m rychlostí o velikosti $2{,}18\cdot10^{6}$ m·s^{-1}. Určete (a) zrychlení elektronu a (b) periodu jeho pohybu.

58C. Určete (a) velikost, (b) směr zrychlení sprintera při běhu zatáčkou o poloměru 25 m. Velikost rychlosti běžce je 10 m·s^{-1}.

59C. Nabitá částice se za určitých podmínek pohybuje v magnetickém poli po kruhové dráze. Předpokládejme, že elektron, pro který jsme takové podmínky zajistili, se pohybuje po kružnici o poloměru 15 cm s dostředivým zrychlením o velikosti o $3{,}0\cdot10^{14}$ m·s^{-2}. (a) Určete jeho rychlost a (b) periodu jeho pohybu.

60C. Sprinter běží rychlostí 9,2 m·s^{-1} po kruhové dráze. Dostředivé zrychlení má velikost 3,8 m·s^{-2}. (a) Jaký je poloměr dráhy? (b) Jaká je perioda pohybu?

61C. Umělá družice Země obíhá po kruhové dráze ve výšce 640 km nad zemským povrchem. Perioda jejího pohybu je 98,0 min. (a) Jaká je její rychlost? (b) Jaké je gravitační zrychlení v uvedené výšce?

62C. Kosmická sonda odolá mechanickým pnutím při zrychlení nejvýše $20g$. (a) Jaký je nejmenší přípustný poloměr její trajektorie, je-li velikost její rychlosti rovna jedné desetině rychlosti světla? (b) Za jakou dobu opíše polohový vektor takové sondy oblouk příslušný úhlu 90°?

63C. Vrtule ventilátoru se otáčí 1 200krát za minutu. Sledujme bod na konci listu vrtule ve vzdálenosti 0,15 m od osy otáčení. (a) Jakou dráhu opíše tento bod při jedné otáčce vrtule? (b) Jaká je velikost jeho rychlosti? (c) S jakým zrychlením se pohybuje? (d) Jaká je perioda jeho pohybu?

64C. Francouzský expresní vlak TGV (Train à Grande Vitesse, česky „rychlovlak“) má stanovenou průměrnou rychlost 216 km/h. (a) Nejvyšší přípustná velikost zrychlení při průjezdu zatáčkou je pro pohodlí cestujících dána hodnotou $0{,}050g$. Jaký je nejmenší možný poloměr zatáčky, kterou může vlak projíždět uvedenou rychlostí? (b) Musí vlak v zatáčce o poloměru 1,00 km zpomalit? Na jakou rychlost?

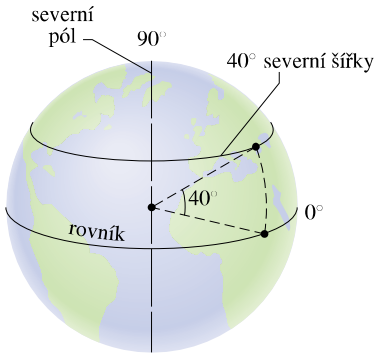
65C. Po výbuchu *supernovy* se může její jádro smrštit tak, že se stane *neutronovou hvězdou* s poloměrem přibližně 20 km. Předpokládejme, že neutronová hvězda vykoná jednu otáčku za jednu sekundu. (a) Jakou rychlostí se pohybuje bod na jejím rovníku? (b) Vyjádřete dostředivé zrychlení tohoto bodu (v m·s^{-2} a v násobcích g). (c) Jak se změní výsledky částí (a) a (b) při vyšší rychlosti rotace?

66C. Kosmonaut se otáčí na centrifuze s poloměrem 5,0 m ve vodorovné rovině. (a) Jakou rychlostí se pohybuje, má-li dostředivé zrychlení velikost $7{,}0g$? (b) Kolikrát za minutu se centrifuga otočí? (c) Jaká je perioda jejího pohybu?

67Ú. (a) Jaké je dostředivé zrychlení na zemském rovníku způsobené rotací Země? (b) Jaká by musela být perioda rotace Země, aby jeho velikost měla hodnotu 9,8 m·s^{-2}?

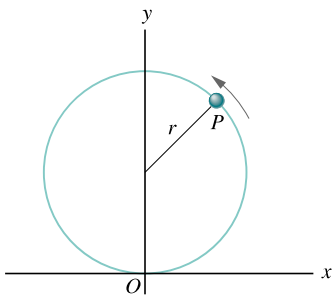
68Ú. Ruské kolo má poloměr 15 m a otočí se pětkrát za minutu. (a) Jaká je perioda pohybu kola? (b) Určete dostředivé zrychlení v nejvyšším a (c) v nejnižším bodě trajektorie.

69Ú. Vypočtěte zrychlení člověka na 40° severní šířky způsobené rotací Země (obr. 4.39).



Obr. 4.39 Úloha 69

70Ú. Částice se pohybuje konstantní rychlostí po kruhové dráze o poloměru $r = 3{,}00$ m (obr. 4.40) a vykoná jednu otáčku za



Obr. 4.40 Úloha 70

20,0 s. V čase $t = 0$ právě prochází počátkem O. Určete velikosti a směry následujících vektorů. (a) Polohové vektory částice vzhledem k počátku v okamžicích $t = 5{,}00$ s, $t = 7{,}50$ s a $t = 10{,}00$ s. (b) Vektor jejího posunutí v časovém intervalu od páté do desáté sekundy. (c) Vektor průměrné rychlosti v tomto

časovém intervalu. (d) Okamžitou rychlost a (e) zrychlení na počátku a konci tohoto intervalu.

71Ú. Chlapec točí kamenem uvázaným na provazu dlouhém 1,5 m. Kámen rovnoměrně obíhá ve vodorovné rovině, ve výšce 2,0 m nad zemí. Náhle se provaz přetrhne a kámen dopadne 10 m od chlapce. Jaké bylo dostředivé zrychlení kamene při rotaci?

ODST. 4.8 Vzájemný pohyb po přímce

72C. Loď pluje proti proudu řeky rychlostí 14 km/h vzhledem k vodnímu proudu. Voda v řece teče rychlostí 9 km/h. (a) Jakou rychlostí pluje loď vzhledem k břehům řeky? (b) Chlapec na lodi jde po palubě od přídě k zádi rychlostí 6 km/h. Jaká je jeho rychlost vzhledem k břehům?

73C. Muž vystoupí po nehybném eskalátoru dlouhém 15 m za čas 90 s. Jedoucí eskalátor překoná tutéž vzdálenost za 60 s. Za jakou dobu vystoupí člověk po pohybujícím se eskalátoru? Je výsledek závislý na délce eskalátoru?

74C. Trasa mezikontinentálního letu má délku 4 350 km a směřuje východozápadním směrem. Podle letového řádu trvá cesta z východu na západ o 50 minut déle než cesta zpáteční. Rychlost letadla je 960 km/h a vítr vane západním nebo východním směrem. S jakou rychlostí větru se počítalo při sestavování letového řádu?

75C. Kameraman stojí na otevřené plošině dodávky a filmuje běžícího geparda. Dodávka jede rychlostí 65 km/h západním směrem, gepard běží ve stejném směru a je o 48 km/h rychlejší. Náhle se gepard zastaví, otočí se a běží zpět na východ rychlostí 97 km/h vzhledem k zemi. Celý obrat trvá 2,0 s. Určete průměrné zrychlení zvířete vzhledem ke kameramanovi i vzhledem k zemi.

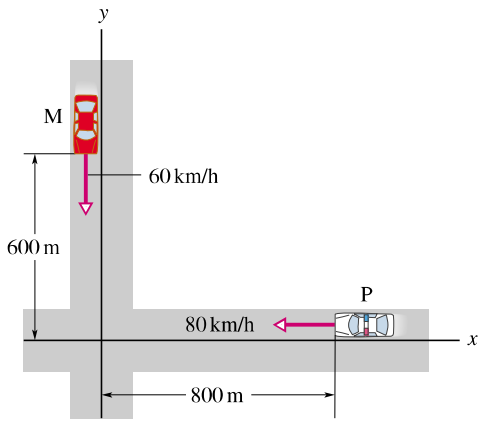
76C. Na letišti v Ženevě usnadňují pohyb cestujících dlouhými koridory „pojízdné chodníky“. Petr chodník nepoužil a prošel koridorem za 150 s. Pavel, stojící v klidu na jedoucím chodníku, urazil tutéž vzdálenost za 70 s. Marie šla po chodníku stejnou rychlostí jako Petr. Za jak dlouho prošla Marie koridorem?

ODST. 4.9 Vzájemný pohyb v rovině

77C. Pravidla ragby (obr. 4.41) zakazují tzv. „dopředné“ přihrávky. (Průmět rychlosti míče do podélného směru hřiště nesmí směřovat k brance soupeře.) Předpokládejme, že hráč běží k brance protihráčů rychlostí o velikosti 4,0 $m \cdot s^{-1}$, rovnoběžně s podélným okrajem hřiště. V běhu přihrává svému spoluhráči a odhazuje míč (vzhledem k sobě) rychlostí o velikosti 6,0 $m \cdot s^{-1}$. Pod jakým nejmenším úhlem vzhledem k podélnému rozměru hřiště může míč odhodit, aby neporušil pravidla?

78C. Obr. 4.42 zachycuje dopravní situaci na křižovatce dvou silnic. Policejní automobil P, vzdálený 800 m od křižovatky, jede rychlostí o velikosti 80 km/h. Vozidlo M je od křižovatky vzdáleno 600 m a na jeho tachometru je údaj 60 km/h. (a) Určete rychlost vozidla M vzhledem k policejnímu autu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Jaký úhel svírá rychlost vypočtená v části (a) se spojnicí vozidel? (c) Předpokládejte, že automobily pokračují v jízdě nezměněnou rychlostí. Mění se odpovědi částí (a) a (b), když se vozy přibližují ke křižovatce?

Obr. 4.41 Cvičení 77

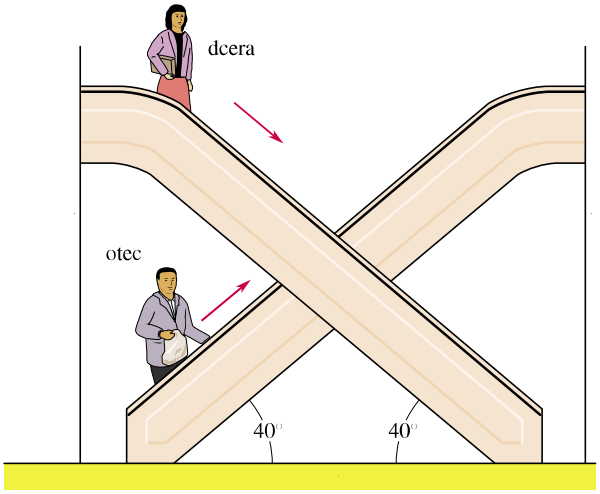


Obr. 4.42 Cvičení 78

79C. Sníh padá svisle rychlostí o velikosti 8,0 $m \cdot s^{-1}$. Pod jakým úhlem od svislého směru vidí padat sníh řidič automobilu, který jede po rovné silnici rychlostí o velikosti 50 km/h?

80C. Eskalátory v obchodním domě jsou konstruovány tak, že svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° a pohybují se rychlostí o velikosti 0,75 $m \cdot s^{-1}$. Muž stojící na stoupajícím eskalátoru uvidí svou dceru, která již nakoupila a jede směrem dolů (obr. 4.43). Určete rychlost otce vzhledem k dceři. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů.

81Ú. Vrtulník letí ve výšce 9,5 m nad plochým terénem stálou rychlostí o velikosti 6,2 $m \cdot s^{-1}$. Pilot vyhodí balík ve vodorovném směru proti směru letu. Jeho rychlost vzhledem k vrtulníku má velikost 12 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je jeho počáteční rychlost vzhledem k zemi? (b) Určete vodorovnou vzdálenost balíku a letadla v okamžiku, kdy balík dopadne na zem. (c) Pod jakým úhlem dopadne balík na zem vzhledem k pozorovateli na zemi?



Obr. 4.43 Cvičení 80

82Ú. Vlak jede na jih rychlostí o velikosti 30 m·s^{-1} (vzhledem k zemi). Prší a vítr žene déšť jižním směrem. Trajektorie dešťových kapek vzhledem k zemi svírají se svislým směrem úhel 70°. Cestujícímu ve vlaku se však zdá, že kapky padají svisle. Určete velikost rychlosti kapek vzhledem k zemi.

83Ú. Malé letadlo může vzhledem k okolnímu vzduchu dosáhnout rychlosti o velikosti 500 km/h. Pilot má dopravit pasažéry do místa vzdáleného 800 km přesně na sever. Zjistí však, že má-li letět přímo k severu, musí odklonit kurs o 20,0° na východ. Let trvá 2,00 h. Určete rychlost větru (směr i velikost).

84Ú. Dvě lodi A a B vyplouvají z přístavu ve stejném okamžiku. Loď A pluje přesně na severozápad rychlostí 24 uzlů a loď B míří jihozápadně, pod úhlem 40° vzhledem k místnímu poledníku, rychlostí 28 uzlů (1 uzel = 1 námořní míle za hodinu, viz dod. D). (a) Určete velikost a směr rychlosti lodi A vzhledem k lodi B. (b) Za jak dlouho bude mezi plavidly vzdálenost 160 námořních mil? (c) Určete směr pohybu lodi A vzhledem k lodi B v tomto okamžiku.

85Ú. Státní policie v New Hampshire provádí měření rychlosti vozidel z letadla. Dálnice vede ve sledované oblasti severojižním směrem. Letadlo se pohybuje vzhledem k okolnímu vzduchu rychlostí o velikosti 217 km/h a letí neustále podél dálnice, přímo na sever. Pozemní služba hlásí, že vítr vane rychlostí 113 km/h, zapomene však udat jeho směr. Pilot zjistí zvláštní věc: bez ohledu na vítr urazil podél dálnice za dobu 1,00 h vzdálenost 217 km. Rychlost letadla vzhledem k zemi je tedy stejná jako za bezvětří. (a) Kterým směrem vítr vane? (b) Kam míří příď letadla (jaký úhel svírá podélná osa letadla s dálnicí)?

86Ú. Nákladní vagon s dřevěnými stěnami jede po přímém úseku železniční trati rychlostí o velikosti v_1. Ostřelovač pálí na vagon z velkorážné pušky. Střela, jejíž počáteční rychlost má velikost v_2, prorazí obě boční stěny vagonu. Spojnice otvorů je kolmá ke směru jízdy. Pod jakým úhlem vzhledem ke kolejím ostřelovač mířil? Předpokládejte, že směr letu střely se při průchodu stěnou nezmění, velikost její rychlosti se však sníží o 20 %. Pro číselný výpočet použijte hodnoty $v_1 = 85$ km/h, $v_2 = 650$ m/s. (Jak to, že nepotřebujeme znát šířku vagonu?)

87Ú. Skifařka dokáže v klidné vodě pádlovat rychlostí 6,0 km/h. (a) Kterým směrem musí namířit příď lodi, aby přejela kolmo k jejím břehům, je-li rychlost vodního proudu 3,0 km/h? (b) Za jak dlouho přejede řeku širokou 6,0 km? (c) Při další jízdě vesluje nejprve 3,0 km *po* proudu řeky (vzdálenost měřena vzhledem ke břehům) a poté se vrátí do výchozího místa. Jak dlouho trvá tato jízda? (d) Jak se změní výsledek části (c), pojede-li skifařka nejprve 3,0 km *proti* proudu a zpět se vrací po proudu? (e) V jakém směru by musela veslovat (vzhledem ke břehům), kdyby chtěla přejet na protější břeh v nejkratším možném čase bez ohledu na místo přistání? Jak dlouho by to trvalo?

ODST. 4.10 Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech

88C. Kosmická loď A směřuje ke středu naší galaxie. Posádka zaregistruje záblesk světla, který se šíří rychlostí c ve směru pohybu lodi. Záblesk je zaznamenán i druhou kosmickou lodí B, která letí vzhledem k A rychlostí o velikosti $0{,}98c$. Jakou rychlost světelného pulzu naměří pozorovatel na lodi B, letí-li jeho loď (a) ve stejném směru jako loď A, (b) v opačném směru než loď A?

89C. Elektron letí vzhledem k pozorovateli B rychlostí $0{,}42c$. Pozorovatel B se pohybuje rychlostí $0{,}63c$ vzhledem k pozorovateli A, stejným směrem jako elektron. Jakou rychlost elektronu naměří pozorovatel A?

90Ú. Posádka kosmické lodi A, která letí k hvězdě Betelgeuze, zaznamená svazek protonů, který míjí loď ve stejném směru a rovněž míří k této hvězdě. Rychlost protonů vzhledem k lodi je $0{,}980\,0c$. Rychlost protonů ve svazku měří i posádka lodi B, cestující po téže přímce jako loď A, a získá výsledek $-0{,}980\,0c$. Určete vzájemnou rychlost lodí.

91Ú. Galaxie Alfa se od Země vzdaluje rychlostí o velikosti $0{,}35c$. Galaxie Beta, která je právě na opačné straně, se vzdaluje rychlostí stejně velkou. Pozorovatel v galaxii Alfa měří rychlost, jíž se od něj vzdaluje (a) Země, (b) Galaxie Beta. Dokážete předpovědět výsledky jeho měření?

PRO POČÍTAČ

92Ú. Jestliže při šikmém vrhu tělesa neleží místo dopadu na stejné vodorovné úrovni jako místo vrhu, není délka vrhu (vodorovná vzdálenost místa dopadu od místa vrhu) největší při elevačním úhlu 45°. Předpokládejme, že koulař hodil kouli z místa, které je ve výšce h nad úrovní hřiště. Velikost počáteční rychlosti koule je v_0, elevační úhel označme θ. Ukažte, že délka vrhu je dána vztahem

$$d = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\right).$$

(b) Sestavte program pro výpočet vzdálenosti d v závislosti na úhlu θ pro zadané hodnoty v_0 a h. (c) S přesností na půl stupně určete elevační úhel, při němž bude délka vrhu největší pro hodnoty $v_0 = 9{,}0$ m·s^{-1} a $h = 2{,}1$ m. Vypočtěte i tuto největší délku. (d) Závisí výsledky předchozí úlohy na velikosti počáteční

rychlosti? Proveďte výpočet ještě pro hodnoty $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_0 = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (Větší z těchto hodnot vysoce přesahuje reálné možnosti i těch nejlepších sportovců.)

93Ú. V této úloze budeme uvažovat o tom, jak se s časem mění vzdálenost šikmo vrženého tělesa od místa vrhu. Nemáme nyní na mysli pouze vodorovnou složku polohového vektoru tělesa vzhledem k místu vrhu, jako tomu bylo v předchozích úlohách, nýbrž jeho *velikost*. Bezprostředně po vyhození tělesa tato veličina s časem vždy nejprve roste. V některých případech však může od jistého okamžiku začít klesat a teprve po uplynutí další doby se její průběh opět změní v rostoucí funkci času. Konkrétní situace je závislá na volbě elevačního úhlu. Sestavte program, který pro danou hodnotu velikosti počáteční rychlosti a různé elevační úhly provede opakovaný výpočet okamžité vzdálenosti tělesa od místa vrhu v časovém intervalu od $t = 0$ (okamžik vrhu) až do okamžiku několik sekund po průletu tělesa počáteční úrovní s časovým krokem Δt. Pro konkrétní výpočet zvolte $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$, elevační úhly měňte od 5° do 90° s krokem 5°. Pro každý elevační úhel odhadněte časové intervaly, ve kterých se těleso přibližuje a vzdaluje od místa vrhu. (Podrobněji viz James S. Walker: „Projectiles, Are They Comming or Going?“, *The Physics Teacher*, May 1995.)

94Ú. Pálkař odehraje baseballový míč ve výšce 1,00 m nad zemí. Udělí mu při tom počáteční rychlost o velikosti v_0, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Ve vzdálenosti 110 m od postavení pálkaře je plot, vysoký 2,40 m. (a) Pro $v_0 = 35{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ určete interval, v němž musí ležet elevační úhel θ, má-li míč plot přeletět. Dolní a horní mez tohoto intervalu jsou určeny podmínkou těsného přeletu míče nad plotem. (*Tip*: Místo explicitního řešení parametrických rovnic trajektorie pro neznámou θ je možné určit hledané úhly grafickou metodou. V úloze je totiž zadána poloha bodu, kterým musí trajektorie míče projít, aby byly podmínky zadání ještě splněny. Z parametrických rovnic trajektorie lze získat dvě různé závislosti úhlu θ na okamžiku průletu míče tímto bodem. Zakreslete je do grafu a určete průsečík získaných křivek.) (b) Pro elevační úhel $\theta = 40^\circ$ určete nejmenší hodnotu v_0, při níž míč ještě přeletí plot. (c) Aby míč přeletěl plot při pevně zvoleném elevačním úhlu, je třeba, aby velikost jeho počáteční rychlosti převyšovala určitou minimální hodnotu $v_0(\theta)$, závislou na tomto úhlu (viz část (b)). Určete nejmenší ze všech těchto mezních hodnot a najděte odpovídající úhel θ. (d) Řešte část (c) pro případ, že pálkař stojí ve vzdálenosti 96 m od zdi vysoké 12,2 m.

95Ú. Golfista vypálí míček směrem ke svislé zdi vzdálené 20,0 m. Snaží se při tom zasáhnout červený kruh o průměru 30,0 cm, namalovaný na zdi. Střed kruhu je 1,20 m nad zemí. Počáteční rychlost míčku má velikost $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, elevační úhel je $35{,}0^\circ$. (a) Za jak dlouho po úderu narazí míček na stěnu? (b) Zasáhne červený kruh? (c) Jak velkou rychlostí narazí? (d) Prošel míček před nárazem vrcholem své trajektorie?

96Ú. Cyklista je v jistém okamžiku 40,0 m východně od vlajkového stožáru umístěného v parku a jede na jih rychlostí $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Po 30,0 s je vzdálen od stožáru 40,0 m na sever a jede východním směrem rychlostí o velikosti $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) posunutí, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrné zrychlení za tento časový interval. (d) Vypočtěte rozdíl $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_\mathrm{f} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i})$, kde $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ je rychlost cyklisty na počátku tohoto intervalu a $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ je rychlost na jeho konci.

97Ú. V jistém okamžiku je polohový vektor motýla vzhledem k rohu zahradního jezírka roven $\boldsymbol{D}_\mathrm{i} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Po 40,0 s je $\boldsymbol{D}_\mathrm{f} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Určete (a) vektor posunutí (pomocí jednotkových vektorů), (b) velikost posunutí, (c) průměrnou rychlost a (d) průměrnou velikost rychlosti motýla v uvedeném časovém intervalu.

5
Síla a pohyb I

Všude na světě mají lidé v oblibě soutěže a rekordy. Snad proto, aby se přesvědčili, že hranice lidských možností lze neustále posouvat. A tak se tu a tam dovídáme o nejrůznějších neobvyklých výkonech, včetně neuvěřitelných siláckých kousků. Jeden z nich předvedl 4. dubna 1974 belgický silák John Massis, když se mu podařilo posunout dva osobní vagony newyorské železniční společnosti Long Island: zuby stiskl náústek připevněný k lanu, na němž byly vagony uvázány, zapřel se chodidly do pražců a zaklonil se. Vozy vážily kolem osmdesáti tun. Napadne nás, že Massis určitě musel vyvinout nadlidskou sílu, aby je uvedl do pohybu! Je tomu tak skutečně?

5.1 ČÍM JE ZPŮSOBENO ZRYCHLENÍ?

Pozorujeme-li, že rychlost nějakého malého tělíska mění svou velikost nebo směr, můžeme si být jisti, že něco muselo tuto změnu (toto zrychlení) *způsobit*. Z běžné zkušenosti totiž víme, že změna rychlosti tělesa je způsobena jeho interakcí s okolními objekty. Pozorujeme-li například hokejový kotouč, který klouže po ledové ploše a náhle se zastaví či náhle změní směr, usuzujeme, že určitě narazil do nějakého hrbolku na ledovém povrchu.

Zrychlení tělíska je způsobeno jeho **interakcí** (vzájemným působením) s okolními objekty. Kvantitativně ji popisujeme fyzikální veličinou, kterou nazýváme **síla**. Snadno si dokážeme představit, že některý z okolních objektů působí na tělísko například silou tlakovou nebo tahovou.* Úder povrchové nerovnosti do hokejového kotouče lze například popsat jako tlakové působení, které je příčinou zrychlení kotouče. Tato kapitola je věnována diskusi o vztahu mezi zrychlením a silami, které je způsobují. Jako první jej pochopil Isaac Newton (1642–1727). Teorii založenou na jeho způsobu prezentace tohoto vztahu nazýváme *newtonovskou mechanikou*.

Newtonovská mechanika není použitelná v každé situaci. O jednom omezení její platnosti už víme: v kap. 4 jsme se zmínili o případech, kdy rychlosti interagujících těles nejsou zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla. Tehdy musíme nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou speciální teorií relativity, platnou pro všechny rychlosti, včetně rychlostí blízkých rychlosti světla. Druhé omezení souvisí přímo s povahou samotné fyzikální soustavy. Náleží-li interagující objekty do oblasti mikrosvěta (například elektrony v atomu), je třeba zaměnit newtonovskou mechaniku mechanikou kvantovou. Fyzikové dnes chápou newtonovskou mechaniku jako speciální případ těchto obecnějších teorií. Jedná se však o případ velmi významný, neboť je použitelný pro studium pohybu těles v obrovském rozsahu jejich velikostí, od objektů velmi malých, téměř na hranici atomové struktury, až k objektům astronomickým, jako jsou galaxie či jejich kupy.

Zamyslíme se nyní nad prvním pohybovým zákonem newtonovské mechaniky.

5.2 PRVNÍ NEWTONŮV ZÁKON

Před tím, než Newton formuloval svoji mechaniku, panoval názor, že jakési působení, tj. „síla“, je nezbytné pro udržení tělesa v pohybu se stálou rychlostí. Klid byl považován za „přirozený stav“ těles. Aby se těleso pohybovalo stálou rychlostí, mělo by být nějak poháněno, třeba tlakem či tahem. Jinak by se „přirozeně“ zastavilo. Takové úvahy se zdají být rozumné. Uvedeme-li například knihu do klouzavého pohybu po dřevěné podlaze, bude se skutečně zpomalovat a nakonec se zastaví. Hodláme-li docílit toho, aby po podlaze klouzala stálou rychlostí, měli bychom ji neustále tlačit či táhnout.

Po ledové ploše by ovšem kniha dorazila o něco dále. Lze si představovat stále delší a kluzčí plochy, po nichž by kniha klouzala do větší a větší vzdálenosti, než by se zastavila. V limitě můžeme uvažovat o dlouhé, extrémně kluzké ploše, kterou budeme nazývat **dokonale hladká podložka**. Při pohybu po ní se kniha takřka nezpomaluje. (Takovou situaci lze připravit v laboratoři, máme-li k dispozici vodorovnou vzduchovou lavici, podél níž se kniha pohybuje na vzduchovém polštáři.)

Dospěli jsme k závěru, že k udržení stálé rychlosti pohybu tělesa *nepotřebujeme* sílu. Dokážeme si jistě uvědomit, že ani k udržení rotačního pohybu tělesa, které bylo jednou roztočeno kolem nějaké vhodně zvolené osy, nepotřebujeme v ideálním případě žádné silové působení. Stačí si představit setrvačník. Prozatím však nebudeme další výklad tímto způsobem komplikovat, i když tím původní Newtonovu formulaci jeho mechaniky poněkud ochudíme. Abychom automaticky vyloučili úvahy o otáčivém pohybu, budeme pracovat výhradně s modelem *hmotného bodu* neboli *částice*, který jsme zavedli již v kap. 2, i když někdy, zejména v úlohách, budeme hovořit o tělese nebo konkrétním objektu. Částici, na kterou její okolí nepůsobí, nazveme volnou. **Volná částice** je samozřejmě opět jedním z idealizovaných modelů, který však vystihuje celou řadu reálných situací ve velmi dobrém přiblížení. Jako volná se částice chová například tehdy, nelze-li vliv jednotlivých okolních objektů na její pohyb zjistit v rámci přesnosti prováděných měření, anebo se vlivy okolních objektů nějakým způsobem kompenzují.

Dospíváme k formulaci prvního ze tří Newtonových pohybových zákonů.

První Newtonův zákon: Je-li volná částice v klidu vzhledem ke vhodně zvolené vztažné soustavě, pak v něm setrvá. Pohybuje-li se stálou rychlostí, bude v tomto pohybu neustále pokračovat.

Tento zákon dobře zapadá do úvah v čl. 4.8 o vztažných soustavách, jejichž vzájemná rychlost je konstantní. Bude-li volná částice v jedné z nich v klidu, bude se vůči druhé pohybovat stálou rychlostí. *Klid* částic nebo vztaž-

* Síla vyjadřuje vzájemné *působení objektů*. Při přesném vyjadřování bychom tedy měli hovořit o silách, kterými na sledované tělísko T *působí okolní objekty* A, B atd. Někdy však budeme stručně říkat, že na tělísko *působí síly*, aniž se staráme o jejich původ.

ných soustav se tedy nijak neliší od *rovnoměrného přímočarého pohybu*.

První Newtonův zákon lze interpretovat i tak, že *zaručuje existenci* preferovaných vztažných soustav, v nichž platí zákony newtonovské mechaniky. Tyto soustavy se vyznačují tím, že v nich jsou volné částice v klidu nebo se pohybují stálou rychlostí. Rychlost vzájemného pohybu takových soustav je tedy rovněž konstantní. Z uvedeného hlediska lze první Newtonův zákon vyjádřit takto:

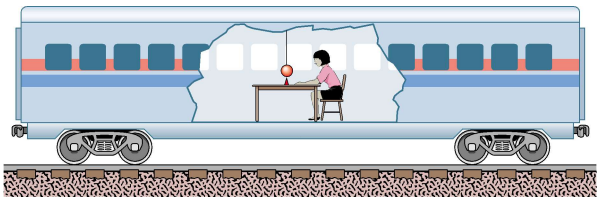
První Newtonův zákon: S každou volnou částicí lze spojit vztažnou soustavu, v níž jsou ostatní volné částice v klidu, nebo se vůči ní pohybují stálou rychlostí.

Newton sám se k formulacím svého prvého zákona vracel řadu let. V jeho díle jich dokážeme vystopovat celkem devět, lišících se zejména výstižností. Žádná z nich, stejně jako formulace dalších Newtonových zákonů, však neobsahuje výslovnou informaci o tom, k jaké vztažné soustavě se váže. Všechny totiž předpokládají **absolutní prostor** a **absolutní čas**, nezávislé na jakýchkoli objektech. Již z Galileiových pokusů však vyplynulo, že zákony mechaniky jsou stejné ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem rovnoměrně přímočaře, a neumožňují tedy „absolutní prostor a čas“ zjistit. V dnešním pojetí newtonovské mechaniky proto interpretujeme první Newtonův zákon jako axiom zaručující existenci *preferovaných* vztažných soustav, soustav **inerciálních**.

Prvnímu Newtonovu zákonu se někdy říká *zákon setrvačnosti*. Vztažné soustavy, které definuje, se nazývají *inerciální vztažné soustavy* nebo jednoduše *inerciální soustavy** .

Obr. 5.1 ukazuje, jak lze zjistit, zda daná vztažná soustava je inerciální. V železničním vagonu, který je v klidu vůči nástupišti, nakreslíme na stůl značku pod rovnovážnou polohu kyvadla. Při pohybu vagonu zůstává tělísko kyvadla neustále nad značkou jedině tehdy, je-li pohyb vagonu rovnoměrný přímočarý.

Pak je vagon inerciální soustavou.



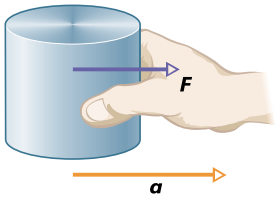
Obr. 5.1 Ověření inerciálnosti vztažné soustavy spojené s železničním vagonem.

Jestliže se vagon urychluje, zpomaluje či zatáčí, uhýbá tělísko od značky. Vůz je v takovém případě neinerciální vztažnou soustavou.

5.3 SÍLA

Síla způsobuje zrychlení tělesa. Jednotku síly nyní definujeme prostřednictvím zrychlení, které síla uděluje standardnímu referenčnímu tělesu. Jako referenční těleso použijeme (spíše v představě nežli ve skutečnosti) standardní kilogram z obr. 1.6. Toto těleso určuje definitoricky přesně hmotnost jednoho kilogramu.

Položíme standardní těleso na vodorovný, dokonale hladký stůl a táhneme je vpravo (obr. 5.2). Když dosáhneme měřeného zrychlení o velikosti $1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, definujeme velikost síly, kterou na těleso působíme, jako 1 newton (zkráceně N).



Obr. 5.2 Síla ***F*** působí na standardní kilogram a udílí mu zrychlení ***a***.

Můžeme také na standardní těleso působit silou 2 N a měřené zrychlení bude mít velikost $2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ atd. Obecně, má-li naše standardní těleso o hmotnosti 1 kg zrychlení o velikosti a, víme, že na ně musí působit síla, jejíž velikost F (v newtonech) je číselně rovna velikosti zrychlení (v metrech za sekundu na druhou).

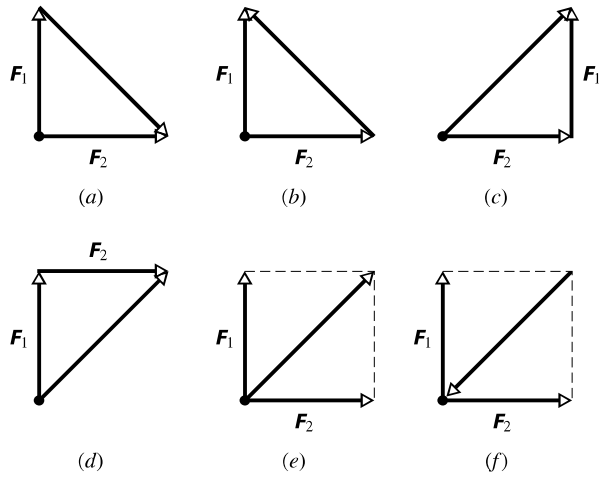
Velikost síly lze tedy měřit prostřednictvím velikosti zrychlení, které síla způsobuje. Zrychlení je však vektorovou veličinou, charakterizovanou jak velikostí, tak směrem. Je síla rovněž vektorovou veličinou? Síle můžeme přisoudit

* Inerciální vztažná soustava, stejně jako volná částice, jsou samozřejmě pouze idealizované modely. Vesmírná tělesa, například hvězdy, však lze za volné částice považovat s velmi dobrou přesností, neboť jejich vzájemné gravitační působení je zanedbatelné díky obrovským vzdálenostem mezi nimi. (Čtenář si může provést odhad velikosti gravitační síly, jíž na sebe působí například Slunce a nejbližší hvězda Proxima v souhvězdí Kentaura.) Vztažné soustavy spojené s takovými tělesy jsou pak v rámci této přesnosti inerciální. Často používáme inerciální soustavu spojenou se Sluncem, zvanou **Galileiova**. V ní umísťujeme počátek soustavy souřadnic do těžiště sluneční soustavy, souřadnicové osy jsou namířeny k vybraným hvězdám. Při studiu pohybů v „pozemských podmínkách“ je ovšem výhodné spojovat vztažnou soustavu přímo s „pozemskou laboratoří“, tj. povrchem Země v daném místě. Tato soustava však vlivem pohybu Země kolem Slunce a zejména vlivem její vlastní rotace není inerciální (odhadněte velikosti příslušných zrychlení). Pokud však neprovádíme velmi přesná měření, lze i s touto vztažnou soustavou, kterou nazýváme **laboratorní**, pracovat jako s inerciální.

směr velmi snadno, totiž shodně se směrem zrychlení. To však nestačí. Vektorový charakter sil musíme ověřit experimentem. Výsledek splňuje očekávání: síly jsou skutečně vektorové veličiny. Mají směr i velikost a skládají se podle pravidel pro sčítání vektorů, uvedených v kap. 3.

Pro označení sil budeme tedy používat tučných symbolů, nejčastěji $\boldsymbol{F}$. Symbol $\sum \boldsymbol{F}$ užijeme pro označení vektorového součtu několika sil, který nazveme **výslednou silou** neboli **výslednicí**. Jako každý vektor lze i jednotlivé síly či výslednici promítat do souřadnicových os a určovat jejich složky. Nakonec poznamenejme, že první Newtonův zákon platí nejen v případech, kdy na těleso nepůsobí žádné síly, ale i tehdy, když síly sice působí, ale jejich výslednice je nulová.

KONTROLA 1: Dvě kolmé síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ na obrázku jsou kombinovány šesti různými způsoby. Které z nich správně určují výslednici $\sum \boldsymbol{F}$?



5.4 HMOTNOST

Každodenní zkušenost nám ukazuje, že jedna a táž síla uděluje různým tělesům různá zrychlení. Představme si, že na podlahu položíme fotbalový míč a stejně velký medicinbal, vycpaný látkou, a do obou prudce kopneme. Aniž bychom museli takový pokus uskutečnit, víme, jak dopadne: lehký fotbalový míč získá výrazně větší zrychlení než těžký medicinbal. Zrychlení obou těles jsou různá proto, že se liší jejich hmotnosti. Avšak co je to přesně hmotnost?

Měření hmotnosti vyložíme pomocí série myšlenkových experimentů. V prvním z nich budeme působit silou na standardní těleso, jehož hmotnost m_0 byla definována jako 1,0 kg. Předpokládejme, že velikost zrychlení standardního tělesa je $1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pak můžeme říci, že na těleso působí síla o velikosti 1,0 N.

Nyní budeme působit toutéž silou na jiné těleso, řekněme těleso X, jehož hmotnost není známa. (Je třeba se při tom nějakým způsobem ujistit, i když to může být obtížné, že působící síla je skutečně táž jako v prvním pokusu.)

Předpokládejme, že jsme u tělesa X naměřili zrychlení $0{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Víme, že *méně hmotný* fotbalový míč získá působením téže síly (při výkopu) *větší zrychlení* než hmotnější medicinbal. Můžeme tedy vyslovit následující hypotézu: hmotnosti dvou těles jsou v obráceném poměru velikostí jejich zrychlení, působí-li na obě tělesa stejná síla. Pro těleso X a standardní těleso to znamená, že platí

$$\frac{m_\mathrm{X}}{m_0} = \frac{a_0}{a_\mathrm{X}}.$$

Pak

$$m_\mathrm{X} = m_0 \frac{a_0}{a_\mathrm{X}} = (1{,}0\ \mathrm{kg}) \frac{(1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(0{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 4{,}0\ \mathrm{kg}.$$

Naše hypotéza bude ovšem užitečná jedině tehdy, bude-li platit pro libovolnou velikost působící síly. Budeme-li například působit na standardní těleso silou o velikosti 8,0 N, naměříme zrychlení $8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Bude-li tato síla působit na těleso X, udělí mu zrychlení o velikosti $2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Naše hypotéza pak vede k výsledku

$$m_\mathrm{X} = m_0 \frac{a_0}{a_\mathrm{X}} = (1{,}0\ \mathrm{kg}) \frac{(8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 4{,}0\ \mathrm{kg},$$

který souhlasí s experimentem. Četné další experimenty potvrzují, že vyslovená hypotéza umožňuje jednoznačně a spolehlivě přisoudit každému tělesu jeho hmotnost.

Experimenty také ukazují, že hmotnost je *vlastní* charakteristikou tělesa, tj. takovou, která je automaticky dána samotnou existencí tělesa. Plyne z nich i to, že hmotnost je skalární veličina. Zůstává však stále neodbytná otázka: Co je to přesně hmotnost?

Slova *hmotnost, hmota* se v běžné řeči hojně užívají. O hmotnosti má proto jistě každý intuitivní představu, snad představu něčeho, co lze přímo smyslově vnímat, „hmatat“. Je to velikost tělesa, jeho váha, jeho hustota… ?

Odpověď zní „ne“, přestože jsou tyto charakteristiky někdy s hmotností směšovány. Můžeme pouze říci, že *hmotnost tělesa je charakteristika, která určuje poměr mezi silou působící na těleso a udíleným zrychlením.*

Hmotnost již nelze definovat přesněji. K „fyzikálnímu vnímání“ hmotnosti můžeme dospět jedině tak, že budeme zkoušet urychlovat různá tělesa, například kopat do fotbalového míče nebo medicinbalu.

5.5 DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON

Všechny dosavadní definice, pokusy a pozorování lze shrnout do jednoduché vektorové rovnice, zvané druhý Newtonův pohybový zákon:

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} \quad \text{(druhý Newtonův zákon).} \qquad (5.1)$$

Při použití rov. (5.1) si musíme ujasnit, na jaké těleso ji aplikujeme. Pak $\sum \boldsymbol{F}$ je vektorový součet (výslednice) *všech* sil, které působí na *ono* těleso. Do výslednice jsou zahrnuty pouze síly, které působí *na vymezené těleso*, na rozdíl od sil působících na jiná tělesa, která v zadané úloze mohou rovněž figurovat. Součet $\sum \boldsymbol{F}$ zahrnuje pouze *vnější* síly, tj. ty, jimiž na těleso působí jiná tělesa. Neobsahuje síly vnitřní, jimiž působí jednotlivé části tělesa na sebe navzájem.

Jako každá vektorová rovnice je i rov. (5.1) ekvivalentní třem rovnicím skalárním:

$$ma_x = \sum F_x, \quad ma_y = \sum F_y, \quad ma_z = \sum F_z. \qquad (5.2)$$

Tyto rovnice představují vztahy mezi složkami zrychlení tělesa a odpovídajícími složkami výslednice sil, které na těleso působí.

Můžeme si všimnout, že druhý Newtonův zákon není v rozporu s prvním: těleso, na něž nepůsobí žádné síly, se podle rov. (5.1) pohybuje bez zrychlení.

V jednotkách SI podle rov. (5.2) platí

$$1\,\mathrm{N} = (1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}, \qquad (5.3)$$

což souhlasí s úvahami v čl. 5.3. Přestože budeme téměř výhradně pracovat s jednotkami soustavy SI, poznamenejme, že se stále ještě používají i jiné jednotky, zejména jednotky Britské soustavy a soustavy CGS (centimetr – gram – sekunda). Tab. 5.1 obsahuje příslušné převody. (Viz rovněž dod. D.)

Tabulka 5.1 **Jednotky v druhém Newtonově zákoně (rov. (5.1) a (5.2))**

SOUSTAVA	SÍLA	HMOTNOST	ZRYCHLENÍ
SI	newton	kilogram	$\mathrm{m/s^2}$
CGS	dyn	gram	$\mathrm{cm/s^2}$
britská*	libra (lb)	slug	$\mathrm{ft/s^2}$

* $1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm/s^2}$, $1\,\mathrm{lb} = 1\,\mathrm{slug{\cdot}ft/s^2}$.

Při řešení úloh pomocí druhého Newtonova zákona často používáme **silový diagram**, v němž je studované těleso vyznačeno bodem a všechny vnější síly, které na těleso působí, případně i jejich výslednice $\sum \boldsymbol{F}$, jsou reprezentovány vektory umístěnými v tomto bodě. (Místo bodu můžeme schematicky kreslit studované těleso.) Diagram bude obsahovat soustavu souřadnicových os a někdy i vektor zrychlení tělesa.

Při řešení úlohy vycházíme z vektorové rovnice (5.1). Postupně si všímáme skalárních rovnic (5.2) a pracujeme tak se složkami vektorů ve směrech jednotlivých souřadnicových os. První ze sady rovnic (5.2) znamená, že součet x-ových složek všech sil určuje x-ovou složku zrychlení tělesa, aniž ovlivňuje jeho y-ovou či z-ovou složku. Podobně je y-ová složka zrychlení určena výhradně součtem y-ových složek všech sil a z-ová složka zrychlení součtem z-ových složek všech sil. Obecně pak platí:

Složka zrychlení ve směru dané souřadnicové osy je určena výhradně součtem složek všech sil měřených podél téže osy a nezávisí na složkách sil ve směrech os ostatních.

V př. 5.1 půjde o sílu, která na těleso působí ve směru osy x. Pracujeme tedy jen s jedinou složkou síly (ostatní jsou nulové). V př. 5.2 působí na těleso tři síly, z nichž dvě svírají nenulový úhel s osami x a y. V této dvojrozměrné situaci musíme určit jak x-ové, tak y-ové složky sil a použít dvě z rovnic (5.2).

Př. 5.2 poslouží současně jako modelový případ zvláštního typu úloh: Těleso se neurychluje ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$), přestože na ně působí síly. V takové situaci je podle rov. (5.1) $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Výslednice sil je tedy nulová, síly působící na těleso jsou vyváženy. Říkáme, že těleso je **v rovnováze**, případně že *síly* jsou v rovnováze.

Všimněme si ještě jedné vlastnosti rov. (5.2), užitečné pro řešení úloh. Z nulovosti zrychlení vyplývá, že $a_x = 0$, a tedy i $\sum F_x = 0$. Jsou tedy v rovnováze x-ové složky všech sil. Dosadíme-li do $\sum F_x$ konkrétní hodnoty složek působících sil, dostaneme algebraický vztah, využitelný pro řešení úlohy.* Podobně při $a_y = 0$ usoudíme, že $\sum F_y = 0$. Po dosazení y-ových složek sil máme další algebraický vztah.

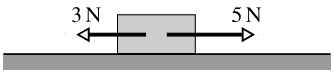
Může se stát, že se složky jednotlivých sil podél některé z os navzájem kompenzují, zatímco u složek měřených ve směru druhé osy tomu tak není. Znamená to, že zrychlení směřuje podél této druhé osy.

Abychom se naučili spolehlivě řešit konkrétní situace, potřebujeme získat určitou zkušenost. Proto zařazujeme do této kapitoly celou řadu příkladů.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou zakresleny dvě vodorovné síly působící na kostku pohybující se po dokonale hladké podložce. Předpokládejme, že na kostku

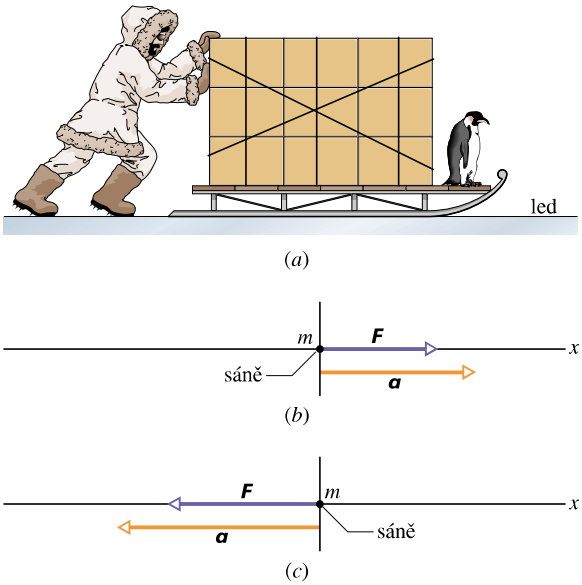
* Vztah umožňuje určit x-ovou složku některé ze sil, známe-li x-ové složky sil ostatních.

působí ještě třetí síla $\boldsymbol{F}_3$. Určete její velikost a směr, je-li kostka (a) v klidu, (b) pohybuje se doleva konstantní rychlostí o velikosti $5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



PŘÍKLAD 5.1

Student experimentální fyziky zkouší testovat platnost pohybových zákonů. Obul si boty s neklouzající podrážkou a tlačí naložené sáně o hmotnosti 240 kg do vzdálenosti 2,3 m po dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Působí na ně při tom stálou vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = 130\ \mathrm{N}$ (obr. 5.3a).



Obr. 5.3 Příklad 5.1. (a) Student tlačí sáně po dokonale hladkém povrchu. (b) Silový diagram příkladu (a), znázorňující výslednou sílu působící na sáně a zrychlení, které tato síla saním udílí. (c) Silový diagram příkladu (b). Člověk nyní sáně táhne, takže jejich zrychlení má opačný směr.

(a) Jaká je výsledná rychlost sání, rozjíždějí-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Obr. 5.3b představuje silový diagram popsané situace. Zvolme osu x vodorovně a orientujme ji doprava. Uvažujme o saních jako o hmotném bodu. Předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}$, kterou působí student, představuje jedinou sílu působící na sáně. Vzhledem k tomu, že F_x je její jediná nenulová složka, určíme velikost zrychlení sání a_x z druhého Newtonova zákona takto:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{(130\ \mathrm{N})}{(240\ \mathrm{kg})} = 0{,}542\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Poněvadž je zrychlení konstantní, můžeme pro zjištění výsledné rychlosti užít vztahu (2.16), $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$. Položíme-li $v_{0x} = 0$, $x - x_0 = d$ a uvědomíme-li si, že v našem případě je $v = v_x$, $a_x = a$, dostaneme pro v:

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2(0{,}542\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}3\ \mathrm{m})} = \\ = 1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla, zrychlení, posunutí i výsledná rychlost sání mají směr osy x a jejich x-ové složky jsou kladné. Všechny tyto vektory tedy směřují v obr. 5.3b zleva doprava.

(b) Student chce změnit směr rychlosti v opačný během 4,5 s. Jak velkou stálou silou musí sáně táhnout?

ŘEŠENÍ: Užitím rov. (2.11), tj. $v_x = v_{0x} + a_x t$, nejprve určíme zrychlení potřebné ke změně směru rychlosti v opačný během 4,5 s. Dostáváme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(4{,}5\ \mathrm{s})} = \\ = -0{,}711\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Velikost tohoto zrychlení je větší než v úloze (a), kde činilo $0{,}542\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, takže je zřejmé, že student musí nyní táhnout sáně větší silou. Tuto sílu určíme z prvé rovnice ze sady rov. (5.2), uvědomíme-li si, že $a_y = 0$ a $a_z = 0$.

$$F_x = ma_x = (240\ \mathrm{kg})(-0{,}711\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = -171\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus ukazuje, že student musí táhnout sáně ve směru klesající souřadnice x, tj. zprava doleva v silovém diagramu na obr. 5.3c.

PŘÍKLAD 5.2

Ve dvojrozměrné přetahované se Aleš, Božena a Cyril přetahují o pneumatiku ve směrech znázorněných na obr. 5.4a (obrázek ukazuje pohled shora). Pneumatika je v klidu, přestože na ni působí tři tahové síly. Aleš táhne silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$ o velikosti 220 N a Cyril silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ o velikosti 170 N. Směr síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ neznáme. Jak velká je síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$, jíž působí na pneumatiku Božena?

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.4b je znázorněn silový diagram úlohy. Poněvadž je zrychlení pneumatiky nulové, je podle rov. (5.1) nulová i výslednice všech sil, které na ni působí:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{A} + \boldsymbol{F}_\mathrm{B} + \boldsymbol{F}_\mathrm{C} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Tato vektorová rovnost je ekvivalentní prvým dvěma skalárním rovnostem v sadě rov. (5.2). Pro složky ve směru osy x platí

$$\sum F_x = F_{\mathrm{A}x} + F_{\mathrm{B}x} + F_{\mathrm{C}x} = 0, \qquad (5.4)$$

ve směru osy y pak

$$\sum F_y = F_{\mathrm{A}y} + F_{\mathrm{B}y} + F_{\mathrm{C}y} = 0. \qquad (5.5)$$

Pomocí zadaných velikostí sil a úhlů vyznačených v obr. 5.4b vyjádříme nyní složky sil a dosadíme do rov. (5.4) a (5.5). Znaménka vyznačují orientaci průmětů. Ze vztahu (5.4) dostáváme

$$\sum F_x = -F_A \cos 47{,}0^\circ + 0 + F_C \cos\varphi = 0.$$

Dosazením známých hodnot pak získáme

$$-(220\ \mathrm{N})\cos 47{,}0^\circ + 0 + (170\ \mathrm{N})\cos\varphi = 0$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{(220\ \mathrm{N})\cos 47{,}0^\circ}{(170\ \mathrm{N})} = 0{,}883,$$
$$\varphi = 28{,}0^\circ.$$

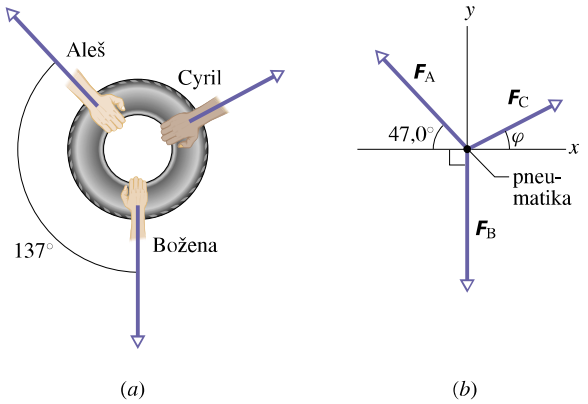
Obdobně plyne ze vztahu (5.5)

$$\sum F_y = F_A \sin 47{,}0^\circ - F_B + F_C \sin\varphi = 0,$$

kde jsme položili $F_{By} = -F_B$, neboť Božena táhne pneumatiku přímo v záporném směru osy y. Dosazení známých hodnot vede k výsledku

$$F_B = (220\ \mathrm{N})\sin 47{,}0^\circ + (170\ \mathrm{N})\sin 28{,}0^\circ = 241\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nechme si znovu projít hlavou postup, který jsme použili při řešení soustavy dvou rovnic (5.4) a (5.5) o dvou neznámých F_B a φ. Nejprve jsme řešili rov. (5.4) (pro x-ové složky sil), která obsahovala jedinou neznámou φ. Získanou hodnotu $\varphi = 28{,}0^\circ$ jsme pak dosadili do rov. (5.5) pro y-ové složky sil. Kdybychom začínali s rov. (5.5), v níž vystupují obě neznámé, byl by výpočet podstatně komplikovanější. Museli bychom totiž vyjádřit $\sin\varphi$ pomocí F_B a dosadit do rov. (5.4), která ovšem obsahuje $\cos\varphi$. Získali bychom tak nepříliš jednoduchou goniometrickou rovnici pro úhel φ. Při řešení úloh je třeba dávat pozor i na takové zdánlivé drobnosti, jako je způsob zpracování rovnic.



Obr. 5.4 Příklad 5.2. (a) Děti přetahující se o pneumatiku (pohled shora). (b) Silový diagram.

PŘÍKLAD 5.3

Obr. 5.5a ukazuje pohled shora na dvoukilogramovou plechovku pohybující se po dokonale hladké podložce vlivem působení tří sil. Její zrychlení má velikost $8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Síla $\boldsymbol{F}_1$ má velikost 10 N a síla a $\boldsymbol{F}_2$ 12 N. Obr. 5.5b, v němž je vyznačeno i zrychlení $\boldsymbol{a}$, představuje neúplný silový diagram úlohy. Vypočtěte třetí sílu $\boldsymbol{F}_3$ a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ kartézské soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Zrychlení je způsobeno výslednicí všech tří vodorovných sil. Z rovnice (5.1) plyne

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = m\boldsymbol{a}.$$

Z rovnic (5.2) dostáváme pro směr x

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = ma_x, \qquad (5.6)$$

pro směr y

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = ma_y. \qquad (5.7)$$

Přepíšeme-li rov. (5.6) pomocí velikostí sil a úhlů mezi nimi a vezmeme-li v úvahu správná znaménka jednotlivých složek, můžeme psát

$$-F_1 \cos 60^\circ + 0 + F_{3x} = ma \sin 30^\circ.$$

Dosazením číselných údajů pak dostaneme

$$-(10\ \mathrm{N})\cos 60^\circ + 0 + F_{3x} = (2\ \mathrm{kg})(8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\sin 30^\circ,$$

takže

$$F_{3x} = (10\ \mathrm{N})\cos 60^\circ + (2\ \mathrm{kg})(8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\sin 30^\circ = 13\ \mathrm{N}.$$

Obdobně z rov. (5.7) získáme postupně

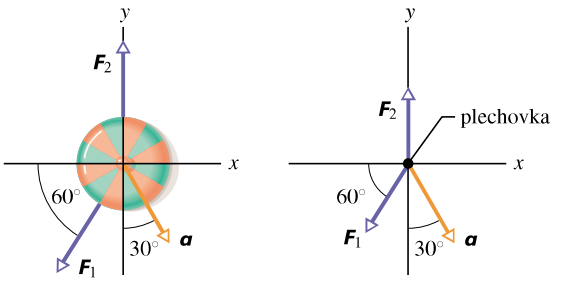
$$-F_1 \sin 60^\circ + F_2 + F_{3y} = -ma\cos 30^\circ,$$
$$-(10\ \mathrm{N})\sin 60^\circ + 12\ \mathrm{N} + F_{3y} = -(2\ \mathrm{kg})(8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\cos 30^\circ,$$

odkud

$$F_{3y} = -17{,}2\ \mathrm{N} \doteq -17\ \mathrm{N}.$$

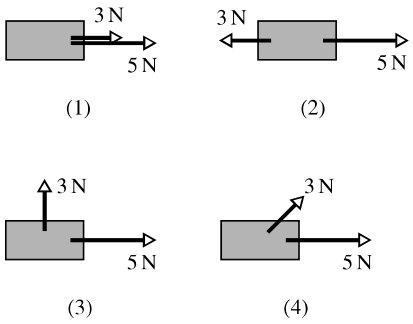
Třetí síla je tedy

$$\boldsymbol{F}_3 = (13\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (17\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 5.5 Příklad 5.3. (a) Pohled shora na plechovku urychlovanou třemi silami. Dvě z nich jsou vyznačeny. (b) Silový diagram úlohy.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje pohled shora na čtyři situace, kdy dvě síly urychlují tutéž kostku po dokonale hladké podlaze. Uspořádejte situace sestupně podle (a) velikosti výslednice sil působících na kostku a (b) podle velikosti zrychlení kostky.



RADY A NÁMĚTY

Bod 5.1: *Rozbor úlohy z hlediska působících sil*

Přečteme si zadání úlohy několikrát, až získáme dobrou představu o tom, jaká je situace, jaké údaje jsou zadány a jaké jsou úkoly. Tak třeba u př. 5.1 jsme si říkali: „Někdo tlačí sáně. Jejich rychlost se mění, takže zrychlení je nenulové. Víme, že pohyb je přímočarý. V prvé části úlohy je síla zadána, v druhé části ji máme určit. Vypadá to tedy tak, že je třeba použít druhý Newtonův zákon a aplikovat jej na případ jednorozměrného pohybu."

Je-li jasné, o jaký problém jde, ale nevíme-li, jak dále postupovat, problém prozatím odložíme a znovu si přečteme zadání. Nejsme-li si jisti správným pochopením druhého Newtonova zákona, přečteme si znovu celý článek. Prostudujeme příklady. Skutečnost, že problém formulovaný v př. 5.1 je jednorozměrný a zrychlení pohybu je konstantní, nás vrací ke kap. 2 a speciálně k tab. 2.1, obsahující všechny rovnice, které budeme potřebovat.

Bod 5.2: *Dvojí obrázky*

Při řešení každé úlohy je užitečné mít dva obrázky. Jedním z nich je hrubý náčrt skutečné situace. Zakreslíme do něj síly, přičemž počáteční bod každého vektoru síly umístíme na povrch či do objemu tělesa, na něž síla působí. Druhým obrázkem je silový diagram, v němž jsou zakresleny síly působící na *jediné* těleso, které je v nákresu znázorněno bodem. Počáteční bod každé ze sil umístíme právě do tohoto bodu.

Bod 5.3: *Jakou soustavu studujeme?*

Používáme-li druhý Newtonův zákon, musíme si uvědomit, na které těleso nebo soustavu jej aplikujeme. V př. 5.1 jsou to sáně (nikoli student nebo led). V př. 5.3 je to plechovka.

Bod 5.4: *Zvolíme vhodně soustavu souřadnic*

V př. 5.2 jsme si ušetřili práci tím, že jsme jednu ze souřadnicových os ztotožnili se směrem jedné z působících sil (osa y měla směr síly $\boldsymbol{F}_B$). Užitím druhého Newtonova zákona jsme dostali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která byla díky vhodné volbě souřadnicových os velmi jednoduchá: první rovnice obsahovala pouze jednu neznámou. Tuto rovnici jsme proto vyřešili napřed a výsledek dosadili do druhé. V podobných případech je takový postup rozumný, neboť velmi zjednodušuje celý výpočet.

5.6 NĚKTERÉ TYPY SIL

Tíhová síla (váha)

Tíhovou silou $\boldsymbol{G}$ (nepřesně též **váhou** tělesa, viz poznámku k př. 5.11) rozumíme sílu, kterou je těleso přitahováno k astronomickému objektu v jeho těsné blízkosti.

V běžných situacích je tímto astronomickým objektem Země. Tíhová síla je dána především přitažlivou **gravitační interakcí** dvou těles. Podrobně o ní budeme hovořit v kap. 14. Prozatím ji však budeme chápat jako sílu, která udílí tělesu *tíhové zrychlení* $\boldsymbol{g}$. Tíhová síla působící na těleso o hmotnosti m (váha tělesa o hmotnosti m) má velikost

$$G = mg. \tag{5.8}$$

Vektor tíhové síly pak lze zapsat jako

$$\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j} = -G\boldsymbol{j}, \tag{5.9}$$

(kde vektor $+\boldsymbol{j}$ míří svisle vzhůru, směrem od Země), nebo jako

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \tag{5.10}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení. Je lhostejné, pro jaký způsob zápisu tíhové síly se rozhodneme. Jestliže však podle obvyklé konvence orientujeme osu y směrem vzhůru, musíme dát pozor, abychom nezaměnili (kladnou) velikost tíhového zrychlení, vystupující v rov. (5.8) s jeho (zápornou) y-ovou složkou v rov. (5.10).

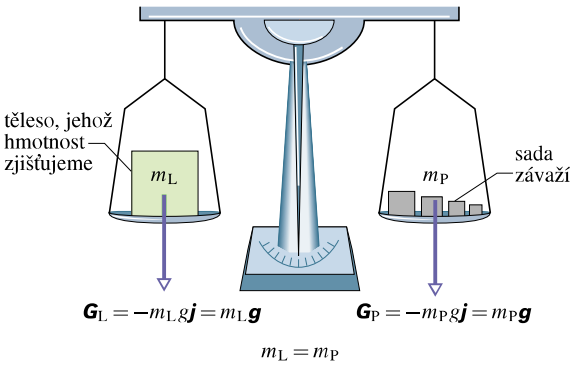
Jednotkou tíhové síly v soustavě SI je samozřejmě newton. Tíhová síla *není hmotnost*. Její velikost v daném bodě (v blízkosti Země či kteréhokoli jiného astronomického objektu) závisí na hodnotě g v tomto bodě. Bude-li například na medicinbal působit na Zemi tíhová síla o velikosti 71 N, na Měsíci to bude pouhých 12 N. Tíhové zrychlení na Měsíci je totiž asi šestkrát menší než na Zemi. Hmotnost medicinbalu 7,2 kg je stejná v kterémkoli místě, neboť hmotnost je charakteristikou předmětu samotného. (Chceme-li „vážit" méně, můžeme vylézt na vrchol hory. Naše hmotnost

se tím samozřejmě nezmění. Ve vyšší poloze však budeme ve větší vzdálenosti od středu Země a hodnota g bude nižší. Zmenší se tedy i tíhová síla.)

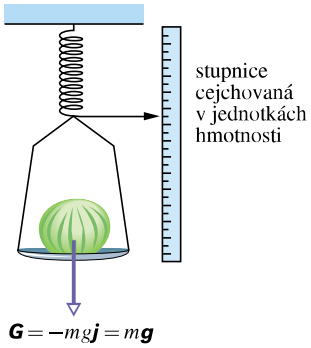
Běžně předpokládáme, že tíhovou sílu měříme v inerciální vztažné soustavě. V neinerciální soustavě však mohou být výsledky měření zkresleny a namísto skutečné tíhové síly naměříme tzv. **zdánlivou váhu**. K tomuto problému se podrobněji vrátíme v př. 5.11b, c.

Těleso můžeme *vážit* tak,* že je položíme na jednu misku rovnoramenné váhy (obr. 5.6) a na druhou misku klademe referenční tělesa známých hmotností. Jakmile dosáhneme rovnováhy, jsou hmotnosti misek vyrovnány a známe tedy i hmotnost tělesa m. Známe-li i hodnotu g v bodě, v němž měření provádíme, určíme velikost tíhové síly podle vztahu (5.8).

„Vážit“ můžeme i na pružinové váze (obr. 5.7). Těleso napíná pružinu a ukazatel se pohybuje podél stupnice cejchované a označené buď v jednotkách hmotnosti nebo v jednotkách síly. (Tímto způsobem funguje skoro každá osobní váha. Její stupnice bývá cejchována v kilogramech.) V případě cejchování stupnice v jednotkách hmotnosti je naměřený údaj správný pouze tehdy, je-li hodnota g v místě vážení táž jako hodnota, při níž byla stupnice cejchována.



Obr. 5.6 Rovnoramenná váha. V případě rovnováhy je celková hmotnost těles na levé misce (L) rovna celkové hmotnosti těles na pravé misce (P).



Obr. 5.7 Pružinová váha. Hodnota čtená na stupnici je úměrná velikosti tíhové síly působící na objekt umístěný na misce a udává přímo její velikost, je-li stupnice cejchována v newtonech. Je-li stupnice cejchována v kilogramech, čteme na stupnici hmotnost tělesa. Hmotnost je však správně určena jen tehdy, je-li velikost tíhového zrychlení při měření stejná jako při cejchování stupnice.

Kolmá tlaková síla

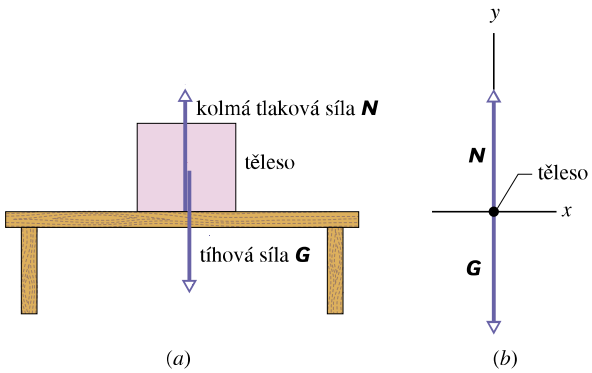
Na těleso samozřejmě působí i okolní objekty, které jsou s ním v přímém styku. Spočívá-li těleso na nějaké podložce, působí na ně podložka určitými silami. Jednou z nich je **tlaková síla** $\boldsymbol{N}$, kolmá k podložce. Často ji nazýváme **silou normálovou**. Název souvisí s matematickým pojmem *normálový*, neboli „kolmý“.

Je-li těleso v klidu na vodorovné podložce (obr. 5.8), míří síla $\boldsymbol{N}$ svisle vzhůru. Tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ směřuje samozřejmě dolů. Pro toto *speciální* uspořádání můžeme určit velikost síly $\boldsymbol{N}$ z druhé rovnice sady rov. (5.2):

$$\sum F_y = N - mg = ma_y, \qquad (5.11)$$

a tedy, protože $a_y = 0$,

$$N = mg. \qquad (5.12)$$



Obr. 5.8 (a) Na těleso spočívající na stole působí stůl normálovou silou $\boldsymbol{N}$ kolmou ke svrchní desce. (b) Odpovídající silový diagram.

* V souhlasu s originálem knihy a také pro stručnost používáme někdy, spíše však výjimečně, formulací typu „těleso váží 500 N“, „těleso o váze 500 N“ apod. Suplujeme tím údaj o hmotnosti tělesa, která je právě taková, že Země působí na ono těleso, umístěné na jejím povrchu, tíhovou silou 500 N, tj. $m = \frac{G}{g} = \frac{500\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} \doteq 51\,\mathrm{kg}$.

RADY A NÁMĚTY

Bod 5.5: *Normálová síla*

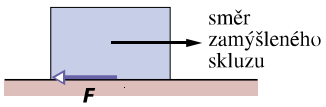
Vztah (5.12) pro normálovou sílu platí jedině tehdy, směřuje-li tato síla vzhůru, svislá složka zrychlení tělesa je nulová a na těleso nepůsobí kromě síly tíhové a normálové žádné další síly s nenulovými svislými složkami. Pro jiné situace jej *nemůžeme* použít a musíme se vrátit k zápisu všech složek druhého Newtonova zákona.

Sílu $\boldsymbol{N}$ můžeme v obrázku volně posouvat, pokud zachováváme její směr. V obr. 5.8a bychom ji například mohli přesunout tak, aby *koncový bod* vektoru $\boldsymbol{N}$ ležel v místě styku svrchní desky stolu s tělesem (jako bychom tím vyjadřovali skutečnost, že deska stolu „tlačí" na podstavu tělesa). Správné umístění vektoru $\boldsymbol{N}$ je ovšem takové, že jeho *počáteční bod* leží na rozhraní svrchní desky stolu a tělesa a označuje tak *působiště* normálové síly. Dokud však s tělesem pracujeme jako s hmotným bodem, můžeme při kreslení schematického obrázku umístit působiště síly $\boldsymbol{N}$ i kamkoli jinam do objemu tělesa. Možným interpretačním omylům se spolehlivě vyhneme, budeme-li pracovat se silovým diagramem (obr. 5.8b), v němž je síla $\boldsymbol{N}$ umístěna přímo v bodě symbolizujícím těleso.

KONTROLA 4: Stůl s tělesem z obr. 5.8 jsou umístěny ve výtahu. Zjistěte, zda je velikost síly $\boldsymbol{N}$ větší, menší či stejná jako velikost tíhové síly mg, stoupá-li výtah (a) stálou rychlostí, (b) se vzrůstající rychlostí.

Třecí síla

Klouže-li těleso po podložce, nebo snažíme-li se je do klouzavého pohybu uvést, brání tomuto pohybu vazby mezi tělesem a podložkou. (Podrobněji o nich budeme mluvit v následující kapitole.) Tento odpor bývá charakterizován jedinou silou $\boldsymbol{F}$, zvanou **třecí síla** nebo jednoduše **tření**. Třecí síla působící na těleso míří podél podložky a je orientována proti pohybu či zamýšlenému pohybu tělesa (obr. 5.9). Pro zjednodušení situace někdy tření zanedbáváme. V takovém případě nazýváme podložku *dokonale hladkou*.

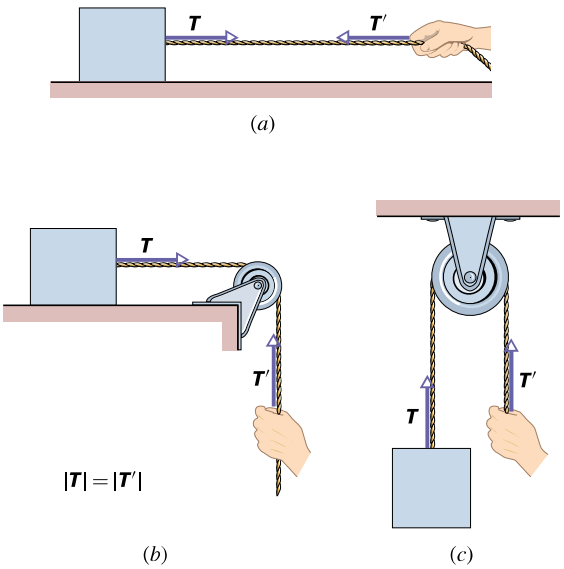


Obr. 5.9 Třecí síla $\boldsymbol{F}$ brání skluzu tělesa po podložce.

Tahová síla

Je-li těleso taženo na provaze, vlákně, lanku či něčem podobném, říkáme, že je lanko *napínáno*. Jeho jednotlivé části na sebe navzájem působí silami **pnutí**. Těleso je taženo silou $\boldsymbol{T}$, která směřuje podél lanka ven z objemu tělesa a je umístěna v bodě úchytu lanka (obr. 5.10a). Hovoříme o **tahové** nebo **tažné síle** lanka.

Zpravidla předpokládáme, že lanko je *nehmotné* a *nepružné*. Máme tím na mysli, že jeho hmotnost je zanedbatelná ve srovnání s hmotností tělesa a jeho délka je neměnná. Lanko tedy pouze realizuje spojení dvou těles. Táhne přitom obě tělesa silami o stejné velikosti T. Platí to i v případě, že se obě tělesa i s lankem pohybují se zrychlením nebo když je lanko vedeno přes *nehmotnou kladku*, která se může *otáčet bez tření* (obr. 5.10b, c). (Jedná se o idealizovanou kladku, jejíž hmotnost je velmi malá vzhledem k hmotnostem těles a třecí síla bránící jejímu otáčení kolem osy je rovněž zanedbatelná.)



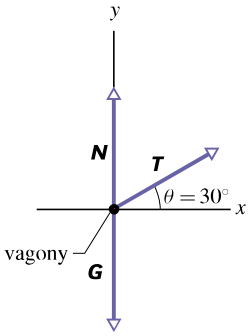
Obr. 5.10 (a) Tažné lanko je napnuté. Táhne těleso i ruku silou o velikosti T. Situace je stejná i na obrázcích (b) a (c), kde je lanko vedeno přes nehmotnou kladku, která se otáčí bez tření.

KONTROLA 5: Tíhová síla působící na těleso zavěšené na laně podle obr. 5.10c má velikost 75 N. Rozhodněte, zda velikost tažných sil lana, označených $\boldsymbol{T}'$, je stejná, větší, nebo menší než 75 N, jestliže těleso stoupá (a) s konstantní rychlostí, (b) s rostoucí rychlostí, (c) s klesající rychlostí.

PŘÍKLAD 5.4

Připomeňme si siláka Johna Massise a železniční vagony. Kladli jsme si otázku, zda velikost síly, kterou musel vyvinout, aby je posunul, nějak výrazně překračovala běžnou

hranici lidských možností. Předpokládejme, že Massis, svírající v zubech konec lana uvázaného k vagonům, vyvinul tažnou sílu dvaapůlkrát větší, než sám vážil. Jeho hmotnost byla 80 kg, lano svíralo s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$. Velikost tíhové síly vagonů G byla $7{,}0{\cdot}10^5$ N (odpovídá asi osmdesáti tunám) a John Massis je posunul po kolejích o 1,0 m. Předpokládejme, že kolejnice nepůsobily na kola žádnou brzdnou silou. Jaká byla výsledná rychlost vagonů?



Obr. 5.11 Příklad 5.4. Silový diagram Massisova pokusu s vagony. Délky šipek označujících vektory neodpovídají skutečným poměrům. Síla napínající vlákno je totiž *mnohem* menší než síla tíhová a normálová.

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.11 je znázorněn silový diagram, v němž jsou vagony reprezentovány bodem. Osa x směřuje podél kolejnic. Z rovnic (5.2) dostáváme

$$\sum F_x = T\cos\theta = Ma_x, \qquad (5.13)$$

kde M je hmotnost vagonů. Ze zadaných hodnot určíme T a M.

Podle předpokladu vyvine J. Massis tahovou sílu o velikosti

$$T = 2{,}5mg = 2{,}5(80\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 1\,960\,\mathrm{N},$$

což je hodnota běžná u dobrého vzpěrače střední váhy a zdaleka o ní nelze hovořit jako o nadlidské síle.

Tíhová síla působící na vagony má podle vztahu (5.8) velikost

$$G = Mg,$$

takže hmotnost vagonů M je

$$M = \frac{G}{g} = \frac{(7{,}0{\cdot}10^5\,\mathrm{N})}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 7{,}143{\cdot}10^4\,\mathrm{kg}.$$

Ze vztahu (5.13) zjistíme zrychlení

$$a_x = \frac{T\cos\theta}{M} = \frac{(1\,960\,\mathrm{N})\cos 30°}{(7{,}143{\cdot}10^4\,\mathrm{kg})} = 2{,}376{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Pro určení výsledné rychlosti vagonů použijeme vztahu (2.16), kam dosadíme $v_{0x} = 0$ a $x - x_0 = 1{,}0$ m:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

tj.

$$v_x = \sqrt{0 + 2(2{,}376{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}0\,\mathrm{m})} = \\ = 0{,}22\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

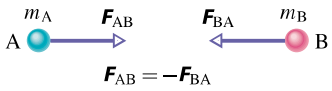
Massis by si svůj úkol usnadnil, kdyby připojil lano k vagonu o něco výše, aby bylo vodorovné. Víte proč?

5.7 TŘETÍ NEWTONŮV ZÁKON

Síly vždy působí ve dvojicích. Při úderu působí kladivo jistou silou na hlavičku hřebíku. Současně však působí i hřebík na kladivo, a to silou stejně velkou, avšak opačně orientovanou. Opře-li se člověk o stěnu, tlačí i stěna na člověka.

Nechť těleso A na obr. 5.12 působí na těleso B silou $\boldsymbol{F}_{BA}$. Experimenty ukazují, že i těleso B působí na těleso A jistou silou $\boldsymbol{F}_{AB}$. Tyto síly mají stejnou velikost a opačný směr. Platí tedy

$$\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA} \quad \text{(třetí Newtonův zákon).} \qquad (5.14)$$



Obr. 5.12 Třetí Newtonův zákon. Těleso A působí silou $\boldsymbol{F}_{BA}$ na těleso B a těleso B působí silou $\boldsymbol{F}_{AB}$ na těleso A. Platí $\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA}$.

Všimněte si pořadí indexů. Například $\boldsymbol{F}_{AB}$ je síla, která vyjadřuje působení *tělesa* B *na těleso* A. Rov. (5.14) platí bez ohledu na to, zda se tělesa pohybují, nebo zda jsou v klidu.

Vztah (5.14) vyjadřuje třetí Newtonův pohybový zákon. Běžně je jedna z těchto sil (kterákoli) nazývána **akcí** a druhá **reakcí**. Kdykoli „narazíme" na sílu, má dobrý smysl se ptát: A kde je reakce?

Věta „Ke každé akci existuje stejně velká a opačně orientovaná reakce" již takřka zlidověla a může mít různý význam podle toho, v jaké souvislosti je vyslovena. Ve fyzice však neznamená nic jiného než slovní vyjádření rov. (5.14). Zejména vůbec nic nevypovídá o příčině a následku. Kterákoli z interakčních sil může hrát roli akce či reakce.

Může nás napadnout: „Je-li každá síla spjata s jinou silou stejné velikosti a opačného směru, proč se tyto síly nevyruší? Jak se vůbec může něco dát do pohybu?" Odpověď je jednoduchá a názorně ji vidíme na obr. 5.12:

Síly akce a reakce působí *vždy* na různá tělesa. Nesčítají se proto ve výslednou sílu a nemohou se vyrušit.

Toto tvrzení se týká situace, kdy je sledovanou soustavou buď jedno, nebo druhé z obou interagujících těles. (V dalších kapitolách uvidíme, že v případě studia soustavy dvou nebo i více těles má smysl v rámci celé soustavy mluvit o výslednici interakčních sil. Ta ovšem bude, díky třetímu Newtonovu zákonu, skutečně nulová.)

Dvě síly, které působí na *totéž* těleso, *nejsou* akcí a reakcí, ani když mají stejnou velikost a opačný směr. V následujících příkladech určíme všechny dvojice typu akce – reakce.

Obr. 5.13 Družice na oběžné dráze kolem Země. Znázorněné síly představují dvojici akce – reakce. Všimněte si, že působí na různá tělesa.

Družice

Obr. 5.13 ukazuje družici na oběžné dráze kolem Země. Jedinou silou působící *na družici* je přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_{DZ}$, jíž na ni působí Země. Kde je odpovídající reakce? Je to přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_{ZD}$, jíž působí družice na Zemi. Její působiště můžeme umístit do středu Země.

Mohli bychom se domnívat, že malinká družice prakticky nemůže Zemi přitahovat. Přesto tomu tak je, přesně podle třetího Newtonova zákona. Pro velikosti sil platí $F_{DZ} = F_{ZD}$. Síla $\boldsymbol{F}_{ZD}$ udílí Zemi zrychlení, které je však vlivem obrovské hmotnosti Země tak malé, že není měřitelné.

Meloun na stole

Obr. 5.14a znázorňuje meloun ležící v klidu na stole.* Země působí na meloun svisle dolů tíhovou silou $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun se neurychluje, neboť tato síla je kompenzována stejně velkou, avšak opačnou, normálovou silou $\boldsymbol{F}_{MS}$, jíž na meloun působí stůl (obr. 5.14b). Síly $\boldsymbol{F}_{MZ}$ a $\boldsymbol{F}_{MS}$ však *netvoří* dvojici akce – reakce, neboť *působí na totéž těleso, meloun*.

Reakcí k síle $\boldsymbol{F}_{MZ}$ je gravitační síla $\boldsymbol{F}_{ZM}$, jíž působí meloun na Zemi. Tato dvojice akce – reakce je znázorněna na obr. 5.14c.

Reakcí k síle $\boldsymbol{F}_{MS}$ je síla $\boldsymbol{F}_{SM}$, jíž působí meloun na stůl. Tato dvojice akce – reakce je znázorněna na obr. 5.14d. Dvojice akce – reakce, vystupující v této úloze, spolu s příslušnými dvojicemi těles, jsou tedy

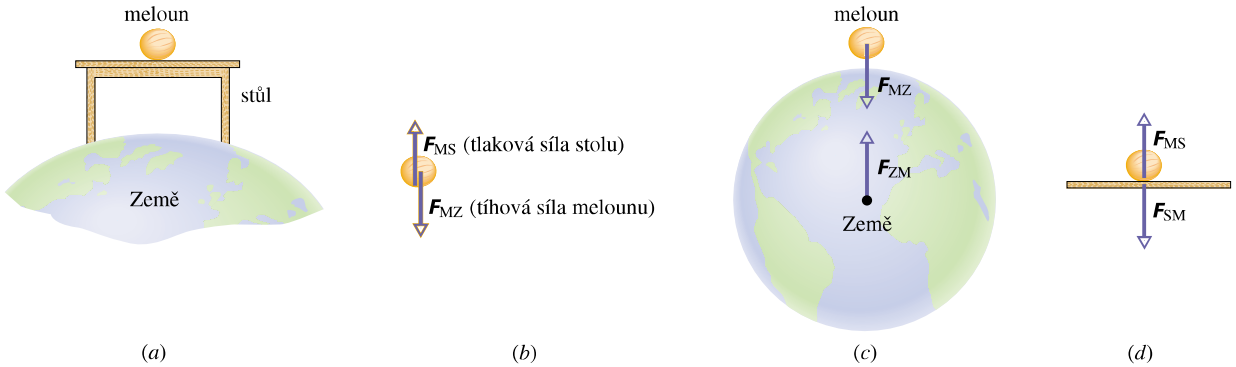
první dvojice: $\boldsymbol{F}_{MZ} = -\boldsymbol{F}_{ZM}$ (meloun a Země)

a

druhá dvojice: $\boldsymbol{F}_{MS} = -\boldsymbol{F}_{SM}$ (meloun a stůl).

KONTROLA 6: Dejme tomu, že meloun a stůl z obr. 5.14 jsou v kabině výtahu, která se rozjíždí směrem vzhůru. (a) Rozhodněte, zda velikosti sil $\boldsymbol{F}_{SM}$ a $\boldsymbol{F}_{MS}$ vzrostou, klesnou, či zůstanou beze změny. (b) Jsou tyto dvě síly stále stejně velké a opačně orientované? (c) Rozhodněte, zda velikosti sil $\boldsymbol{F}_{MZ}$ a $\boldsymbol{F}_{ZM}$ vzrostou, klesnou, či

* Nebereme v úvahu malé komplikace způsobené rotací Země.



Obr. 5.14 (a) Meloun leží na stole, který spočívá na zemském povrchu. (b) *Na meloun* působí síly $\boldsymbol{F}_{MS}$ a $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun je v klidu, neboť tyto síly jsou v rovnováze. (c) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a Země. (d) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a stolu.

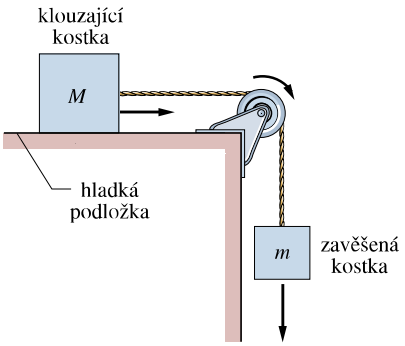
zůstanou beze změny. (d) Jsou tyto dvě síly stále stejně velké a opačně orientované?

5.8 UŽITÍ NEWTONOVÝCH ZÁKONŮ

Zbývající část této kapitoly tvoří příklady. Měli byste se nad nimi hlouběji zamyslet. Neučte se dílčí výpočty a odpovědi, ale soustřeďte se na problém jako celek. Snažte se pochopit postupy, které vedou k jeho vyřešení. Zvlášť důležité je vědět, jak přejít od schematického náčrtu situace k silovému diagramu a vhodně volit soustavu souřadnic, aby bylo možné aplikovat druhý Newtonův zákon. Začneme př. 5.5, který je propracován do nejmenších detailů formou otázka – odpověď.

PŘÍKLAD 5.5

Obr. 5.15 znázorňuje kostku (*klouzající kostka*) o hmotnosti 3,3 kg. Kostka se může volně pohybovat po vodorovné dokonale hladké podložce, např. na vzduchové lavici. Kostka je připojena nehmotným vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření k jiné kostce (*zavěšená kostka*), jejíž hmotnost je 2,1 kg. Zavěšená kostka klesá a klouzající kostka se pohybuje s určitým zrychlením vpravo. (a) Určete toto zrychlení. (b) Určete zrychlení zavěšené kostky a (c) sílu napínající vlákno.

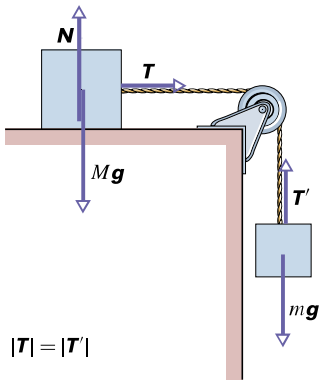


Obr. 5.15 Příklad 5.5. Kostka o hmotnosti M na vodorovné dokonale hladké podložce je spojena s kostkou o hmotnosti m vláknem vedeným přes kladku. Vlákno i kladka jsou nehmotné. Kladka se otáčí bez tření. Šipky vyznačují směr pohybu po uvolnění soustavy.

? *O co v úloze jde?*

Máme dva hmotné objekty, klouzající a zavěšenou kostku. Nesmíme zapomenout, že je zde také Země, která oba tyto objekty přitahuje. Bez přítomnosti Země by se nic nedělo. Na kostky působí celkem pět sil, znázorněných na obr. 5.16:

1. Vlákno táhne klouzající kostku vpravo silou $\boldsymbol{T}$ o velikosti T.
2. Vlákno táhne zavěšenou kostku silou $\boldsymbol{T}'$ o téže velikosti T. Tato síla směřuje vzhůru a brání volnému pádu zavěšené kostky, ke kterému by jinak samozřejmě došlo. Předpokládáme, že vlákno je napjato po celé délce stejně. Kladka slouží ke změně směru síly napínající vlákno beze změny její velikosti.
3. Země přitahuje klouzající kostku tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$.
4. Země přitahuje zavěšenou kostku tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$.
5. Stůl tlačí na klouzající kostku normálovou silou $\boldsymbol{N}$.



Obr. 5.16 Síly působící na dvě kostky

Uvědomme si ještě další důležité věci. Předpokládáme, že vlákno je nepružné. Klesne-li tedy zavěšená kostka za jistou dobu o 1 mm, pohne se klouzající kostka v témže časovém intervalu o 1 mm vpravo. Kostky se pohybují společně a jejich zrychlení mají stejnou velikost a.

? *Jak máme tuto úlohu posuzovat? Nabízí se nám na základě její formulace použití určitého fyzikálního zákona?*

Ano, nabízí. Síly, hmotnosti a zrychlení jsou obsaženy v druhém Newtonově pohybovém zákonu $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$.

? *Chceme-li použít tento zákon při řešení úlohy, na jaké těleso jej máme aplikovat?*

Zaměřme se na dvě tělesa vystupující v úloze, klouzající a zavěšenou kostku. I když jde ve skutečnosti o rozměrné objekty, můžeme je považovat za hmotné body, protože každý z elementů, z nichž jsou složeny (řekněme každý atom), se pohybuje přesně stejným způsobem. Aplikujeme druhý Newtonův zákon na každou kostku zvlášť.

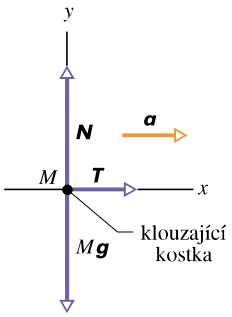
? *A co s kladkou?*

Kladku za hmotný bod považovat nemůžeme, neboť pohyb jejích jednotlivých elementů je různý. Až budeme uvažovat o otáčivém pohybu, všimneme si kladek podrobně. Prozatím se však tomuto problému vyhneme tím, že budeme hmotnost kladky považovat za zanedbatelnou v porovnání s hmotnostmi obou kostek.

? *Dobrá. Jak tedy nyní aplikujeme vztah $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ na klouzající kostku?*

Představíme si kostku jako částici o hmotnosti M a nakreslíme *všechny* síly, které *na ni* působí, podle obr. 5.17. Tento obrázek představuje silový diagram klouzající kostky. Jsou

v něm tři síly. Nyní zvolíme souřadnicové osy. Je vhodné nakreslit osu x rovnoběžně s deskou stolu ve směru pohybu kostky.



Obr. 5.17 Silový diagram pro klouzající kostku na obr. 5.15

? *Ano, ale stále nebylo řečeno, jak aplikovat na klouzající kostku vztah* $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$. *Zatím jsme mluvili pouze o tom, jak nakreslit silový diagram.*

To je pravda. Vztah $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ je vektorovou rovnicí a tu je třeba rozepsat do složek:

$$Ma_x = \sum F_x, \quad Ma_y = \sum F_y, \quad Ma_z = \sum F_z, \qquad (5.15)$$

kde $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$ jsou složky výsledné síly. Vzhledem k tomu, že se klouzající kostka nepohybuje ve svislém směru, je zřejmé, že y-ová složka výslednice je nulová. Normálová síla $\boldsymbol{N}$, směřující vzhůru, a tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ jsou v rovnováze. z-ové složky všech sil jsou rovněž nulové (osa z je kolmá k rovině nákresu). Můžeme ovšem použít první z rov. (5.15).

Ve směru osy x je nenulová pouze jediná složka, x-ová složka síly $\boldsymbol{T}$. Ze vztahu $ma_x = \sum F_x$ tedy plyne

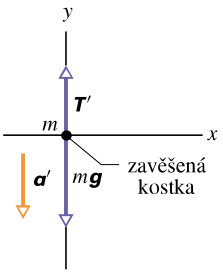
$$Ma = T. \qquad (5.16)$$

Tato rovnice obsahuje dvě neznámé, T a a, takže ji nedokážeme jednoznačně vyřešit. Připomeňme však, že jsme zatím nic neřekli o zavěšené kostce.

? *Jistě. Budeme vztah* $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ *aplikovat i na zavěšenou kostku? Jak?*

Nakreslíme silový diagram pro tuto kostku podle obr. 5.18. Tentokrát užijeme druhou z rovnic (5.15) a dostaneme

$$-ma = \sum F_y = T - mg. \qquad (5.17)$$



Obr. 5.18 Silový diagram pro zavěšenou kostku na obr. 5.15. Vektory $\boldsymbol{T}'$, $\boldsymbol{a}'$ mají díky kladce jiné směry než vektory $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{a}$, platí však $|\boldsymbol{T}'| = |\boldsymbol{T}|$, $|\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}|$.

Znaménko minus na levé straně rovnice signalizuje, že se kostka urychluje směrem dolů, v záporném směru osy y. Z rov. (5.17) plyne

$$mg - T = ma. \qquad (5.18)$$

Tato rovnice obsahuje tytéž neznámé veličiny jako rov. (5.16). Sečtením obou rovnic vyloučíme T. Řešením vzhledem k neznámé a dostaneme

$$a = \frac{m}{M+m} g. \qquad (5.19)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.16) získáme

$$T = \frac{mM}{M+m} g. \qquad (5.20)$$

Pro zadané číselné hodnoty dostáváme

$$a = \frac{m}{M+m} g = \frac{(2{,}1\,\mathrm{kg})}{(3{,}3\,\mathrm{kg} + 2{,}1\,\mathrm{kg})} (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 3{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$T = \frac{mM}{M+m} g = \frac{(3{,}3\,\mathrm{kg})(2{,}1\,\mathrm{kg})}{(3{,}3\,\mathrm{kg} + 2{,}1\,\mathrm{kg})} (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 13\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

? *Nyní je problém vyřešen, že?*

To je správná otázka. Naším úkolem není jen řešit úlohy, ale také se učit fyziku. S úlohou nejsme ve skutečnosti hotovi, dokud jsme neověřili, zda jsou získané výsledky rozumné. Získáme tím často mnohem lepší zkušenost než samotným nalezením správné odpovědi.

Nejprve se vraťme k rov. (5.19). Všimněme si, že je rozměrově správný a že hodnota a bude vždy menší než g. Musí tomu tak být, neboť zavěšená kostka nepadá volně. Vlákno ji táhne směrem vzhůru.

Nyní se zaměřme na vztah (5.20), který můžeme přepsat ve tvaru

$$T = \frac{M}{M+m} mg. \qquad (5.21)$$

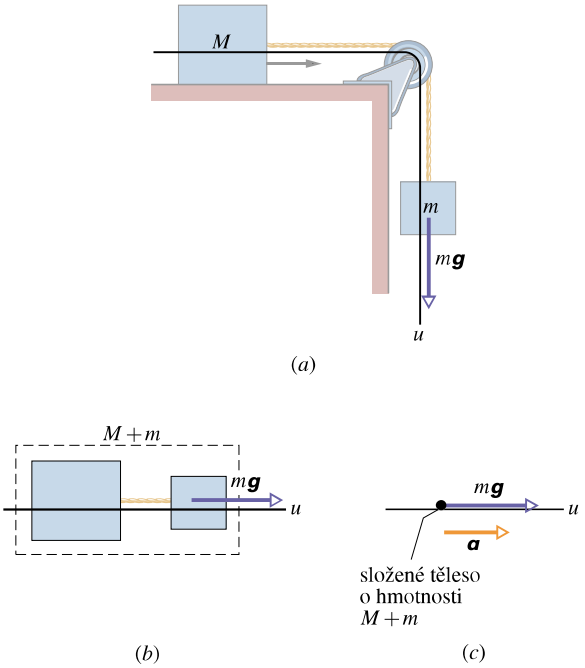
V tomto tvaru snáze ověříme rozměrovou správnost, neboť jak T, tak mg jsou velikosti sil. Z rov. (5.21) také hned vidíme, že velikost síly napínající vlákno je vždy menší než mg, tj. než velikost tíhové síly působící na zavěšenou kostku. To je potěšitelné zjištění, neboť kdyby vyšla hodnota T *větší* než mg, znamenalo by to, že se zavěšená kostka urychluje směrem vzhůru.

Výsledky můžeme také ověřovat rozborem speciálních případů, u nichž jsme si jisti správnou odpovědí. Jednoduchý případ, odpovídající experimentům v mezihvězdném prostoru, dostaneme volbou $g = 0$. Víme, že v takovém případě zůstanou kostky v klidu a vlákno nebude napjato. Dosadíme-li

$g = 0$ do rov. (5.19) a (5.20), vyjde opravdu $a = 0$ a $T = 0$. Další dvě speciální situace nastanou pro $M = 0$ a $m \to \infty$.

PŘÍKLAD 5.5 — jiný způsob řešení

Velikost zrychlení a kostek na obr. 5.15 dokonce dokážeme určit na pouhých dvou řádcích algebraických úprav, jestliže zvolíme poněkud zvláštní postup. (a) Užijeme neobvyklou volbu „osy“, řekněme u, která prochází *oběma* kostkami podél vlákna, jak znázorňuje obr. 5.19a. (b) V myšlenkách „narovnáme“ osu u podle obr. 5.19b a budeme kostky považovat za dvě součásti jednoho složeného tělesa o hmotnosti $M + m$. Silový diagram pro tuto soustavu je na obr. 5.19c.



Obr. 5.19 (a) „Osa“ u prochází soustavou tvořenou kostkami a vláknem z obr. 5.15. (b) Kostky jsou uspořádány podél „napřímené“ osy u a považovány za jediné těleso o hmotnosti $M + m$. (c) Příslušný silový diagram zahrnující pouze síly ve směru u. Taková síla je jediná.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si, že na složené těleso působí ve směru osy u pouze jediná síla, a to tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, orientovaná kladně. Síly $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ napínající vlákno (obr. 5.16) jsou nyní vnitřními silami soustavy, tvořené složeným tělesem, a nevstupují do druhého Newtonova zákona. Síla, jíž působí kladka na vlákno, je kolmá k ose u a rovněž v druhém Newtonově zákonu nebude figurovat.

Řídíme-li se v této situaci vztahy (5.2), můžeme napsat rovnici pro složku zrychlení tělesa podél osy u:

$$(M + m)a_u = \sum F_u,$$

kde $(M + m)$ je hmotnost tělesa. Zrychlení složeného tělesa podél osy u (a tedy i zrychlení každé z kostek spojených vláknem) má velikost a. Jediná síla udělující složenému tělesu zrychlení podél osy u má velikost mg. Dostáváme tedy

$$(M + m)a = mg$$

a

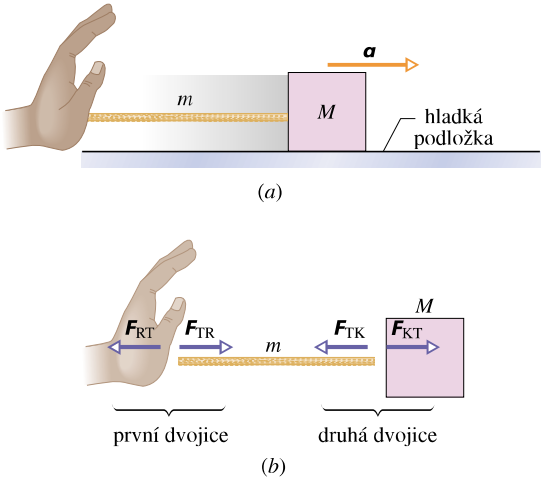
$$a = \frac{m}{M + m} g. \qquad (5.22)$$

Tento výsledek se shoduje s rov. (5.19).

Abychom určili velikost T, aplikujeme druhý Newtonův zákon na kteroukoli z obou kostek. Dostaneme tak rov. (5.16), nebo (5.18). Dosazením za a z rov. (5.22) a řešením vzhledem k neznámé T dostaneme rov. (5.20).

PŘÍKLAD 5.6

Kostka o hmotnosti $M = 33$ kg je tlačena po dokonale hladké podložce pomocí tyčky o hmotnosti $m = 3{,}2$ kg (obr. 5.20a). Kostka, která je zpočátku v klidu, se pohybuje s konstantním zrychlením a během 1,7 s se posune do vzdálenosti $d = 77$ cm.



Obr. 5.20 Příklad 5.6. (a) Tyčka o hmotnosti m tlačí kostku o hmotnosti M po dokonale hladké podložce. (b) Pohled na jednotlivé části soustavy ukazuje dvojice akce – reakce, tj. vzájemné působení ruky a tyčky (první dvojice) a tyčky a kostky (druhá dvojice).

(a) Určete všechny dvojice akce – reakce působící ve vodorovném směru.

ŘEŠENÍ: Jak je zřejmé z obr. 5.20b, jsou zde dvě dvojice sil typu akce – reakce:

první dvojice	$\boldsymbol{F}_{RT} = -\boldsymbol{F}_{TR}$	(ruka a tyčka),
druhá dvojice	$\boldsymbol{F}_{TK} = -\boldsymbol{F}_{KT}$	(tyčka a kostka).

Sílu $\boldsymbol{F}_{RT}$, jíž působí tyčka na ruku, bychom pocítili, kdybychom experiment prováděli „vlastnoručně“.

(b) Jakou silou musí působit ruka na tyčku?

ŘEŠENÍ: Hledaná síla udílí zrychlení tyčce i kostce. Abychom ji zjistili, musíme nejdříve určit užitím vztahu (2.15) velikost stálého zrychlení a:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2.$$

Dosazením $v_{0x} = 0$ a $x - x_0 = d$ a řešením vzhledem k neznámé $a_x = a$ dostaneme

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2(0{,}77\,\mathrm{m})}{(1{,}7\,\mathrm{s})^2} = 0{,}533\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Pro zjištění síly, již vyvine ruka, použijeme druhý Newtonův zákon pro soustavu složenou z tyčky a kostky. Pak

$$F_{\mathrm{TR}} = (M+m)a = (33\,\mathrm{kg} + 3{,}2\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 19{,}3\,\mathrm{N} \doteq 19\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou silou tlačí tyčka na kostku?

ŘEŠENÍ: Aplikujeme druhý Newtonův zákon na samotnou kostku:

$$F_{\mathrm{KT}} = Ma = (33\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 17{,}6\,\mathrm{N} \doteq 18\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je výsledná síla působící na tyčku?

ŘEŠENÍ: Velikost této síly F můžeme najít dvěma způsoby. První z nich využívá výsledků (b) a (c):

$$F = F_{\mathrm{TR}} - F_{\mathrm{TK}} = 19{,}3\,\mathrm{N} - 17{,}6\,\mathrm{N} = \\ = 1{,}7\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že podle třetího Newtonova zákona má síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{TK}}$ stejnou velikost (tj. 17,6 N) jako síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{KT}}$.

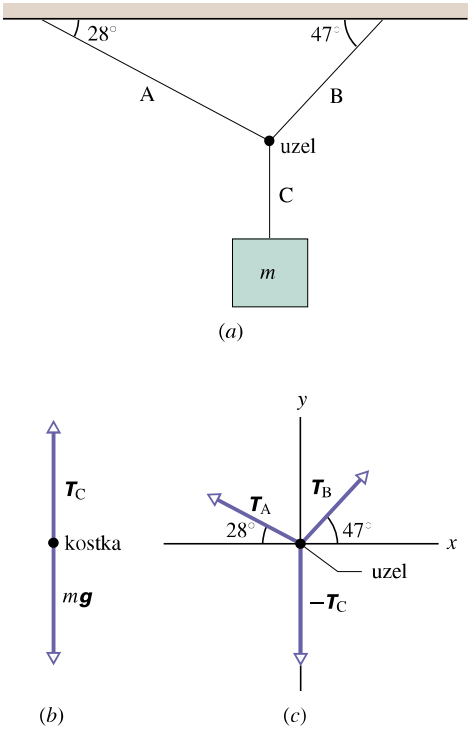
Druhý způsob spočívá přímo v použití druhého Newtonova zákona pro samotnou tyčku. Dostáváme

$$F = ma = (3{,}2\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 1{,}7\,\mathrm{N}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což souhlasí s předchozím výsledkem. Musí tomu tak být, neboť oba postupy jsou ekvivalentní. Ověřte to obecným vyjádřením velikosti síly F pomocí zadaných veličin oběma způsoby.

PŘÍKLAD 5.7

Obr. 5.21 znázorňuje kostku o hmotnosti $m = 15\,\mathrm{kg}$ zavěšenou na třech vláknech. Jakými silami jsou vlákna napínána?



Obr. 5.21 Příklad 5.7. (a) Kostka o hmotnosti m je zavěšena na třech vláknech. (b) Silový diagram kostky. (c) Silový diagram uzlu, v němž jsou vlákna spojena.

ŘEŠENÍ: V silovém diagramu kostky (obr. 5.21b) směřuje tahová síla $\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}$, jíž působí na kostku vlákno C, svisle vzhůru, zatímco tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ míří dolů. Soustava je v klidu, takže podle druhého Newtonova zákona platí

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{C}} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}.$$

Poněvadž jsou síly $\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}$ a $m\boldsymbol{g}$ svislé, dostáváme jedinou skalární rovnici

$$\sum F_y = T_{\mathrm{C}} - mg = 0.$$

Dosazením zadaných hodnot pak získáme

$$T_{\mathrm{C}} = mg = (15\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 147\,\mathrm{N} \doteq 150\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Další krok vychází ze skutečnosti, že všechny tři hledané tahové síly mají působiště v uzlu, v němž jsou vlákna spojena. Aplikujeme tedy druhý Newtonův zákon na uzel. Příslušný silový diagram je na obr. 5.21c. Protože se uzel neurychluje, musí být výsledná síla, která na něj působí, nulová. Pak

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}} + (-\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}) = \boldsymbol{0}.$$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní dvěma rovnicím skalárním

$$\sum F_y = T_{\mathrm{A}} \sin 28^\circ + T_{\mathrm{B}} \sin 47^\circ - T_{\mathrm{C}} = 0 \qquad (5.23)$$

a

$$\sum F_x = -T_A \cos 28^\circ + T_B \cos 47^\circ = 0. \qquad (5.24)$$

Uvědomte si, že při zápisu x-ové složky síly $\boldsymbol{T}_A$ musíme výraz $T_A \cos 28^\circ$ opatřit znaménkem minus, abychom vyjádřili fakt, že průmět síly $\boldsymbol{T}_A$ do osy x je s touto osou nesouhlasně rovnoběžný.

Dosazením číselných hodnot do rov. (5.23) a (5.24) dostaneme

$$T_A(0{,}469) + T_B(0{,}731) = 147\ \text{N} \qquad (5.25)$$

a

$$T_B(0{,}682) = T_A(0{,}883). \qquad (5.26)$$

Z rov. (5.26) vyplývá

$$T_B = \frac{0{,}883}{0{,}682} T_A = 1{,}29 T_A.$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.25) a řešením vzhledem k neznámé T_A získáváme

$$T_A = \frac{147\ \text{N}}{0{,}469 + (1{,}29)(0{,}731)} = \\ = 104\ \text{N} \doteq 100\ \text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nakonec určíme T_B:

$$T_B = 1{,}29\, T_A = (1{,}29)(104\ \text{N}) = \\ = 134\ \text{N} \doteq 130\ \text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

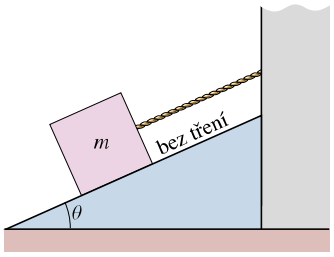
PŘÍKLAD 5.8

Na obr. 5.22a je kostka o hmotnosti $m = 15$ kg upevněná na vlákně a spočívající na dokonale hladké nakloněné rovině. Jakou silou je napínáno vlákno, je-li $\theta = 27^\circ$? Jakou silou působí nakloněná rovina na kostku?

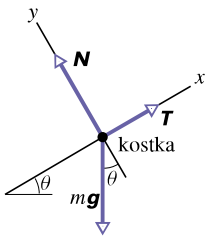
ŘEŠENÍ: Na obr. 5.22b je silový diagram pro případ kostky. Na kostku působí tyto síly: (1) normálová síla $\boldsymbol{N}$, jíž na ni tlačí nakloněná rovina, (2) tahová síla vlákna $\boldsymbol{T}$ a (3) tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Poněvadž je zrychlení kostky nulové, je podle druhého Newtonova zákona nulová i výslednice všech těchto sil:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}. \qquad (5.27)$$

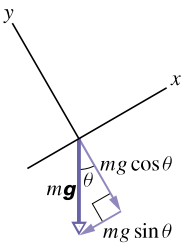
Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osa x byla rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Při této volbě budou mít dokonce dvě ze sil ($\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{T}$) směr souřadnicových os. To je výhoda. Všimněme si, že úhel mezi tíhovou silou a zápornou poloosou osy y je roven úhlu sklonu nakloněné roviny. Složky této síly určíme z trojúhelníka znázorněného na obr. 5.22c.



(a)



(b)



(c)

Obr. 5.22 Příklady 5.8 a 5.9. (a) Kostka o hmotnosti m upevněná na vlákně spočívá v klidu na dokonale hladké nakloněné rovině. (b) Silový diagram kostky. Všimněme si volby souřadnicových os. (c) Určení x-ové a y-ové složky tíhové síly $m\boldsymbol{g}$.

Rozepsáním vztahu (5.27) do složek dostaneme

$$\sum F_x = T - mg \sin\theta = 0$$

a

$$\sum F_y = N - mg \cos\theta = 0.$$

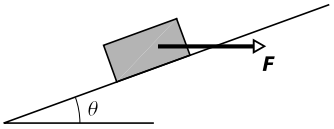
Pak tedy

$$T = mg \sin\theta = (15\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m·s}^{-2}) \sin 27^\circ = \\ = 67\ \text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$N = mg \cos\theta = (15\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m·s}^{-2}) \cos 27^\circ = \\ = 131\ \text{N} \doteq 130\ \text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 7: Na obrázku působí na kostku vodorovná síla $\boldsymbol{F}$. (a) Rozhodněte, zda průmět síly $\boldsymbol{F}$ do směru kolmého ke svahu má velikost $F \cos\theta$ nebo $F \sin\theta$. (b) Dojde vlivem působení síly $\boldsymbol{F}$ ke zvýšení či ke snížení velikosti normálové tlakové síly, jíž působí svah na kostku?



PŘÍKLAD 5.9

Představme si, že dojde k přetnutí vlákna udržujícího kostku na obr. 5.22 na nakloněné rovině v klidu. S jakým zrychlením se bude kostka pohybovat?

ŘEŠENÍ: Přetnutím vlákna zmizí síla $\boldsymbol{T}$, vyznačená na obr. 5.22b. Zbývající síly působící na kostku se samozřejmě nemohou vyrušit, neboť nepůsobí v téže přímce. Použitím druhého Newtonova zákona pro x-ové složky sil $\boldsymbol{N}$ a $m\boldsymbol{g}$ dostaneme

$$\sum F_x = 0 - mg\sin\theta = ma,$$

takže

$$a = -g\sin\theta. \tag{5.28}$$

Uvědomme si, že normálová síla $\boldsymbol{N}$ nemá vliv na zrychlení podél nakloněné roviny, neboť její x-ová složka je nulová.

Ze vztahu (5.28) vychází

$$a = -(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 27^\circ = \\ = -4{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus signalizuje, že zrychlení má směr klesající souřadnice x, tedy dolů podél nakloněné roviny.

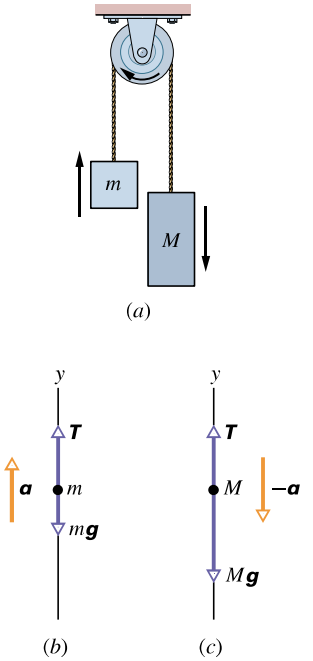
Z rov. (5.28) je vidět, že zrychlení kostky nezávisí na její hmotnosti, stejně jako je tomu v případě zrychlení volně padajícího tělesa. Rov. (5.28) představuje návod, jak lze užít nakloněné roviny ke „zmírnění gravitace“, tj. ke „zpomalení“ volného pádu. Pro $\theta = 90^\circ$ dostáváme $a = -g$, pro $\theta = 0^\circ$ je $a = 0$. Oba tyto výsledky jsme očekávali.

PŘÍKLAD 5.10

Na obr. 5.23a jsou dvě kostky spojené vláknem vedeným přes nehmotnou kladku, která se otáčí bez tření. (Takové uspořádání se nazývá *Atwoodův padostroj*.) Nechť $m = 1{,}3\,\mathrm{kg}$ a $M = 2{,}8\,\mathrm{kg}$. Určíme velikost síly napínající vlákno a (společnou) velikost zrychlení kostek.

ŘEŠENÍ: Obr. 5.23b, c představují silové diagramy pro každou z kostek. Zadali jsme $M > m$, takže očekáváme, že kostka M bude klesat, zatímco m bude stoupat. Tato informace umožní přiřadit zrychlením kostek správná znaménka.

Než začneme s výpočtem, uvědomme si, že síla napínající vlákno musí být menší než tíhová síla působící na kostku M (jinak by kostka nezačala klesat) a větší než tíhová síla působící na kostku m (jinak by tato kostka nezačala stoupat). Znázornění vektorů v silových diagramech na obr. 5.23 tuto skutečnost respektuje.



Obr. 5.23 Příklad 5.10. (a) Kostka o hmotnosti M a kostka o menší hmotnosti m jsou spojeny vláknem vedeným přes kladku. Směry zrychlení kostek jsou vyznačeny šipkami. Silové diagramy pro kostku m (b) a kostku M (c).

Užitím druhého Newtonova zákona pro kostku o hmotnosti m, jejíž zrychlení má velikost a a je souhlasně rovnoběžné s osou y, dostaneme

$$ma = T - mg. \tag{5.29}$$

Pro kostku o hmotnosti M, jejíž zrychlení má stejnou velikost, je však nesouhlasně rovnoběžné s osou y, máme

$$-Ma = T - Mg, \tag{5.30}$$

nebo

$$Ma = -T + Mg. \tag{5.31}$$

Sečtením rovnic (5.29) a (5.31) (nebo vyloučením T) získáme

$$a = \frac{M-m}{M+m}g. \tag{5.32}$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.29) nebo do (5.31) a řešením vzhledem k neznámé T dostaneme

$$T = \frac{2mM}{M+m}g. \tag{5.33}$$

Dosazením zadaných údajů pak dostáváme

$$a = \frac{M-m}{M+m}g = \frac{(2{,}8\,\mathrm{kg} - 1{,}3\,\mathrm{kg})}{(2{,}8\,\mathrm{kg} + 1{,}3\,\mathrm{kg})}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 3{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

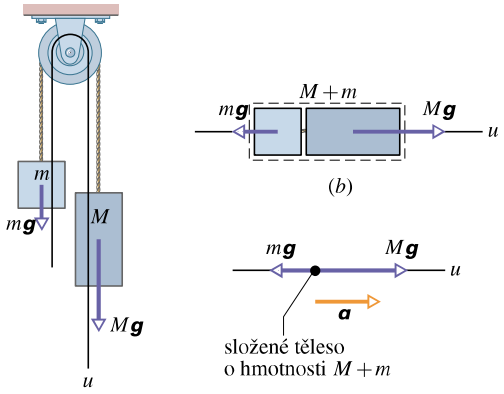
a

$$T = \frac{2Mm}{M+m}g = \frac{2(2{,}8\,\mathrm{kg})(1{,}3\,\mathrm{kg})}{(2{,}8\,\mathrm{kg}+1{,}3\,\mathrm{kg})}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) =$$
$$= 17\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velikosti tíhových sil působících na jednotlivé kostky jsou 13 N ($= mg$) a 27 N ($= Mg$). Velikost síly napínající vlákno (17 N) skutečně leží v intervalu těchto dvou hodnot.

PŘÍKLAD 5.10 — jiný způsob řešení

Obdobně jako při alternativním* řešení př. 5.5 použijeme nekonvenční volbu osy u.



Obr. 5.24 (a) „Osa“ u je vedena přes celou soustavu znázorněnou na obr. 5.23. (b) Kostky jsou uspořádány v „napřímené“ ose u a považovány za jediné těleso o hmotnosti $M+m$. (c) Příslušný silový diagram, v němž jsou vyznačeny pouze síly působící podél osy u. Takové síly jsou dvě.

ŘEŠENÍ: Vedeme osu u celou soustavou podle obr. 5.24a a napřímíme ji podle obr. 5.24b. Kostky budeme považovat za jediné těleso o hmotnosti $M+m$. Nakreslíme silový diagram podle obr. 5.24c. Uvědomme si, že podél osy u působí na složené těleso dvě síly: $m\boldsymbol{g}$ ve směru nesouhlasném s osou u a $M\boldsymbol{g}$ ve směru souhlasném. (Síly, jimiž působí na vlákno kladka, jsou kolmé k ose u a nevstupují do výpočtu.) Síly, které působí podél osy u, udělují složenému tělesu zrychlení $\boldsymbol{a}$. Zápis druhého Newtonova zákona pro složku u má tvar

$$\sum F_u = Mg - mg = (M+m)a, \qquad (5.34)$$

odkud

$$a = \frac{M-m}{M+m}\,g,$$

stejně jako při předchozím způsobu řešení. Pro získání T použijeme druhý Newtonův zákon pro kteroukoli z kostek a užijeme obvyklý způsob volby osy y. Pro kostku o hmotnosti m dostaneme rov. (5.29) a po dosazení za a získáme výsledek (5.33).

PŘÍKLAD 5.11

Pasažér o hmotnosti $m = 72{,}2$ kg stojí na nášlapné váze v kabině výtahu (obr. 5.25). Jaký údaj ukazuje váha pro hodnoty zrychlení uvedené v obrázku?

ŘEŠENÍ: Zabývejme se touto úlohou z hlediska pozorovatele v (inerciální) vztažné soustavě spojené se Zemí. Pozorovatel aplikuje druhý Newtonův zákon na urychlujícího se pasažéra. Obr. 5.25a-c ukazují silové diagramy, v nichž je pasažér považován za částici, pro různé hodnoty velikosti zrychlení kabiny.

Bez ohledu na zrychlení kabiny působí Země na pasažéra tíhovou silou o velikosti mg, kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ je velikost tíhového zrychlení. Podlaha výtahu tlačí na váhu směrem vzhůru. Váha tlačí směrem vzhůru na pasažéra normálovou silou o velikosti N, která je shodná s údajem na stupnici váhy. Pasažér se domnívá, že váží tolik, kolik ukazuje váha. Tato veličina se často nazývá *zdánlivá váha*, přičemž název *tíhová síla* nebo jen *váha* je rezervován pro veličinu $m\boldsymbol{g}$.*

* Způsob řešení úloh, použitý jako alternativa v př. 5.5 a 5.10 a založený na myšlence „napřímení nekonvenční osy u jdoucí celou soustavou“, může mít svá úskalí, pokud jej důkladně nepromyslíme a nepochopíme. Jeho použitelnost spočívá výhradně v tom, že každý vektor, a tedy i všechny vektorové veličiny vstupující do našich výpočtů, lze zapsat pomocí složek v libovolně zvolené soustavě souřadnic. „Napřímení nekonvenční osy u“, o níž je řeč např. v př. 5.10, nepředstavuje nic jiného, než dvojí volbu soustavy souřadnic: s kostkou m je spojena soustava souřadnic, jejíž y-ová osa má směr zrychlení této kostky (směřuje tedy svisle vzhůru), y-ová osa soustavy souřadnic spojené s kostkou M směřuje naopak svisle dolů, tj. opět ve směru zrychlení příslušné kostky. Vazební podmínka úlohy $\boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{a}_M$ požaduje, aby zrychlení kostek byly opačné vektory. Toto a požadavek zanedbatelné hmotnosti kladky pak zajistí, že druhý Newtonův zákon zapsaný ve složkách má stejný tvar jako v případě s „napřímenou“ osou u.

* V originále je veličina mg nazývána *vahou*. V české fyzikální terminologii se tento výraz již téměř neužívá. Vektorové veličině $m\boldsymbol{g}$, kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, představující sílu, jíž působí Země na těleso o hmotnosti m v těsné blízkosti jejího povrchu, se říká *tíhová síla*, mg je *velikost tíhové síly*. Údaj čtený na stupnici nášlapné váhy samozřejmě ukazuje velikost síly, jíž působí člověk na podložku váhy, resp. podložka váhy na člověka. Pro tuto veličinu se někdy užívá názvu *tíha*. Pro $a = 0$ je tíha rovna mg a odpovídá *skutečné váze* zmiňované v originále, pro $a \neq 0$ se od hodnoty mg liší a odpovídá *zdánlivé váze*. Pro $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ mluvíme o **beztížném stavu**. Bez pojmu *tíha* s přívlastky či bez nich se ovšem snadno obejdeme a vyhneme se tak možným dezinterpretacím. Vzhledem k tomu, že stupnice osobních vah jsou cejchovány výhradně v kilogramech, může mít smysl mluvit o *zdánlivé hmotnosti*. Prakticky ve všech úlohách, s nimiž se setkáme, působí na studovaná tělesa tíhová síla. Pro stručnost a s přihlédnutím k původnímu textu užíváme někdy namísto obsáhlejší správné formulace „na těleso působí tíhová síla 100 N“ použít zkráceného, avšak nepřesného, vyjádření „těleso váží 100 N“.

Druhý Newtonův zákon dává

$$ma = N - mg,$$

tj.

$$N = m(g + a). \qquad (5.35)$$

(a) Jaký je údaj na stupnici váhy, je-li kabina v klidu, nebo pohybuje-li se stálou rychlostí? (Obr. 5.25a.)

ŘEŠENÍ: Pro tento případ je $a = 0$, a tedy

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} + 0) = \\ = 708\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento údaj považuje pasažér za svoji „váhu“.

(b) Jaký je údaj na stupnici, směřuje-li zrychlení kabiny vzhůru a jeho velikost je $3{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? (Obr. 5.25b.)

ŘEŠENÍ: Směřuje-li zrychlení kabiny vzhůru, znamená to, že kabina buď stoupá se vzrůstající rychlostí, nebo klesá s klesající rychlostí. V obou případech je vztažná soustava spojená s kabinou neinerciální. Z rov. (5.35) dostaneme

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} + 3{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 939\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

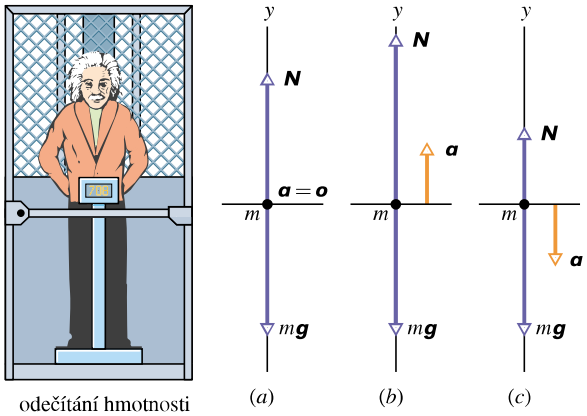
Pasažér tlačí na váhu větší silou než za klidu. Při pohledu na stupnici se pasažér může domnívat, že „přibral“ 23,6 kg (odpovídá 231 N)!

(c) Jaký je údaj na stupnici, směřuje-li zrychlení kabiny dolů a má-li velikost $3{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? (Obr. 5.25c.)

ŘEŠENÍ: Směřuje-li zrychlení kabiny dolů, znamená to, že kabina buď stoupá s klesající rychlostí, nebo klesá se vzrůstající rychlostí. Vztažná soustava spojená s kabinou je opět neinerciální. Z rov. (5.35) dostaneme

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} - 3{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 477\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pasažér tlačí na váhu menší silou než za klidu. Zdá se mu, že „zhubl“ o 23,6 kg (odpovídá 231 N)!



odečítání hmotnosti nebo zdánlivé hmotnosti

Obr. 5.25 Příklad 5.11. Pasažér o hmotnosti m stojí ve výtahu na pružinové váze, která ukazuje jeho hmotnost nebo „zdánlivou“ hmotnost. Silové diagramy pro případy, kdy (a) zrychlení kabiny výtahu je nulové, (b) $a = +3{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (c) $a = -3{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

KONTROLA 8: Jaký by byl údaj na stupnici, kdyby se lano kabiny přetrhlo a kabina by padala volným pádem? Jaká je tedy zdánlivá váha (či zdánlivá hmotnost) pasažéra při volném pádu?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Newtonovská mechanika

Rychlost částice nebo tělesa nahrazeného hmotným bodem se může měnit (částice se může urychlovat), jestliže na ni okolní objekty působí **silami**. *Newtonovská mechanika* uvádí do souvislosti celkové silové působení na zkoumané těleso s jeho zrychlením.

Síla

Pozorujeme-li, že těleso má vzhledem k inerciální soustavě nenulové zrychlení (jeho pohyb je nerovnoměrný nebo křivočarý), jsme si díky prvnímu Newtonovu zákonu jisti, že je ovlivněno interakcí s okolními objekty. Kvantitativně je tato interakce popsána fyzikální veličinou zvanou **síla**. Vztahy pro síly charakterizující konkrétní interakce jsou dány **silovými zákony**, které je třeba zjistit experimentálně. Silový zákon lze odhalit tak, že sledujeme *testovací těleso* o známé hmotnosti m, které interaguje s *jediným* okolním objektem. Síla, kterou tento objekt působí na těleso, bude v každém okamžiku dána součinem hmotnosti testovacího tělesa m a jeho zrychlení $\boldsymbol{a}$. Experimentálně bylo zjištěno, že síly jsou vektorové veličiny a lze je skládat podle pravidel vektorové algebry. **Výslednice sil** působících na těleso je jejich vektorovým součtem. Velikost síly je číselně dána velikostí zrychlení, které tato síla udílí standardnímu kilogramu. Síla, která standardnímu kilogramovému tělesu udělí zrychlení o velikosti 1 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, má podle definice velikost 1 N. Směr zrychlení a směr síly jsou shodné.

Hmotnost

Hmotnost tělesa je jeho charakteristika, která určuje vztah mezi jeho zrychlením a silou (nebo výslednicí sil), která mu toto zrychlení udílí. Hmotnost je skalární veličina.

První Newtonův zákon

Volné částice se navzájem pohybují rovnoměrně přímočaře nebo jsou vůči sobě v klidu. S volnými částicemi lze spojit preferované vztažné soustavy, nazývané inerciální. Volná částice je vzhledem k inerciální vztažné soustavě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu (tj. v pohybu s konstantní rychlostí).

Druhý Newtonův zákon

Síly působící na těleso o hmotnosti m mu udílejí zrychlení, které je dáno jejich výslednicí $\sum \boldsymbol{F}$ podle vztahu

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{5.1}$$

Tento vztah lze rozepsat do složek:

$$ma_x = \sum F_x, \quad ma_y = \sum F_y, \quad ma_z = \sum F_z. \tag{5.2}$$

Z druhého Newtonova zákona vyplývá, že v soustavě jednotek SI je jednotka síly

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}. \tag{5.3}$$

Silový diagram je užitečný pro řešení úloh pomocí druhého Newtonova zákona: je to zjednodušený diagram, konstruovaný pro *jediné* těleso, reprezentované bodem. Vnější síly působící na toto těleso jsou znázorněny jako vektory. V diagramu je rovněž zakreslena soustava souřadnic zvolená tak, aby řešení úlohy bylo co nejjednodušší.

Některé typy sil

Tíhová síla $\boldsymbol{G}$ je síla, kterou působí na těleso Země (nebo jiný astronomický objekt, v jehož těsné blízkosti se těleso nachází):

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \tag{5.10}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení (zrychlení volného pádu).

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je tlaková síla, kterou působí na těleso podložka, na níž těleso spočívá. Je k podložce vždy kolmá.

Třecí silou $\boldsymbol{F}$ působí na těleso podložka, pokud je podél ní uváděno do skluzu, nebo již po ní klouže. Tato síla je rovnoběžná s podložkou a směřuje proti směru skutečného či zamýšleného pohybu tělesa. **Dokonale hladká podložka** působí na těleso zanedbatelně malou třecí silou.

Tahovou silou $\boldsymbol{T}$ působí na těleso připojené lano (vlákno). Její působiště je v místě spoje. Síla má směr vlákna a míří ven z tělesa. Pro **nehmotné** vlákno (tj. vlákno se zanedbatelnou hmotností) má tahová síla na obou jeho koncích stejnou velikost, i když je vedeno přes **nehmotnou kladku**, která se může otáčet **bez tření** (hmotnost kladky je zanedbatelná stejně jako třecí síla v ose kladky, která by bránila její rotaci).

Třetí Newtonův zákon

Působí-li těleso A silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$ na těleso B, působí i těleso B na těleso A, a to silou stejně velkou, avšak opačně orientovanou:

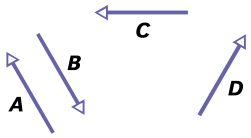
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}. \tag{5.14}$$

Tyto síly působí na *různá* tělesa.

OTÁZKY

1. Na pohybující se těleso působí dvě síly. Je možné, aby se těleso pohybovalo (a) rovnoměrně, (b) stálou rychlostí? Mohla by být rychlost tělesa nulová (c) v některém okamžiku, (d) trvale?

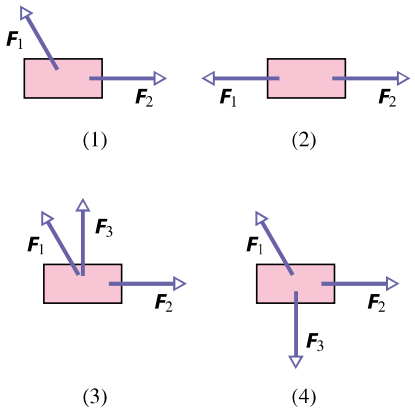
2. Obr. 5.26 znázorňuje čtyři síly stejné velikosti. Je možné vybrat z nich tři tak, aby se při jejich (současném) působení na těleso jeho rychlost neměnila? V kladném případě tyto síly označte.



Obr. 5.26 Otázka 2

3. Obr. 5.27 znázorňuje pohled shora na čtyři situace, v nichž síly působí na kostku spočívající na dokonale hladké podlaze. Ve kterých z nich lze vhodně zvolit velikost sil tak, aby kostka (a) byla v klidu, (b) pohybovala se konstantní rychlostí?

4. Svislá síla $\boldsymbol{F}$ působí na kostku o hmotnosti m ležící na podlaze. Co se děje s normálovou silou $\boldsymbol{N}$, jíž působí na kostku podlaha, narůstá-li velikost F síly $\boldsymbol{F}$ z nulové hodnoty a síla $\boldsymbol{F}$ směřuje (a) dolů, (b) vzhůru?

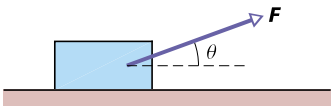


Obr. 5.27 Otázka 3

5. Na těleso na obr. 5.8 působí tíhová síla o velikosti 100 N. Na jeho povrchu leží další těleso, na něž působí tíhová síla 50 N. Jaká je normálová síla, jíž působí (a) dolní těleso na horní, (b) stůl na dolní těleso?

6. (a) Přispívá svislá složka síly $\boldsymbol{F}$ na obr. 5.28 k nadzvednutí krabice, nebo ji přitlačuje k podlaze? (b) Předpokládejte, že

hmotnost krabice je m. Je velikost normálové síly, jíž působí podlaha na krabici, stejná, větší či menší ve srovnání s mg? (c) Je svislá složka síly $\boldsymbol{F}$ rovna $F \sin\theta$, nebo $F \cos\theta$?

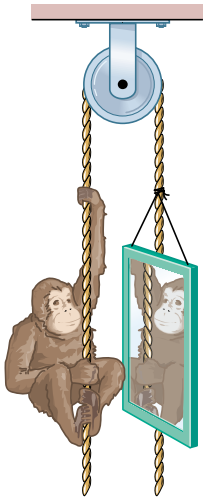


Obr. 5.28 Otázka 6

7. Zavěšené těleso na obr. 5.10c váží 75 N. Rozhodněte, zda je hodnota T, resp. T' stejná, větší či menší než 75 N, pohybuje-li se těleso směrem dolů (a) se vzrůstající rychlostí, (b) s klesající rychlostí.

8. Kabina výtahu je zavěšena na jediném laně a nemá protizávaží. V přízemí do kabiny nastoupí pasažéři, kteří jedou do nejvyššího patra a tam vystoupí. Nahoře nastoupí noví pasažéři a jedou do přízemí. Rozhodněte, v kterých fázích této okružní jízdy je velikost síly napínající závěsné lano (a) stejná jako velikost tíhové síly působící na pasažéry a kabinu, (b) větší, (c) menší.

9. Na obr. 5.29 je nehmotné lano vedeno přes kladku, která se může otáčet bez tření. Na laně visí opice a dívá se do zrcadla, které má stejnou hmotnost jako ona a je zavěšeno na druhém konci lana. Může opice „uniknout“ svému obrazu v zrcadle, jestliže (a) poleze po laně vzhůru, (b) poleze po laně dolů, (c) pustí lano? Zdůvodněte.

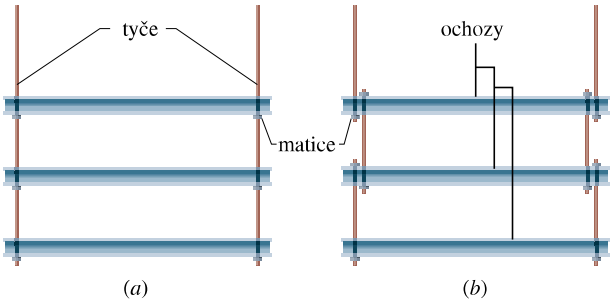


Obr. 5.29 Otázka 9

10. Je 17. července 1981, Kansas City: nově otevřená hala Hyatt Regency je plná lidí, kteří poslouchají oblíbené skladby 40. let a tančí při nich. Mnoho lidí se tísní na ochozech, které visí jako mosty nad širokým atriem. Najednou se dva ochozy utrhnou a spadnou na ty, kteří se baví dole…

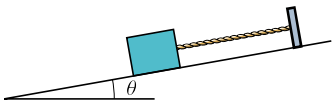
Ochozy byly zavěšeny nad sebou na svislých tyčích a připevněny k nim pomocí šroubů s maticemi. V původním návrhu konstrukce měly být použity pouze dvě svislé tyče a ke každé z nich měly být připevněny tři ochozy (obr. 5.30a). Tíhová síla působící na každý z ochozů i s lidmi měla průměrnou velikost G. Jaká by byla celková zátěž závitů a dvou šroubů s maticemi držících (a) nejnižší, (b) nejvyšší ochoz?

Předpokládejme, že šrouby nelze uchytit k tyčím jinak, než na jejich koncích. Je tedy třeba zvolit jiný typ konstrukce. Na rozdíl od původního provedení je nyní použito šesti tyčí a každá je spojena se dvěma ochozy (obr. 5.30b). Jaká je nyní celková zátěž závitů a dvou šroubů držících (c) nejnižší, (d) nejvyšší ochoz? Právě tato druhá konstrukce byla použita v popisovaném případě.



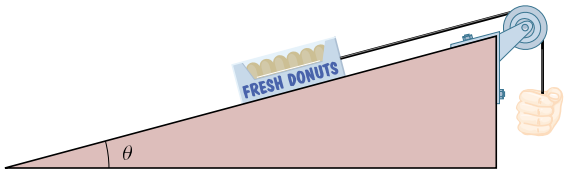
Obr. 5.30 Otázka 10

11. Kostka na obr. 5.31 je připevněna na provaze uchyceném ke sloupku, který je pevně spojen s nakloněnou rovinou. Rozhodněte, zda velikosti následujících sil rostou, klesají či zůstávají neměnné, narůstá-li úhel sklonu θ od nulové hodnoty: (a) složka tíhové síly působící na kostku měřená podél nakloněné roviny, (b) síla napínající provaz, (c) složka tíhové síly působící na kostku měřená ve směru kolmém k nakloněné rovině, (d) normálová síla, jíž působí nakloněná rovina na kostku.



Obr. 5.31 Otázka 11

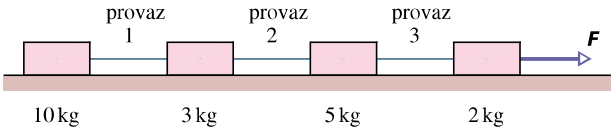
12. Krabice s koblihami leží na dokonale hladké nakloněné rovině (obr. 5.32). Složka tíhové síly působící na krabici měřená podél nakloněné roviny má velikost 5 N. Tahová síla provazu je T. Rozhodněte, je-li hodnota T stejná, větší či menší než 5 N, jestliže krabice (a) je v klidu, (b) stoupá po nakloněné rovině s konstantní rychlostí, (c) klesá s konstantní rychlostí, (d) stoupá s klesající rychlostí, (e) klesá s klesající rychlostí.



Obr. 5.32 Otázka 12

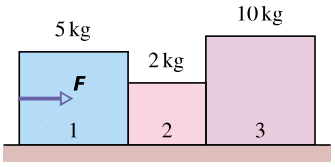
13. Na obr. 5.33 jsou čtyři kostky tažené po dokonale hladké vodorovné podložce silou $\boldsymbol{F}$. Jaká celková hmotnost je urychlo-

vána směrem vpravo (a) silou $\boldsymbol{F}$, (b) vláknem 3, (c) vláknem 1? (d) Sestavte sestupné pořadí kostek podle velikosti jejich zrychlení. (e) Sestavte sestupné pořadí vláken podle velikosti tažné síly. (Přípravná otázka pro řešení úloh 48 a 49.)



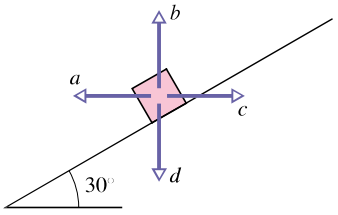
Obr. 5.33 Otázka 13

14. Na obr. 5.34 jsou tři kostky tlačené po dokonale hladké podložce vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$. Jaká celková hmotnost je urychlována směrem vpravo (a) silou $\boldsymbol{F}$, (b) silou $\boldsymbol{F}_{21}$, jíž působí kostka 1 na kostku 2, (c) silou $\boldsymbol{F}_{32}$, jíž působí kostka 2 na kostku 3? (d) Seřaďte kostky sestupně podle velikosti jejich zrychlení. (e) Seřaďte sestupně síly $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_{21}$, $\boldsymbol{F}_{32}$ podle jejich velikosti. (Přípravná otázka pro úlohu 40.)



Obr. 5.34 Otázka 14

15. Obr. 5.35 ukazuje čtyři možné směry působení síly o velikosti F na kostku umístěnou na nakloněné rovině. Směry jsou buď vodorovné, nebo svislé. (Předpokládáme, že velikost síly není dostatečná k tomu, aby se v případě a nebo b kostka odpoutala od podložky.) Uspořádejte jednotlivé možnosti sestupně podle velikosti odpovídající normálové síly, jíž tlačí podložka na kostku.



Obr. 5.35 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 5.3 Síla

1C. Standardní kilogramové těleso se pohybuje se zrychlením o velikosti $2{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, které svírá s kladným směrem osy x úhel 20°. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku výslednice sil působících na těleso. (b) Vyjádřete výslednici pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

2C. Standardní kilogramové těleso je urychlováno silami $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. (a) Zapište výslednou sílu pomocí jednotkových vektorů. Určete velikost a směr (b) výsledné síly působící na těleso, (c) zrychlení tělesa.

3Ú. Standardní kilogramové těleso se pohybuje se zrychlením o velikosti $4{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, které svírá s kladným směrem osy x úhel 160°. Zrychlení udílejí tělesu dvě síly, z nichž jedna má tvar $\boldsymbol{F}_1 = (2{,}5\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}6\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. (a) Zapište druhou ze sil pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete její velikost a směr.

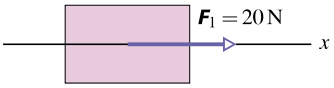
ODST. 5.5 Druhý Newtonův zákon

4C. Na kostku o hmotnosti 2,0 kg, která může klouzat po dokonale hladké kuchyňské lince v rovině xy, působí dvě vodorovné síly. Jedna z nich je $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Zapište zrychlení kostky pomocí jednotkových vektorů, je-li druhá síla (a) $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{F}_2 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$.

5C. Částice, na niž působí dvě síly, se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} = (3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil je $\boldsymbol{F}_1 = (2\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Určete druhou sílu.

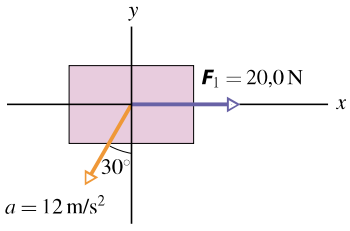
6C. Na částici pohybující se stálou rychlostí $\boldsymbol{v} = (2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$ působí tři síly. Dvě z nich jsou dány takto: $\boldsymbol{F}_1 = (2\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (3\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} + (-2\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-5\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (8\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} + (-2\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$. Určete třetí sílu.

7C. Na dvoukilogramovou bednu, znázorněnou na obr. 5.36 v pohledu shora, působí dvě síly, z nichž pouze jedna je v obrázku vyznačena. Bedna se pohybuje přesně podél osy x. Pro každou z následujících hodnot x-ové složky zrychlení a_x bedny určete druhou sílu: (a) $10{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (b) $20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (c) 0, (d) $-10{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (e) $-20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 5.36 Cvičení 7

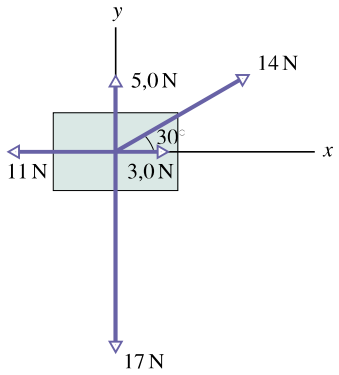
8C. Na dvoukilogramovou bednu, znázorněnou na obr. 5.37 v pohledu shora, působí dvě síly, z nichž pouze jedna je v obrázku vyznačena. Obrázek také ukazuje zrychlení bedny. (a) Vyjádřete druhou sílu pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete její velikost a směr.



Obr. 5.37 Cvičení 8

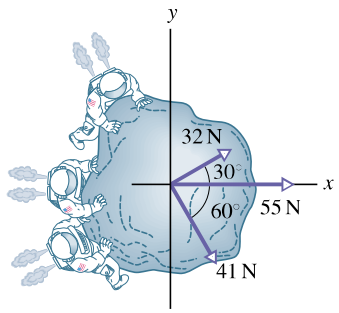
9C. Bedna na obr. 5.38 má hmotnost 4,0 kg. Působí na ni pět

sil. Vyjádřete zrychlení bedny (a) pomocí jednotkových vektorů a (b) určete jeho velikost a směr.



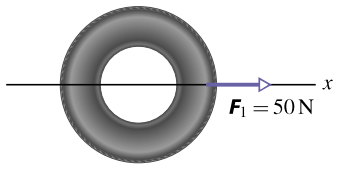
Obr. 5.38 Cvičení 9

10Ú. Tři astronauti pohánění tryskovými motorky na zádech tlačí asteroid o hmotnosti 120 kg k řídícímu stanovišti. Působí na něj při tom silami, vyznačenými v obr. 5.39. Jaké je zrychlení asteroidu vyjádřené (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru?



Obr. 5.39 Úloha 10

11Ú. Obr. 5.40 představuje pohled shora na pneumatiku o hmotnosti 12 kg, taženou třemi lany. Jedna ze sil ($\boldsymbol{F}_1$, velikost 50 N) je vyznačena. Stanovte orientaci dalších dvou sil $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ tak, aby velikost výsledného zrychlení byla co nejmenší a určete tuto velikost pro (a) $F_2 = 30\,\text{N}$, $F_3 = 20\,\text{N}$, (b) $F_2 = 30\,\text{N}$, $F_3 = 10\,\text{N}$, (c) $F_2 = F_3 = 30\,\text{N}$.



Obr. 5.40 Úloha 11

ODST. 5.6 Některé typy sil

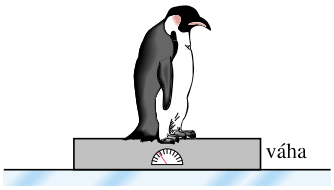
12C. Určete hmotnost a tíhovou sílu pro (a) 1 400librový sněžný skútr a (b) 421kilogramovou tepelnou pumpu.

13C. Jaká je tíhová síla v newtonech a hmotnost v kilogramech pro (a) 5,0librový balík cukru, (b) 240librového zápasníka, (c) 1,8tunový automobil?

14C. Vesmírný cestovatel, jehož hmotnost je 75 kg, opustil Zemi. Určete velikost tíhové síly, která na něj působí (a) na Zemi, (b) na Marsu, kde je $g = 3{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, (c) v meziplanetárním prostoru, kde je $g = 0$. (d) Jaká je jeho hmotnost ve všech těchto místech?

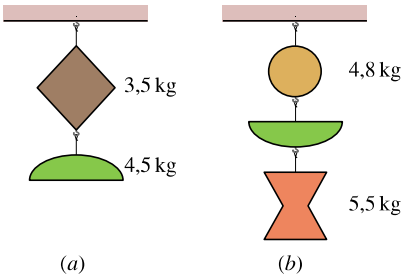
15C. Na částici působí tíhová síla 22 N v místě, kde je $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Určete tíhovou sílu působící na částici v místě, kde je $g = 4{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaká je v tomto místě její hmotnost? (b) Jaká bude hmotnost a tíhová síla působící na tuto částici, přemístíme-li ji do prostoru, kde je $g = 0$?

16C. Tučňák o hmotnosti 15,0 kg stojí na osobní váze (obrázek 5.41). Určete (a) tíhovou sílu $\boldsymbol{G}$ působící na tučňáka a (b) normálovou sílu $\boldsymbol{N}$. Jaký údaj ukazuje váha, je-li cejchována v newtonech?



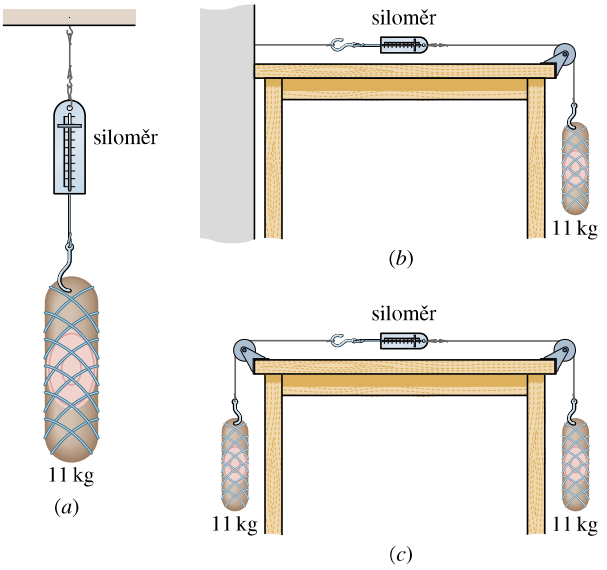
Obr. 5.41 Cvičení 16

17C. Na obr. 5.42a je znázorněna ozdoba se dvěma kovovými díly navléknutými na vlákně o zanedbatelné hmotnosti, zavěšená u stropu. Hmotnosti dílů jsou dány. Jaká síla napíná (a) dolní vlákno, (b) horní vlákno? Obr. 5.42b zachycuje podobnou ozdobu se třemi kovovými díly. Hmotnosti nejvyššího a nejnižšího dílu jsou dány. Síla napínající horní vlákno má velikost 199 N. Jak velká síla napíná (c) dolní a (d) prostřední vlákno?



Obr. 5.42 Cvičení 17

18C. (a) Salám o hmotnosti 11,0 kg je zavěšen na pružině siloměru, který je připevněn provazem ke stropu (obr. 5.43a). Jaký údaj je na stupnici siloměru? (b) Na obr. 5.43b je týž salám zavěšen na provaze vedeném přes kladku a upevněném k pružině siloměru. Siloměr je připevněn dalším provazem ke stěně. Jaký je nyní údaj na stupnici siloměru? (c) Na obr. 5.43c je stěna nahrazena jiným salámem o hmotnosti 11,0 kg a soustava je v rovnováze. Určete údaj na stupnici siloměru i v tomto případě.



Obr. 5.43 Cvičení 18

ODST. 5.8 Užití Newtonových zákonů

19C. Tíhová síla působící na letící letadlo je kompenzována svislou vztlakovou silou, kterou na letadlo působí okolní vzduch. Jak velká je vztlaková síla, je-li hmotnost letadla $1{,}20 \cdot 10^3$ kg?

20C. Jaká je velikost výslednice sil působících na automobil o hmotnosti 1 900 kg, který se rozjíždí se zrychlením o velikosti 3,1 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

21C. Pokusné raketové sáně mohou být během 1,8 s rovnoměrně urychleny z klidu až na rychlost 1 600 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jaká je velikost potřebné průměrné síly, je-li hmotnost sání 500 kg?

22C. Automobil jedoucí rychlostí 53 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ narazil do mostního pilíře. Řidič se přitom pohnul o 65 cm dopředu (vzhledem k silnici), než byl jeho pohyb zastaven airbagem. Jak velká síla (předpokládáme stálou sílu) působila na řidičovu horní část těla, jejíž hmotnost je 41 kg?

23C. Při zachycení zbloudilého neutronu jádrem se neutron vlivem *silné interakce* musí zastavit na vzdálenosti rovné průměru jádra. Síla, která „drží“ jádro pohromadě, je vně jádra prakticky nulová. Předpokládejme, že zbloudilý neutron s počáteční rychlostí o velikosti $1{,}4{\cdot}10^7$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je právě tak tak zachycen jádrem o průměru $d = 1{,}0{\cdot}10^{-14}$ m. Jak velká je síla působící na neutron, považujeme-li ji za konstantní? Hmotnost neutronu je $1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg.

24C. V modifikované přetahované se přetahují dva lidé nikoli na provaze, ale o sáně s hmotností 25 kg, které leží na (dokonale hladké) ledové ploše. Jaké bude zrychlení saní, vyvine-li jeden z hráčů sílu o velikosti 90 N a druhý 92 N?

25C. Motocykl o hmotnosti 225 kg dosáhne z klidu rychlosti 90 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ během 5,0 s. (a) Jak velké je zrychlení motocyklu, považujeme-li je za konstantní? (b) Jaká je velikost výsledné síly urychlující motocykl?

26C. Vraťme se k obr. 5.15 a předpokládejme, že hmotnosti znázorněných těles jsou $m = 2{,}0$ kg a $M = 4{,}0$ kg. (a) Bez výpočtu rozhodněte, které z obou těles je nutno zavěsit na konec lana, abychom docílili co největšího zrychlení. Jaká je v tomto případě (b) velikost zrychlení a (c) velikost tahové síly lana?

27C. Vraťme se k obr. 5.22. Zvolme hmotnost kostky $m = 8{,}5$ kg a úhel $\theta = 30°$. Určete (a) tahovou sílu provazu a (b) normálovou sílu působící na kostku. (c) Jaké bude zrychlení kostky, jestliže se provaz přetrhne?

28C. Tryskový letoun se rozjíždí po startovní dráze se zrychlením 2,3 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Má dva tryskové motory, z nichž každý vyvine tažnou sílu o velikosti $1{,}4{\cdot}10^5$ N. Kolik váží letadlo?

29C. *Sluneční plachtění.* „Sluneční jachta“ je kosmická loď s velkou „plachtou“, poháněná světelnými paprsky ze Slunce. I když je světelný tlak v běžných podmínkách velice malý, může být dostatečný k tomu, aby dopravil kosmickou loď na bezplatný, i když velmi pomalý výlet. Předpokládejme, že hmotnost lodi je 900 kg a působí na ni tlaková síla o velikosti 20 N. (a) Jak velké je zrychlení lodi? (b) Startuje-li loď z klidu, jak daleko se dostane za 1 den a (c) jak velké rychlosti za tu dobu dosáhne?

30C. Tahová síla, při které praskne rybářský vlasec, se všeobecně nazývá „pevností“ vlasce. Jakou nejmenší pevnost vlasce (v newtonech) musíme požadovat, aby se 19librový losos zastavil na vzdálenosti 4,4 palce, pohyboval-li se rychlostí o velikosti 9,2 stop na sekundu? Předpokládejte, že zrychlení lososa je konstantní. Převody zadaných údajů do soustavy SI vyhledejte v převodní tabulce.

31C. V laboratorním experimentu je původně klidový elektron ($m = 9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg) rovnoměrně urychlen na vzdálenosti 1,5 cm a dosáhne rychlosti $6{,}0{\cdot}10^6$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost urychlující síly? (b) Jak velká je tíhová síla působící na elektron?

32C. Elektron vstupuje do elektrického pole s vodorovnou rychlostí o velikosti $1{,}2{\cdot}10^7$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pole na něj působí stálou svislou silou o velikosti $4{,}5{\cdot}10^{-16}$ N. Hmotnost elektronu je $9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg. Zjistěte, jaká bude svislá složka posunutí elektronu poté, co ve vodorovném směru urazil 30 mm.

33C. Automobil vážící $1{,}30{\cdot}10^4$ N začne brzdit při rychlosti 40 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a zastaví se na dráze 15 m. Za předpokladu, že je brzdná síla konstantní, určete (a) její velikost a (b) dobu brzdění. Jaká bude (c) brzdná dráha a (d) doba brzdění automobilu při téže brzdné síle, byla-li velikost počáteční rychlosti dvojnásobná? (Tato úloha může posloužit k získání představy o nebezpečí rychlé jízdy.)

34C. Určete počáteční zrychlení rakety o hmotnosti $1{,}3{\cdot}10^4$ kg, je-li počáteční tažná síla jejího motoru $2{,}6{\cdot}10^5$ N. Nezanedbávejte tíhovou sílu působící na raketu.

35C. Celková hmotnost rakety s nákladem je $5{,}0{\cdot}10^4$ kg. (a) Jak velká je tažná síla motoru, jestliže se raketa po zážehu „vznáší“ nad startovací rampou, (b) raketa se urychluje se zrychlením o velikosti 20 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

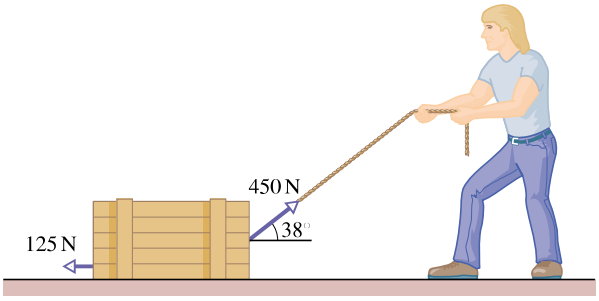
36Ú. Dívka o hmotnosti 40 kg si na hladině zamrzlého jezera hraje se sáněmi o hmotnosti 8,4 kg. Dívka a sáně jsou od sebe

vzdáleny o 15 m. Holčička táhne sáně na provaze směrem k sobě vodorovnou silou o velikosti 5,2 N. (a) S jakým zrychlením se pohybují sáně? (b) S jakým zrychlením se pohybuje dívka? (c) Jak daleko od původního stanoviště dívky se střetnou, neuvažujeme-li působení třecích sil?

37Ú. Požárník o hmotnosti 72 kg sjíždí dolů po svislé tyči se zrychlením o velikosti 3,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je velikost a směr (a) svislé síly, jíž působí tyč na požárníka, (b) svislé síly, jíž působí požárník na tyč?

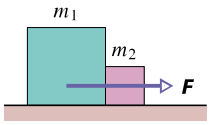
38Ú. Kulička o hmotnosti $3{,}0{\cdot}10^{-4}$ kg je zavěšena na niti. Stálý vítr, který vane ve vodorovném směru, na ni působí tak, že kulička je v klidu a nit svírá se svislým směrem úhel 37°. Určete (a) velikost síly větru a (b) velikost tažné síly niti.

39Ú. Dělník vleče bednu po podlaze pomocí lana (obr. 5.44). Lano je od vodorovného směru odkloněno o úhel 38° a dělník je táhne silou o velikosti 450 N. Podlaha působí na bednu mj. vodorovnou silou o velikosti 125 N, směřující proti jejímu pohybu. Vypočtěte zrychlení bedny, (a) je-li její hmotnost 310 kg, (b) váží-li bedna 310 N.



Obr. 5.44 Úloha 39

40Ú. Dvě kostky ležící na dokonale hladkém stole se dotýkají (obr. 5.45). (a) Určete síly, jimiž na sebe kostky navzájem působí, je-li $m_1 = 2{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg a $F = 3{,}2$ N. (b) Předpokládejme, že síla o stejné velikosti F bude působit na kostku m_2 v opačném směru. Ukažte, že velikost sil, jimiž na sebe nyní kostky působí, je 2,1 N, tj. je odlišná od výsledku úlohy (a). Zdůvodněte tento rozdíl.



Obr. 5.45 Úloha 40

41Ú. Představme si, že tlačíme malou ledničku stálou silou $\boldsymbol{F}$ po naleštěné (dokonale hladké) podlaze tak, že síla $\boldsymbol{F}$ je buď vodorovná (případ 1), nebo je od vodorovného směru odkloněna o úhel θ šikmo vzhůru (případ 2). (a) Jaký je poměr velikostí rychlostí, kterých dosáhne lednička v případech 2 a 1, tlačíme-li ji vždy po stejnou dobu t? (b) Jaký bude tento poměr, posune-li se lednička v obou případech do téže vzdálenosti d?

42Ú. Pro zábavu: Pásovec klouže po dokonale hladké zamrzlé hladině rybníka s počáteční rychlostí o velikosti 5,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, která je souhlasně rovnoběžná se souřadnicovou osou x. Jeho počáteční polohu zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Závan větru působí na pásovce silou o velikosti 17 N ve směru kladně orientované osy y. Pomocí jednotkových vektorů dané kartézské soustavy souřadnic zapište (a) jeho rychlost a (b) jeho polohu po uplynutí 3,0 s.

43Ú. Celková hmotnost výtahu i s nákladem je 1 600 kg. Určete tažnou sílu nosného lana, jestliže se výtah, který původně klesal rychlostí 12 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, zastavil na dráze 42 m.

44Ú. Předmět je zavěšen na siloměru připevněném ke stropu kabiny výtahu. Výtah stojí a na stupnici siloměru je údaj 65 N. Jaký údaj bude ukazovat siloměr, bude-li výtah stoupat (a) konstantní rychlostí 7,6 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (b) rychlostí klesající z počáteční hodnoty 7,6 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, je-li velikost zrychlení 2,4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

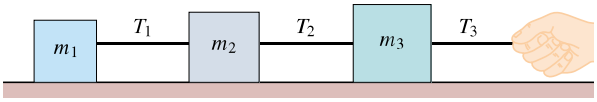
45Ú. Tryskový motor o hmotnosti 1 400 kg je připevněn k trupu dopravního letadla třemi šrouby (obvyklá praxe). Předpokládejme, že každý šroub nese jednu třetinu zátěže. (a) Vypočtěte sílu působící na každý šroub, jestliže letadlo čeká na startovací dráze na pokyn k odletu. (b) Během letu se letadlo dostane do turbulence, vlivem níž získá náhle zrychlení o velikosti 2,6 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ směřující svisle vzhůru. Vypočtěte sílu působící na každý šroub za této situace.

46Ú. Na obr. 5.46 je vrtulník o hmotnosti 15 000 kg, který zvedá nákladní automobil o hmotnosti 4 500 kg se zrychlením 1,4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Vypočtěte (a) sílu, jíž působí vzduch na vrtuli, (b) tažnou sílu horního nosného lana.

Obr. 5.46 Úloha 46

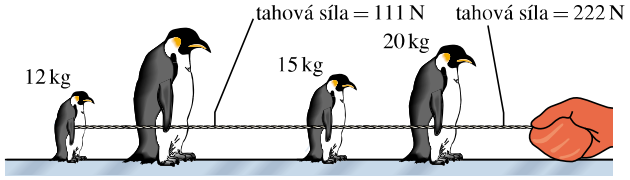
47Ú. Člověk o hmotnosti 80 kg skáče na betonový dvorek z okna umístěného ve výšce pouhých 0,5 m. Při dopadu zapomene pokrčit kolena, takže se jeho pohyb zastaví na vzdálenosti 2,0 cm. (a) Jaké je průměrné zrychlení člověka od okamžiku, kdy se dotkl chodidly dvorku, do chvíle, kdy byl již zcela v klidu? (b) Jakou silou byly při tomto skoku namáhány jeho kosti?

48Ú. Tři kostky spojené podle obr. 5.47 jsou taženy po dokonale hladké vodorovné podložce směrem vpravo. Tahová síla má velikost $T_3 = 65$ N. Hmotnosti kostek jsou $m_1 = 12{,}0$ kg, $m_2 = 24{,}0$ kg a $m_3 = 31{,}0$ kg. Vypočtěte (a) zrychlení soustavy, (b) velikosti tahových sil T_1 a T_2 vláken spojujících kostky.



Obr. 5.47 Úloha 48

49Ú. Na obr. 5.48 jsou čtyři hraví tučňáci, které jejich ošetřovatel táhne na laně po velmi kluzkém (dokonale hladkém) ledu. Hmotnosti tří tučňáků a velikosti tažných sil jednotlivých částí lana jsou dány. Určete hmotnost zbývajícího tučňáka.



Obr. 5.48 Úloha 49

50Ú. Kabina výtahu vážící 6 240 lb se rozjíždí směrem vzhůru se zrychlením o velikosti 4,00 ft·s^{-2}. (a) Vypočtěte tažnou sílu lana. (b) Jaká by byla tažná síla lana, kdyby stoupající výtah *brzdil* se zrychlením o stejné velikosti? Údaje převeďte do soustavy jednotek SI.

51Ú. Parašutista o hmotnosti 80 kg padá se zrychlením o velikosti 2,5 m·s^{-2}. Hmotnost padáku je 5,0 kg. (a) Jakou vztlakovou silou působí vzduch na otevřený padák? (b) Jakou tahovou silou působí na padák člověk?

52Ú. Člověk o hmotnosti 85 kg se spouští na zem z výšky 10,0 m tak, že se drží lana vedeného přes kladku, na jehož druhém konci je zavěšen pytel s pískem o hmotnosti 65 kg. Kladka se otáčí bez tření. (a) Jakou rychlostí dopadne člověk na zem, jestliže byl zpočátku v klidu? (b) Může člověk nějakým způsobem rychlost dopadu snížit?

53Ú. Letadlo o váze $5{,}2\cdot10^4$ lb (obr. 5.49) musí mít před vzlétnutím rychlost 280 ft/s. Motor vyvine sílu o velikosti nejvýše 24 000 lb, která však nepostačuje k tomu, aby letadlo dosáhlo požadované rychlosti na dráze 300 ft, odpovídající délce paluby. Jakou nejmenší silou (předpokládáme, že konstantní) musí na letadlo působit katapultovací zařízení, aby letadlo mohlo vzlétnout? Předpokládáme, že jak motor, tak katapultovací zařízení působí na letadlo při rozjezdu konstantní silou.

54Ú. Představme si kosmickou loď blížící se k povrchu Callista, jednoho z Jupiterových měsíců. Vyvine-li motor brzdnou sílu (směřující od povrchu svisle vzhůru) o velikosti 3 260 N, bude loď klesat s konstantní rychlostí. Pokud by byla velikost brzdné síly pouze 2 200 N, klesala by loď se zrychlením o velikosti 0,39 m·s^{-2}. (a) Jaká tíhová síla působí na loď v blízkosti povrchu Callista? (b) Jaká je hmotnost lodi? (c) Jaké je tíhové zrychlení v blízkosti povrchu Callista?

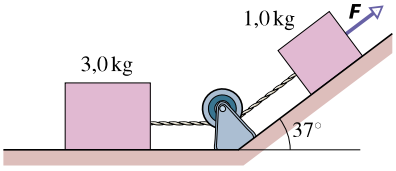
55Ú. Artista o hmotnosti 52 kg se spouští po laně, které může prasknout, překročí-li velikost tahové síly hodnotu 425 N. (a) Co se stane, visí-li artista na laně v klidu? (b) S jak velkým zrychlením se musí artista spouštět, aby právě zabránil přetržení lana?

Obr. 5.49 Úloha 53

56Ú. Řetěz tvořený pěti články, z nichž každý má hmotnost 0,100 kg, je zvedán svisle vzhůru se stálým zrychlením 2,50 m·s^{-2} (obr. 5.50). Určete (a) síly vzájemného působení mezi všemi dvojicemi sousedních článků, (b) sílu $\boldsymbol{F}$, jíž působí na horní článek člověk zvedající řetěz, (c) *výslednou* sílu udělující zrychlení každému článku.

Obr. 5.50 Úloha 56

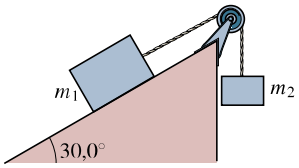
57Ú. Těleso o hmotnosti 1,0 kg leží na nakloněné rovině s úhlem sklonu 37° a je spojeno s tělesem o hmotnosti 3,0 kg podle obr. 5.51. Styčné plochy jsou dokonale hladké a kladka se otáčí bez tření. Jaká je tažná síla spojovacího vlákna, je-li $F = 12$ N?



Obr. 5.51 Úloha 57

58Ú. Kostka o hmotnosti $m_1 = 3{,}70$ kg spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0°. Vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření je spojena

s další kostkou, jejíž hmotnost je $m_2 = 2{,}30\,\text{kg}$ (obr. 5.52). Určete (a) velikost zrychlení každé z kostek a (b) směr zrychlení kostky m_2. (c) Jakou silou je napínáno vlákno?



Obr. 5.52 Úloha 58

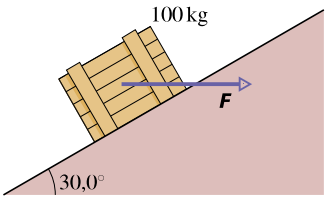
59Ú. Balík opotřebeného pokrývačského materiálu o hmotnosti 50 kg je třeba spustit na zem na laně, jehož pevnost je 390 N (při vyšší zátěži se lano přetrhne). (a) Jak lze zabránit přetržení lana během spouštění materiálu? (b) Předpokládejme, že spouštíme balík z výšky 9 m způsobem, jímž právě tak tak zabráníme přetržení lana. Jakou rychlostí dopadne balík na zem?

60Ú. Kostka je vržena vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině počáteční rychlostí o velikosti v_0. Úhel sklonu nakloněné roviny je θ. (a) Jakou vzdálenost urazí kostka podél nakloněné roviny, než se dostane do bodu obratu? (b) Jak dlouho to bude trvat? (c) S jakou rychlostí se kostka vrátí do místa, ze kterého byla vržena? Číselně spočtěte pro hodnoty $\theta = 32{,}0°$ a $v_0 = 3{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

61Ú. Kosmická loď startuje svisle vzhůru z povrchu Měsíce, kde je tíhové zrychlení $1{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Loď startuje se zrychlením o velikosti $1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ vzhledem k povrchu Měsíce. Jakou silou působí sedadlo lodi na astronauta, na kterého působí na Zemi tíhová síla o velikosti 735 N?

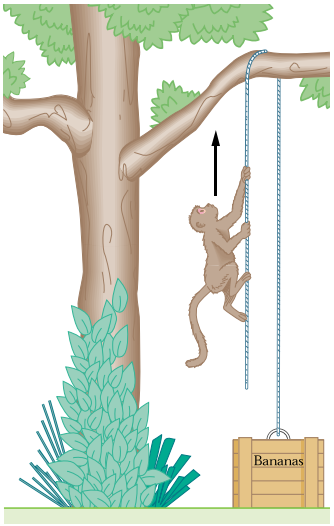
62Ú. Lampa je zavěšena na svislém provaze v kabině klesajícího výtahu, který brzdí se zrychlením o velikosti $2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Určete hmotnost lampy, víte-li, že tažná síla provazu má velikost 89 N. (b) Jak velká síla by napínala provaz, kdyby se výtah rozjížděl vzhůru se zrychlením o velikosti $2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$?

63Ú. Přepravka o hmotnosti 100 kg je tlačena stálou rychlostí vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu $30{,}0°$ (obr. 5.53). (a) Jak velká vodorovná síla $\boldsymbol{F}$ je k tomu potřebná? (b) Jakou silou tlačí nakloněná rovina na přepravku?



Obr. 5.53 Úloha 63

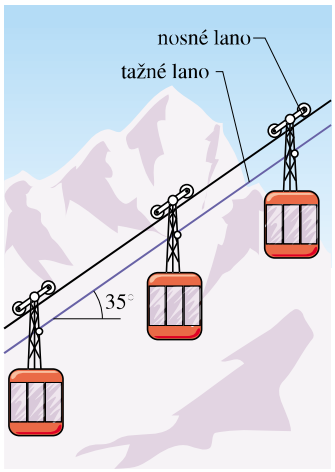
64Ú. Desetikilogramová opice leze po nehmotném provaze přehozeném přes větev stromu. Provaz je na druhém konci zatížen patnáctikilogramovým závažím ležícím na zemi (obr. 5.54). Provaz může klouzat po větvi bez tření. (a) S jakým nejmenším zrychlením musí opice lézt, má-li se zátěž odpoutat od země? Jakmile se závaží odpoutá od povrchu Země, přestane opice lézt, ale drží se provazu. (b) Jaké je nyní zrychlení opice a (c) jakou silou je napínán provaz?



Obr. 5.54 Úloha 64

65Ú. Obr. 5.55 ukazuje část alpské kabinové lanovky. Nejvyšší povolená hmotnost každé kabiny je 2 800 kg. Kabiny jezdí po nosném laně a jsou taženy dalším lanem, které je připojeno k závěsu každé z nich.

Jak se liší síly pnutí v sousedních úsecích tažného lana, mají-li kabiny maximální povolenou hmotnost a stoupají-li se zrychlením o velikosti $0{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$? Sklon lana je 35°.

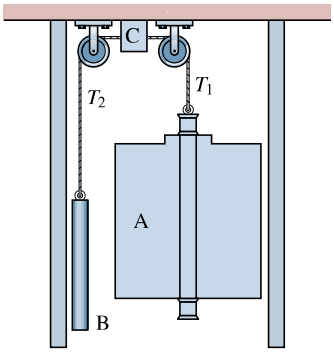


Obr. 5.55 Úloha 65

66Ú. Kosmická loď má hmotnost $1{,}20\cdot10^6\,\text{kg}$ a je zpočátku v klidu vzhledem k systému stálic. (a) S jakým stálým zrychlením by se musela loď pohybovat, aby za 3,0 dny dosáhla vzhledem k systému stálic rychlosti o velikosti $0{,}10c$ (kde c je rychlost světla)? (Neberte v úvahu korekce vyplývající z Einsteinovy

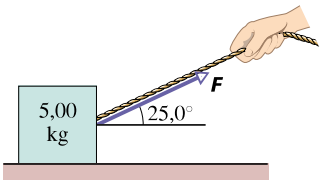
speciální teorie relativity.) (b) Vyjádřete velikost zrychlení v jednotkách g. (c) Jak velké síly je třeba k udělení tohoto zrychlení? (d) Předpokládejme, že motory se vypnou, jakmile loď dosáhne požadované rychlosti ($v = 0{,}10c$). Jak daleko dorazí loď od okamžiku startu za 5,0 světelných měsíců (vzdálenost, kterou světlo urazí za dobu 5,0 měsíců)?

67Ú. Výtah na obr. 5.56 je sestaven z kabiny (A) o hmotnosti 1 150 kg, protizávaží (B) o hmotnosti 1 400 kg, hnacího mechanismu (C), lana a dvou kladek. Hnací mechanismus lano buď urychluje, nebo zpomaluje. V důsledku toho se síla T_1 napínající lano na jedné straně hnacího mechanismu liší od síly T_2, která lano napíná na druhé straně. Předpokládejme, že kabina (A) stoupá se zrychlením o velikosti $a = 2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Se zrychlením o téže velikosti klesá protizávaží (B). Zanedbejte hmotnost kladek i lana. Určete (a) T_1, (b) T_2 a (c) velikost síly, kterou působí na lano hnací mechanismus.



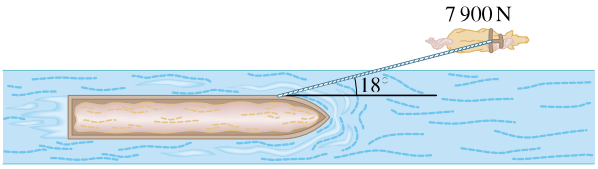
Obr. 5.56 Úloha 67

68Ú. Kostka o hmotnosti 5,00 kg je tažena po vodorovné dokonale hladké podložce provazem, na který působí síla o velikosti $F = 12{,}0$ N pod úhlem 25,0° vzhledem k vodorovné rovině (obr. 5.57). (a) Jaké je zrychlení kostky? (b) Velikost síly F začne pomalu vzrůstat. Jaká je její velikost právě v okamžiku, kdy se kostka zcela zvedne nad podložku? (c) Jaké je v tomto okamžiku zrychlení kostky?



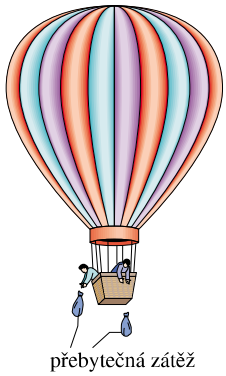
Obr. 5.57 Úloha 68

69Ú. V minulosti se přepravovaly pramice vodními kanály pomocí koní způsobem znázorněným na obr. 5.58. Předpokládejme, že kůň táhne silou 7 900 N lano, které svírá se směrem pohybu pramice úhel 18°. Pramice pluje přímo podél kanálu. Její hmotnost je 9 500 kg a zrychlení má velikost $0{,}12\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Určete sílu, kterou působí na pramici voda.



Obr. 5.58 Úloha 69

70Ú. Horkovzdušný balon o hmotnosti M svisle klesá se zrychlením o velikosti a směřujícím dolů (obr. 5.59). Určete hmotnost zátěže, kterou je třeba z balonu vyhodit, aby získal zrychlení o téže velikosti a, avšak směřující vzhůru? Předpokládáme, že vztlaková síla, jíž působí na balon okolní vzduch, se odstraněním zátěže nezmění.

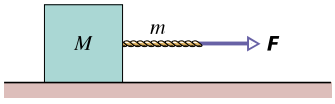


Obr. 5.59 Úloha 70

71Ú. Síla udílí tělesu o hmotnosti m_1 zrychlení o velikosti $12{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Tělesu o hmotnosti m_2 by táž síla udělila zrychlení o velikosti $3{,}30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaké zrychlení udělí tato síla objektům o hmotnosti (a) $m_2 - m_1$ a (b) $m_2 + m_1$?

72Ú. Raketa o hmotnosti 3 000 kg startuje z povrchu Země pod elevačním úhlem 60°. Motor vyvine sílu o velikosti $6{,}0{\cdot}10^4$ N, která svírá s vodorovnou rovinou stálý úhel 60°. Zážeh motoru trvá 50 s. V hrubém přiblížení můžeme zanedbat vliv ztráty hmotnosti rakety při hoření paliva i vliv působení okolního vzduchu. Určete, (a) jaké výšky nad povrchem Země dosáhne raketa do okamžiku vypnutí motoru a (b) jak daleko od místa startu dopadne opět na povrch Země, považujeme-li jej za rovinný.*

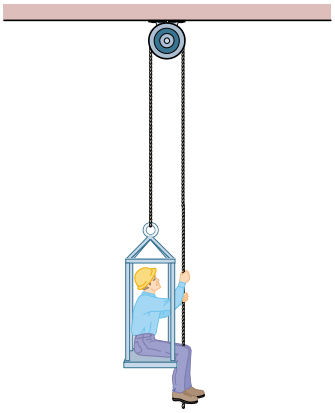
73Ú. Kostka o hmotnosti M je tažena po dokonale hladké vodorovné podložce na laně o hmotnosti m (obr. 5.60). Na konci lana působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}$. (a) Ukažte, že lano *musí* být prohnuté, byť nepatrně. Předpokládejte, že průhyb je zanedbatelný, a určete (b) zrychlení lana a kostky, (c) sílu, kterou působí lano na kostku, a (d) sílu napínající lano uprostřed.



Obr. 5.60 Úloha 73

* Zjistěte, jak se liší hodnoty g v místě startu rakety a v nejvyšším bodě, kterého raketa dosáhne, a odhadněte, zda to může ovlivnit výsledky.

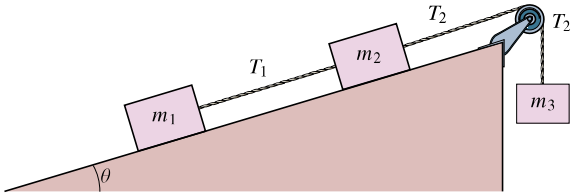
74Ú. Na obr. 5.61 je znázorněn člověk na sedačce zavěšené na nehmotném provaze. Provaz je veden přes nehmotnou kladku, která se může otáčet bez tření. Druhý konec provazu drží člověk v rukou. Celková hmotnost člověka a sedačky je 95,0 kg. (a) Jak velkou silou musí člověk táhnout provaz, aby sedačka stoupala s konstantní rychlostí? (b) Jaké tažné síly je třeba k dosažení zrychlení o velikosti $1{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? (c) Předpokládejme nyní, že druhý konec lana drží osoba stojící na zemi. Odpovězte znovu na otázky (a) a (b). (d) V každém ze čtyř výše uvedených případů určete sílu, jíž působí závěs kladky na strop.



Obr. 5.61 Úloha 74

PRO POČÍTAČ

75Ú. Na obr. 5.62 jsou znázorněny tři kostky spojené vlákny. Kostky o hmotnostech m_1 a m_2 spočívají na dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu θ, jejich spojovací vlákno je napínáno silou o velikosti T_1. Třetí kostka o hmotnosti m_3 je s kostkou m_2 spojena vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření, velikost síly napínající vlákno je v tomto případě T_2. Pro hodnoty $\theta = 20°$, $m_1 = 2{,}00\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ a $m_3 = 3{,}00\,\mathrm{kg}$ určete T_1, T_2 a zrychlení obou kostek.
(*Tip*: Užijte druhého Newtonova zákona pro každou z kostek, zapište příslušné tři rovnice a řešte je na počítači.)



Obr. 5.62 Úloha 75

76Ú. Na dvoukilogramový předmět působí tři síly, které mu udílejí zrychlení $\boldsymbol{a} = -(8{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{i} + (6{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{j}$. Dvě ze sil jsou známy: $\boldsymbol{F}_1 = (30{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (16{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = -(12{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (8{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Určete třetí sílu.

6
Síla a pohyb II

*Kočky se rády vyhřívají na sluníčku. Když ale odpočívají na římse výškové budovy, riskují nebezpečný pád. Kupodivu se však zjistilo, že kočka může docela dobře přežít, je-li výška pádu dostatečně **velká**, alespoň sedm či osm poschodí. V takovém případě rozsah jejího poranění, např. počet zlomenin nebo smrtelných zranění, s výškou pádu dokonce **klesá**! (Rekord drží kočka, která vypadla z dvaatřicátého patra a jen mírně si poranila hrudník a přišla o zub.) Je to vůbec možné?*

6.1 TŘENÍ

Třecím silám se v každodenním životě nevyhneme. Kdyby byly jedinými silami působícími na tělesa, zastavily by každý pohybující se předmět a každé otáčející se soukolí. Kolem dvaceti procent spotřeby benzinu v automobilu například připadá na kompenzaci vlivu tření v motoru a hnacím mechanismu. Na druhé straně, kdyby tření nebylo, nikam bychom se automobilem nedostali. Nemohli bychom chodit ani jezdit na kole. Nemohli bychom držet tužku a i kdyby přece, nepsala by. Hřebíky a šrouby by nebyly k ničemu, utkaná látka by se rozpadla a uzly by se rozvázaly.

V tomto článku se budeme zabývat třecími silami působícími mezi suchými pevnými povrchy těles, která se po sobě pohybují malými vzájemnými rychlostmi. Uvažujme dva jednoduché pokusy:

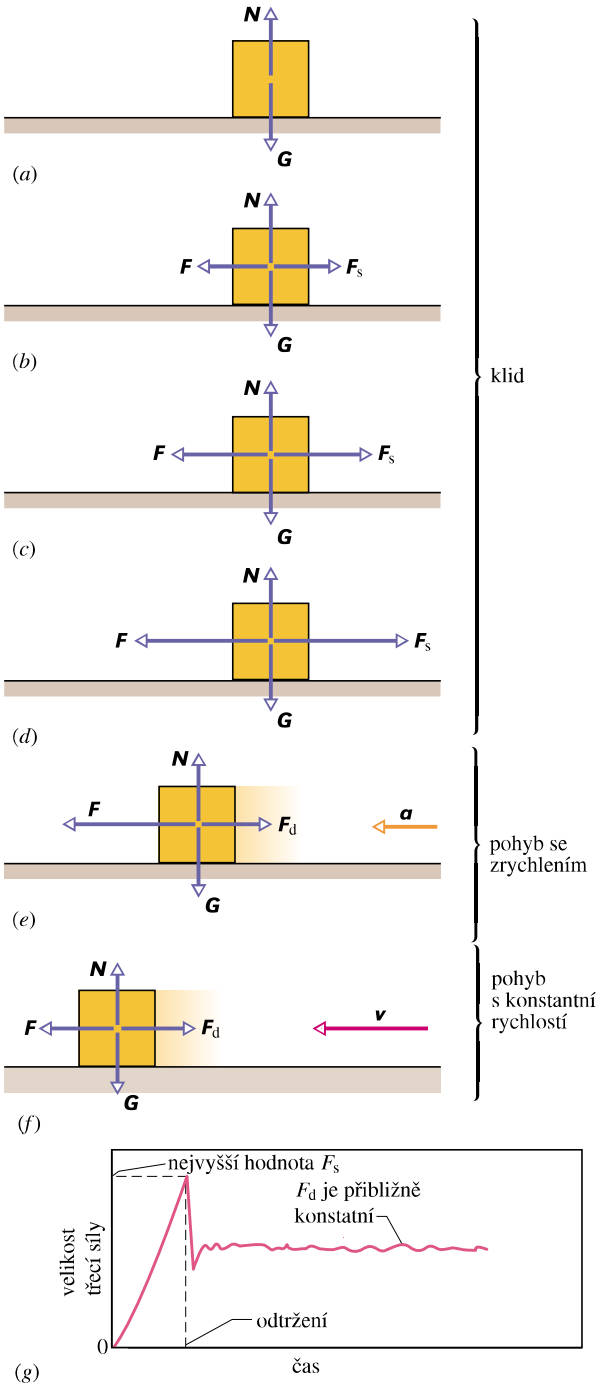
1. *První pokus.* Postrčíme knihu, aby sklouzla po desce stolu. Třecí síla, kterou působí horní deska stolu na spodek klouzající knihy, knihu zpomaluje a případně ji i zastaví. Kdybychom chtěli, aby kniha klouzala po stole konstantní rychlostí, museli bychom ji táhnout nebo tlačit silou stejné velikosti a opačného směru, než má třecí síla, která jejímu pohybu brání.

2. *Druhý pokus.* Těžká přepravka leží ve skladu na podlaze. Tlačíme ji vodorovně stálou silou, ale ona se nepohne. Je to způsobeno tím, že síla, kterou na ni působíme, je kompenzována vodorovnou třecí silou, jíž podlaha působí opačným směrem na dno přepravky. Je pozoruhodné, že tato třecí síla si sama řídí svou velikost i směr právě tak, aby zrušila účinek jakékoli síly, kterou bychom na přepravku působili. Samozřejmě, kdybychom vyvinuli sílu dostatečně velkou, dokázali bychom přepravkou přece jen pohnout (viz první pokus).

Na obr. 6.1 je rozebrána obdobná situace podrobněji. Na obr. 6.1a spočívá kostka na desce stolu. Tíhová síla $\boldsymbol{G}$ je vyrovnána opačně orientovanou normálovou silou $\boldsymbol{N}$. Na obr. 6.1b působíme na kostku silou $\boldsymbol{F}$ a snažíme se ji odtlačit směrem doleva. Jako odezva vzniká třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, která směřuje vpravo a přesně vyrovná sílu $\boldsymbol{F}$, kterou na kostku působíme. Sílu $\boldsymbol{F}_s$ nazýváme **statickou třecí silou**.

Obrázky 6.1c a d ukazují, že se vzrůstající silou $\boldsymbol{F}$ roste i síla $\boldsymbol{F}_s$ a kostka zůstává v klidu. Jakmile velikost síly $\boldsymbol{F}$ dosáhne určité hodnoty, kostka se „utrhne“, ztratí svůj těsný kontakt s deskou stolu a urychluje se směrem vlevo (obr. 6.1e). Třecí síla $\boldsymbol{F}_d$, která pak kostku brzdí, se nazývá **dynamická** (též **kinetická**) třecí síla.

Obvykle má dynamická třecí síla, působící pouze při pohybu, menší velikost, než je nejvyšší přípustná hodnota velikosti statické třecí síly, která působí jen za klidu.



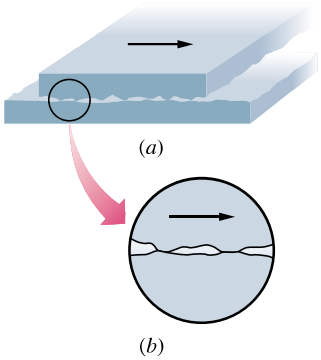
Obr. 6.1 (a) Síly působící na kostku v klidu. (b–d) Vnější síla $\boldsymbol{F}$ působící na kostku je vyvážena stejně velkou, opačně orientovanou silou statického tření $\boldsymbol{F}_s$. Při rostoucí velikosti síly $\boldsymbol{F}$ roste i velikost síly $\boldsymbol{F}_s$, až dosáhne jisté nejvyšší hodnoty. (e) Kostka se pak najednou „utrhne“ a začne se urychlovat směrem vlevo. (f) Má-li se kostka dále pohybovat rovnoměrně, je třeba velikost síly $\boldsymbol{F}$ snížit z této největší hodnoty tak, aby síla $\boldsymbol{F}$ právě kompenzovala dynamickou třecí sílu. (g) Výsledek měření třecí síly při ději (a) až (f).

Požadujeme-li, aby se kostka pohybovala po povrchu stolu rovnoměrně, musíme vystihnout okamžik, kdy se pohne, a velikost působící síly snížit (obr. 6.1f). Obr. 6.1g ukazuje výsledek pokusu, při němž síla $\boldsymbol{F}$ pozvolna rostla až do okamžiku, kdy se kostka pohnula. Všimněte si poklesu velikosti této síly, nutného k dosažení rovnoměrného pohybu kostky.

Podstatou vzniku třecích sil je vzájemné působení povrchových atomů obou dotýkajících se těles. Kdyby byla dvě tělesa s vyleštěnými a pečlivě očistěnými kovovými povrchy uvedena do styku ve velmi dobrém vakuu, nemohla by po sobě klouzat. Naopak, okamžitě by k sobě přilnula (byla by *svařena za studena*) tak těsně, že by vytvořila jediný kovový kus. Existují speciálně leštěné strojnické bloky, které k sobě i ve vzduchu mohou přilnout tak pevně, že je lze oddělit jen kroucením. Těsného kontaktu atom–atom obvykle nelze docílit tak snadno. I vysoce leštěný kovový povrch má daleko k tomu, aby byl rovinný v atomovém měřítku. Běžné povrchy jsou navíc znečištěny vrstvami oxidů a jiných nečistot, které možnost svaření za studena zhoršují.

Dva povrchy, které jsou k sobě přiloženy, se stýkají pouze nejvyššími výběžky. (Jako kdybychom švýcarské Alpy otočili jejich vrcholky proti rakouským Alpám.) Skutečná *mikro*skopická dotyková plocha je mnohem menší než zdánlivá *makro*skopická styčná plocha, dokonce až 10^4krát. Přesto se povrchy mohou k sobě svařit v mnoha stykových bodech. Snažíme-li se potom vnější silou docílit vzájemného skluzu těles podél jejich povrchů, způsobují tyto svary vznik statického tření.

Tlačíme-li těleso po nějaké podložce, dochází nejprve k narušení svarů (utržení) a poté k jejich opakovanému porušování a znovuobnovování při náhodném vzniku dalších a dalších stykových plošek (obr. 6.2). Dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ je vektorovým součtem sil působících při tomto procesu. Často je pohyb tělesa „trhaný“, neboť různé dvojice plošek k sobě vždy nakrátko přilnou a zase po sobě sklouznou.



Obr. 6.2 Mechanismus smykového tření. (a) Horní těleso klouže směrem vpravo po povrchu dolního tělesa. Zvětšeno. (b) Detail, ukazující dvě styková místa, kde vznikl svar za studena. K udržení pohybu je třeba působit silou, která svary naruší.

Nepřetržité opakování *kontaktů a smyků* může být provázeno různými zvuky, například při smyku kol na suché dlažbě, škrábání nehtem po tabuli, otevírání dveří s rezavými panty, tahání smyčce po houslové struně.

6.2 VLASTNOSTI SIL TŘENÍ

Předpokládejme, že na těleso se suchým povrchem, které spočívá na podložce stejné kvality, případně je k ní tlačeno, působíme silou $\boldsymbol{F}$ ve snaze je po podložce posunout. Experiment ukazuje, že třecí síla, jíž působí podložka proti pohybu tělesa, má tři vlastnosti:

1. Je-li těleso v klidu, má statická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ stejnou velikost jako průmět síly $\boldsymbol{F}$ do podložky a je vůči němu opačně orientována.

2. Velikost síly F_s dosahuje maximální hodnoty $F_{\mathrm{s,max}}$ dané vztahem

$$F_{\mathrm{s,max}} = f_\mathrm{s} N, \tag{6.1}$$

kde f_s je **koeficient statického tření** a N je velikost tlakové síly, jíž působí podložka na těleso. Převýší-li velikost průmětu síly $\boldsymbol{F}$ do podložky hodnotu $F_{\mathrm{s,max}}$, začne těleso po podložce klouzat.

3. V okamžiku, kdy se těleso dá do pohybu, klesne velikost třecí síly prakticky skokem na hodnotu F_d, určenou vztahem

$$F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d} N, \tag{6.2}$$

kde f_d je **koeficient dynamického** (též **kinetického**) **tření**. Tuto velikost má dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ v průběhu celého pohybu.

Vlastnosti 1 a 2, které jsme formulovali pro případ jedné síly $\boldsymbol{F}$, zůstanou v nezměněné podobě i v případě, že $\boldsymbol{F}$ je výslednicí několika sil působících na těleso. Rovnice (6.1) a (6.2) *nemají* vektorový charakter. Síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$, resp. $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ jsou totiž vždy rovnoběžné s podložkou a směřují proti pohybu, resp. zamýšlenému pohybu tělesa, zatímco síla $\boldsymbol{N}$ je k podložce kolmá.

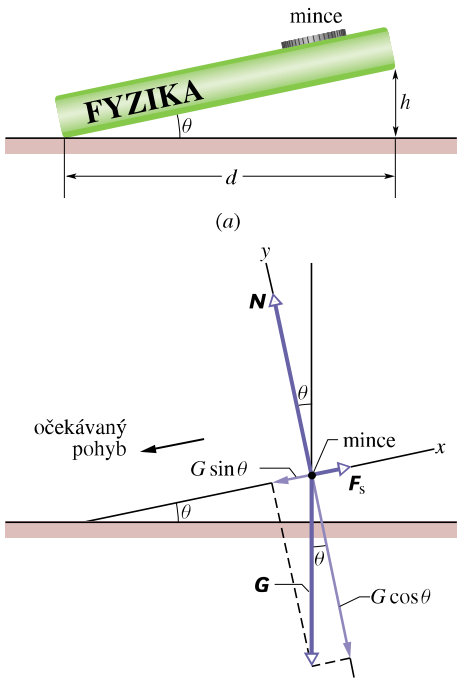
Koeficienty f_s a f_d jsou bezrozměrové a zjišťují se experimentálně. Jejich hodnoty závisejí na vlastnostech tělesa i podložky, takže hovoříme o koeficientech tření *mezi* podložkou a tělesem či *mezi* dvěma materiály (např. řekneme,

že „hodnota statického koeficientu tření f_s *mezi* sáněmi a asfaltem je 0,5“). Předpokládáme, že hodnota f_d není závislá na rychlosti pohybu tělesa po podložce.

KONTROLA 1: Kostka leží na podlaze. (a) Jaká je velikost třecí síly, kterou na kostku působí podlaha? (b) Na kostku začneme působit vodorovnou silou o velikosti 5 N, avšak kostka je stále v klidu. Jak velká je třecí síla působící na kostku? (c) Podaří se kostku uvést do pohybu vodorovnou silou o velikosti 8 N, je-li maximální hodnota statické třecí síly $F_{s,max}$ rovna 10 N? (d) Podaří se to při působení vodorovné síly o velikosti 12 N?

PŘÍKLAD 6.1

Na obr. 6.3a je nakreslena mince, ležící na knize, skloněné vzhledem k vodorovné rovině o úhel θ. Zkusmo jsme zjistili, že při zvýšení úhlu θ na hodnotu 13° začne mince klouzat. Jaký je koeficient statického tření f_s mezi mincí a knihou?



Obr. 6.3 Příklad 6.1. (a) Mince právě začíná klouzat po obalu knihy. (b) Silový diagram ukazuje tři síly působící na minci. Tíhová síla je znázorněna jako součet svých průmětů do souřadnicových os x a y, zvolených způsobem, který zjednodušuje řešení problému.

ŘEŠENÍ: Obr. 6.3b znázorňuje silový diagram mince právě v okamžiku, kdy začíná klouzat. Na minci působí tlaková síla $\boldsymbol{N}$ kolmá ke knize, tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, která směřuje podél nakloněné roviny vzhůru, neboť mince „se chystá“ sklouznout dolů. Mince je v rovnováze, takže výslednice sil na ni působících je nulová. Z druhého Newtonova zákona tak získáme vztah

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}. \tag{6.3}$$

Pro x-ové složky vede tato vektorová rovnice ke vztahu

$$\sum F_x = F_s - G\sin\theta = 0, \quad \text{tj.} \quad F_s = G\sin\theta. \tag{6.4}$$

Pro y-ové složky dostáváme

$$F_y = N - G\cos\theta, \quad \text{tj.} \quad N = G\cos\theta. \tag{6.5}$$

V okamžiku, kdy mince začíná klouzat (*a jedině v tomto okamžiku*), nabývá velikost statické třecí síly své maximální hodnoty $f_s N$. Dosazením $f_s N$ za F_s do rovnice (6.4) a vydělením rovnicí (6.5) dostáváme

$$\frac{F_s}{N} = \frac{f_s N}{N} = \frac{G\sin\theta}{G\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta,$$

tj.

$$f_s = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 13^\circ = 0{,}23. \quad \text{(Odpověď)} \tag{6.6}$$

Získali jsme jednoduchý návod jak změřit f_s. Úhloměr ani nepotřebujeme. Stačí změřit dvě délky h a d, vyznačené v obr. 6.2a, a určit jejich poměr $h/d = \operatorname{tg}\theta$.

PŘÍKLAD 6.2

Při nouzovém brzdění se zablokují kola automobilu (nemohou se otáčet) a automobil klouže po silnici. Utržené kousky pneumatik a krátké úseky roztaveného asfaltu vytvářejí „brzdné stopy“, svědčící o tom, že při skluzu automobilu po silnici dochází ke sváření za studena. Brzdné stopy „rekordní délky“ byly zaznamenány v roce 1960 na silnici M1 v Anglii u vozu Jaguar a měřily 290 m! Předpokládejme, že $f_s = 0{,}60$. Jak rychle jelo auto v okamžiku, kdy se kola zablokovala?

ŘEŠENÍ: V obr. 6.4a je vyznačena brzdná dráha automobilu. V diagramu sil působících na automobil během brzdění je vyznačena tíhová síla $\boldsymbol{G}$, normálová síla $\boldsymbol{N}$ a dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$. Ve vztahu (2.16)

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

položíme $v_x = 0$ a $x - x_0 = d$ a vyjádříme velikost počáteční rychlosti $v_0 = v_{0x}$:

$$v_0 = \sqrt{-2a_x d}. \tag{6.7}$$

Pro zjištění a_x použijeme x-ovou složku druhého Newtonova zákona. Při zanedbání vlivu odporu vzduchu na pohyb auta

je jedinou silou s nenulovou x-ovou složkou třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$, přičemž $F_{\mathrm{d},x} = -F_\mathrm{d}$. Dostáváme tak

$$-F_\mathrm{d} = ma_x, \quad \text{tj.} \quad a_x = -\frac{F_\mathrm{d}}{m} = \frac{-f_\mathrm{d}N}{m}, \tag{6.8}$$

kde jsme dosadili $F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d}N$ ze vztahu (6.2) a m je hmotnost automobilu.

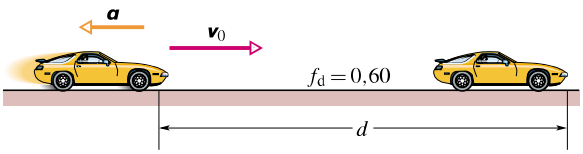
Normálová síla $\boldsymbol{N}$ má velikost $N = G = mg$. Jejím dosazením do vztahu (6.8) dostáváme

$$a_x = \frac{-f_\mathrm{d}mg}{m} = -f_\mathrm{d}g. \tag{6.9}$$

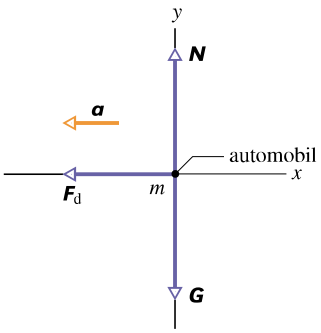
Nakonec dosadíme vztah (6.9) do (6.7):

$$v_0 = \sqrt{2f_\mathrm{d}gd} = \sqrt{2(0{,}60)(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(290\ \mathrm{m})} = \\ = 58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 210\ \mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při řešení jsme mlčky předpokládali, že konec brzdné stopy odpovídá hodnotě $v_x = 0$. V popisovaném skutečném případě byla brzdná stopa přerušena proto, že jaguar urazil se zablokovanými koly zmíněných 290 m a pak vyjel ze silnice. Získaný výsledek je proto třeba interpretovat tak, že hodnota v_0 činila nejméně 210 km/h, mohla však být i mnohem vyšší.



(a)



(b)

Obr. 6.4 Příklad 6.2. (a) Automobil klouže směrem doprava a zastaví se poté, co urazil vzdálenost d. (b) Silový diagram brzdícího automobilu. Vektor zrychlení směřuje vlevo, souhlasně s třecí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$.

PŘÍKLAD 6.3

Žena táhne po zasněženém vodorovném chodníku naložené sáně o hmotnosti $m = 75$ kg. Rychlost sání je konstantní. Koeficient dynamického tření f_d mezi skluznicí a sněhem je 0,10 a úhel φ na obr. 6.5 je 42°.

(a) Jaká je velikost T tahové síly provazu?

ŘEŠENÍ: Na obr. 6.5b je diagram sil působících na sáně. Použitím druhého Newtonova zákona pro vodorovný směr dostáváme

$$T\cos\varphi - F_\mathrm{d} = ma_x = 0, \tag{6.10}$$

kde a_x má nulovou hodnotu, neboť rychlost sání je konstantní. Pro svislý směr platí

$$T\sin\varphi + N - mg = ma_y = 0, \tag{6.11}$$

kde $m\boldsymbol{g}$ je tíhová síla působící na sáně. Podle rov. (6.2) je

$$F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d}N. \tag{6.12}$$

Poslední tři rovnice obsahují neznámé veličiny T, N a F_d. Vyloučením N a F_d získáme poslední z nich, T:

Začneme sečtením rovnic (6.10) a (6.12) a dostaneme

$$T\cos\varphi = f_\mathrm{d}N$$

a odtud

$$N = \frac{T\cos\varphi}{f_\mathrm{d}}. \tag{6.13}$$

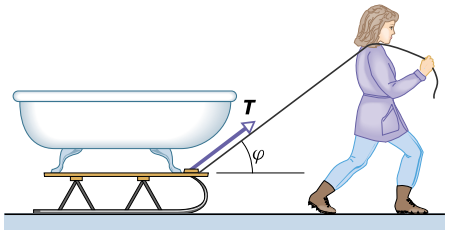
Dosazením do (6.11) a řešením vzhledem k neznámé T pak dostáváme

$$T = \frac{f_\mathrm{d}mg}{\cos\varphi + f_\mathrm{d}\sin\varphi} = \tag{6.14}$$

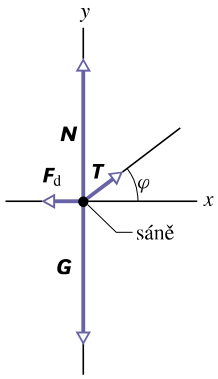
$$= \frac{(0{,}10)(75\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{\cos 42^\circ + (0{,}10)\sin 42^\circ} =$$

$$= 91\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Získaná hodnota je tedy výrazně nižší než velikost tíhové síly.



(a)



(b)

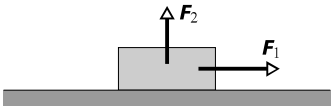
Obr. 6.5 Příklad 6.3. (a) Žena táhne sáně stálou rychlostí, přičemž na ně působí silou $\boldsymbol{T}$. (b) Silový diagram pro sáně s nákladem.

(b) Jak velká je normálová síla, jíž tlačí sněhový povrch na skluznice sání?

ŘEŠENÍ: Hodnotu N získáme dosazením $T = 91\,\mathrm{N}$ a zadaných údajů do vztahu (6.11) nebo (6.13). Pomocí (6.11) dostáváme

$$N = mg - T\sin\varphi = \\ = (75\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) - (91\,\mathrm{N})\sin 42^\circ = \\ = 670\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 2: Na kostku (viz obr.) spočívající na podlaze působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 10 N. Kostka je však v klidu. Na kostku začneme působit svislou silou $\boldsymbol{F}_2$, jejíž velikost postupně narůstá (od počáteční nulové hodnoty) až do okamžiku uvedení kostky do pohybu. Rozhodněte, zda v průběhu tohoto experimentu následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají nezměněny: (a) velikost třecí síly, jíž působí podložka na kostku, (b) velikost normálové tlakové síly podložky na kostku, (c) maximální hodnota $F_{s,\max}$ statické třecí síly, jíž může působit podložka na kostku.



PŘÍKLAD 6.4

Na obr. 6.6a se bedna nakládané zeleniny o hmotnosti $m_1 = 14\,\mathrm{kg}$ pohybuje po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou podložkou úhel $\theta = 30^\circ$. Bedna je spojena pevným lanem o zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes nehmotnou kladku, která se může otáčet bez tření, s jinou bednou, jejíž hmotnost je $m_2 = 14\,\mathrm{kg}$. Zavěšená bedna klesá stálou rychlostí.

(a) Určete velikost a směr třecí síly, jíž působí nakloněná rovina na bednu m_1.

ŘEŠENÍ: Ze skutečnosti, že těleso m_2 klesá, je zřejmé, že m_1 stoupá po nakloněné rovině. *Dynamická* třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ tedy směřuje podél nakloněné roviny dolů.

Pro zjištění její velikosti ovšem nemůžeme použít vztahu (6.2), neboť neznáme koeficient dynamického tření f_d mezi tělesem m_1 a šikmou podložkou. Můžeme však užít postupu uvedeného v kapitole 5. Nejprve nakreslíme silové diagramy těles m_1 a m_2 podle obr. 6.6b a c. Symboly $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ v nich představují tíhové síly a $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou tahové síly, jimiž působí lano na bedny m_1 a m_2. Velikosti tahových sil jsou stejné. Jejich společnou hodnotu označíme T.

Promítneme $\boldsymbol{G}_1$ do souřadnicových os a aplikujeme na těleso m_1 druhý Newtonův zákon. Pro jeho x-ovou složku dostáváme podle obr. 6.6b vztah

$$\sum F_x = T - F_\mathrm{d} - m_1 g\sin\theta = m_1 a_x = 0, \qquad (6.15)$$

ve kterém jsme položili $a_x = 0$. Těleso m_1 se totiž pohybuje konstantní rychlostí. Druhý Newtonův zákon zapíšeme i pro těleso m_2 a opět využijeme skutečnosti, že se pohybuje stálou rychlostí. Všechny vektory mají tentokrát nenulové pouze y-ové složky, takže podle obr. 6.6c dostáváme

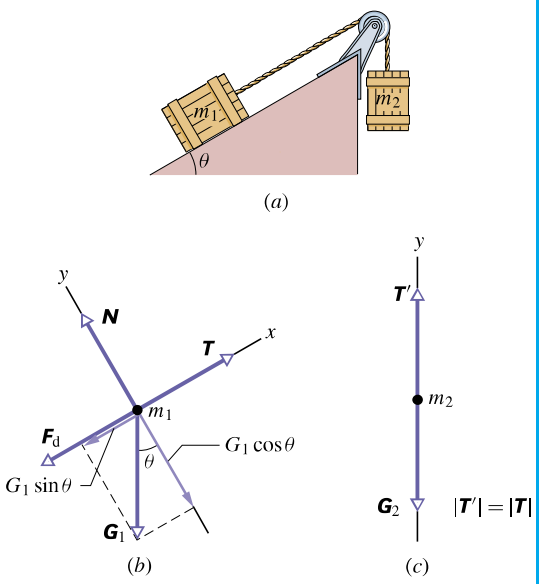
$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = 0,$$

tj.

$$T = m_2 g. \qquad (6.16)$$

Za T dosadíme do vztahu (6.15) výraz (6.16) a vyjádříme F_d:

$$F_\mathrm{d} = m_2 g - m_1 g\sin\theta = \\ = (14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) - (14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\sin 30^\circ = \\ = 68{,}6\,\mathrm{N} \doteq 69\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 6.6 Příklad 6.4. (a) Těleso o hmotnosti m_1 stoupá po nakloněné rovině stálou rychlostí, těleso m_2 klesá, rovněž stálou rychlostí. (b) Silový diagram tělesa m_1. (c) Silový diagram tělesa m_2.

(b) Určete hodnotu f_d.

ŘEŠENÍ: Hodnotu f_d můžeme získat ze vztahu (6.2). Nejprve však musíme zjistit velikost normálové síly $\boldsymbol{N}$ působící na těleso m_1. Použijeme k tomu y-ovou složku vektorové rovnice vyjadřující druhý Newtonův zákon pro těleso m_1 (obr. 6.6b):

$$\sum F_y = N - m_1 g\cos\theta = m_1 a_y = 0,$$

tj.

$$N = m_1 g \cos\theta .$$

Ze vztahu (6.2) pak dostáváme

$$f_d = \frac{F_d}{N} = \frac{F_d}{m_1 g \cos\theta} = \\ = \frac{(68{,}6\ \mathrm{N})}{(14\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\cos 30^\circ} = 0{,}58. \qquad \text{(Odpověď)}$$

6.3 ODPOROVÁ SÍLA A MEZNÍ RYCHLOST

Tekutinou rozumíme tekuté prostředí, obvykle plyn nebo kapalinu, výjimečně plazma. Při pohybu tělesa v tekutině, kdy se těleso pohybuje klidným prostředím, anebo prostředí proudí kolem klidného tělesa, působí prostředí na těleso **odporovou silou** ***F***, která pohybu brání. Tato síla směřuje proti rychlosti, jíž se těleso pohybuje vzhledem k prostředí.

V tomto článku se budeme zabývat pouze případy, kdy proudícím prostředím je vzduch, těleso je spíše zaoblené (fotbalový míč) než štíhlé (oštěp) a proudění je natolik rychlé, že již může být považováno za turbulentní (za tělesem se tvoří vzduchové víry). V takových případech souvisí odporová síla ***F*** s relativní rychlostí empirickým vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2, \qquad (6.17)$$

kde ϱ je hustota vzduchu (hmotnost vztažená na objemovou jednotku) a S je **účinný průřez** tělesa, definovaný jako obsah největšího řezu tělesa rovinou kolmou k relativní rychlosti ***v***. **Součinitel odporu** C se zjišťuje experimentálně, jeho typické hodnoty se pohybují v rozmezí od 0,4 do 1,0. Pro dané těleso není C konstantou v pravém slova smyslu, neboť se při výrazných změnách rychlosti ***v*** také mění. Tuto komplikaci však nebudeme brát v úvahu.

Závislost odporu prostředí na veličinách S a v^2 velmi dobře znají sjezdaři. Pro dosažení vysoké rychlosti musí sjezdař co možná nejvíce snížit velikost odporové síly, například tím, že zaujme sjezdový postoj zvaný „vajíčko“ (obr. 6.7) a minimalizuje tak účinný průřez S.

Ze vztahu (6.17) je vidět, že při pádu oblého objektu vzduchem velikost odporové síly F postupně narůstá (od počáteční nulové hodnoty při $v = 0$) s rostoucí rychlostí pádu. Obr. 6.8 ukazuje, že při dostatečně dlouhém pádu dojde k vyrovnání síly odporové ***F*** a tíhové ***G*** $= m\boldsymbol{g}$. Výsledná svislá síla působící na těleso se tak anuluje. Podle druhého Newtonova zákona musí této situaci odpovídat nulové zrychlení, takže rychlost tělesa již neporoste. Těleso pak padá stálou **mezní rychlostí** o velikosti v_m, kterou zjistíme z rovnosti $F = mg$ užitím vztahu (6.17). Platí

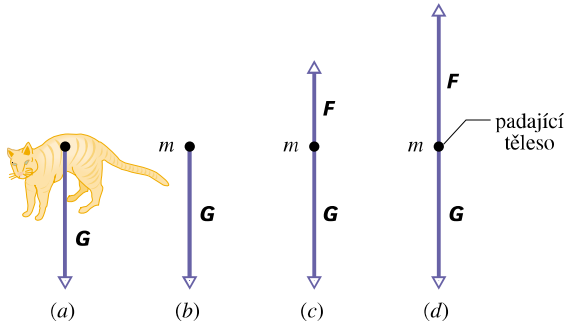
$$\tfrac{1}{2} C \varrho S v_m^2 = mg$$

a odtud

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}. \qquad (6.18)$$

Tabulka 6.1 uvádí hodnoty v_m pro některé běžné předměty.

Obr. 6.7 Sjezdař je schoulen ve „vajíčku“, aby co nejvíce snížil svůj účinný průřez a tím i odporovou sílu.



Obr. 6.8 Síly působící na těleso během pádu ve vzduchu: (a) Těleso na samém počátku pádu, (b) silový diagram v tomto okamžiku, (c) silový diagram o chvíli později, kdy již působí odporová síla. (d) Velikost odporové síly roste až do okamžiku, kdy se vyrovná se silou tíhovou. Od té chvíle padá těleso konstantní (mezní) rychlostí.

V souhlasu s výpočty* založenými na vztahu (6.17) dosáhne kočka mezní rychlosti při pádu z výšky zhruba šesti poschodí. Než k tomu dojde, je $G > F$ a kočka je urychlována nenulovou výslednou silou, směřující svisle dolů.

* W. O. Whitney a C. J. Mehlhaff, High-rise syndrome in cats. *J. Am. Veterinary Medical assoc.* **191**, 1399–1403 (1987).

S odkazem na kapitolu 2 si připomeňme, že naše smysly reagují na zrychlení, nikoli na rychlost. Také padající kočka pocítí zrychlení. Lekne se, skrčí nohy pod tělo, zvedne hlavu a ohne páteř vzhůru. Tím se sníží její účinný průřez S a zvýší velikost dosažitelné mezní rychlosti v_m. Za této situace by ovšem při přistání muselo dojít k většímu poranění.

V okamžiku, kdy kočka dosáhne mezní rychlosti, její zrychlení klesne na nulu a kočka se uklidní. Napne nohy a krk vodorovně a napřímí páteř (podobá se při tom letící veverce při skoku ze stromu na strom). Tím se zvýší průřez S a s ním i síla odporu F. Kočka se začne zpomalovat, neboť nyní je $F > G$ a výsledná síla míří vzhůru, až do okamžiku, kdy dosáhne nové, nižší mezní rychlosti. Pokles v_m snižuje nebezpečí vážného poranění při dopadu. Těsně před koncem pádu, když kočka spatří blížící se povrch země, stáhne nohy zpět pod tělo a připraví se na přistání.

Tabulka 6.1 **Některé mezní rychlosti ve vzduchu**

PŘEDMĚT	MEZNÍ RYCHLOST ($m \cdot s^{-1}$)	95% VZDÁLENOST[a] (m)
Osmikilogramový náboj	145	2 500
Vzdušný akrobat[b] (typický případ)	60	430
Baseballový míč	42	210
Tenisový míček	31	115
Basketbalový míč	20	47
Pingpongový míček	9	10
Dešťová kapka (poloměr 1,5 mm)	7	6
Výsadkář[c] (typický případ)	5	3

[a] Vzdálenost, kterou musí těleso urazit, aby dosáhlo rychlosti o velikosti 95 % mezní hodnoty v_m.
[b] Parašutista předvádí akrobatické figury bez otevření padáku.
[c] Parašutista otevře padák bezprostředně po výskoku z letadla.
Zdroj: Upraveno podle Petera J. Brancazia, *Sport Science*, Simon & Schuster, New York, 1984.

PŘÍKLAD 6.5

Padající kočka dosáhla poprvé mezní rychlosti o velikosti 100 km/h poté, co se prohnula do svislé polohy. Pak se opět roztáhla a její účinný průřez se zvýšil na dvojnásobek. Jak rychle padala kočka v okamžiku, kdy dosáhla mezní rychlosti podruhé?

ŘEŠENÍ: Označme v_{m1}, resp. v_{m2} velikost prvé, resp. druhé mezní rychlosti a S_1 a S_2 odpovídající účinné průřezy. Užitím vzorce (6.18) vypočteme poměr mezních rychlostí:

$$\frac{v_{m2}}{v_{m1}} = \frac{\sqrt{2mg/C\varrho S_2}}{\sqrt{2mg/C\varrho S_1}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{S_1}{2S_1}} = \sqrt{0{,}5} \doteq 0{,}7,$$

tj. $v_{m2} \doteq 0{,}7 v_{m1}$, což činí přibližně 70 km/h.

Následující událost se odehrála v dubnu 1987. Při skupinovém seskoku z letadla si parašutista Gregory Robertson všiml, že jeho kolegyně Debbie Williamsová ztratila vědomí při srážce s dalším vzdušným akrobatem v okamžiku, kdy ještě neměla otevřený padák. Robertson byl v tu chvíli v dost velké výšce nad ní. Prozatím však také padák neotevřel, aby si vychutnal radost ze čtyřkilometrového pádu. Reagoval pohotově: otočil se hlavou dolů, aby tak minimalizoval svůj účinný průřez a zvýšil rychlost pádu. Dosáhl mezní rychlosti něco přes 120 km/h, dostihl Williamsovou a zaujal vodorovnou polohu „rozepjatého orla“ (obr. 6.9). Tím opět zvýšil velikost odporové síly natolik, že mohl dívku zachytit a otevřít její padák. Svůj vlastní pak otevřel pouhých 10 s před dopadem. Williamsová měla sice vlivem neřízeného přistání rozsáhlá vnitřní poranění, pád však naštěstí přežila.

Obr. 6.9 Parašutisté ve vodorovné poloze „rozepjatého orla“ dosahují maximálního odporu vzduchu.

PŘÍKLAD 6.6

Dešťová kapka o poloměru $R = 1{,}5$ mm padá z mraku, který je ve výšce $h = 1\,200$ m nad zemským povrchem. Odporový koeficient kapky je 0,60. Předpokládejme, že kapka má po celou dobu pádu kulový tvar. Hustota vody je $\varrho_v = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a hustota vzduchu $\varrho_{vz} = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

(a) Jaká je mezní rychlost kapky?

ŘEŠENÍ: Objem koule je $\frac{4}{3}\pi R^3$, její efektivní průřez je roven obsahu kruhu o poloměru R. Je tedy

$$m = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho_v \quad \text{a} \quad S = \pi R^2.$$

Ze vztahu (6.18) pak dostáváme

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho_{vz}S}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \varrho_v g}{3C\varrho_{vz}\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\varrho_v g}{3C\varrho_{vz}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8(1{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})(1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}})(9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})}{3(0{,}60)(1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}})}} =$$

$$= 7{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Uvědomte si, že ve výpočtu nevystupuje výška mraku nad povrchem Země. Kapka (viz tab. 6.1) dosáhne mezní rychlosti po několika metrech.

(b) Jaká by byla rychlost kapky těsně před dopadem na povrch Země, kdyby nepůsobila odporová síla?

ŘEŠENÍ: Do vztahu (2.23) dosadíme $(y - y_0) = -h$ a $v_0 = 0$. Dostaneme

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(1\,200\ \mathrm{m})} = 150\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Za takových podmínek by asi Shakespeare sotva mohl napsat „… a laskavý déšť z nebes skrápěl zemi… “

KONTROLA 3: Rozhodněte, zda rychlost velkých dešťových kapek je v blízkosti povrchu Země větší, menší, či stejná jako rychlost kapek malých. Předpokládejte, že velké i malé kapky mají kulový tvar.

6.4 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Připomeňme si, že o rovnoměrném pohybu po kružnici hovoříme tehdy, pohybuje-li se částice po kružnici nebo jejím oblouku rychlostí o stálé velikosti v. Uvědomme si také, že částice se pohybuje s dostředivým zrychlením (směřujícím stále do středu kružnice), jehož velikost je stálá a je dána vztahem (4.22):

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení)}, \qquad (6.19)$$

kde r je poloměr kružnice.

Dostředivé zrychlení udílí částici **dostředivá síla**, která samozřejmě rovněž směřuje stále do středu kružnice. Její velikost je konstantní a pomocí druhého Newtonova zákona ji lze vyjádřit ve tvaru

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} \quad \text{(dostředivá síla)}. \qquad (6.20)$$

Jestliže má tedy výslednice sil působících na částici charakter dostředivé síly, pohybuje se částice rovnoměrně po kružnici. Naopak, vidíme-li částici pohybující se rovnoměrně po kružnici, můžeme si být jisti, že výslednice sil na ni působících je dostředivá síla. Bez dostředivé síly není rovnoměrný pohyb po kružnici možný. Dostředivé zrychlení i dostředivá síla jsou vektorovými veličinami, jejichž velikost je konstantní a směr se neustále mění tak, aby směřovaly do středu kružnice.

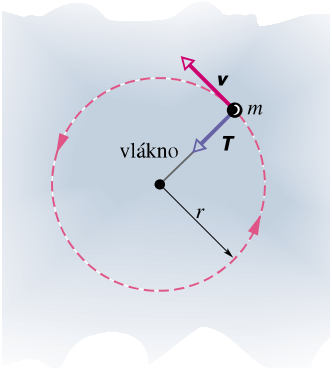
Představme si, že tělesem obíhajícím rovnoměrně po kružnici je třeba hokejový kotouč uvázaný na šňůře a kroužící kolem jejího pevného konce podle obr. 6.10. Úlohu dostředivé síly hraje v tomto případě tahová síla šňůry. Při pohybu Měsíce kolem Země, který je rovnoměrnému pohybu po kružnici blízký, je dostředivou silou přitažlivá gravitační síla, jíž na Měsíc působí Země. Dostředivá síla tedy není novým druhem síly. Může to být síla pnutí, gravitační síla nebo síla jakékoliv jiné povahy.

Srovnejme nyní dva obdobné případy rovnoměrného pohybu po kružnici:

1. *Projíždění zatáčky v autě.* Představme si dort v krabici uprostřed zadního sedadla automobilu, který jede velkou rychlostí po ploché silnici. Řidič náhle zatočí vlevo po kruhovém oblouku, krabice sklouzne po sedadle vpravo a je přitisknuta k vnitřní stěně vozu. Co se vlastně stalo?

Pohyb automobilu po oblouku považujeme za rovnoměrný pohyb po kružnici. Dostředivou silou, která jej způsobuje, je třecí síla, jíž působí povrch silnice na pneumatiky vozu. Tato síla směřuje radiálně dovnitř kružnice a má velikost danou vztahem (6.20). Je přitom rozložena na všechna čtyři kola.

Krabice s dortem by rovněž konala rovnoměrný pohyb po kružnici a setrvala při něm uprostřed sedadla, kdyby třecí síla, jíž na ni působí sedadlo, byla dostatečně velká. V popisovaném případě tomu tak zřejmě není, a proto krabice sklouzne po sedadle.



Obr. 6.10 Hokejový kotouč o hmotnosti m se pohybuje po kružnici po vodorovné dokonale hladké podložce. Jeho rychlost má stálou velikost v. Dostředivou silou je tahová síla $\boldsymbol{T}$, jíž na kotouč působí šňůra.

Z hlediska vztažné soustavy spojené s povrchem Země krabice s dortem ve skutečnosti pokračuje v přímočarém pohybu, zatímco sedadlo pod ní klouže, dokud krabice nenarazí na stěnu vozu. Tlaková síla stěny na krabici pak

realizuje dostředivou sílu a krabice se začne pohybovat rovnoměrně po kružnici spolu s automobilem.

2. *Obíhání kolem Země.* Nyní jsme v roli cestujícího vesmírné lodi *Atlantis*, která je na oběžné dráze kolem Země a zabýváme se studiem „stavu beztíže“. Co se děje v tomto případě?

Dostředivou silou, která udržuje kosmickou loď i kosmonauta v rovnoměrném pohybu po kružnici, je přitažlivá gravitační síla, jíž Země působí jak na loď, tak na kosmonauta. Tato síla směřuje do středu kruhové trajektorie (střed Země) a její velikost vyhovuje vztahu (6.20).

Jak v automobilu, tak v kosmické lodi se pozorovaný předmět pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici vlivem dostředivé síly. Obě situace jsou však velmi odlišné. V autě je dort vržen ke stěně, která pak na něj působí tlakovou silou. V obíhající kosmické lodi naopak pasažér volně pluje a žádnou působící sílu nepociťuje. Proč je rozdíl tak veliký?

Je způsoben rozdílnou povahou dostředivé síly v jednotlivých případech. V autě je dostředivou silou tzv. *plošná síla*, zprostředkovaná přímým kontaktem stěny vozu s částí povrchu krabice. V kosmické lodi má dostředivá síla charakter *síly objemové*. Je to přitažlivá gravitační síla, složená z elementárních sil, jimiž působí Země na jednotlivé částice lodi a kosmonautova těla úměrně jejich hmotnostem. (Podrobněji o tom v čl. 14.2.) Žádná část těla se tedy plošně nestlačuje, a kosmonaut proto silové působení nepociťuje.

PŘÍKLAD 6.7

Igor je inženýr-kosmonaut v kosmické lodi *Vostok II*, která létá na oběžné dráze kolem Země ve výšce $h = 520\,\mathrm{km}$. Její rychlost má velikost 7,6 km/s, Igor má hmotnost $m = 79\,\mathrm{kg}$.

(a) S jakým zrychlením se Igor pohybuje?

ŘEŠENÍ: Igor koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru $R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země. Jeho dostředivé zrychlení je dáno vztahem (6.19):

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_Z + h} = \frac{(7{,}6{\cdot}10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{(6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m}) + (0{,}52{\cdot}10^6\,\mathrm{m})} =$$
$$= 8{,}38\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 8{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota představuje velikost tíhového zrychlení v nadmořské výšce, v níž se Igor nachází. Předmět, který by byl do této nadmořské výšky vynesen a pak jen volně puštěn, by padal k Zemi se zrychlením, jehož počáteční velikost by měla právě tu hodnotu, kterou jsme před chvílí vypočetli. Pohyby kosmické lodi a pohyb padajícího předmětu se liší tím, že kámen má počáteční rychlost nulovou, takže „jen padá“, zatímco loď na oběžné dráze má počáteční rychlost kolmou na směr přitažlivé síly, takže koná kromě pádu ještě „boční pohyb“. Výsledkem je pak pohyb po zakřivené trajektorii kolem Země.

(b) Jak velkou gravitační (dostředivou) silou působí Země na kosmonauta?

ŘEŠENÍ: Dostředivá síla má velikost

$$F = ma = (79\,\mathrm{kg})(8{,}38\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 660\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby se kosmonaut Igor postavil na váhu umístěnou na věži o výšce $h = 520\,\mathrm{km}$, ukazovala by váha údaj 660 N. V obíhající kosmické lodi by váha ukazovala nulu, pokud by na ní Igor vůbec mohl „stát“. Váha totiž „padá“ společně s kosmonautem a jeho nohy na ni ve skutečnosti netlačí.

RADY A NÁMĚTY

Bod 6.1: *Podívejme se na to*

V příkladu 6.7 jsme potřebovali znát poloměr Země, který nebyl v zadání uveden. Abychom si i v takové situaci věděli rady, měli bychom být obeznámeni se zdroji informací podobného druhu, počínaje touto knihou. Řada užitečných údajů je uvedena na vnitřní obálce knihy, v dodatcích a tabulkách. Neocenitelným zdrojem je každoročně aktualizovaná příručka *Handbook of Chemistry and Physics* (vydavatel CRC Press). Z cvičných důvodů zkuste zjistit například hustotu železa, rozvoj funkce e^x v mocninnou řadu, počet centimetrů v míli, střední vzdálenost Saturnu od Slunce, hmotnost protonu, rychlost světla, atomové čísla samaria. Vše je možné najít v citované příručce. (Český středoškolák najde všechny tyto údaje např. v běžných Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách.)

KONTROLA 4: Vezete se na ruském kole, které se rovnoměrně otáčí. Určete směr svého zrychlení $\boldsymbol{a}$ a směr tlakové síly, kterou na vás působí sedačka, při průchodu (a) nejvyšším, resp. (b) nejnižším bodem trajektorie.

PŘÍKLAD 6.8

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo „Dare Devil“ Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (obr. 6.11a). Předpokládejme, že smyčka je kruhová a má poloměr $R = 2{,}7\,\mathrm{m}$. Jakou nejmenší rychlostí $\boldsymbol{v}$ mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt?

ŘEŠENÍ: Obr. 6.11b znázorňuje silový diagram artisty na kole v nejvyšším bodě smyčky (spojená tělesa aproximujeme hmotným bodem). V diagramu je vyznačena tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ a normálová síla $\boldsymbol{N}$, jíž působí smyčka na kolo s akrobatem. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ směřuje dolů ke středu smyčky

a podle vztahu (6.19) má velikost $a = v^2/R$. Užitím druhého Newtonova zákona dostáváme

$$\sum F_y = -N - mg = ma_y = -ma = -m\frac{v^2}{R}.$$

V okamžiku ztráty kontaktu kola se smyčkou je $N = 0$ a platí

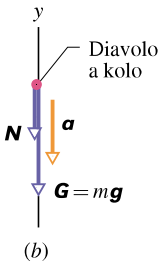
$$mg = m\frac{v^2}{R},$$

tj.

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}7\ \mathrm{m})} = \\ = 5{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby Diavolo neztratil kontakt se smyčkou, musel projet jejím nejvyšším bodem rychleji než 5,1 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pak byla velikost tlakových sil mezi koly a smyčkou nenulová.

(a)



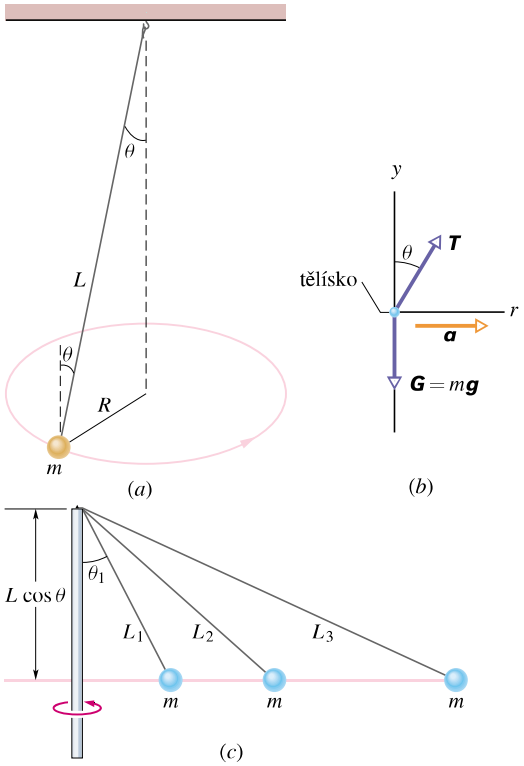
(b)

Obr. 6.11 Příklad 6.8. (a) Dobová reklama na Diavolovo vystoupení a (b) silový diagram v okamžiku průjezdu akrobata nejvyšším bodem smyčky.

PŘÍKLAD 6.9

Na obr. 6.12a je *konické kyvadlo*, jehož kulička má hmotnost $m = 1{,}5$ kg a je zavěšena na vlákně délky $L = 1{,}7$ m. Kulička obíhá ve vodorovné rovině po kružnici a vlákno svírá se svislým směrem úhel $\theta = 37°$. Při tomto pohybu opisuje vlákno kuželovou plochu. Určete periodu pohybu τ (dobu oběhu).

ŘEŠENÍ: Silový diagram na obr. 6.12b znázorňuje síly působící na kuličku kyvadla: tahovou sílu vlákna $\boldsymbol{T}$ a tíhovou sílu $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Podle obrázku umístíme počátek soustavy souřadnic do středu kuličky. Místo pevné osy x však použijeme „pohyblivou“ radiální osu r, která neustále míří do středu trajektorie kuličky.



Obr. 6.12 Příklad 6.9. (a) Konické kyvadlo, jehož závěsné vlákno svírá se svislým směrem úhel θ. (b) Silový diagram kuličky kyvadla. Souřadnicové osy y a r mají svislý a radiální směr. Výsledná síla, a tedy i zrychlení, směřují do středu kružnice. (c) Tři kyvadla různých délek jsou roztáčena na společné hřídeli. Jejich kuličky obíhají v téže vodorovné rovině, v souhlasu se vztahem (6.24).

Složky síly $\boldsymbol{T}$ ve směrech y a r jsou $T\cos\theta$ a $T\sin\theta$. Vzhledem k tomu, že $a_y = 0$, dostáváme ze druhého Newtonova zákona

$$T\cos\theta - mg = ma_y = 0, \quad \text{tj.} \quad T\cos\theta = mg. \qquad (6.21)$$

Výsledná síla ovšem musí mít charakter síly dostředivé, takže musí mít stálou velikost a radiální směr. Radiální složka výslednice sil je $T\sin\theta$. Podle (6.20) tedy platí

$$T\sin\theta = ma_r = \frac{mv^2}{R}, \qquad (6.22)$$

kde R je poloměr kruhové trajektorie kuličky. Vydělíme vztahy (6.22) a (6.21) a vyjádříme v:

$$v = \sqrt{\frac{gR\sin\theta}{\cos\theta}}.$$

Za velikost rychlosti v dosadíme $2\pi R/\tau$ (obvod kružnice vydělený periodou). Pro periodu τ pak dostaneme

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\theta}{g\sin\theta}}. \qquad (6.23)$$

Z obr. 6.12 vidíme, že $R = L\sin\theta$. Dosazením do vztahu (6.13) vychází

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} = \qquad (6.24)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}7\ \mathrm{m})\cos 37^\circ}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}} = 2{,}3\ \mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Ze vztahu (6.24) je vidět, že perioda τ nezávisí na hmotnosti kuličky, ale pouze na vzdálenosti roviny jejího pohybu od bodu závěsu $L\cos\theta$. Pohybuje-li se tedy několik konických kyvadel se společným bodem závěsu, ale s různými délkami *se stejnou periodou*, obíhají jejich kuličky v téže vodorovné rovině (obr. 6.12c).

PŘÍKLAD 6.10

Na obr. 6.13 je nakreslen automobil o hmotnosti $m = 1\,600\ \mathrm{kg}$, který jede rychlostí o velikosti $v = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ po ploché kruhové silnici o poloměru $R = 190\ \mathrm{m}$. Jakou nejmenší hodnotu může mít koeficient statického tření f_s mezi pneumatikami a povrchem silnice, nemá-li dojít ke smyku?

ŘEŠENÍ: Dostředivou silou, díky níž se automobil pohybuje rovnoměrně po kružnici, je radiální třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, jíž působí povrch silnice na pneumatiky automobilu. (I když se auto pohybuje, nepodkluzuje v radiálním směru. Uplatní se proto statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, nikoli dynamická $\boldsymbol{F}_d$.)

V silovém diagramu na obr. 6.13b jsou zakresleny síly působící na automobil: $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Automobil není urychlován ve svislém směru, tj. $a_y = 0$. Druhý Newtonův zákon pro tento směr dává známý výsledek $N = G = mg$.

Výslednice sil musí mít nenulový průmět do radiálního směru $\sum \boldsymbol{F}_r$, který určuje dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_r$ automobilu. (V opačném případě by automobil vyjel ze silnice po přímce.) Podle vztahu (6.20) je $\sum F_r = mv^2/R$. Vzhledem k tomu, že jedinou silou s nenulovým radiálním průmětem je statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, platí

$$F_s = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6.25)$$

Připomeňme, že automobil se dostane do smyku, dosáhne-li velikost statické třecí síly F_s největší možné hodnoty $f_s N$. V naší úloze řešíme právě tuto kritickou situaci, a tak ve vztahu (6.25) položíme $F_s = f_s N$. Dále dosadíme $N = mg$ a dostáváme

$$f_s mg = \frac{mv^2}{R},$$

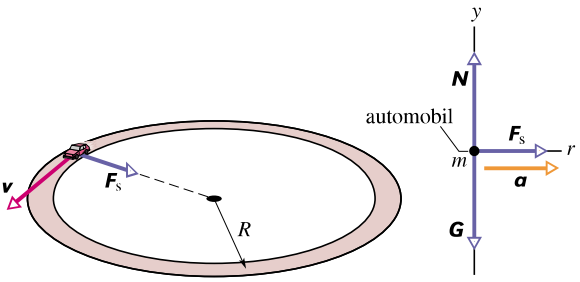
tj.

$$f_s = \frac{v^2}{gR} = \frac{(20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(190\ \mathrm{m})} = \qquad (6.26)$$

$$= 0{,}21. \quad \text{(Odpověď)}$$

Je-li $f_s \geqq 0{,}21$, udrží síla $\boldsymbol{F}_s$ automobil na kruhové dráze. Je-li však $f_s < 0{,}21$, automobil bude klouzat a kruhovou dráhu opustí.

Všimněme si dalších vlastností vztahu (6.26). Za prvé, hodnota f_s závisí na kvadrátu rychlosti v^2. To znamená, že každé zvýšení rychlosti vyžaduje mnohem větší třecí sílu. Možná jste si tuto skutečnost již někdy uvědomili, když při projíždění prudké ploché zatáčky kola automobilu náhle podklouzla. Za druhé, ve vztahu (6.26) nevystupuje hmotnost. Tento vztah tedy platí pro vozidlo jakékoli hmotnosti, od dětského autíčka nebo bicyklu až po těžký tahač.



(a) (b)

Obr. 6.13 Příklad 6.10. (a) Automobil se pohybuje rovnoměrně po ploché kruhové silnici. Třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ realizuje potřebnou dostředivou sílu. (b) Silový diagram (není v měřítku) ve svislé rovině.

KONTROLA 5: Předpokládejme, že automobil na obrázku 6.13 se pohybuje po kružnici o poloměru R_1 a je právě v kritické situaci před smykem. (a) Jaký je nejmenší možný poloměr dráhy při dvojnásobně velké rychlosti, nemá-li dojít ke smyku? (b) Jak se změní nejmenší možný poloměr zatáčky, zdvojnásobíme-li i hmotnost automobilu (například při přepravě nákladu)?

PŘÍKLAD 6.11

Při projíždění zatáčky nemůže řidič automobilu na tření vždy spoléhat, především je-li silnice zledovatělá nebo mokrá. Proto bývají zatáčky klopené. Podobně jako v př. 6.10 předpokládejme, že automobil o hmotnosti m projíždí zatáčkou o poloměru $R = 190\ \mathrm{m}$, nyní však klopenou, rychlostí o stálé velikosti $v = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (obr. 6.14a). Při jakém úhlu θ klopení není třeba se třením počítat?

ŘEŠENÍ: Dostředivé zrychlení a odpovídající dostředivá síla $\sum \boldsymbol{F}_r$ jsou stejné jako v předchozím příkladu. Vlivem klopení zatáčky se však směr tlakové síly $\boldsymbol{N}$ odkloní ke středu křivosti zatáčky. Síla $\boldsymbol{N}$ má nyní nenulový radiální průmět $\boldsymbol{N}_r$, který představuje potřebnou dostředivou sílu.

Svislá složka zrychlení je nulová, takže platí

$$N_y = N\cos\theta = G = mg. \tag{6.27}$$

Nespoléháme-li na účinek třecí síly (počítáme tedy s mezní situací $F_s = 0$), představuje složka N_r jediný nenulový příspěvek k radiální složce výslednice. Podle vztahu (6.20) je pak

$$N_r = N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}. \tag{6.28}$$

Vydělením vztahů (6.28) a (6.27) dostáváme

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR}$$

a nakonec

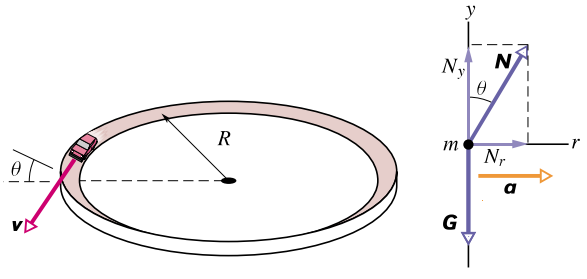
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR} = \tag{6.29}$$

$$= \frac{(20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(190\ \mathrm{m})} = 0{,}215,$$

tj.

$$\theta = 12^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vztahy (6.26) a (6.29) ukazují, že kritická hodnota koeficientu tření pro neklopenou silnici je stejná jako tangenta úhlu náklonu klopené zatáčky. Silnice musí na automobil v každém případě působit silou, která hraje roli dostředivé síly, ať již má povahu síly třecí či tlakové.

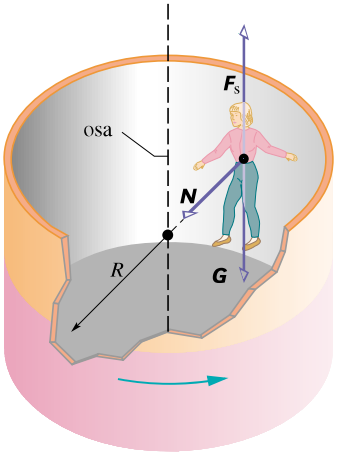


(a) (b)

Obr. 6.14 Příklad 6.11. (a) Automobil rovnoměrně projíždí klopenou zatáčku. Pro přehlednost je úhel klopení v obrázku zakreslen větší, než vychází ve skutečnosti. (b) Diagram sil působících na automobil za předpokladu, že tření mezi silnicí a pneumatikami je nulové. Radiální průmět normálové síly vytváří potřebnou dostředivou sílu. Výsledné zrychlení směřuje do středu kruhové zatáčky.

PŘÍKLAD 6.12

I někteří otrlí vyznavači jízdy na horské dráze blednou při myšlence na jízdu na Rotoru. Je to dutý válec, který se rychle otáčí kolem své osy (obr. 6.15). Člověk vstoupí před jízdou do válce bočními dvířky, postaví se na podlahu a opře se o stěnu pokrytou plachtou. Dvířka se zavřou a válec se začne otáčet. Jezdec, stěna i podlaha se pohybují společně. V okamžiku, kdy rychlost jezdce dosáhne určité předepsané velikosti, podlaha náhle odpadne. Člověk však nepadá spolu s podlahou. Naopak! Je tisknut ke stěně rotujícího válce kýmsi neviditelným a nepřátelským. Po chvíli se podlaha vrací k jeho nohám, válec se zpomalí, jezdec klesne o několik centimetrů a opět se dotkne nohama podlahy. (Někdo považuje takovou jízdu za docela zábavnou.)



Obr. 6.15 Příklad 6.12. Rotor v zábavním parku a síly působící na jezdce. Dostředivou silou je normálová síla, jíž tlačí stěna tělo člověka dovnitř válce. I když tato síla směřuje neustále k ose rotace, má jezdec překvapivý pocit, že jej ke stěně tlačí radiální síla, směřující ven. Jeho pocity jsou způsobeny tím, že je v klidu vůči *neinerciální* vztažné soustavě, takže se spolu s ní pohybuje se zrychlením. Síly, které ho k tomu nutí (pevnost otáčející se stěny, strhávající jezdce s sebou), jsou zdrojem pocitů a vzrušení při jízdě na Rotoru.

Předpokládejme, že koeficient statického tření f_s mezi jezdcovým oblečením a plátnem je 0,40 a že poloměr válce je $R = 2{,}1$ m.

(a) Jakou nejmenší obvodovou rychlost v musí mít válec i člověk, aby člověk při odpojení podlahy nespadl?

ŘEŠENÍ: Člověk nespadne, je-li tíhová síla $\boldsymbol{G}$ v rovnováze se statickou třecí silou $\boldsymbol{F}_s$, kterou na něj působí směrem vzhůru stěna válce. Při nejmenší přípustné rychlosti, při níž ještě nedochází ke skluzu člověka podél stěny, nabývá velikost síly F_s maximální možné hodnoty $f_s N$. Kritická podmínka má tedy tvar

$$f_s N = mg, \tag{6.30}$$

kde m je hmotnost člověka.

Tabulka 6.2 **Hledání supersíly — dosažené výsledky**

DATUM	VĚDEC	OBJEV
1687	Newton	Ukázal, že platí stejné zákony pro astronomická tělesa jako pro objekty na Zemi. Sjednotil nebeskou a pozemskou mechaniku.
1820	Oersted	Brilantními experimenty ukázali, že elektřina a magnetismus, do té doby považované za dvě oddělené disciplíny, jsou těsně spjaty.
1830	Faraday	
1873	Maxwell	Sjednotil elektřinu, magnetismus a optiku v jedinou disciplínu, elektrodynamiku.
1979	Glashow Salam Weinberg	Získali Nobelovu cenu za důkaz, že slabá a elektromagnetická interakce mohou být interpretovány jako dva různé aspekty jediné *elektroslabé interakce*. Došlo tak k redukci počtu fundamentálních interakcí na tři.
1984	Rubbia van der Meer	Získali Nobelovu cenu za experimentální ověření teorie elektroslabé interakce.

Současné teorie:
Teorie velkého sjednocení (GUT): snaha o sjednocení elektroslabé a silné interakce.
Teorie supersymetrie: snaha o sjednocení všech interakcí, včetně gravitační, do jediného rámce.
Teorie superstrun: interpretace bodových částic, jako jsou např. elektrony, jako nepředstavitelně jemných uzavřených smyček. Překvapivě se ukázalo, že ke čtyřem dimenzím časoprostoru je třeba přidat dimenze další.

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je jako obvykle kolmá k povrchu, k němuž je těleso (v tomto případě člověk) tlačeno. Všimněte si, že tato síla je nyní vodorovná a směřuje k ose rotace. Hraje tedy úlohu dostředivé síly, uděluje člověku dostředivé zrychlení a_r a udržuje jej tak na kruhové dráze. Podle vztahu (6.20) je

$$N = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6.31)$$

Dosadíme výraz pro N do rovnice (6.30) a vypočteme v:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{f_s}} = \sqrt{\frac{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}1\ \mathrm{m})}{(0{,}40)}} = \\ = 7{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí na hmotnosti jezdce. Platí pro kohokoli, kdo se veze na Rotoru, od dítěte až po zápasníka v sumo.

(b) Jaká je velikost dostředivé síly působící na člověka o hmotnosti 49 kg?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (6.31) je

$$N = \frac{mv^2}{R} = \frac{(49\ \mathrm{kg})(7{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(2{,}1\ \mathrm{m})} \doteq \\ \doteq 1\,200\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Rotor z příkladu 6.12 se zpočátku pohybuje nejmenší možnou rychlostí potřebnou k tomu, aby člověk nezačal padat. Poté začne velikost rychlosti postupně narůstat. Rozhodněte, zda následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají neměnné: (a) velikost síly F_s, (b) velikost síly $\boldsymbol{N}$, (c) hodnota $F_{s,\max}$.

6.5 PŘÍRODNÍ SÍLY

V předchozím textu jsme užívali písmene $\boldsymbol{F}$ pro označení síly v obecném smyslu. Užívají se i další symboly: $\boldsymbol{G}$, případně $\boldsymbol{F}_G$ pro tíhovou sílu, $\boldsymbol{F}_s$, resp. $\boldsymbol{F}_d$ pro třecí sílu statickou, resp. dynamickou, $\boldsymbol{N}$, případně $\boldsymbol{F}_N$ pro normálovou (tlakovou) sílu, příležitostně i $\boldsymbol{T}$ pro tahovou sílu. Na mikroskopické úrovni však lze všechny tyto síly zařadit do pouhých dvou kategorií: (1) **gravitační síla**, jejímž jediným příkladem, se kterým jsme se prozatím setkali, je síla tíhová, a (2) **elektromagnetická síla**, která bez výjimky zahrnuje všechny ostatní případy. Elektromagnetická síla je kombinací elektrických a magnetických sil. Síla, která způsobí, že elektricky nabitá bublina ulpí na stěně, a síla, díky níž magnet sebere ze země železnou jehlu, jsou jejími různými příklady. Ve skutečnosti, odhlédneme-li od sil gravitačních, mají všechny ostatní síly, které nějakým způsobem přímo vnímáme (například jako tahové nebo tlakové), elektro-

Klopení dráhy je nutné v zatáčkách, jimiž automobil projíždí tak rychle, že samotným třením nevznikne dostatečně velká dostředivá síla.

magnetickou povahu. Znamená to, že podstatou všech takových sil včetně třecích, odporových, tahových a tlakových je elektromagnetická interakce mezi atomy. Pnutí v provazu existuje jedině proto, že se jednotlivé atomy provazu navzájem přitahují.

Kromě gravitačních a elektromagnetických sil známe ještě dvě další interakce. Mají krátký dosah a nemáme s nimi přímou smyslovou zkušenost. Jsou to **slabá interakce**, která se uplatňuje u některých druhů radioaktivního rozpadu, a **silná interakce**, která k sobě váže kvarky vytvářející protony a neutrony a „drží pohromadě" atomová jádra.

Fyzikové již dlouho věří, že podstatou přírody je jednoduchost a že počet fundamentálních interakcí je ve skutečnosti nižší. Einstein věnoval většinu svého životního pracovního úsilí snaze o interpretaci těchto interakcí jako různých aspektů jediné *supersíly*. Tehdy neuspěl. V šedesátých až sedmdesátých letech však prokázali jiní fyzikové, že slabá a elektromagnetická síla jsou různé projevy téže **elektroslabé interakce**. Snahy o další redukci pokračují dodneška a patří k nejpřednějším cílům fyziky. Tabulka 6.2 shrnuje kroky, které již byly směrem ke **sjednocení** (jak je cíl zkoumání nazýván) učiněny a naznačuje i leccos o jejich směřování v budoucnosti.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Tření

Snažíme-li se silou $\boldsymbol{F}$ uvést těleso do skluzu po podložce, působí podložka na těleso **třecí silou**. Ta je s podložkou rovnoběžná a míří proti pohybu tělesa. Je způsobena vazebními silami mezi částicemi tělesa a podložky.

Dokud nedojde ke skluzu, jedná se o **statickou třecí sílu** $\boldsymbol{F}_s$, při skluzu se uplatní **třecí síla dynamická (kinetická)** $\boldsymbol{F}_d$.

Vlastnosti tření

Vlastnost 1. Na těleso působíme silou $\boldsymbol{F}$ a snažíme se je uvést do pohybu. Dokud je těleso v klidu, má statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ stejnou velikost jako průmět síly $\boldsymbol{F}$ do roviny podložky a má opačný směr. Při zvyšování velikosti tohoto průmětu roste i velikost síly $\boldsymbol{F}_s$.

Vlastnost 2. Velikost síly $\boldsymbol{F}_s$ nabývá maximální hodnoty $F_{s,max}$ dané vztahem

$$F_{s,max} = f_s N, \tag{6.1}$$

kde f_s je **koeficient statického tření** a N je velikost normálové síly (tlakové síly podložky). Převýší-li velikost průmětu síly $\boldsymbol{F}$ do roviny podložky hodnotu $F_{s,max}$, začne těleso po podložce klouzat.

Vlastnost 3. Začne-li těleso klouzat po podložce, velikost třecí síly prudce klesne na konstantní hodnotu F_d určenou vztahem

$$F_d = f_d N, \tag{6.2}$$

kde f_d je **koeficient dynamického (kinetického) tření**.

Odporová síla

Pohybuje-li se těleso relativní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vůči prostředí, kterým je obklopeno (například vzduch), působí prostředí na těleso **odporovou silou** $\boldsymbol{F}$. Tato síla brání pohybu tělesa a směřuje proti relativní rychlosti. Velikost síly $\boldsymbol{F}$ souvisí s relativní rychlostí vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2, \tag{6.17}$$

kde ϱ je hustota prostředí (hmotnost vztažená na jednotku objemu), S je **účinný průřez** tělesa (tj. obsah největšího řezu tělesa rovinou kolmou k relativní rychlosti) a C je experimentálně určený koeficient — součinitel odporu.

Mezní rychlost

Padá-li oblé těleso ve vzduchu po dostatečně dlouhé dráze, dojde ke kompenzaci odporové a tíhové síly. Těleso se přestane urychlovat a padá konstantní **mezní rychlostí** o velikosti v_m dané vztahem

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}, \tag{6.18}$$

kde m je hmotnost tělesa.

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Pohyb, při němž se částice o hmotnosti m pohybuje po kružnici rychlostí, jejíž velikost je stálá, nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**. Částice se pohybuje s **dostředivým zrychlením** o velikosti

$$a = \frac{v^2}{r}, \tag{6.19}$$

které jí udílí **dostředivá síla** o velikosti

$$F = \frac{mv^2}{r}. \tag{6.20}$$

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{F}$ míří do středu křivosti trajektorie.

Fundamentální síly

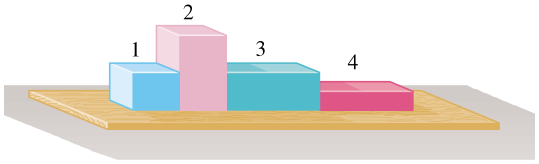
Nepřeberné množství příkladů sil lze roztřídit do tří fundamentálních typů interakce: **gravitační, elektroslabá** (kombinace sil členěných z historických důvodů na **elektrické** a **magnetické** a sil **slabých**) a konečně **silná**. V našem běžném světě se setkáváme pouze s gravitačními, elektrickými a magnetickými silami. Fyzikové doufají, že se seznam tří interakcí podaří zredukovat v jedinou všezahrnující *supersílu*.

OTÁZKY

1. Na obr. 6.16 jsou čtyři kostky uspořádané na desce. Pravý konec desky zvedáme (podobně jako u knihy na obr. 6.3a), dokud po ní kostky nezačnou sjíždět. Kostky jsou ze stejného materiálu a mají hmotnosti

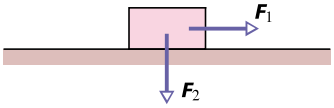
kostka 1 … 5 kg, kostka 2 … 10 kg,
kostka 3 … 10 kg, kostka 4 … 5 kg.

V jakém pořadí zleva doprava musí být kostky narovnány, aby začaly sjíždět při nejmenším možném úhlu sklonu desky vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 6.16 Otázka 1

2. Na obr. 6.17 je znázorněna kostka ležící na podlaze. Na kostku působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 10 N. Kostka je však v klidu. Kostku začneme tlačit k podlaze silou $\boldsymbol{F}_2$, jejíž velikost postupně narůstá od nulové hodnoty. Rozhodněte, zda budou následující veličiny růst, klesat, či zůstanou zachovány: (a) velikost třecí síly $\boldsymbol{F}_s$ působící na kostku, (b) velikost normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí podlaha na kostku, (c) maximální hodnota $F_{s,max}$ velikosti statické třecí síly mezi kostkou a podlahou. (d) Může kostka začít klouzat?

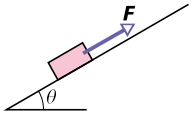


Obr. 6.17 Otázka 2

3. Přepravku na jablka tlačíme ke stěně tak silně, že neklouže dolů. Určete směr následujících sil, jimiž působí stěna na přepravku: (a) statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, (b) normálová síla $\boldsymbol{N}$. Co se stane s hodnotami (c) F_s, (d) N a (e) $F_{s,max}$, zvýšíme-li tlak?

4. Krabice leží na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Úhel θ narůstá z počáteční nulové hodnoty až do okamžiku, kdy krabice začne klouzat. Rozhodněte, zda hodnoty následujících veličin rostou, klesají, či zůstávají neměnné: (a) složka tíhové síly působící na krabici, měřená podél rampy, (b) velikost statické třecí síly, jíž působí rampa na krabici, (c) složka tíhové síly ve směru kolmém k rampě, (d) normálová síla, jíž působí rampa na krabici, (e) maximální hodnota velikosti statické třecí síly $F_{s,max}$.

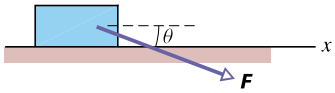
5. Kostka na obr. 6.18 leží na rampě v klidu vlivem třecí síly, jíž na ni rampa působí. Na kostku začneme působit silou $\boldsymbol{F}$, která míří podél rampy vzhůru a jejíž velikost postupně narůstá z počáteční nulové hodnoty. Jak se přitom mění velikost a směr třecí síly působící na kostku?



Obr. 6.18 Otázka 5

6. Vraťte se k otázce 5 s tím, že síla $\boldsymbol{F}$ bude nyní mířit podél rampy dolů. Její velikost opět narůstá od nulové hodnoty. Co se nyní děje se směrem a velikostí třecí síly působící na kostku?

7. Úhel θ mezi silou $\boldsymbol{F}$ působící na nepohyblivou kostku na obr. 6.19 a vodorovnou rovinou roste. Rozhodněte, zda následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají konstantní: (a) F_x, (b) F_s, (c) N, (d) $F_{s,max}$.



Obr. 6.19 Otázka 7

8. Odpovězte na otázku 7, je-li síla $\boldsymbol{F}$ odkloněna vzhůru.

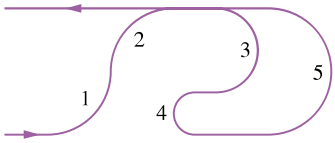
9. Jaká by byla perioda a rychlost kónického kyvadla z příkladu 6.9 pro úhel $\theta = 90°$?

10. Částice se může pohybovat různými rychlostmi po třech různých kruhových obloucích. Možnosti jsou shrnuty v následující tabulce:

OBLOUK	VELIKOST RYCHLOSTI	POLOMĚR
1	$2v_0$	r_0
2	$3v_0$	$3r_0$
3	$2v_0$	$4r_0$

Uspořádejte oblouky podle velikosti dostředivé síly působící na částici (sestupně).

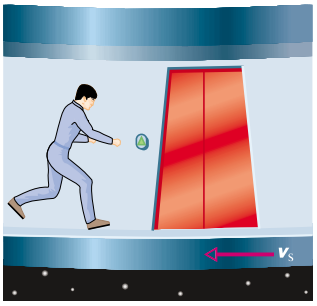
11. Na obr. 6.20 je zakreslen půdorys dráhy v zábavním parku. Vozík projíždí rovnoměrně pěti kruhovými oblouky o poloměrech R_0, $2R_0$ a $3R_0$. Uspořádejte oblouky podle velikosti dostředivé síly působící na projíždějící vozík (sestupně).



Obr. 6.20 Otázka 11

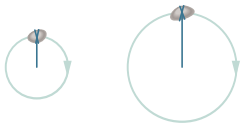
12. Obr. 6.21 znázorňuje řez kruhovou vesmírnou stanicí, která rotuje kolem svého středu. V důsledku toho působí na posádku zdánlivá tíhová síla. Jeden z členů posádky je právě v blízkosti

obvodové stěny, která má rychlost $\boldsymbol{v}_s$. (a) Astronaut se přemístí (například výtahem) blíže ke středu stanice. Rozhodněte, zda při tom velikost zdánlivé tíhové síly působící na astronauta vzroste, klesne, nebo se nezmění. (b) V druhé části pokusu astronaut běží podél stěny lodi v opačném směru vůči $\boldsymbol{v}_s$ (rychlostí, jejíž velikost je menší než v_s). Opět rozhodněte, zda velikost zdánlivé tíhové síly vzroste, klesne, nebo zůstane nezměněna.



Obr. 6.21 Otázka 12

13. Na obr. 6.22 je pohled shora na dva kameny obíhající po dokonale hladké podložce po kruhových trajektoriích. Každý z nich je přivázán na provaze, jehož druhý konec je upevněn ve středu kružnice. Rozhodněte, zda tahová síla delšího provazu je větší, menší, či stejně velká jako tahová síla provazu kratšího, pohybují-li se kameny (a) stejně velkými rychlostmi, (b) se stejnými periodami oběhu.



Obr. 6.22 Otázka 13

14. Mince leží na točně, jejíž rotace se postupně zrychluje. Co se děje s velikostí třecí síly, jíž působí točna na minci, jestliže rychlost otáčení narůstá z počáteční nulové hodnoty?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 6.2 Vlastnosti sil tření

1C. Plný prádelník o hmotnosti 45 kg stojí na podlaze. (a) Koeficient statického tření mezi ním a podlahou je 0,45. Jakou nejmenší vodorovnou silou musí člověk na prádelník působit, aby jím pohnul? (b) Zodpovězte předchozí otázku pro případ, že z prádelníku nejprve vyndáme prádlo a šatstvo o celkové hmotnosti 17 kg.

2C. Hráč baseballu o hmotnosti $m = 79$ kg klouže k druhé metě a je brzděn třecí silou o velikosti $F = 470$ N. Jaký je koeficient dynamického tření mezi hráčem a trávníkem?

3C. Koeficient statického tření mezi teflonem a míchanými vejci je asi 0,04. Při jakém nejmenším úhlu sklonu vzhledem k vodorovné rovině sklouznou vejce podél dna teflonové pánve?

4C. Síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 100 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ a míří vzhůru, působí na židli o hmotnosti 25,0 kg spočívající na podlaze. (a) Pro každou z hodnot úhlu $\theta = 0°; 30°; 60°$ vypočtěte velikost tlakové síly podlahy na židli a vodorovnou složku síly $\boldsymbol{F}$. (b) Pro každou z hodnot θ rozhodněte, bude-li židle v klidu, nebo bude-li klouzat po podlaze. Koeficient statického tření mezi židlí a podlahou je 0,420.

5C. V Nevadě a jižní Kalifornii zanechávají kameny v tvrdé a vyprahlé pouštní půdě stopy, jako by se stěhovaly (obr. 6.23). Po celá léta si lidé lámali hlavu, odkud se bere neviditelný pohyb vedoucí ke vzniku těchto stop. Odpověď přišla v sedmdesátých letech tohoto století: Když poušť zasáhla náhlá bouře, vytvořila se na pevném podkladu tenká vrstva bláta, která značně snížila koeficient tření mezi kameny a podkladem. Bouři doprovázel silný vítr, opíral se do kamenů, posouval je a ony zanechaly v půdě stopy, které později slunečním žárem ztvrdly. Předpokládejme, že hmotnost kamene je 300 kg (zhruba největší hmotnost kamenů, které zanechávají stopy) a že koeficient statického tření je zmenšen na hodnotu 0,15. Jak velká vodorovná síla musí na kámen působit při prudkém poryvu větru, aby se pohnul?

Obr. 6.23 Cvičení 5

6C. Jakého největšího zrychlení může dosáhnout běžec, je-li koeficient statického tření mezi obuví a běžeckou dráhou 0,95? (Při běhu je v kontaktu s dráhou jen jedna noha běžce.)

7C. Dělník tlačí vodorovným směrem bednu o hmotnosti 35 kg. Působí na ni při tom silou 110 N. Koeficient statického tření mezi bednou a podlahou je 0,37. (a) Jakou třecí silou působí podlaha na bednu? (b) Jaká je za této situace maximální velikost statické třecí síly $F_{s,max}$? (c) Pohne se bedna? (d) Druhý dělník přichází na pomoc a táhne bednu svisle vzhůru. Jakou nejmenší tahovou silou musí na bednu působit, aby se prvnímu dělníkovi podařilo uvést ji do pohybu? (První dělník stále tlačí bednu silou 110 N.) (e) Jakou nejmenší silou by musel na bednu působit druhý dělník, kdyby ji namísto zvedání tahal vodorovným směrem, aby se oběma podařilo bednu posunout?

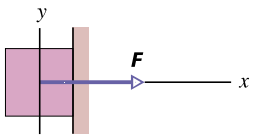
8C. Člověk tlačí po podlaze bednu o hmotnosti 55 kg vodo-

rovnou silou o velikosti 220 N. Koeficient dynamického tření je 0,35. (a) Jaká je velikost třecí síly? (b) Jaké je zrychlení bedny?

9C. Kufr vážící 220 N leží na vodorovné podlaze. Koeficient statického tření mezi kufrem a podlahou je 0,41, koeficient dynamického tření je 0,32. (a) Jakou nejmenší vodorovnou silou musí působit člověk na kufr, aby jím pohnul? (b) Jakou vodorovnou silou musí člověk působit na kufr, který se již dal do pohybu, aby udržel jeho rychlost stálou? (c) Jaké je zrychlení kufru, působí-li na něj člověk stále stejnou silou jako na začátku?

10C. Skříňka vážící 556 N stojí na podlaze. Koeficient statického tření mezi ní a podlahou je 0,68, koeficient dynamického tření je 0,56. Při čtyřech různých pokusech uvést skříňku do pohybu na ni působila pokaždé jinak velká vodorovná síla: (a) 222 N, (b) 334 N, (c) 445 N, (d) 556 N. Pro každý z uvedených případů zjistěte, zda se skříňka pohnula a vypočtěte velikost třecí síly, kterou na skříňku působí podlaha poté, co je uvedena do pohybu. Na počátku každého pokusu je skříňka v klidu.

11C. Kostku o váze 5,0 N tlačíme ke svislé stěně vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 12 N (obr. 6.24). Koeficient statického tření mezi stěnou a kostkou je 0,60, koeficient dynamického tření mezi nimi je 0,40. Předpokládejme, že se kostka zpočátku nepohybuje. (a) Začne se kostka pohybovat? (b) Pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ vyjádřete sílu, jíž působí stěna na kostku.

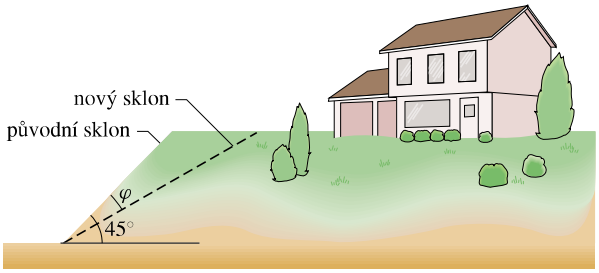


Obr. 6.24 Cvičení 11

12C. Horolezkyně o hmotnosti 49 kg šplhá „komínem“ mezi dvěma skalními stěnami způsobem znázorněným na obr. 6.25. Koeficient statického tření mezi její obuví a skálou je 0,8, mezi zády a skálou 1,2. Horolezkyně snižuje tlakovou sílu, kterou se tiskne nohama i zády ke skalní stěně, až do okamžiku těsně před sklouznutím. Předpokládáme, že poměr velikostí statických třecích sil, jimiž působí skalní stěna na chodidla, resp. záda horolezkyně, je takový, že by ke skluzu zad i chodidel došlo současně.* (a) Jak velkou silou se horolezkyně tiskne ke skále? (b) Jakou část tíhové síly kompenzuje třecí síla působící na její obuv?

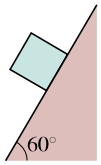
13C. Dům je postaven na vrcholku kopce se sklonem svahu asi 45° (obr. 6.26). Geologická studie naznačuje, že úhel sklonu bude pravděpodobně časem klesat vlivem skluzu svrchních vrstev půdy. Koeficient statického tření mezi svrchní a spodní vrstvou je 0,5. O jaký nejmenší úhel φ je potřeba zmenšit sklon svahu, aby k sesuvům nedošlo?

Obr. 6.25 Cvičení 12



Obr. 6.26 Cvičení 13

14C. Koeficient dynamického tření v situaci znázorněné na obr. 6.27 je 0,20. Jaké zrychlení má kostka, která (a) klesá podél nakloněné roviny, (b) byla vržena podél nakloněné roviny vzhůru a dosud stoupá.

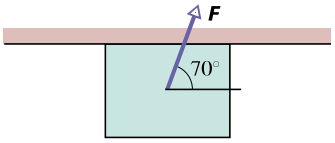


Obr. 6.27 Cvičení 14

15C. Hokejový kotouč o hmotnosti 110 g klouže po ledové ploše a urazí 15 m, než se zastaví. Velikost jeho počáteční rychlosti je 6,0 m/s. (a) Určete velikost třecí síly působící na kotouč a (b) koeficient tření mezi kotoučem a ledem.

16Ú. Po neúspěšné zkoušce z fyziky měl student děsivý sen: zdálo se mu, že tlačí jakousi kostku po stropě svého pokoje. Kostka má hmotnost 5,0 kg a student na ni působí silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 80 N, která svírá s rovinou stropu úhel 70° (obr. 6.28). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a stropem je 0,40. Úspěšnost zkoušky závisí na tom, zda se studentovi podaří určit, jak velké je zrychlení kostky.

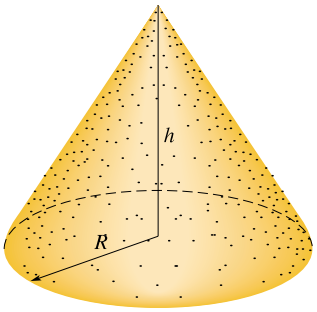
* Velikosti statických třecích sil, jimiž působí skalní stěna na chodidla, resp. na záda horolezkyně, nejsou shodné. Je to způsobeno tím, že horolezkyni nelze v popsané situaci považovat za hmotný bod. Její těžiště (viz kap. 9) leží v blízkosti stěny, o niž se sportovkyně opírá zády. Statická třecí síla, jíž na ni tato stěna působí, musí proto kompenzovat větší část tíhové síly než stěna protilehlá. Předpoklad o současném skluzu horolezkyně po *obou* stěnách nahrazuje v této úloze údaj o poloze těžiště a umožňuje při jejím řešení použít model hmotného bodu.



Obr. 6.28 Úloha 16

17Ú. Úkolem studenta v praktiku je určit koeficient statického i dynamického tření mezi krabicí a deskou. Položí krabici na desku a pozvolna zvedá jeden konec desky. V okamžiku, kdy úhel odklonu desky od vodorovné roviny dosáhne hodnoty 30°, začne krabice klouzat a během 4,0 s sjede podél desky o 2,5 m. Jak velké jsou oba koeficienty tření?

18Ú. Dělník potřebuje nasypat písek na kuželovou hromadu o kruhové podstavě. Poloměr kruhu je R. Žádný písek se nesmí rozsypat okolo (obr. 6.29). Koeficient statického tření mezi vrstvou písku uloženou podél pláště kužele a pískem vespod je f_s. Ukažte, že největší objem písku, který může být tímto způsobem uskladněn, je $\pi f_s R^3/3$. (Objem kužele je $Sh/3$, kde S je obsah základny a h výška kužele.)



Obr. 6.29 Úloha 18

19Ú. Lyžaři mají zkušenost, že lyže volně položená na zasněžený terén se přilepí. Když se však lyže pohybuje, sníh se třením zahřívá a částečně roztaje. Výsledkem je snížení koeficientu tření a zlepšení skluzu. Navoskovanou lyži voda navíc nesmáčí a tření mezi lyží a vrstvou vody se tím ještě více zmenší. Reklama v časopisu doporučuje nový typ plastových lyží jako zvláště nesmáčivý a uvádí následující srovnání: Na nových lyžích sjel lyžař po mírném, 200 m dlouhém svahu za pouhých 42 s, zatímco sjezd na lyžích standardního typu trval 61 s. (a) Určete průměrnou velikost zrychlení lyžaře v obou případech. (b) Za předpokladu, že svah má sklon 3,0°, určete pro oba typy lyží koeficient dynamického tření mezi sněhovou vrstvou a skluznicí.

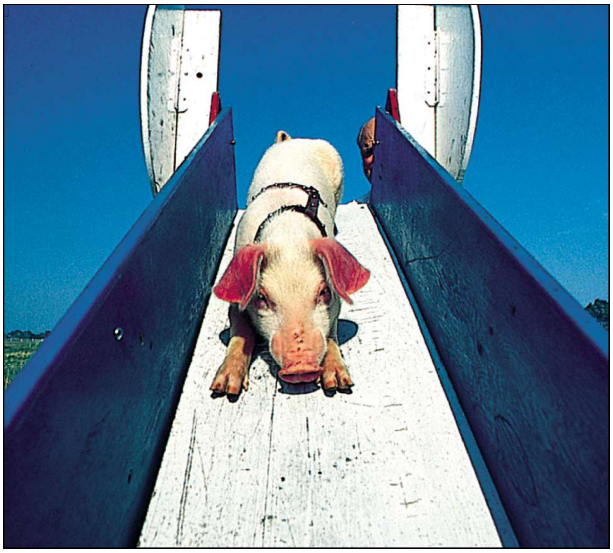
20Ú. Ocelová kostka o hmotnosti 11 kg spočívá na vodorovném stole. Koeficient statického tření mezi kostkou a stolem je 0,52. Jak velkou silou lze uvést kostku do pohybu, (a) je-li tato síla vodorovná, (b) svírá-li tato síla s vodorovnou rovinou úhel $+60°$ (směřuje vzhůru)? (c) Předpokládejme, že na kostku působí síla, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $-60°$ (směřuje dolů). Jaká je největší přípustná hodnota její velikosti, má-li kostka zůstat v klidu?

21Ú. Železniční vůz je naložen bednami. Koeficient statického tření mezi nimi a podlahou vozu je 0,25. Vlak jede rychlostí 48 km/h. Jaká je nejkratší možná vzdálenost, na které může vlak zastavit, aby bedny neklouzaly? Vlak brzdí s konstantním zrychlením.

22Ú. Kostka klouže stálou rychlostí dolů po nakloněné rovině s úhlem sklonu θ. Poté je podél nakloněné roviny vržena zpět vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0. (a) Jakou vzdálenost kostka podél nakloněné roviny urazí, než se zastaví? (b) Sklouzne pak zase dolů? Vysvětlete.

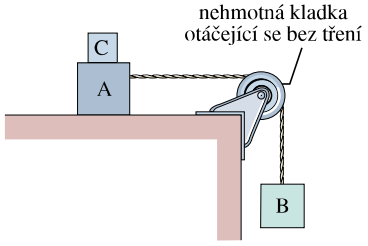
23Ú. Bedna o hmotnosti 68 kg je vlečena po podlaze na laně, které svírá s vodorovnou rovinou úhel 15°. (a) Koeficient statického tření mezi podlahou a bednou je 0,50. Určete nejmenší tahovou sílu lana, potřebnou k uvedení bedny do pohybu. (b) S jakým zrychlením se bedna začne v tomto případě pohybovat, je-li $f_d = 0{,}35$.

24Ú. Vepřík klouže po dřevěné skluzavce o úhlu sklonu 35° (obr. 6.30) dvakrát déle, než kdyby skluzavka byla dokonale hladká. Určete koeficient dynamického tření.



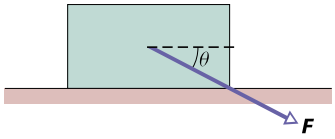
Obr. 6.30 Úloha 24

25Ú. Kostky A a B na obr. 6.31 váží 44 N, resp. 22 N. (a) Koeficient statického tření f_s mezi kostkou A a stolem je 0,20. Určete nejmenší váhu kostky C, kterou je třeba položit na kostku A, aby nedošlo ke skluzu. (b) Kostku C náhle zvedneme. Jaké je zrychlení kostky A, je-li koeficient dynamického tření mezi ní a deskou stolu 0,15?



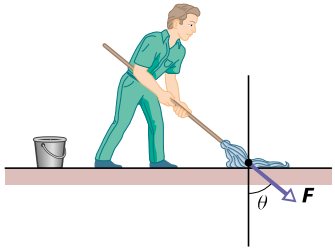
Obr. 6.31 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 3,5 kg suneme po vodorovné podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = 15\,\mathrm{N}$, která svírá s podlahou úhel $\theta = 40^\circ$ (obr. 6.32). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou je 0,25. Vypočtěte (a) velikost třecí síly působící na kostku a (b) zrychlení kostky.



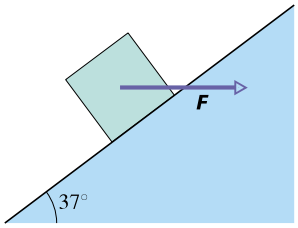
Obr. 6.32 Úloha 26

27Ú. Pečlivý pracovník na obr. 6.33 tlačí mop přímo ve směru jeho rukojeti silou $\boldsymbol{F}$. Rukojeť svírá se svislým směrem úhel θ. Koeficient statického, resp. dynamického tření mezi hlavicí mopu a podlahou je f_s, resp. f_d. Zanedbejte hmotnost rukojeti a předpokládejte, že celková hmotnost m mopu je soustředěna v hlavici. (a) Určete velikost síly F, pohybuje-li se mop po podlaze konstantní rychlostí. (b) Ukažte, že působením síly $\boldsymbol{F}$ (opět ve směru rukojeti) nelze uvést mop do pohybu, pokud úhel θ nedosáhne jisté nejmenší hodnoty θ_0. Určete ji.



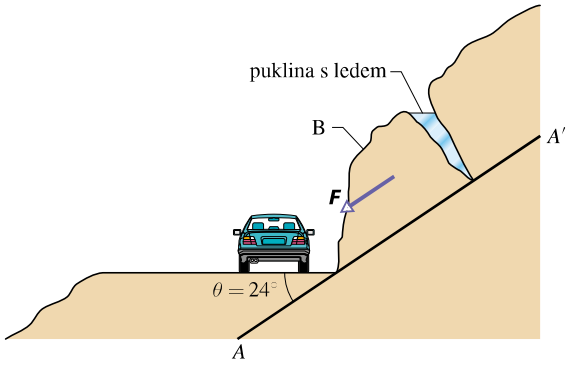
Obr. 6.33 Úloha 27

28Ú. Na kostku o hmotnosti 5,0 kg, pohybující se po nakloněné rovině, působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 50 N (obr. 6.34). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je 0,30. Koeficient statického tření není zadán. (Jistou informaci o něm však v tuto chvíli již přece jen máme.) (a) Jaké je zrychlení pohybu kostky po nakloněné rovině? (b) Jakou vzdálenost urazí kostka podél nakloněné roviny, jestliže její počáteční rychlost směřovala vzhůru a měla velikost $4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? (c) Co se stane v okamžiku, kdy se kostka dostane do bodu obratu? Zdůvodněte.



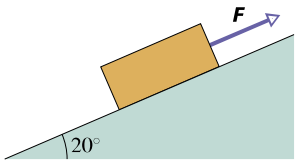
Obr. 6.34 Úloha 28

29Ú. Obr. 6.35 znázorňuje boční průřez silnicí zařízlutou do svahu. Plnou čárou AA' je vyznačena tzv. oslabená vrstevná plocha, podél níž může docházet ke skluzu. Blok B, ležící přímo nad silnicí, je od skály nad ním oddělen velkou trhlinou a jeho sesuvu brání pouze tření o vrstevnou plochu. Hmotnost bloku je $1{,}8{\cdot}10^7$ kg, *hloubkový úhel* θ je 24° a koeficient statického tření mezi blokem a podložím má hodnotu 0,63. (a) Ukažte, že blok nesklouzne. (b) Do trhliny prosakuje voda a zamrzá. Zvyšuje přitom svůj objem a působí tak na blok silou $\boldsymbol{F}$ rovnoběžnou se směrem AA'. Při jaké nejmenší hodnotě F začne blok klouzat?



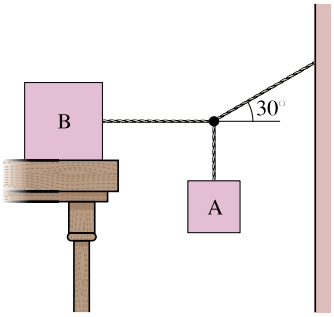
Obr. 6.35 Úloha 29

30Ú. Kostka vážící 80 N spočívá na nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 6.36). Koeficient statického tření je 0,25, koeficient dynamického tření 0,15. (a) Jaká je nejmenší velikost síly $\boldsymbol{F}$ rovnoběžné s nakloněnou rovinou, která zabrání kostce ve skluzu? (b) Jaká je nejmenší hodnota F, při níž se začne kostka pohybovat po nakloněné rovině vzhůru? (c) Při jaké hodnotě F bude kostka stoupat stálou rychlostí?



Obr. 6.36 Úloha 30

31Ú. Kostka B na obr. 6.37 má hmotnost 72,5 kg. Koeficient statického tření mezi kostkou a vodorovnou rovinou je 0,25. Určete největší možnou hmotnost kostky A, při níž ještě bude soustava v rovnováze.

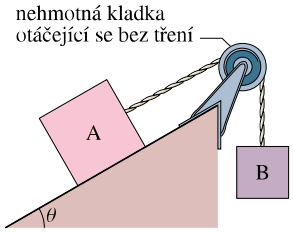


Obr. 6.37 Úloha 31

32Ú. Tělesa A a B na obr. 6.38 jsou spojena vláknem vedeným

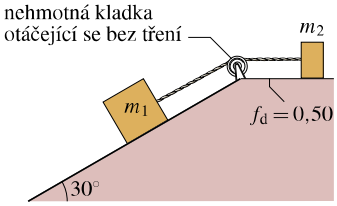
přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření. Těleso A má hmotnost 10,4 kg, těleso B 3,3 kg. Koeficienty tření mezi tělesem A a nakloněnou rovinou jsou $f_s = 0{,}56$ a $f_d = 0{,}25$. Úhel θ je 40°. Určete zrychlení těles, jestliže (a) jsou zpočátku v klidu, (b) těleso A stoupá po nakloněné rovině, (c) těleso A klesá po nakloněné rovině.

33Ú. Uspořádání těles je stejné jako na obr. 6.38. Kostka A má hmotnost 10 kg, koeficient dynamického tření mezi ní a nakloněnou rovinou je 0,22. Úhel θ je 30°. Kostka A klouže dolů po nakloněné rovině stálou rychlostí. Jakou hmotnost má kostka B?



Obr. 6.38 Úlohy 32 a 33

34Ú. Kostky na obr. 6.39 mají hmotnosti $m_1 = 4{,}0$ kg a $m_2 = 2{,}0$ kg. Koeficient dynamického tření mezi m_2 a vodorovnou rovinou je 0,50. Nakloněná rovina je dokonale hladká. Určete (a) tahovou sílu vlákna a (b) zrychlení kostek.

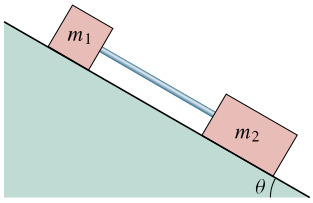


Obr. 6.39 Úloha 34

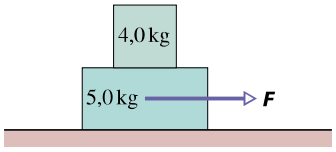
35Ú. Dvě kostky o hmotnostech 4,0 kg a 8,0 kg jsou spojeny vláknem zanedbatelné hmotnosti a kloužou dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Čtyřkilogramová kostka je vpředu. Koeficient dynamického tření mezi čtyřkilogramovou (osmikilogramovou) kostkou a nakloněnou rovinou je 0,10 (0,20). (a) Určete zrychlení kostek a (b) sílu napínající vlákno. (c) Popište pohyb soustavy po záměně pořadí kostek.

36Ú. Dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 1{,}65$ kg a $m_2 = 3{,}30$ kg spojená nehmotnou tyčí kloužou po nakloněné rovině o úhlu sklonu $\theta = 30°$ (obr. 6.40) tak, že těleso m_1 je taženo tělesem m_2. Tyč je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Koeficient dynamického tření mezi m_1 a nakloněnou rovinou je $f_1 = 0{,}226$, mezi m_2 a rovinou $f_2 = 0{,}113$. Vypočtěte (a) sílu napínající tyč a (b) zrychlení těles. (c) Jak se změní odpovědi (a) a (b), zaměníme-li pořadí těles?

37Ú. Kostka o hmotnosti 4,0 kg leží na horní podstavě jiné kostky, jejíž hmotnost je 5,0 kg. Předpokládejme nejprve, že spodní kostka je pevně spojena s podložkou. K uvedení horní kostky do pohybu je v takovém případě třeba, aby na ni působila vodorovná síla o velikosti nejméně 12 N. Nyní položíme obě kostky na vodorovný dokonale hladký stůl (obr. 6.41). Určete (a) největší možnou velikost vodorovné síly **F**, kterou lze působit na dolní kostku tak, aby se obě kostky pohybovaly společně a (b) společné zrychlení kostek.

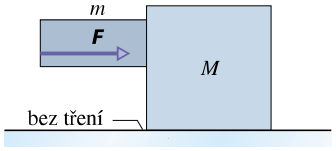


Obr. 6.40 Úloha 36



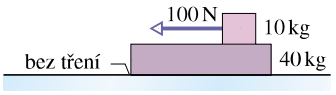
Obr. 6.41 Úloha 37

38Ú. Dvě kostky ($m = 16$ kg a $M = 88$ kg), znázorněné na obr. 6.42, nejsou spojeny. Koeficient statického tření mezi nimi je $f_s = 0{,}38$, podložka pod kostkou M je však dokonale hladká. Jakou nejmenší vodorovnou silou **F** je nutno tlačit kostku m ke stěně kostky M, aby se pohybovaly společně?



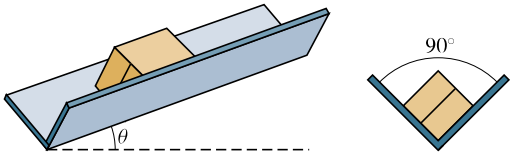
Obr. 6.42 Úloha 38

39Ú. Deska o hmotnosti 40 kg leží na dokonale hladké podlaze. Na desce spočívá kostka o hmotnosti 10 kg (obr. 6.43). Koeficient statického tření f_s mezi kostkou a deskou je 0,60, koeficient dynamického tření je $f_d = 0{,}40$. Na kostku působí vodorovná síla o velikosti 100 N. Určete zrychlení (a) kostky i (b) desky.



Obr. 6.43 Úloha 39

40Ú. Bedna klouže ve žlabu s pravoúhlým profilem (obr. 6.44). Koeficient dynamického tření mezi bednou a žlabem je f_d. Vyjádřete zrychlení bedny pomocí f_d, θ a g.



Obr. 6.44 Úloha 40

41Ú. Lokomotiva s 25 vagony se rozjíždí po vodorovné trati. Každý vagon má hmotnost 5 000 kg a je brzděn třecí silou o velikosti $F = 250v$ (v newtonech), kde v je velikost jeho okamžité rychlosti ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$). V okamžiku, kdy velikost rychlosti vlaku nabude hodnoty 30 km/h, má zrychlení velikost $0,20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. (a) Jak velkou tažnou silou působí lokomotiva na první vagon? (b) Předpokládejme, že získaná hodnota představuje velikost největší síly, kterou je lokomotiva schopna vyvinout. Určete nejpříkřejší možné stoupání svahu, po němž může lokomotiva vytáhnout vlak stálou rychlostí 30 km/h.

42Ú. Krabice s pískem, která je zpočátku v klidu, je upevněna na šňůře a tažena po podlaze. Velikost tahové síly šňůry nesmí převýšit 1 100 N. Koeficient statického tření mezi krabicí a podlahou je 0,35. (a) Jaký úhel mezi šňůrou a podlahou musíme zvolit, abychom přepravili co největší množství písku? (b) Jaká bude v této situaci hmotnost krabice s pískem?

43Ú*. Člun o hmotnosti 1 000 kg se pohybuje rychlostí 90 km/h. Posádka vypne motor. Velikost třecí síly F_d mezi člunem a vodou je úměrná velikosti rychlosti člunu podle vztahu $F_\mathrm{d} = 70v$, kde v je zadáno v metrech za sekundu a F_d v newtonech. Za jak dlouho klesne velikost rychlosti člunu na 45 km/h?

ODST. 6.3 Odporová síla a mezní rychlost

44C. Určete odporovou sílu, která působí na raketu o poloměru 53 cm při rychlosti $250\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, letí-li v nízké nadmořské výšce, kde je hustota vzduchu $1,2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že $C = 0,75$.

45C. Mezní rychlost vzdušného akrobata v poloze rozepjatého orla je 160 km/h, při letu střemhlav pak 310 km/h. Předpokládáme, že koeficient C má stejnou hodnotu při obou figurách. Vypočtěte poměr odpovídajících účinných průřezů.

46C. Určete poměr velikostí odporové síly, která působí na tryskové dopravní letadlo letící rychlostí o velikosti 1 000 km/h v nadmořské výšce 10 km a odporové síly působící na vrtulové vojenské letadlo, které letí poloviční rychlostí v poloviční výšce. Hustota vzduchu ve výšce 10 km je $0,38\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, ve výšce 5,0 km je $0,67\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že účinné průřezy obou letadel i odporové koeficienty jsou stejné.

47Ú. Z údajů v tab. 6.1 určete průměr osmikilogramového náboje. Předpokládejte, že $C = 0,49$ a hustota vzduchu má hodnotu $1,2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

ODST. 6.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici

48C. Koeficient statického tření mezi pneumatikami automobilu a silnicí je 0,25. Jakou největší rychlostí může automobil projet bez smyku vodorovnou zatáčkou o poloměru 47,5 m?

49C. Jaký je nejmenší poloměr neklopené zatáčky, kterou může bez nehody projet cyklista, jede-li rychlostí 30 km/h? Koeficient statického tření mezi pneumatikami a silnicí je 0,32.

50C. Při olympijské soutěži závodních sání byla nejlepšímu evropskému družstvu naměřena rychlost 60 mil v hodině při průjezdu zatáčkou o poloměru 25 stop. Jakému přetížení (v jednotkách g) byli při tom jezdci vystaveni? (Zadané hodnoty převeďte do soustavy SI.)

51C. Automobil vážící 10,7 kN jede rychlostí 13,4 m/s. Řidič se chystá projet neklopenou zatáčkou o poloměru 61,0 m. (a) Jak velká třecí síla je schopna udržet automobil na kruhové dráze? (b) Jak dopadne řidičův pokus, je-li koeficient statického tření mezi pneumatikami vozu a silnicí 0,35?

52C. V kruhové zatáčce je předepsána rychlost o velikosti 60 km/h. (a) Jaký je správný úhel klopení zatáčky, je-li její poloměr 150 m? (b) Jaká by při uvedené rychlosti musela být minimální hodnota statického koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, potřebná pro bezpečný průjezd vozidel (bez smyku), kdyby zatáčka nebyla klopená?

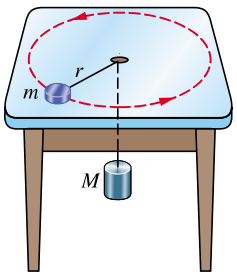
53C. V klopené zatáčce je předepsána rychlost 60 km/h. Poloměr zatáčky je 200 m. Automobil jede v dešti rychlostí 40 km/h. Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, při níž může automobil projet zatáčkou ještě bez smyku?

54C. Holčička postavila piknikový košík na vnější obvod kolotoče. Kolotoč má poloměr 4,6 m a otočí se jednou za 30 s. (a) Jaká je velikost rychlosti bodu na obvodu kolotoče? (b) Jaký musí být koeficient statického tření mezi košíkem a kolotočem, má-li být košík vzhledem ke kolotoči v klidu?

55C. Malá kulička (hmotný bod) o hmotnosti 50 g zavěšená na niti délky 1,2 m tvoří konické kyvadlo. Kulička obíhá po vodorovné kružnici o poloměru 25 cm. (a) Jak velká je rychlost kuličky? (b) Jaké je její zrychlení? (c) Jak velká je tahová síla niti?

56C. Elektron v Bohrově modelu vodíkového atomu obíhá kolem jádra po kruhové dráze o poloměru $5,3{\cdot}10^{-11}$ m. Elektron oběhne jádro $6,6{\cdot}10^{15}$krát za sekundu. (a) Určete jeho rychlost, (b) zrychlení (velikost i směr) a (c) dostředivou sílu, která na elektron působí. (Tato síla je dána přitažlivou elektrostatickou interakcí záporně nabitého elektronu a kladně nabitého jádra.) Hmotnost elektronu je $9,11{\cdot}10^{-31}$ kg.

57C. Tělísko o hmotnosti m leží na dokonale hladkém stole a je spojeno se závažím o hmotnosti M provázkem provlečeným otvorem ve stole (obr. 6.45). Určete rychlost, kterou se musí tělísko m pohybovat, aby závaží M bylo v klidu.

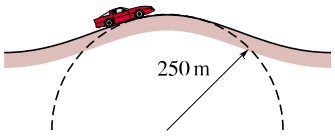


Obr. 6.45 Cvičení 57

58C. Kaskadér v autě přejíždí vrcholek, jehož profil je přibližně kruhový, s poloměrem 250 m (obr. 6.46). Jakou největší rychlostí může jet, aby vozidlo neztratilo kontakt se silnicí?

59Ú. Malá mince leží na ploché vodorovné točně. Točna se otočí třikrát za 3,14 s. (a) Jaká je rychlost mince, která se veze na točně

bez klouzání ve vzdálenosti 5,0 cm od jejího středu? (b) Jaké je zrychlení mince (velikost i směr)? (c) Jaká je velikost třecí síly působící na minci? Hmotnost mince je 2,0 g. (d) Zjistilo se, že mince umístěná do vzdálenosti větší než 10 cm od středu točny již bude klouzat. Jaký je koeficient statického tření mezi mincí a točnou?



Obr. 6.46 Cvičení 58

60Ú. Malý předmět je umístěn ve vzdálenosti 10 cm od středu talíře gramofonu. Při otáčkách $33\frac{1}{3}$ ot/min zůstává předmět vzhledem k točně v klidu, při 45 ot/min již klouže. V jakém intervalu leží hodnota statického koeficientu tření mezi předmětem a točnou?

61Ú. Cyklista projíždí kruhovou zatáčkou o poloměru 25 m rychlostí o stálé velikosti 9,00 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Hmotnost cyklisty i s kolem je 85,0 kg. Určete (a) velikost třecí síly, jíž působí povrch silnice na kolo, (b) velikost celkové síly, jíž působí silnice na kolo.

62Ú. Student o hmotnosti 67 kg se veze na ruském kole, které se otáčí rovnoměrně. Zdánlivá váha studenta v nejvyšším bodě dráhy je 560 N. (a) Jakou má student zdánlivou váhu v nejnižším bodě? (b) Jakou bude mít zdánlivou váhu v nejvyšším bodě, jestliže se rychlost kola zdvojnásobí?

63Ú. Auto projíždí plochou zatáčkou o poloměru $R = 220$ m nejvyšší povolenou rychlostí o velikosti $v = 94{,}0\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou *celkovou* silou působí pasažér o hmotnosti 85,0 kg na sedadlo?

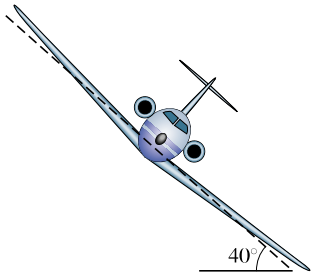
64Ú. Kámen uvázaný na vlákně obíhá ve svislé rovině po kružnici o poloměru R. Určete kritickou hodnotu velikosti rychlosti, kterou musí mít kámen při průchodu nejvyšším bodem dráhy, nemá-li se vlákno pokrčit.

65Ú. Pevnost šňůry je dána největší přípustnou velikostí tahové síly 40 N. Dítě přivázalo na šňůru kámen o hmotnosti 0,37 kg a roztočilo jej ve svislé rovině tak, aby kámen obíhal po kružnici o poloměru 1,0 m. Postupně zvyšovalo rychlost oběhu, až šňůra praskla. (a) Ve kterém bodě své trajektorie byl kámen v okamžiku, kdy se šňůra přetrhla? (b) Jak velká byla v tomto okamžiku jeho rychlost?

66Ú. Letadlo zatáčí rychlostí o velikosti 480 km/h po kružnici ležící ve vodorovné rovině. Křídla letadla svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° (obr. 6.47). Jaký je poloměr zatáčky? Předpokládejte, že potřebná výsledná síla působící na letadlo je plně realizována aerodynamickou vztlakovou silou, která je kolmá ke křídlům letadla.

67Ú. Fregatka plachtí po vodorovné kruhové trajektorii. Úhel sklonu jejích křídel vzhledem k vodorovné rovině je přibližně 25°. Pták obletí celou kružnici za 13 s. (a) Určete rychlost jeho letu a (b) poloměr jeho trajektorie.

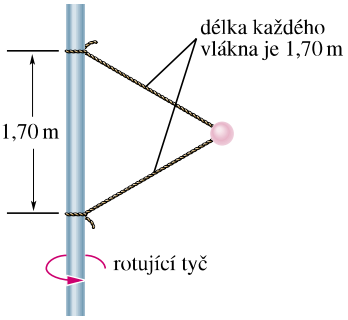
68Ú. Model letadla o hmotnosti 0,75 kg létá rovnoměrně po vodorovné kružnici ve výšce 18 m a vykoná 4,4 obletu na minutu. Model je připoután na šňůře délky 30 m, jejíž druhý konec je připevněn na zemi. Křídla letadélka jsou vodorovná, takže vztlaková síla vzduchu směřuje svisle vzhůru. (a) Jaké je zrychlení modelu? (b) Jakou silou je napínána šňůra? (c) Jaká je celková vztlaková síla působící na křídla letadla?



Obr. 6.47 Úloha 66

69Ú. Stará tramvaj projíždí neklopenou zatáčkou. Poloměr zatáčky je 30 stop a rychlost tramvaje má velikost 10 mil za hodinu (užijte převodní tabulky). Jaký úhel svírají volně visící kožená držadla se svislým směrem?

70Ú. Koule o hmotnosti 1,34 kg je pomocí dvou šňůr zanedbatelné hmotnosti připojena ke svislé rotující tyči (obr. 6.48). Šňůry jsou přivázány k tyči, jsou napjaté a tvoří dvě strany rovnostranného trojúhelníka. Tahová síla v horní šňůře je 35 N. (a) Nakreslete silový diagram koule. (b) Jakou silou je napínána spodní šňůra? (c) Určete výslednici sil působících na kouli v okamžiku zachyceném na obr. 6.48 a (d) rychlost koule.



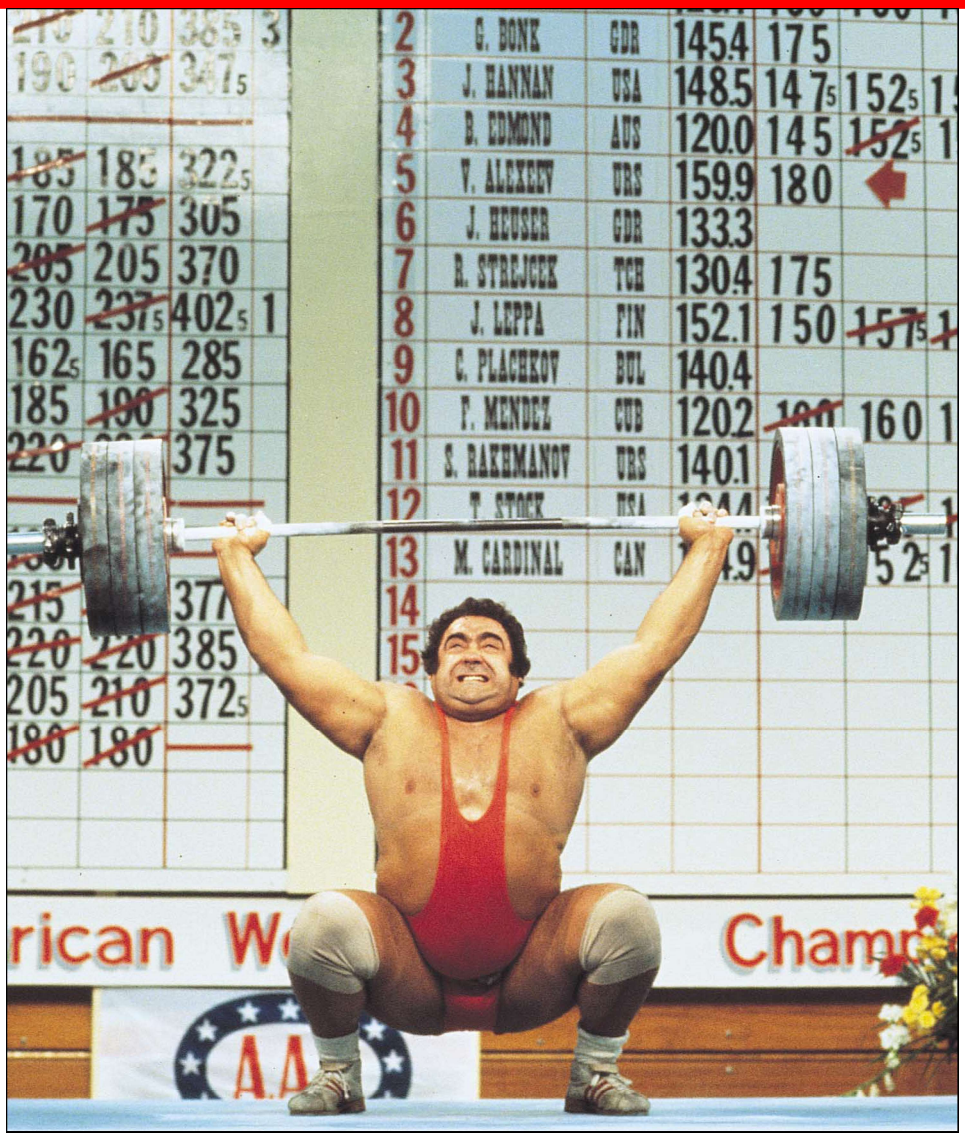
Obr. 6.48 Úloha 70

71Ú. Předpokládejme, že na těleso o hmotnosti standardního kilogramu by na rovníku při hladině moře působila tíhová síla přesně 9,8 N, kdyby se Země neotáčela. Ve skutečnosti Země rotuje, takže těleso se pohybuje po kružnici o poloměru $6{,}40{\cdot}10^6$ m (zemský poloměr) rychlostí o stálé velikosti 465 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete dostředivou sílu udržující standardní kilogram na této kruhové dráze. (b) Určete sílu, jíž působí standardní kilogramové těleso na pružinu siloměru, na který je zavěsíme (údaj na siloměru udává „zdánlivou váhu“ tělesa).

72Ú. Předpokládejme, že vesmírná stanice z otázky 12 má poloměr 500 m. (a) Jaká musí být velikost rychlosti v_s obvodové stěny stanice, má-li být zdánlivá tíhová síla působící na kosmonauta u stěny 300 N, váží-li kosmonaut na Zemi 600 N? (b) Určete zdánlivou tíhovou sílu působící na kosmonauta běžícího podél stěny rychlostí o velikosti 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (vzhledem ke stěně) ve směru souhlasném s $\boldsymbol{v}_s$.

7

Práce a kinetická energie



Při soutěži vzpěračů na olympijských hrách v roce 1976 byl celý sportovní svět doslova ohromen výkonem Vasilije Aleksejeva. Vzpěrač dokázal zvednout 562librovou činku (2 500 N) z podlahy nad hlavu do výšky asi 2 m. Téměř o dvacet let předtím mohli diváci žasnout nad výkonem Paula Andersona. Ten se sehnul pod nákladní plošinu vyrobenou ze dřeva vyztuženého ocelí, opřel si ruce o stoličku a zády nadzvedl asi o centimetr plošinu i s nákladem 6 270 liber (27 900 N)! Zdá se, že tyto dva výkony snad ani nelze srovnávat. A přece: kdo vykonal při zvedání předmětů větší práci, Aleksejev nebo Anderson?

7.1 KINETICKÁ ENERGIE

Pojem energie, jedné z klíčových veličin nejen mechaniky, ale celé fyziky, je velmi široký. Slovo *energie* užíváme v běžné řeči naprosto samozřejmě a do značné míry i volně. Definovat energii jako fyzikální veličinu však vůbec není snadné. Není prostě schůdné vyslovit nějakou jednoduchou definici, která by zahrnovala všechny aspekty tohoto pojmu. Je třeba jej postupně vybudovat, od jeho nejjednodušší podoby v mechanice až po úroveň zcela obecných úvah. Na samém začátku se spokojíme s velmi hrubou a neúplnou charakteristikou pojmu energie: **Energie** je skalární veličina, jejíž hodnota je určena stavem fyzikální soustavy (objektu). Pojem *stav* jsme v této formulaci použili v obvyklém významu: je to soubor podmínek, v nichž se objekt nachází, tj. soubor hodnot veličin (parametrů), jimiž je charakterizován. V této kapitole se soustředíme na jeden typ energie, **kinetickou energii** E_k, která souvisí s *pohybovým stavem* částice či tělesa. Pohybuje-li se těleso rychleji, má kinetickou energii větší. Je-li v klidu, je jeho kinetická energie nulová.

Kinetickou energii částice o hmotnosti m, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ velmi malou ve srovnání s rychlostí světla, definujeme vztahem

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \qquad (7.1)$$

Kinetická energie nemůže být nikdy záporná, neboť m ani v^2 záporných hodnot nenabývají.

Tutéž definici můžeme použít i pro těleso nezanedbatelných rozměrů, pokud se všechny jeho části pohybují stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}$, tj. konají *posuvný* neboli *translační* pohyb. (Těleso tedy nesmí rotovat, ani se deformovat.) Z hlediska definice kinetické energie se takové těleso chová jako částice. Někdy je nazýváme **bodovým objektem** a o jeho kinetické energii vypočtené podle vztahu (7.1) hovoříme jako o *translační* kinetické energii. Úvahy této kapitoly se týkají právě bodových objektů.

Jednotkou kinetické energie (a každého jiného typu energie) v soustavě SI je **joule** (J), pojmenovaný podle anglického vědce 18. století Jamese Prescotta Joula. Je odvozen přímo z jednotek hmotnosti a rychlosti:

$$1\,\text{joule} = 1\,\text{J} = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}. \qquad (7.2)$$

Vhodnou jednotkou energie v oblasti atomové fyziky a fyziky subatomových částic je **elektronvolt** (eV):

$$1\,\text{elektronvolt} = 1\,\text{eV} = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J}. \qquad (7.3)$$

Nečastěji užívanými násobky elektronvoltu jsou kiloelektronvolt ($1\,\text{keV} = 10^3\,\text{eV}$), megaelektronvolt ($1\,\text{MeV} = 10^6\,\text{eV}$) a gigaelektronvolt ($1\,\text{GeV} = 10^9\,\text{eV}$).

PŘÍKLAD 7.1

Psal se rok 1896 a ve městě Waco v Texasu se odehrával neobvyklý experiment. Před zraky třiceti tisíc diváků jej předvedl pracovník železniční společnosti „Katy" Wiliam Crush. Postavil dvě lokomotivy na opačných koncích trati dlouhé 6,4 km, roztopil jejich kotle a zablokoval záklopky strojů tak, aby zůstaly otevřené. Pak pustil lokomotivy plnou parou proti sobě (obr. 7.1). Čelný náraz měl nedozírné následky. Stovky lidí byly zraněny odletujícími úlomky, několik osob bylo dokonce usmrceno. Předpokládejme, že každá z lokomotiv vážila $1{,}2\cdot10^6$ N a jejich zrychlení při rozjezdu mělo konstantní velikost $0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaká byla celková kinetická energie obou lokomotiv těsně před srážkou?

Obr. 7.1 Příklad 7.1. Následky srážky lokomotiv v roce 1896

ŘEŠENÍ: Abychom určili kinetickou energii lokomotivy, potřebujeme znát její hmotnost a velikost rychlosti těsně před srážkou. Pro stanovení velikosti rychlosti v můžeme použít vztahu (2.16), v němž položíme $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$ a $a_x = a$:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Dosadíme $v_0 = 0$ a $x - x_0 = 3{,}2\cdot10^3$ m (polovina počáteční vzdálenosti lokomotiv) a dostaneme

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(3{,}2\cdot10^3\,\text{m}),$$

tj.

$$v = 40{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 147\,\text{km/h}.$$

Hmotnost lokomotivy zjistíme vydělením její váhy (tj. tíhové síly, jíž na ni působí Země) tíhovým zrychlením:

$$m = \frac{(1{,}2\cdot10^6\,\text{N})}{(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = 1{,}22\cdot10^5\,\text{kg}.$$

Pomocí vztahu (7.1) nyní vypočteme celkovou kinetickou energii obou lokomotiv bezprostředně před srážkou:

$$E_k = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1{,}22{\cdot}10^5\ \mathrm{kg})(40{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 = \\ = 2{,}0{\cdot}10^8\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato energie je ekvivalentní výbuchu asi 45 kg TNT.

7.2 PRÁCE

I když jsme při budování pojmu energie učinili zatím pouze první krůček (definovali jsme kinetickou energii částice), zdá se nám být nepochybné, že energie objektu v obecném smyslu musí mít jednu zcela přirozenou vlastnost: bude se měnit při jeho interakci s okolím. Stejně samozřejmě lze očekávat, že se bude měnit i energie okolí. Hovoříme o **výměně** nebo **přenosu** energie mezi objektem a jeho okolím. Přenos energie mezi jakoukoli fyzikální soustavou a jejím okolím může být zprostředkován silovým působením nebo tepelnou výměnou při různých dějích, které mohou v soustavě probíhat. (**Dějem** neboli procesem jednoduše rozumíme posloupnost stavových změn soustavy.) Výměnou tepla se budeme zabývat až v kapitole 19, zde si všimneme pouze dějů souvisejících se silovým působením a nazývaných souhrnně konáním **práce**.

Působíme-li na těleso určitou silou (silami) tak, že velikost jeho rychlosti přitom roste, roste i jeho kinetická energie ($= \frac{1}{2}mv^2$). A naopak, jestliže se těleso vlivem výsledné síly zpomaluje, klesá i jeho kinetická energie. V takových případech říkáme, že *síla koná na částici (soustavě částic či tělese) práci* W.

Formálnějším způsobem můžeme definovat práci takto: Kinetická energie částice se vlivem silového působení jejího okolí obecně mění. Říkáme, že síly působící na částici **konají práci**. Jestliže síla $\boldsymbol{F}$ zmenšila (nezměnila, zvětšila) kinetickou energii částice, říkáme, že vykonala kladnou (nulovou, zápornou) práci, případně říkáme, že síla práci koná (nekoná, spotřebovává) a pak udáváme už jen velikost práce v joulech, bez znaménka. (Je-li například $W = -6{,}0$ J, můžeme říci, že síla *spotřebovala* práci 6,0 J.)

V nejširším smyslu představuje „práce" tu část energie, kterou těleso získává prostřednictvím silového působení jeho okolí. Proces, při němž k takovému přenosu dochází, nazýváme obecně „konáním práce". Práce je skalární veličinou a měříme ji ve stejných jednotkách jako energii.

Slovo „přenos" může být někdy matoucí, není-li správně pochopena jeho souvislost se změnami energie tělesa a jeho okolí. Zatím známe přenos *hmoty* – substance, která se zachovává, nevzniká ani nezaniká a může se jen přemísťovat v prostoru. Hovoříme-li však o přenosu energie, neznamená to, že se na těleso nebo z tělesa do okolí přenáší nějaký „materiál". Analogii bychom mohli hledat spíše v proceduře elektronického převodu peněz mezi dvěma bankovními účty: údaj na jednom bankovním účtu vzroste, zatímco na druhém poklesne, a přitom se mezi účty nepřemisťuje nic „hmatatelného". Uvědomme si také, že slovo „práce" ve fyzice nemá svůj obvyklý význam, podle nějž je prací jakákoli tělesná či duševní činnost. Kdybychom například silně tlačili na stěnu, unaví nás udržovat svaly napjaté. V obvyklém smyslu tedy „pracujeme". Nedochází však ke změně energie stěny a to znamená, že síla našich svalů nekoná ve smyslu předchozí definice žádnou práci. (Ostatně stát delší dobu v pozoru je dost vyčerpávající, i když se člověk přitom navenek ani nepohne. *Fyzikální práce* je prostě něco jiného než *fyziologická námaha*.)

7.3 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE

Pokusme se nyní formulovat vztah mezi prací, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala na studovaném objektu, a změnou jeho kinetické energie. Kinetickou energii částice či bodového objektu jsme již jednoduše a jasně definovali. Mění-li se velikost rychlosti částice, mění se podle této jednoduché definice i její kinetická energie. Ke změně rychlosti částice však nemůže dojít jinak než působením síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zcela přirozené prohlásit, že změna kinetické energie částice ΔE_k je rovna práci W vykonané silou $\boldsymbol{F}$:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \begin{matrix}\text{(vztah mezi prací} \\ \text{a kinetickou energií).}\end{matrix} \qquad (7.4)$$

Symbolem $E_{k,i}$ jsme označili počáteční kinetickou energii částice ($= \frac{1}{2}mv_0^2$) a $E_{k,f}$ představuje její výslednou kinetickou energii ($\frac{1}{2}mv^2$). Později uvidíme, že vztah (7.4), který vlastně *definuje* práci síly $\boldsymbol{F}$, lze přirozeně zobecnit i na případy, kdy na částici působí více sil. Znak $\boldsymbol{F}$ pak bude symbolizovat jejich výslednici.

Rovnost (7.4) můžeme přepsat ve tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \qquad (7.5)$$

Vztahy (7.4) a (7.5) představují ekvivalentní formulace **vztahu mezi prací a kinetickou energií**.

Při jejich používání je třeba mít neustále na paměti, že byly formulovány pro částici nebo tzv. bodový objekt a jejich platnost je také tímto předpokladem omezena.

Zkusme posoudit, jakým způsobem může dojít k porušení jejich platnosti, budeme-li uvažovat o zcela libovolném tělese. U takového obecného objektu musíme především respektovat, že se jeho různé části pohybují různými rychlostmi. Stačí si představit rotující nebo deformující se

těleso. Pro výpočet jeho kinetické energie samozřejmě nemůžeme použít vztahu (7.1), ale musíme kinetické energie jednotlivých částí nějak sečíst. Poté, co se nám podaří kinetickou energii obecného tělesa vyjádřit, přijdou na řadu úvahy o jejích změnách prostřednictvím silového působení, tj. při procesu „konání práce“. Je zřejmé, že na tomto procesu se budou podílet nejen *vnější* síly, jimiž na těleso působí jeho okolí, ale i síly vzájemného působení jednotlivých částí tělesa, tzv. síly *vnitřní*. Později uvidíme, že práci vnitřních sil určitého typu (gravitačních, elektrostatických, sil pnutí apod.) je často možné a dokonce vhodné považovat za určitý typ energie tělesa. Vztahy (7.4) a (7.5) v takových případech platit nebudou, neboť práce W vykonaná *vnější* silou $\boldsymbol{F}$ přispěje nejen ke změně kinetické energie tělesa, ale i ke změně ostatních „druhů“ energie. Uveďme příklad: uvažujme o bruslaři, který se odstrčil od mantinelu, nebo o plavci, který se při obrátce odrazil od stěny bazénu. Bruslařovy dlaně či plavcova chodidla, na něž bezprostředně působí tlaková síla stěny (vnější síla), jsou během odrazu v klidu. Můžeme tedy usuzovat, že tlaková síla stěny nekoná práci. A přesto se kinetická energie sportovce změní. K této změně přispívá práce (vnitřních) sil svalstva, kterou můžeme interpretovat jako jeden z druhů energie tělesa. Podobná situace vzniká třeba při odrazu míče od stěny či od podlahy. Můžeme tedy vyslovit předběžný závěr:

Mění-li se vlivem působící síly i energie tělesa jiného typu než kinetická, pak vztahy (7.4) *a* (7.5) *nemusejí platit.*

Samostatnou úvahu si zaslouží případy, kdy na pohybující se těleso působí síly tření. Právem si můžeme klást otázku, zda v takových případech zůstanou vztahy (7.4) a (7.5) v platnosti, či nikoliv. Z experimentu totiž víme, že se těleso při působení třecích sil zahřívá. Se vzrůstem jeho teploty celkem přirozeně spojujeme další druh jeho energie, tzv. vnitřní energii. Tato veličina velmi úzce souvisí s mikrostrukturou tělesa, konkrétně s náhodným pohybem jeho atomů či molekul a jejich vzájemnými vazbami. O mechanismu třecích sil již leccos víme z kap. 6, a tak si umíme představit, že mikroskopické narušení materiálu troucích se ploch je doprovázeno změnami či uvolněním vazební energie mezi povrchovými atomy či molekulami a odpovídajícím zvýšením jejich kinetické energie. V makroskopickém měřítku se to projeví jako zvýšení teploty tělesa. Pro naše další úvahy zahrnující působení sil tření je však podstatné, že i přes zdánlivé komplikace s vnitřní energií můžeme vztahů (7.4) a (7.5) využívat. Mechanismus třecích sil sice souvisí výhradně s mikroskopickou strukturou objektů, avšak nakonec je přece jen možné vyjádřit třecí síly mezi nimi *makroskopickým* silovým zákonem $F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d} N$, obsahujícím empiricky definovaný koeficient tření.

O dynamické třecí síle v souvislosti se změnami energie budeme podrobněji uvažovat v kap. 8 a o vnitřních přeměnách energie se zmíníme v kap. 9.

KONTROLA 1: Částice se pohybuje po ose x. Rozhodněte, zda se její kinetické energie zvýší, sníží, nebo se zachová, změní-li se rychlost částice (a) z $-3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $-2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (b) z $-2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (c) Pro každou z uvedených situací rozhodněte, zda je práce vykonaná silami působícími na částici kladná, záporná, nebo nulová.

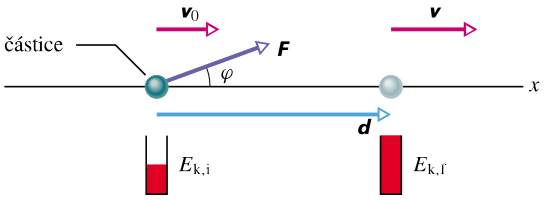
Práce síly

Uvedeme nyní do souvislosti změnu kinetické energie objektu ΔE_k se silou $\boldsymbol{F}$, která tuto změnu způsobila. Všimneme si nejprve situace, kdy sledovaným objektem je částice. Jediným typem energie, který tomuto nejjednoduššímu objektu přísluší, je energie kinetická. Na obr. 7.2 se částice pohybuje podél osy x po vodorovné dokonale hladké podlaze. Působí na ni stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s její trajektorií úhel φ. Zrychlení částice podél osy x je dáno vodorovnou složkou této síly $F\cos\varphi$. Rychlost částice a tedy i její kinetická energie se mění. Počáteční rychlost označme $\boldsymbol{v}_0$. Působení síly sledujeme v průběhu posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$. Velikost v výsledné rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ lze určit pomocí vztahu (2.16)

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7.6}$$

Vynásobením obou stran rovnice (7.6) hmotností částice m a úpravou dostaneme

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = ma_x d. \tag{7.7}$$



Obr. 7.2 Na částici působí stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s vektorem $\boldsymbol{d}$ posunutí částice úhel φ. Rychlost částice se změní z $\boldsymbol{v}_0$ na $\boldsymbol{v}$. „Měrka kinetické energie“ ukazuje, že došlo ke změně kinetické energie částice z hodnoty $E_\mathrm{k,i}$ na hodnotu $E_\mathrm{k,f}$.

Na levé straně rovnosti (7.7) vystupuje rozdíl kinetických energií $E_\mathrm{k,f}$ $(= \frac{1}{2}mv^2)$ a $E_\mathrm{k,i}$ $(= \frac{1}{2}mv_0^2)$ příslušných koncovému a počátečnímu pohybovému stavu částice. Tento rozdíl představuje změnu kinetické energie částice vyvolanou působením síly $\boldsymbol{F}$ podél úseku trajektorie

spojujícího počáteční a koncovou polohu částice. Náhradou součinu ma_x výrazem $F\cos\varphi$ (v souladu s platností druhého Newtonova zákona) dostaneme

$$\Delta E_k = Fd\cos\varphi. \tag{7.8}$$

Porovnáme-li nyní vztahy (7.8) a (7.4), vidíme, že pravá strana rovnosti (7.8) vyjadřuje práci W, kterou vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při přemístění částice z počátečního do koncového stavu. Můžeme tedy psát

$$W = Fd\cos\varphi \qquad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.9}$$

Je-li úhel φ menší než 90°, je práce W kladná a kinetická energie částice *roste*. Je-li φ větší než 90° (až do 180°), je práce W záporná a kinetická energie částice klesá. (Pro $\varphi = 90°$ je $W = 0$ a kinetická energie částice se nemění.) Síla $\boldsymbol{F}$ samozřejmě není v uvažovaném případě jedinou silou působící na částici. Pohyb částice je totiž přímočarý a jeho směr není shodný se směrem síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zřejmé, že na částici nutně působí ještě alespoň jedna další síla, která kompenzuje průmět síly $\boldsymbol{F}$ do osy y. Celkovou práci dvou kompenzujících se sil však můžeme zcela jistě pokládat za nulovou.

Ze vztahu (7.9) je zřejmé, že kromě jednotky joule můžeme v soustavě SI používat také jednotku Newton·metr (N·m). Odpovídající jednotkou v britském systému jednotek je stopa·libra (ft·lb). Vztah (7.2) tedy můžeme ještě doplnit takto:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}} = 1\,\mathrm{N{\cdot}m} = 0{,}738\,\mathrm{ft{\cdot}lb}. \tag{7.10}$$

Pravá strana rovnosti (7.9) představuje výraz pro skalární součin $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Vektorový zápis vztahu (7.9) má tedy tvar

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.11}$$

(V tomto místě textu jsme poprvé použili skalárního součinu. Pro zopakování je vhodné připomenout si čl. 3.7.) Vztah (7.11) je zvláště užitečný, jsou-li vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ zapsány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

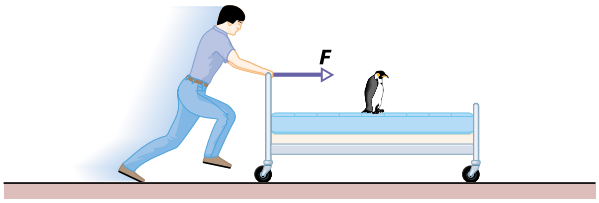
Vztahy (7.9) a (7.11) vyjadřují práci *konstantní* síly $\boldsymbol{F}$ působící na *částici* nebo *bodový objekt*. Jejich platnost však lze rozšířit i na případ konstantní síly působící na libovolné těleso, budeme-li symbolem $\boldsymbol{d}$ rozumět posunutí *působiště* síly $\boldsymbol{F}$. Práce síly $\boldsymbol{F}$ vykonaná na tělese pak bude opět dána vztahy (7.9), resp. (7.11), nebude však již obecně rovna změně kinetické energie uvažovaného tělesa.

Zdůrazněme ještě jednu důležitou možnost zobecnění vztahů (7.9) a (7.11). Přestože jsme je odvodili pro částici, která se pohybuje přímočaře, zůstanou v případě konstantní síly v platnosti i při pohybu po libovolné křivce. Budeme se o tom moci přesvědčit v čl. 7.5, kde se budeme zabývat výpočtem práce zcela obecně.

Úvahy týkající se práce síly působící na těleso můžeme prozatím shrnout takto:

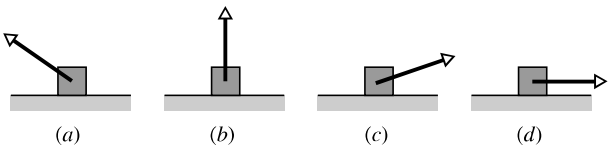
> Práce stálé síly $\boldsymbol{F}$ působící na dané těleso v bodě, jehož posunutí je $\boldsymbol{d}$, je dána vztahy (7.9) a (7.11). V případě, že tělesem je částice nebo bodový objekt, je tato práce rovna změně jeho kinetické energie.

Na obr. 7.3 je například vyobrazen student, jak pohání postel při školních závodech o nejrychlejšího běžce s postelí. Vyjadřují vztahy (7.9) a (7.11) práci vykonanou silou, jíž působí student na postel, je-li tato síla konstantní? Uvedených vztahů pro výpočet práce samozřejmě použít můžeme. Snadno se přesvědčíme, že větší část této práce, ne však všechna, skutečně přispívá ke změně kinetické energie postele i s tučňákem, který se na ní veze. Jistá malá část je však potřebná pro urychlení rotačního pohybu koleček. Jestliže považujeme tento příspěvek za zanedbatelný, můžeme postel považovat za bodový objekt a použít i vztahů (7.4) a (7.5).



Obr. 7.3 Závody s postelemi. Pro výpočet práce, kterou vykoná student, stačí nahradit postel hmotným bodem.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři možnosti působení síly na kostku, která klouže po vodorovné dokonale hladké podložce směrem vpravo. Velikosti sil jsou stejné, různé orientace jsou schematicky vyznačeny v obrázcích. Uspořádejte obrázky podle práce (sestupně), kterou působící síla vykoná při posunutí kostky o vzdálenost d.



Práce vykonaná několika silami

Působí-li na částici několik sil $\boldsymbol{F}_j$, jejichž výslednice je konstantní, můžeme jejich celkovou práci určit tak, že ve

vztahu (7.11) nahradíme výraz $\boldsymbol{F}$ touto výslednicí $\sum_j \boldsymbol{F}_j$, tj.

$$\sum_j \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \dots , \qquad (7.12)$$

kde $\boldsymbol{F}_j$ jsou jednotlivé síly.

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right) \cdot \boldsymbol{d} \qquad (7.13)$$

je tedy práce vykonaná výslednicí sil při posunutí $\boldsymbol{d}$ částice. Jsou-li konstantní i jednotlivé síly $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots$, můžeme vztah (7.13) přepsat pomocí rov. (7.12) ve tvaru

$$W = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3 \cdot \boldsymbol{d} + \dots = \\ = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad \text{(celková práce).} \qquad (7.14)$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že celková práce vykonaná na částici je součtem prací vykonaných jednotlivými silami, které na ni působí. Vztah (7.4) nyní můžeme přepsat takto:

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots . \qquad (7.15)$$

Změna ΔE_k kinetické energie částice je tedy rovna celkové práci vykonané všemi silami, které na částici působí.

PŘÍKLAD 7.2

Na obr. 7.4a jsou nakresleni dva průmysloví špioni, kteří sunou sejf o hmotnosti 225 kg po přímce do vzdálenosti 8,5 m k přistavenému nákladnímu autu. (Zpočátku byl sejf v klidu.) Špion 001 působí tlakovou silou $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 12,0 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° a míří dolů. Špion 002 působí na sejf tahovou silou $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti 10,0 N směrem vzhůru pod úhlem 40° vzhledem k vodorovné rovině. Sejf klouže po podlaze bez tření.

(a) Jakou celkovou práci vykonají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ při posunutí sejfu o 8,5 m?

ŘEŠENÍ: Na obr. 7.4b je silový diagram sil zkonstruovaný pro sejf, který aproximujeme částicí. Celkovou práci sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ určíme tak, že vypočteme práci každé z nich a získané hodnoty sečteme. Podle vztahu (7.9) je práce síly $\boldsymbol{F}_1$ rovna

$$W_1 = F_1 d \cos\varphi_1 = (12{,}0\,\mathrm{N})(8{,}50\,\mathrm{m})\cos 30^\circ = \\ = 88{,}33\,\mathrm{J},$$

práce síly $\boldsymbol{F}_2$ je

$$W_2 = F_2 d \cos\varphi_2 = (10{,}0\,\mathrm{N})(8{,}50\,\mathrm{m})\cos 40^\circ = 65{,}11\,\mathrm{J}.$$

Podle (7.14) je celková práce W dána jejich součtem

$$W = W_1 + W_2 = 88{,}33\,\mathrm{J} + 65{,}11\,\mathrm{J} = \\ = 153{,}4\,\mathrm{J} \doteq 153\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při posunutí sejfu o 8,5 m tedy špioni vykonají práci 153 J. O tuto hodnotu se zvýší kinetická energie sejfu.

(b) Jakou práci W_g vykoná při posunutí $\boldsymbol{d}$ tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a jaká je práce W_N normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí na sejf podlaha?

ŘEŠENÍ: Síly $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ jsou kolmé k posunutí. Podle vztahu (7.9) je

$$W_\mathrm{g} = mgd \cdot \cos 90^\circ = mgd \cdot 0 = 0 \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$W_N = Nd \cdot \cos 90^\circ = Nd \cdot 0 = 0.$$

Práce vykonaná každou ze sil $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ je nulová. Působení těchto sil při posunutí sejfu o vektor $\boldsymbol{d}$ nevede ke změně jeho kinetické energie.

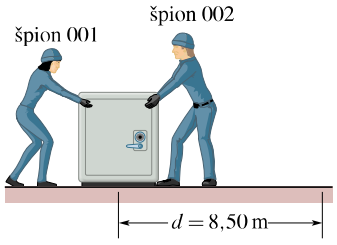
(c) Sejf byl zpočátku v klidu. Jak velká je jeho rychlost na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Změna velikosti rychlosti sejfu souvisí se změnou jeho kinetické energie, a tedy i s celkovou prací vykonanou silami, které na sejf působí. Spojením vztahů (7.4) a (7.1) dostaneme

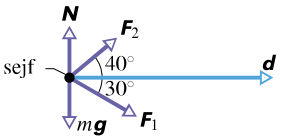
$$W = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Počáteční rychlost je nulová, celková práce W je rovna 153 J. Řešením předchozí rovnice vzhledem k neznámé v dostaneme po dosazení zadaných údajů

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\,\mathrm{J})}{(225\,\mathrm{kg})}} = \\ = 1{,}17\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



(a)

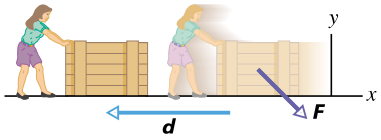


(b)

Obr. 7.4 Příklad 7.2. (a) Dva špioni posouvají sejf. (b) Silový diagram s vyznačením posunutí $\boldsymbol{d}$.

PŘÍKLAD 7.3

Ujíždějící bedna švestek klouže po vodorovné podlaze směrem k ženě, která se ji snaží zbrzdit tak, že ji odtlačuje silou $\boldsymbol{F} = (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a ustupuje před ní (obr. 7.5). Bedna se při tom posune o vektor $\boldsymbol{d} = (-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}$.



Obr. 7.5 Příklad 7.3. Brzdění bedny silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$.

(a) Jakou práci vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.11) je hledaná práce rovna

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} = [(2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}]\cdot[(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}].$$

Ze všech skalárních součinů navzájem kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou pouze tři nenulové, konkrétně $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ (viz článek 3.7). Dostáváme tedy

$$W = (2{,}0)(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} =$$
$$= (-6{,}0\,\mathrm{J})(1) + 0 = -6{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla $\boldsymbol{F}$ vykoná práci $-6{,}0\,\mathrm{J}$ a kinetická energie bedny o $6{,}0\,\mathrm{J}$ klesne.

(b) Jaká je kinetická energie bedny na konci posunutí, měla-li na začátku hodnotu $10\,\mathrm{J}$?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.5) pro hodnoty $E_{\mathrm{k,i}} = 10\,\mathrm{J}$ a $W = -6{,}0\,\mathrm{J}$ dostaneme

$$E_{\mathrm{k,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + W = 10\,\mathrm{J} + (-6{,}0\,\mathrm{J}) = 4{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.4 PRÁCE TÍHOVÉ SÍLY

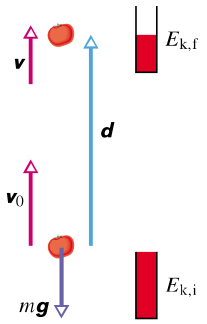
Nyní se pokusíme zjistit, jakou práci koná síla zcela určitého typu. Konkrétně půjde o sílu tíhovou. Rajské jablíčko o hmotnosti m na obr. 7.6, které lze považovat za bodový objekt, vyhodíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0 vzhledem k Zemi. Má tedy počáteční kinetickou energii $E_{\mathrm{k,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Během výstupu se jeho pohyb působením tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ zpomaluje a kinetická energie klesá. Experiment potvrzuje, že je-li tíhová síla jedinou silou, která na jablíčko působí (odporová síla vzduchu je nějakým způsobem eliminována), pak jedině práce tíhové síly přispívá ke změně jeho kinetické energie. Abychom tuto práci W_{g} určili, dosadíme za F do vztahu (7.9) velikost tíhové síly mg. Pak

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cos\varphi \qquad \text{(práce tíhové síly).} \qquad (7.16)$$

Jestliže sledovaná částice stoupá, jako je tomu v našem případě, míří tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ proti posunutí $\boldsymbol{d}$ (obr. 7.6). Pak je $\varphi = 180^\circ$ a

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cdot\cos 180^\circ = mgd\cdot(-1) = -mgd. \qquad (7.17)$$

Znaménko minus signalizuje, že kinetická energie stoupající částice klesne působením tíhové síly po dráze d o hodnotu mgd. To je zcela v souhlasu se skutečností, že se pohyb částice zpomaluje.



Obr. 7.6 Rajské jablíčko o hmotnosti m (bodový objekt) je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Vlivem tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ se během posunutí $\boldsymbol{d}$ jeho pohyb zpomalí na rychlost $\boldsymbol{v}$. „Energiová odměrka“ znázorňuje výslednou změnu kinetické energie jablíčka z počáteční hodnoty $E_{\mathrm{k,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2$ na hodnotu $E_{\mathrm{k,f}} = \frac{1}{2}mv^2$.

Poté, co částice dosáhla maximální výšky a padá zpět dolů, je úhel φ mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$ nulový. Pak platí

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cdot\cos(0^\circ) = mgd\cdot(+1) = +mgd. \qquad (7.18)$$

Znaménko plus nás informuje, že nyní kinetická energie objektu vzrostla. Výsledek je opět v souhlasu se skutečností, neboť velikost rychlosti tělesa při pádu roste. (Ve skutečnosti se přesvědčíme v kapitole 8, že při stoupání či pádu tělesa v tíhovém poli Země nestačí brát v úvahu změny kinetické energie jen tělesa samotného, nýbrž je třeba uvažovat o soustavě těleso + Země. Bez přítomnosti Země by slova „stoupání“ a „klesání“ samozřejmě pozbyla významu.)

Práce při stoupání a klesání tělesa

Představme si nyní, že na bodový objekt působíme silou $\boldsymbol{F}$ a zvedáme jej. Při jeho posunutí směrem vzhůru koná síla $\boldsymbol{F}$ kladnou práci W_a, zatímco tíhová síla koná práci zápornou, W_{g}. To znamená, že síla $\boldsymbol{F}$ se „snaží“ zvýšit kinetickou energii objektu, působení síly tíhové ji naopak snižuje.

Vztah (7.15) umožňuje vyjádřit změnu kinetické energie tělesa způsobenou oběma uvažovanými silami:

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = W_a + W_{\mathrm{g}}, \qquad (7.19)$$

kde $E_{\mathrm{k,f}}$, resp. $E_{\mathrm{k,i}}$ je kinetická energie tělesa na konci, resp. na počátku posunutí. Tento vztah platí i v případě, že těleso klesá. Působením tíhové síly se však nyní kinetická energie tělesa zvyšuje, zatímco působení síly $\boldsymbol{F}$ vede k jejímu poklesu (síla $\boldsymbol{F}$ směřuje stále vzhůru).

Obvyklá situace nastává, je-li objekt v klidu na začátku i na konci posunutí (například zvedneme-li knihu z podlahy a položíme ji na polici). Pak jsou hodnoty $E_{\mathrm{k,i}}$ i $E_{\mathrm{k,f}}$ nulové a vztah (7.19) se zjednoduší do tvaru

$$W_a + W_{\mathrm{g}} = 0,$$

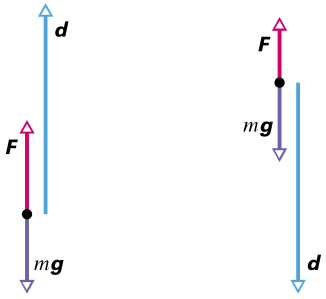
tj.

$$W_a = -W_{\mathrm{g}}. \qquad (7.20)$$

Stejný výsledek dostaneme i při nenulových, avšak shodných hodnotách $E_{\mathrm{k,i}}$ a $E_{\mathrm{k,f}}$. Má-li tedy těleso na počátku i na konci posunutí stejnou kinetickou energii, je práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí rovna záporně vzaté práci vykonané tíhovou silou. Síla $\boldsymbol{F}$ vyvolá stejně velkou změnu kinetické energie tělesa jako síla tíhová, avšak opačného znaménka. Užitím (7.16) můžeme vztah (7.20) přepsat do tvaru

$$W_a = -mgd\cos\varphi \qquad \text{(práce při vzestupu a pádu tělesa při } E_{\mathrm{k,i}} = E_{\mathrm{k,f}}\text{)}, \qquad (7.21)$$

přičemž φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$. Míří-li vektor posunutí svisle vzhůru (obr. 7.7a), je $\varphi = 180^\circ$ a práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ je mgd. Při svislém posunutí směrem dolů (obr. 7.7b) je $\varphi = 0^\circ$ a práce této síly je $-mgd$.



(a) (b)

Obr. 7.7 Na těleso působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a síla $\boldsymbol{F}$. (a) Těleso stoupá. Jeho posunutí $\boldsymbol{d}$ svírá úhel $\varphi = 180^\circ$ s tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná kladnou práci. (b) Těleso klesá. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je $\varphi = 0^\circ$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná zápornou práci.

Vztahy (7.20) a (7.21) jsou použitelné pro stoupající i klesající těleso, které je na počátku i na konci posunutí v klidu. Jejich platnost je nezávislá na konkrétním průběhu velikosti síly $\boldsymbol{F}$ během pohybu. Když například Vasilij Alexejev zvedal nad hlavu rekordní činku 2 500 N, musela se síla, kterou na ni během tohoto úkonu působil, výrazně měnit. Činka ovšem byla na začátku i na konci celé akce v klidu. Vzpěrač tedy nepochybně vykonal práci danou vztahy (7.20) a (7.21), kde mg představuje zátěž, kterou zvedl, a d velikost jejího posunutí.

Pomocí postroje zvedá Paul Anderson 30 osob o celkové váze 2 400 lb.

PŘÍKLAD 7.4

Ještě jednou se vraťme k výkonům Vasilije Aleksejeva a Paula Andersona.

(a) Aleksejev zvedl činku o váze 2 500 N do výšky 2,0 m. Jakou práci přitom vykonala tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na činku?

ŘEŠENÍ: Velikost tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ je mg. Úhel φ mezi vektorem tíhové síly a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$ má hodnotu 180°. Ze vztahu (7.16) vyplývá, že práce tíhové síly je

$$W_{\mathrm{g}} = mgd\cos\varphi = (2\,500\,\mathrm{N})(2{,}0\,\mathrm{m})\cos 180^\circ = \\ = -5\,000\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala síla, jíž působil na činku Aleksejev?

ŘEŠENÍ: Protože byla činka v klidu na počátku i na konci úkonu, můžeme použít vztah (7.20) a dostaneme

$$W_{\mathrm{VA}} = -W_{\mathrm{g}} = +5\,000\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou práci vykonala síla, kterou působil Aleksejev na činku, když ji držel nad hlavou?

ŘEŠENÍ: Když vzpěrač držel činku nad hlavou, byla v klidu. Její posunutí bylo nulové a podle (7.9) byla tedy nulová i práce působící síly (i když držet činku bylo jistě velmi únavné).

(d) Jakou práci vykonala síla, jíž působil Paul Anderson při zvednutí zátěže 27 900 N o 1 cm?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.21) a hodnot $mg = 27\,900\,\text{N}$ a $d = 1{,}0\,\text{cm}$ dostaneme

$$W_{\text{PA}} = -mgd\cos\varphi = -mgd\cos 180^\circ = \\ = -(27\,900\,\text{N})(0{,}01\,\text{m})(-1) = 280\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Andersonův výkon vyžadoval sice obrovskou sílu, ale vykonaná práce byla díky velmi malému posunutí nákladu pouhých 280 J.

PŘÍKLAD 7.5

Bedna, která byla zpočátku v klidu, je tažena na laně směrem vzhůru po dokonale hladké šikmé rampě. Pohyb tažného lana se zastavil poté, co bedna urazila vzdálenost $L = 5{,}70\,\text{m}$ a zvedla se tak do výšky $h = 2{,}50\,\text{m}$ nad počáteční úroveň (obr. 7.8a).

(a) Jakou práci přitom vykonala tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Hledanou práci vypočteme podle vztahu (7.16) pro velikost posunutí $d = L$. Úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím je $\theta + 90^\circ$ (viz silový diagram na obr. 7.8b). Dostáváme

$$W_{\text{g}} = mgL\cos(\theta + 90^\circ) = -mgL\sin\theta.$$

Z obr. 7.8a vidíme, že $L\sin\theta$ je právě výška h, o kterou se bedna zvedla. Je tedy

$$W_{\text{g}} = -mgh. \qquad (7.22)$$

Znamená to, že práce vykonaná tíhovou silou závisí pouze na posunutí bedny ve svislém směru, zatímco vodorovné posunutí není rozhodující. (K tomuto závěru se ještě vrátíme v kapitole 8.) Dosazením zadaných údajů do rov. (7.22) dostaneme

$$W_{\text{g}} = -(15{,}0\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(2{,}50\,\text{m}) = \\ = -368\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala tahová síla lana $\boldsymbol{T}$?

ŘEŠENÍ: Bedna je na začátku i na konci posunutí v klidu, změna její kinetické energie ΔE_{k} je tedy nulová. Podle (7.15) je pak

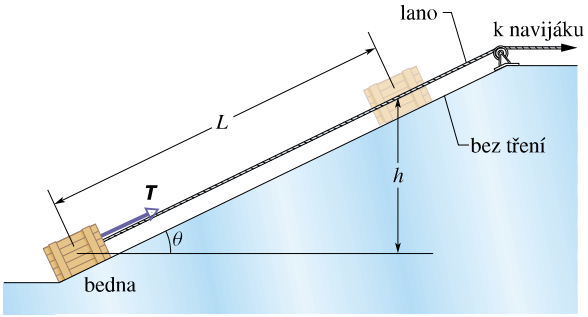
$$\Delta E_{\text{k}} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \qquad (7.23)$$

Vidíme, že celková práce všech sil působících na bednu musí být nulová. Kromě tíhové síly působí na bednu pouze dvě další síly: tahová síla lana $\boldsymbol{T}$ a normálová síla podložky $\boldsymbol{N}$. Síla $\boldsymbol{N}$ je kolmá k posunutí a proto nekoná práci. Označíme-li W_T práci tahové síly lana, dostáváme užitím vztahu (7.23)

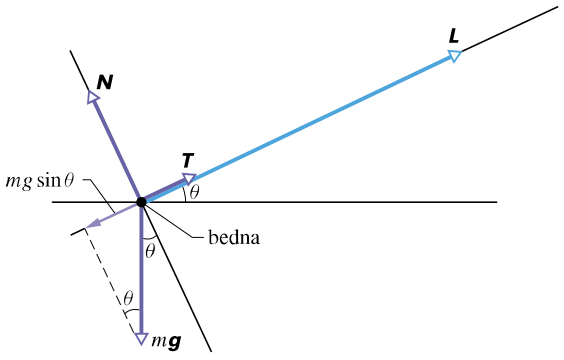
$$0 = W_{\text{g}} + W_T.$$

Dosazením $W_{\text{g}} = -368\,\text{J}$ získáme hledanou práci W_T:

$$W_T = 368\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$



(a)



(b)

Obr. 7.8 Příklad 7.5. (a) Bedna je tažena po dokonale hladké rampě. Tahová síla lana je s rampou rovnoběžná. (b) Silový diagram bedny s vyznačením všech sil, které na ni působí. Vyznačeno je i posunutí $\boldsymbol{L}$.

KONTROLA 3: Představme si, že jsme bednu z příkladu 7.5 vytáhli do stejné výšky h, avšak po delší rampě. (a) Je práce síly $\boldsymbol{T}$ nyní větší, menší, či stejná jako v př. 7.5? (b) Rozhodněte, zda je velikost síly $\boldsymbol{T}$ větší, menší, či stejná jako v př. 7.5.

PŘÍKLAD 7.6

Kabina výtahu o hmotnosti 500 kg klesá rychlostí o velikosti $v_{\text{i}} = 4{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Tažné lano začne najednou klouzat a pokles kabiny se urychluje, přičemž $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$ (obr. 7.9a).

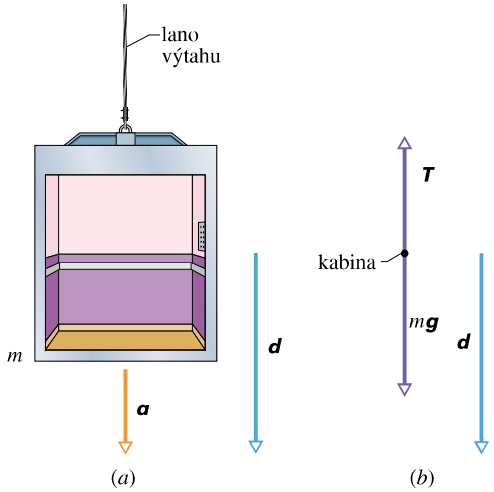
(a) Jakou práci vykoná tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na padající kabinu při posunutí o velikosti $d = 12\,\text{m}$?

ŘEŠENÍ: Silový diagram kabiny při poklesu o 12 m je znázorněn na obr. 7.9b. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je 0°. Pomocí rov. (7.16) dostaneme

$$W_1 = mgd\cos 0^\circ = (500\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(12\,\mathrm{m})(1) = \\ = 5{,}88\cdot 10^4\,\mathrm{J} \doteq 5{,}9\cdot 10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykoná při témže posunutí kabiny tahová síla lana?

ŘEŠENÍ: Situace se liší od př. 7.4 a 7.5 tím, že kinetická energie kabiny na začátku a na konci posunutí není stejná. Rovnice (7.20) a (7.21) nelze použít: práce vykonaná silou $\boldsymbol{T}$ není rovna záporně vzaté práci tíhové síly.



Obr. 7.9 Příklad 7.6. Kabina výtahu, klesající rychlostí o velikosti v_i, se najednou začne urychlovat směrem dolů. (a) Kabina se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ se zrychlením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$. (b) Silový diagram kabiny s vyznačením posunutí.

Práci W_2 síly $\boldsymbol{T}$ musíme určit pomocí vztahu (7.9) ($W = Fd\cos\varphi$). Nejprve zjistíme velikost síly $\boldsymbol{T}$. Užitím druhého Newtonova zákona pro pohyb kabiny dostáváme

$$\sum_j F_j = T - mg = ma.$$

Protože zrychlení $\boldsymbol{a}$ má velikost $g/5$ a míří dolů, je

$$T = m(g + a) = m(g - g/5) = \\ = (500\,\mathrm{kg})(\tfrac{4}{5})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) = 3\,920\,\mathrm{N}.$$

Pro výpočet práce použijeme nyní vztahu (7.9). Úhel mezi silou $\boldsymbol{T}$ a posunutím kabiny $\boldsymbol{d}$ je 180°. Síla $\boldsymbol{T}$ má velikost 3 920 N, velikost posunutí je 12 m. Dostáváme

$$W_2 = Td\cos 180^\circ = (3\,920\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m})(-1) = \\ = -4{,}70\cdot 10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je celková práce všech sil působících na kabinu?

ŘEŠENÍ: Podle (7.14) je celková práce algebraickým součtem prací obou sil:

$$W = W_1 + W_2 = (5{,}88\cdot 10^4\,\mathrm{J}) - (4{,}70\cdot 10^4\,\mathrm{J}) = \\ = 1{,}18\cdot 10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2\cdot 10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Během posunutí kabiny o 12 m se její kinetická energie zvýší o $1{,}2\cdot 10^4$ J.

Práci W můžeme určit i jinak. Užitím druhého Newtonova zákona zjistíme nejprve výslednici sil působících na kabinu:

$$\sum F = ma = (500\,\mathrm{kg})\left(-\frac{9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{5}\right) = -980\,\mathrm{N}.$$

Výslednice míří dolů a svírá s posunutím úhel 0°. Práce, kterou vykoná, je

$$W = (980\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m})\cos 0^\circ = \\ = 1{,}18\cdot 10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2\cdot 10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je kinetická energie kabiny na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie na začátku posunutí, tj. při rychlosti o velikosti $v_\mathrm{i} = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, je

$$E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = \tfrac{1}{2}(500\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 = 4\,000\,\mathrm{J}.$$

Kinetická energie $E_{\mathrm{k,f}}$ na konci posunutí je dána vztahem (7.5):

$$E_{\mathrm{k,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + W = 4\,000\,\mathrm{J} + 1{,}18\cdot 10^4\,\mathrm{J} = \\ = 1{,}58\cdot 10^4\,\mathrm{J} \doteq 1{,}6\cdot 10^4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(e) Jaká je velikost rychlosti v_f na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Z (7.1) dostaneme

$$E_{\mathrm{k,f}} = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2,$$

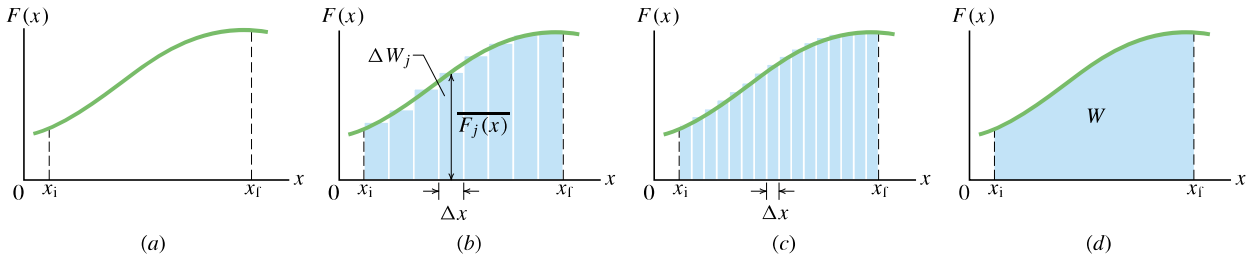
odkud pro v_f máme

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k,f}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}58\cdot 10^4\,\mathrm{J})}{(500\,\mathrm{kg})}} = \\ = 7{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.5 PRÁCE PROMĚNNÉ SÍLY

Jednorozměrný případ

Vraťme se k situaci na obr. 7.2. Předpokládejme však nyní, že síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici a koná při jejím pohybu jistou práci, směřuje podél osy x a její velikost se mění s polohou částice. Síla je tedy *proměnná*. V uvažovaném



Obr. 7.10 (a) Graf obecné závislosti síly působící na částici na její poloze. Částice se pohybuje po přímce (osa x), její poloha je popsána souřadnicí x v intervalu mezi počátečním a koncovým bodem x_i, resp. x_f. Síla je rovnoběžná s osou x. (b) Obrázek (a) s vyznačením rozdělení plochy pod grafem funkce $F(x)$ na úzké proužky. (c) Jemnější dělení než na obr. (b). (d) Limitní případ. Práce vykonaná působící silou je dána vztahem (7.27) a geometricky reprezentována vybarvenou plochou, omezenou osou x a grafem funkce $F(x)$ mezi hodnotami x_i a x_f.

speciálním případě se však mění pouze její velikost, zatímco její směr je stálý. Velikost síly navíc závisí pouze na souřadnici x, určující polohu částice, a není explicitní funkcí času.

Takový jednorozměrný příklad proměnné síly znázorňuje obr. 7.10. Jak určíme práci této síly při přesunutí částice z počáteční polohy o souřadnici x_i do polohy x_f? Vztah (7.9) použít nemůžeme, neboť platí jen pro konstantní sílu $\boldsymbol{F}$. Výpočet vyžaduje nový přístup: rozdělíme celkové posunutí částice na velký počet intervalů o šířce Δx. Zvolme tuto šířku natolik malou, abychom funkci $F(x)$ mohli v každém z intervalů považovat za konstantní. Nechť $\overline{F_j(x)}$ je střední hodnota veličiny $F(x)$ v j-tém intervalu.

Elementární práci ΔW_j vykonanou silou $\boldsymbol{F}$ v j-tém intervalu již vztahem (7.9) můžeme vyjádřit:

$$\Delta W_j \approx \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.24}$$

V grafu na obr. 7.10b je $\overline{F_j(x)}$ výška j-tého proužku a Δx jeho šířka. Elementární práce ΔW_j je číselně rovna obsahu proužku.

Celkovou práci W síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f vyjádříme přibližně jako součet obsahů všech proužků ležících mezi x_i a x_f. Je tedy

$$W = \sum \Delta W_j \approx \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.25}$$

Vztah (7.25) je přibližný, neboť přerušovaná modrá čára tvořená horními základnami pravoúhlých proužků v obrázku 7.10b pouze aproximuje skutečnou křivku $F(x)$.

Aproximaci můžeme zlepšit, zmenšíme-li šířku Δx a zvýšíme tak počet proužků, jako je tomu na obr. 7.10c. V limitě se šířka proužků blíží nulové hodnotě a počet proužků roste do nekonečna. Získáváme tak přesný výsledek

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.26}$$

Tato limita představuje integrál z funkce $F(x)$ v mezích x_i a x_f. Vztah (7.26) má tedy tvar

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(práce proměnné síly).} \tag{7.27}$$

Známe-li funkci $F(x)$, dosadíme ji do integrálu (7.27), opatříme jej mezemi a provedeme integraci. Získáme tak hledanou práci W. (V dod. E je uveden soupis nejznámějších integrálů.) Geometricky je práce dána obsahem plochy omezené grafem funkce $F(x)$ a osou x v intervalu s krajními body x_i a x_f (v obr. 7.10 vyznačeno barevně).

Trojrozměrný případ

Uvažujme nyní o částici, na niž působí obecně zadaná síla

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \tag{7.28}$$

jejíž složky F_x, F_y, F_z mohou být závislé na poloze částice (jsou funkcemi této polohy). Označme elementární posunutí částice jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z. \tag{7.29}$$

Elementární práce $\mathrm{d}W$, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při posunutí částice o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, je podle vztahu (7.11) rovna

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z. \tag{7.30}$$

Celková práce W, vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při přesunutí částice z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ o souřadnicích $(x_\mathrm{i}, y_\mathrm{i}, z_\mathrm{i})$ do koncové polohy $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$ o souřadnicích $(x_\mathrm{f}, y_\mathrm{f}, z_\mathrm{f})$, je pak vyjádřena *křivkovým* integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \\ = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z), \tag{7.31}$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po níž se částice pohybuje mezi body o polohových vektorech $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$.* Má-li síla $\boldsymbol{F}$ nenulovou pouze x-ovou složku, jsou výrazy obsahující F_y a F_z nulové a vztah (7.31) přejde na tvar (7.27).

Vztah mezi prací proměnné síly a změnou kinetické energie

Vztahem (7.27) je dána práce proměnné síly působící na částici v jednorozměrném případě. Přesvědčíme se, že jedná-li se o výslednici sil, je tato práce podle očekávání rovna změně kinetické energie částice.

Uvažujme o částici s hmotností m, pohybující se po ose x. Na částici působí výsledná síla $F(x)$ směřující podél osy x. Práce vykonaná touto silou při přesunu částice z počáteční polohy x_i do koncové x_f je podle vztahu (7.27) rovna

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} ma\,\mathrm{d}x. \tag{7.32}$$

Použili jsme druhého Newtonova zákona a nahradili výslednou sílu $F(x)$ součinem ma. Výraz $ma\,\mathrm{d}x$ za integrálem v (7.32) lze přepsat ve tvaru

$$ma\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x. \tag{7.33}$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \tag{7.34}$$

a v rov. (7.33) lze psát

$$ma\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x = mv\,\mathrm{d}v. \tag{7.35}$$

Dosazením z rov. (7.35) do (7.32) dostáváme

$$W = \int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} mv\,\mathrm{d}v = m\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} v\,\mathrm{d}v = \\ = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2. \tag{7.36}$$

* Praktický výpočet integrálu (7.31), takzvaného **křivkového integrálu druhého typu**, lze snadno provést, známe-li závislost polohového vektoru částice na čase $\boldsymbol{r}(t)$. Pak lze psát $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ a

$$W = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t,$$

kde t_i a t_f představují okamžiky, v nichž se částice nachází v počáteční a koncové poloze.

Uvědomme si, že při záměně proměnné x novou proměnnou v musíme provést i odpovídající záměnu mezí integrálu. Hmotnost m jsme mohli vytknout před integrál proto, že ji považujeme za konstantní.

Ve výsledku na pravé straně (7.36) poznáváme rozdíl kinetických energií částice v koncovém a počátečním pohybovém stavu. Můžeme proto opět psát známý vztah mezi prací a kinetickou energií

$$W = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = \Delta E_\mathrm{k}.$$

PŘÍKLAD 7.7

Síla $\boldsymbol{F} = (3x\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, kde x je dáno v metrech, působí na částici pohybující se v rovině. Počáteční a koncová poloha částice jsou určeny souřadnicemi (2 m, 3 m) a (3 m, 0 m). Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F}$? Rozhodněte, zda se velikost rychlosti částice zvětší, zmenší, či zůstane beze změny.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.31) dostáváme

$$W = \int_{\mathscr{C}} (3x\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y) = \int_{\mathscr{C}} 3x\,\mathrm{d}x + \int_{\mathscr{C}} 4\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$ nezávisí na souřadnici y a y-ová složka nezávisí na x, můžeme psát

$$\int_{\mathscr{C}} 3x\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} 3x\,\mathrm{d}x = \int_2^3 3x\,\mathrm{d}x = 3\int_2^3 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathscr{C}} 4\,\mathrm{d}y = \int_{y_\mathrm{i}}^{y_\mathrm{f}} 4\,\mathrm{d}y = \int_3^0 4\,\mathrm{d}y = 4\int_3^0 \mathrm{d}y.$$

Integrály můžeme vyhledat v dod. E. Dostaneme

$$W = 3[\tfrac{1}{2}x^2]_2^3 + 4[y]_3^0 = \tfrac{3}{2}[3^2 - 2^2] + 4[0-3] = \\ = -4{,}5\ \mathrm{J} \doteq -5\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

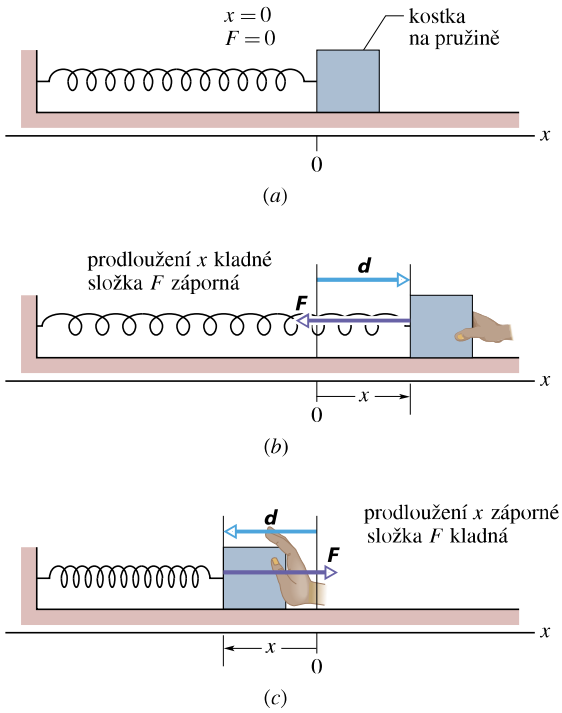
Záporný výsledek ukazuje, že kinetická energie částice, a tedy i velikost její rychlosti, klesne.

7.6 PRÁCE PRUŽNÉ SÍLY

V tomto článku se budeme zabývat výpočtem práce, kterou koná proměnná síla speciálního typu, tzv. **pružná síla**. Jedná se o sílu, jíž na částici působí natažená nebo stlačená pružina. Řada silových zákonů v přírodě má stejný matematický zápis jako zákon pro pružnou sílu. Rozbor tohoto konkrétního případu nám tedy umožní učinit si představu o celé skupině dalších sil s analogickým vyjádřením.

Pružná síla

Pružina na obr. 7.11a je v *nenapjatém stavu*, tj. není protažena ani stlačena. Jeden její konec je upevněn a s druhým, volným koncem je spojen bodový objekt, řekněme malá kostka. Na obr. 7.11b napínáme pružinu tak, že kostku táhneme směrem vpravo. Naopak, podle zákona akce a reakce táhne pružina kostku směrem vlevo „ve snaze“ obnovit nenapjatý stav. (Sílu pružiny proto někdy nazýváme *vratnou silou*.) Na obr. 7.11c stlačujeme pružinu tak, že kostku posouváme vlevo. Pružina naopak tlačí kostku vpravo, aby došlo k obnovení nenapjatého stavu.



Obr. 7.11 (a) Pružina v nenapjatém stavu. Počátek osy x je zvolen v poloze volného konce nenapjaté pružiny. K volnému konci je připojena malá kostka. (b) Kostka se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ a pružina se prodlouží o délku x. Všimněte si vyznačeného směru vratné síly $\boldsymbol{F}$, jíž působí pružina na kostku. (c) Pružina je stlačena o délku x. Opět si všimněte vyznačené vratné síly.

V celé řadě praktických případů je vratná síla pružiny $\boldsymbol{F}$ v dobrém přiblížení úměrná jejímu prodloužení, tj. posunutí $\boldsymbol{d}$ volného konce pružiny vůči jeho poloze v nenapjatém stavu. *Síla pružiny* je tedy dána vztahem

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \qquad (7.37)$$

známým pod názvem **Hookův zákon** (anglický vědec Robert Hooke patří k nejznámějším fyzikům druhé poloviny 17. století). Znaménko minus ve vztahu (7.37) upozorňuje, že síla pružiny má vždy opačný směr než posunutí jejího volného konce.

Konstanta k se nazývá **tuhostí pružiny** a je skutečně mírou toho, jak je pružina „tuhá“. Větší hodnota k znamená tužší pružinu, tj. větší pružnou sílu při daném prodloužení. Jednotkou tuhosti v soustavě SI je newton na metr ($\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$).

Osa x na obr. 7.11 je zvolena rovnoběžně s pružinou, její počátek ($x = 0$) splývá s polohou volného konce pružiny v nenapjatém stavu. Pro toto běžné uspořádání má vztah (7.37) tvar

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \qquad (7.38)$$

Symbolem F je v předchozím vztahu označena x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$, zbývající složky jsou trvale nulové. Všimněte si, že pružná síla je proměnná, závisí na poloze volného konce pružiny. Podobně jako v čl. 7.5 lze psát $F = F(x)$. Uvědomte si také, že Hookův zákon představuje lineární závislost veličiny F na proměnné x.

Práce pružné síly

V dalších úvahách zanedbáme tření mezi kostkou a podložkou a budeme předpokládat, že pružina má ve srovnání s kostkou zanedbatelnou hmotnost (*nehmotná* pružina) a řídí se přesně Hookovým zákonem (*ideální* pružina). Představme si, že jsme do kostky prudce udeřili směrem vpravo a udělili jí tak jistou kinetickou energii. Kostka se začne pohybovat směrem vpravo. Pružná síla $\boldsymbol{F}$ její pohyb zpomaluje a kinetická energie kostky klesá. Experimentálně lze ověřit, že při splnění předpokladů o vlastnostech pružiny a podložky je změna kinetické energie kostky určena výhradně prací pružné síly $\boldsymbol{F}$. K výpočtu této práce musíme ovšem použít vztahu (7.27), neboť pružná síla je proměnná a řídí se silovým zákonem (7.38). Přesune-li se kostka z polohy x_i do polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_\mathrm{p} = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} (-kx)\,\mathrm{d}x = -k\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_\mathrm{f}^2 - x_\mathrm{i}^2), \qquad (7.39)$$

tj.

$$W_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 \qquad \text{(práce pružné síly)}. \qquad (7.40)$$

Práce W_p pružné síly může být jak kladná, tak záporná a souvisí s celkovou změnou kinetické energie kostky při

jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f. Pro $x_\mathrm{i} = 0$ obvykle značíme $x_\mathrm{f} = x$. Ze vztahu (7.40) pak plyne

$$W_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(práce pružné síly).} \qquad (7.41)$$

V dalším myšleném experimentu si představme, že posouváme kostku podél osy x a přitom na ni stále působíme silou $\boldsymbol{F}_a$. Síla $\boldsymbol{F}_a$ koná práci W_a a pružná síla práci W_p. Podle (7.15) je změna kinetické energie kostky dána prací obou těchto sil, tj.

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k,f} - E_\mathrm{k,i} = W_a + W_\mathrm{p}, \qquad (7.42)$$

kde $E_\mathrm{k,f}$ a $E_\mathrm{k,i}$ značí kinetickou energii na konci a na počátku posunutí. Je-li rychlost kostky na počátku i na konci posunutí nulová, jsou hodnoty $E_\mathrm{k,f}$ i $E_\mathrm{k,i}$ nulové a vztah (7.42) se zjednoduší na tvar

$$W_a + W_\mathrm{p} = 0,$$

tj.

$$W_a = -W_\mathrm{p}. \qquad (7.43)$$

Tento výsledek znamená, že práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}_a$ je rovna záporně vzaté práci pružné síly.

Všimněte si, že délka pružiny přímo nevystupuje ani ve vyjádření pružné síly ((7.37) a (7.38)), ani ve vztazích pro její práci ((7.40) a (7.41)). Je však jedním z faktorů, které určují tuhost pružiny k a v uvedených vztazích je tedy obsažena „skrytě“, implicitně.

PŘÍKLAD 7.8

Abychom pružinu na obr. 7.11b udrželi protaženou o 12 mm, musíme na kostku, uchycenou na jejím volném konci, působit silou $\boldsymbol{F}_a$ o velikosti 4,9 N.

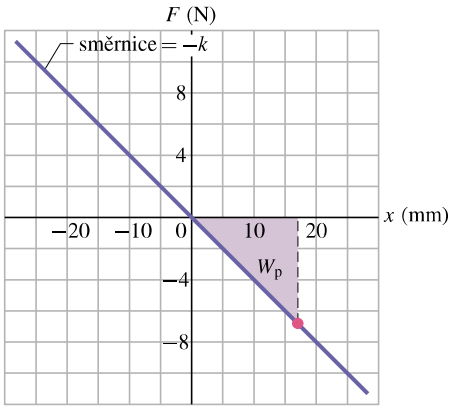
(a) Jaká je tuhost pružiny?

ŘEŠENÍ: Protažená pružina působí na kostku silou $F = -4{,}9\,\mathrm{N}$. Pro hodnotu $x = 12\,\mathrm{mm}$ dostaneme ze vztahu (7.38)

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{(-4{,}9\,\mathrm{N})}{(12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})} = 408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \doteq 410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znovu si uvědomte, že k určení tuhosti k není třeba znát délku pružiny. Grafické znázornění závislosti (7.38) pro tuto pružinu je na obr. 7.12. Grafem je přímka se směrnicí $-410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

(b) Jakou silou bude působit pružina na kostku, jestliže ji protáhneme o 17 mm?



Obr. 7.12 Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny v jednorozměrném případě (příklad 7.8). Pružina vyhovuje Hookovu zákonu (vztahy (7.37) a (7.38)). Její tuhost je $k = 410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Význam červeně vyznačeného bodu grafu a vybarvené plochy je objasněn v příkladu 7.8 (b, c).

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (7.38) plyne

$$F = -kx = -(408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(17{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m}) = -6{,}9\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Bod vyznačený v grafu na obr. 7.12 odpovídá vypočtené síle a příslušnému posunutí x. Všimněte si, že posunutí x je kladné, zatímco hodnota F je záporná, právě tak, jak to vyžaduje vztah (7.38).

(c) Jakou práci vykoná pružná síla při protažení pružiny z nenapjatého stavu o 17 mm (úloha (b))?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že pružina byla zpočátku v nenapjatém stavu, použijeme vztahu (7.41):

$$W_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{2}kx^2 = -\tfrac{1}{2}(408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(17{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})^2 = -5{,}9{\cdot}10^{-2}\,\mathrm{J} = -59\,\mathrm{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barevně vyznačená plocha v obr. 7.12 představuje velikost vypočtené práce. Tato práce je záporná, neboť pružná síla a posunutí kostky mají v dané úloze opačný směr. Kdybychom pružinu místo protažení o 17 mm o stejnou délku stlačili, byla by práce vykonaná pružnou silou stejná.

(d) Pružinu stlačenou o 17 mm uvolňujeme, až se kostka vrátí do polohy $x = 0$ (obnoví se nenapjatý stav pružiny). Poté pružinu stlačíme o 12 mm. Jakou práci vykonala pružná síla při celkovém posunutí kostky?

ŘEŠENÍ: V popsaném případě platí: $x_\mathrm{i} = +17\,\mathrm{mm}$ (v počátečním stavu je pružina napjatá) a $x_\mathrm{f} = -12\,\mathrm{mm}$ (v koncovém stavu je pružina stlačená). Ze vztahu (7.40) dostáváme

$$W_\mathrm{s} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 = \tfrac{1}{2}k(x_\mathrm{i}^2 - x_\mathrm{f}^2) = \tfrac{1}{2}(408\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})[(17{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})^2 - (-12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m})^2] = 0{,}030\,\mathrm{J} = 30\,\mathrm{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celková práce vykonaná pružnou silou je kladná. Kladná práce při posunutí kostky z polohy $x_i = +17\,\text{mm}$ do polohy $x = 0$ byla větší než absolutní hodnota záporné práce vykonané při posunutí kostky z polohy $x = 0$ do polohy $x_f = -12\,\text{mm}$.

KONTROLA 4: Pro soustavu pružina + kostka znázorněnou na obr. 7.11 uvažujte o třech situacích s různými počátečními a koncovými polohami kostky (x_i, x_f) a v každé z nich rozhodněte, zda je práce pružné síly kladná, záporná, nebo nulová: (a) $(-3\,\text{cm}, 2\,\text{cm})$, (b) $(2\,\text{cm}, 3\,\text{cm})$, (c) $(-2\,\text{cm}, 2\,\text{cm})$.

PŘÍKLAD 7.9

Kostka o hmotnosti 5,7 kg klouže po vodorovném dokonale hladkém stole konstantní rychlostí o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Narazí na volný konec pružiny (obr. 7.13) a stlačuje ji. V určitém okamžiku je rychlost kostky nulová. Vypočtěte délku d, o kterou je pružina v tomto okamžiku stlačena. Tuhost pružiny je $k = 1\,500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.41) je práce vykonaná silou, jíž *působí pružina* na kostku, při stlačení pružiny o d rovna

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

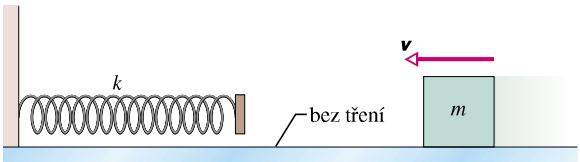
Změna kinetické energie kostky od okamžiku jejího nárazu na pružinu do okamžiku, kdy je její rychlost nulová, je

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Podle vztahu (7.4) mezi prací a kinetickou energií jsou si tyto veličiny rovny. Jejich porovnáním a řešením získané rovnice vzhledem k neznámé d dostaneme:

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\sqrt{\frac{(5{,}7\,\text{kg})}{(1\,500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})}} =$$

$$= 7{,}4\cdot10^{-2}\,\text{m} = 7{,}4\,\text{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 7.13 Příklad 7.9. Kostka se pohybuje směrem k pružině rychlostí $\boldsymbol{v}$, narazí na ni a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o délku d.

RADY A NÁMĚTY

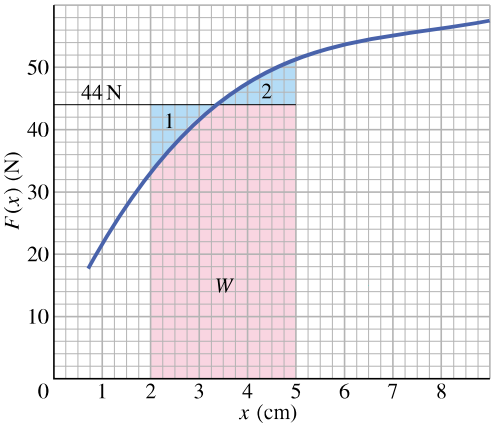
Bod 7.1: *Derivace a integrál, směrnice a plochy*

Pro zadanou funkci $y = F(x)$ umíme vypočítat hodnotu její derivace v libovolném bodě x i hodnotu jejího určitého integrálu v daných mezích proměnné x. Není-li funkce zadána analyticky (vzorcem), nýbrž grafem, lze zjišťovat hodnoty derivace i určitého integrálu graficky. Způsob grafického určení derivace byl vyložen v bodě 2.5. Proto si nyní všimneme jen grafické metody nalezení hodnoty určitého integrálu.

Na obr. 7.14 je znázorněn graf jisté funkce $F(x)$. Řekněme, že tato funkce představuje závislost x-ové složky síly, která působí na částici pohybující se po ose x, na (x-ové) souřadnici částice. Zaměříme se na grafické určení práce, kterou síla vykoná při posunutí částice z počáteční polohy $x_i = 2{,}0\,\text{cm}$ do koncové polohy $x_f = 5{,}0\,\text{cm}$. Podle vztahu (7.27) lze tuto práci vyjádřit integrálem

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx,$$

jehož hodnota je rovna obsahu vybarvené plochy ležící pod křivkou grafu a mezi zadanými krajními polohami x_i a x_f.



Obr. 7.14 Graf síly $F(x)$ v jednorozměrném případě. Vybarvená plocha pod křivkou (její obsah představuje práci síly F) je nahrazena obdélníkem vytvořeným vyjmutím plochy 2 a přidáním plochy 1, jejichž obsahy jsou přibližně shodné.

Tuto plochu lze přibližně nahradit obdélníkem, který vznikne doplněním obrázku o vodorovnou přímku, vedenou v takové poloze, aby obsahy plošek označených „1“ a „2“ byly shodné. Vyslovenému požadavku celkem dobře vyhovuje hodnota $F = 44\,\text{N}$. Odpovídající vodorovná přímka je v obr. 7.14 rovněž vyznačena. Obsah „náhradního“ obdélníka ($= W$) je

$$W = \text{výška} \cdot \text{základna} = (44\,\text{N})(5{,}0\,\text{cm} - 2{,}0\,\text{cm}) =$$

$$= 132\,\text{N}\cdot\text{cm} \doteq 1{,}3\,\text{N}\cdot\text{m} = 1{,}3\,\text{J}.$$

Obsah plochy představující práci W můžeme určit také tak, že spočítáme všechny čtverečky, které leží pod křivkou grafu

ve vybarvené části plochy. Je jich asi 260 a každý z nich představuje (2 N)(0,25 cm) = 0,5 N·cm. Práce W má tedy hodnotu

$$W = (260\,\text{čtverečků})\left(\frac{0{,}5\,\text{N·cm}}{1\,\text{čtvereček}}\right) = 130\,\text{N·cm} = 1{,}3\,\text{J},$$

stejně jako při výpočtu obsahu obdélníka z délek jeho stran. *Pamatujte*: V dvojrozměrném grafickém znázornění funkce jedné proměnné je derivace určena směrnicí grafu a integrál obsahem plochy pod křivkou grafu.

7.7 VÝKON

Na stavbě je třeba zvedat balíky cihel z chodníku na střechu budovy. Na staveništi je k dispozici naviják. Není obtížné spočítat práci, kterou musí při každém vyzvednutí nákladu vykonat síla působící na naviják. Je zde však ještě jeden problém: majiteli stavební firmy jde také o to, jak *rychle* bude tato práce vykonána. Za přijatelnou považuje dobu nejvýše 5 minut. Stihne se to?

Mírou toho, jak „rychle" koná určitá síla práci, je **výkon**. Vykoná-li síla $\boldsymbol{F}$ práci ΔW za dobu Δt, je její **průměrný výkon** v daném časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(průměrný výkon).} \qquad (7.44)$$

Okamžitý výkon P odpovídá „okamžité rychlosti" konání práce a je tedy limitním případem průměrného výkonu pro $\Delta t \to 0$:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.45)$$

Jednotka výkonu v soustavě SI je joule za sekundu. Tato jednotka se užívá tak často, že dostala samostatný název. Nazývá se **watt** (W) podle Jamese Watta, jenž se v historii zasloužil o velmi výrazné zdokonalení činnosti parních strojů. V britském systému je jednotkou výkonu stopa·libra za sekundu. Někdy se užívá i jednotky zvané koňská síla. Některé vztahy mezi jednotkami výkonu:

$$1\,\text{watt} = 1\,\text{W} = 1\,\text{J·s}^{-1} = 0{,}738\,\text{ft·lb·s}^{-1} \qquad (7.46)$$

a

$$\text{koňská síla} = 1\,\text{HP} = 550\,\text{ft·lb·s}^{-1} = 746\,\text{W}. \qquad (7.47)$$

Ze vztahu (7.44) vidíme, že práci lze vyjádřit jako součin výkonu a času a získat tak její běžně užívanou praktickou jednotku, kilowatthodinu. Platí

$$1\,\text{kilowatthodina} = 1\,\text{kW·h} = (10^3\,\text{W})(3\,600\,\text{s}) = \\ = 3{,}60{\cdot}10^6\,\text{J} = 3{,}6\,\text{MJ}. \qquad (7.48)$$

Někdo si možná při vyslovení slov watt nebo kilowatthodina vybaví spíše elektrické jednotky. Jedná se však o jednotku výkonu a jednotku energie, používané naprosto obecně. Kdybychom třeba učebnici, kterou právě držíme v ruce, zvedli z podlahy a položili ji na stůl, mohli bychom vykonanou práci klidně zapsat údajem $4{\cdot}10^{-6}$ kW·h (nebo lépe 4 mW·h).

Výkon můžeme také vyjádřit pomocí síly, která působí na částici a koná tak práci, a rychlosti částice. Předpokládejme, že se částice pohybuje po ose x a působí na ni síla $\boldsymbol{F}$, která s osou x svírá s úhel φ. Ze vztahu (7.45) dostáváme

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\cos\varphi\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right),$$

tj.

$$P = Fv\cos\varphi. \qquad (7.49)$$

Po úpravě pravé strany rovnosti (7.49) do tvaru skalárního součinu $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ můžeme psát

$$P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.50)$$

Dejme tomu, že tahač na obr. 7.15 působí na naložený přívěs silou $\boldsymbol{F}$. Rychlost přívěsu v daném okamžiku je $\boldsymbol{v}$. Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$, vyjádřený vztahy (7.49) a (7.50), udává, jak

Obr. 7.15 Výkon síly, jíž působí tahač na přívěs s nákladem, je „rychlost", s jakou tato síla koná práci.

„rychle" koná síla $\boldsymbol{F}$ práci právě v tomto okamžiku. Za přijatelné lze považovat i to, budeme-li místo o výkonu síly hovořit o „výkonu tahače". Musíme však mít stále na mysli, o co skutečně jde: výkon je „rychlost", s jakou síla koná práci.

PŘÍKLAD 7.10

V obr. 7.16 jsou vyznačeny síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působící na krabici, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze směrem vpravo. Síla $\boldsymbol{F}_1$ je vodorovná a má velikost 2,0 N, síla $\boldsymbol{F}_2$ je od podlahy odkloněna o 60° a její velikost je 4,0 N. Rychlost krabice má v určitém okamžiku velikost $v = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

(a) Jaký je výkon každé z obou sil v tomto okamžiku? Jaký je jejich celkový výkon? Interpretujte získanou hodnotu celkového okamžitého výkonu.

ŘEŠENÍ: Výkon jednotlivých sil zjistíme pomocí vztahu (7.49). Síla $\boldsymbol{F}_1$ svírá s rychlostí $\boldsymbol{v}$ úhel $\varphi_1 = 180°$, takže je

$$P_1 = F_1 v \cos\varphi_1 = (2{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 180° = \\ = -6{,}0\,\mathrm{J\cdot s^{-1}} = -6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek ukazuje, že síla $\boldsymbol{F}_1$ *spotřebovává* práci „s rychlostí" 6,0 joulů za sekundu neboli s výkonem 6,0 W. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_2$ a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je $\varphi_2 = 60°$. Platí tedy

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (4{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 60° = \\ = 6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledku plyne, že síla $\boldsymbol{F}_2$ *koná* (kladnou) práci s výkonem 6,0 W.

Celkový výkon je součtem obou získaných hodnot:

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\,\mathrm{W} + 6{,}0\,\mathrm{W} = 0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový okamžitý výkon sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je v daném okamžiku t nulový. To znamená, že elementární práce $\mathrm{d}W$ vykonaná oběma silami společně v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ od okamžiku t do okamžiku $t+\mathrm{d}t$ je nulová. Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nepřispívá v daném okamžiku ke změně kinetické energie krabice. Ze skutečnosti, že hodnota $P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2$ je *v daném okamžiku* nulová, nelze činit žádné další závěry. Soustřeďme se však na zadání úlohy pozorněji. Kromě zadaných sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici samozřejmě ještě tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a tlaková síla podlahy $\boldsymbol{N}$. Ty jsou trvale kolmé k posunutí krabice, a proto nekonají práci. Ke změně kinetické energie krabice tedy přispívá jen práce sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

Výsledná síla působící na krabici je

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N}.$$

Zvolme soustavu souřadnic tak, že osa x je vodorovná a míří vpravo a osa y směřuje svisle vzhůru. Pro složky výsledné síly dostaneme

$$\sum F_x = F_1\cos\varphi_1 + F_2\cos\varphi_2 = \\ = (2{,}0\,\mathrm{N})\cos 180° + (4{,}0\,\mathrm{N})\cos 60° = \\ = (-2{,}0 + 4{,}0\cdot 0{,}5)\,\mathrm{N} = 0,$$

$$\sum F_y = F_2\sin\varphi_2 - mg + N = \\ = (4{,}0\,\mathrm{N})\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - mg + N.$$

Z rovnice pro x-ovou složku plyne $a_x = 0$. Vzhledem k tomu, že je pohyb krabice vázán na vodorovnou podlahu, platí také $a_y = 0$ (vazební podmínka). Z rovnice pro y-ovou složku výsledné síly lze pak díky vazební podmínce určit tlakovou sílu podložky

$$N = mg - (4{,}0\,\mathrm{N})\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Celkově je $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Rychlost krabice $\boldsymbol{v}$ je tedy konstantní, stejně jako její kinetická energie. Celkový výkon P_{celk} sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je tedy nulový trvale, nejen v jediném okamžiku zmiňovaném v zadání úlohy.

(b) Řešte úlohu (a) znovu za předpokladu, že velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je 6,0 N.

ŘEŠENÍ: Pro výkon síly $\boldsymbol{F}_2$ nyní dostáváme

$$P_2 = F_2 v\cos\varphi_2 = (6{,}0\,\mathrm{N})(3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\cos 60° = \\ = 9{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

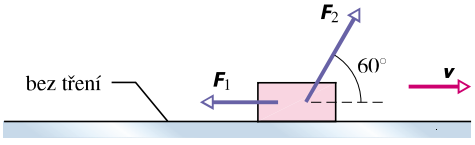
Výkon síly $\boldsymbol{F}_1$ jsme určili už v úloze (a) a jeho hodnota je

$$P_1 = -6{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový výkon je tedy

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\,\mathrm{W} + 9{,}0\,\mathrm{W} = \\ = 3{,}0\,\mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota celkového výkonu znamená, že kinetická energie i velikost rychlosti krabice v daném okamžiku rostou. Ze vztahu (7.50) a ze skutečnosti, že síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou konstantní, plyne, že v daném okamžiku roste i jejich celkový okamžitý výkon P_{celk}. Ten nabývá vypočtené hodnoty 3,0 W právě jen v okamžiku, kdy je velikost rychlosti krabice rovna $3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 7.16 Příklad 7.10. Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici, která klouže směrem vpravo po dokonale hladké podlaze. Rychlost krabice je $\boldsymbol{v}$.

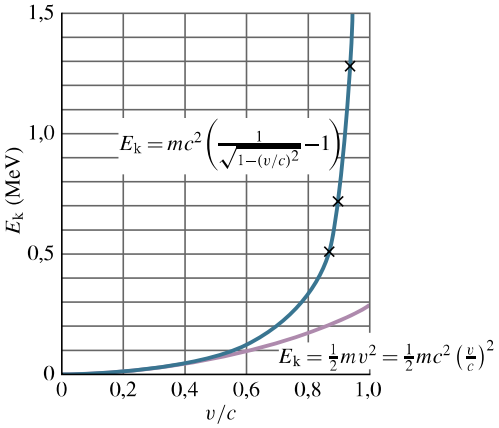
KONTROLA 5: Kostka je uvázána na provaze a pohybuje se rovnoměrně po kružnici, v jejímž středu je druhý konec provazu upevněn. Rozhodněte, zda je výkon tahové síly provazu kladný, záporný, nebo nulový.

7.8 KINETICKÁ ENERGIE PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

V čl. 4.10 jsme se dověděli, že pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla newtonovská mechanika selhává a musí být nahrazena Einsteinovou speciální teorií relativity. Jedním z důsledků této skutečnosti je, že již nemůžeme vyjadřovat kinetickou energii ve tvaru $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme použít relativistického vztahu

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right), \qquad (7.51)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.



Obr. 7.17 Graf relativistického a klasického vyjádření kinetické energie elektronu (viz (7.51), resp. (7.1)) v závislosti na podílu v/c, kde v je velikost rychlosti elektronu a c je rychlost světla ve vakuu. Všimněte si, že tyto dvě křivky při nízkých rychlostech splývají. Při zvyšující se rychlosti v se však jejich odchylka výrazně zvětšuje. Experimentální body (označené křížkem ×) dokumentují souhlas relativistické křivky s experimentem při vysokých rychlostech. Od nerelativistické křivky se experimentální hodnoty výrazně odchylují.

Obr. 7.17 ukazuje, že tyto dvě formule, které jsou zcela odlišné již na první pohled, dávají skutečně při vysokých rychlostech výrazně různé výsledky. Experiment potvrzuje mimo veškerou pochybnost, že relativistický výraz (7.51) je správný na rozdíl od výrazu klasického (7.1). Při nízkých rychlostech však výsledky obou vzorců prakticky splývají. Speciálně pro $v = 0$ dávají oba vztahy nulovou hodnotu kinetické energie.

Všechny relativistické formule musí při nízkých rychlostech přejít na odpovídající klasický tvar. Ukážeme si to na příkladu vztahu (7.51), který pro snažší porovnání se vztahem (7.1) ještě upravíme:

$$E_k = mc^2\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right]. \qquad (7.52)$$

Pro zjednodušení jsme místo podílu v/c použili bezrozměrového parametru β.

Při velmi malých rychlostech je $v \ll c$, odkud $\beta \ll 1$. Funkci $(1-\beta^2)^{-1/2}$ tedy můžeme rozvinout pomocí binomické věty (bod 7.2) a dostaneme

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots, \qquad (7.53)$$

Dosazení rozvoje (7.53) do (7.52) vede k výsledku

$$E_k = mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots\right) - 1\right]. \qquad (7.54)$$

Pro velmi malé hodnoty β rychle klesá velikost členů zastoupených tečkami. Součet v kulaté závorce tedy můžeme s jistou malou chybou nahradit prvními dvěma členy a psát

$$E_k \approx mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2\right) - 1\right],$$

nebo, při zpětném dosazení $\beta = \frac{v}{c}$,

$$E_k \approx mc^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\right) = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Tento výsledek potvrzuje naše očekávání.

RADY A NÁMĚTY

Bod 7.2: *Aproximace pomocí binomické věty*

Často potřebujeme najít přibližnou hodnotu veličiny $(a+b)^n$ za předpokladu, že $b \ll a$. Nejjednodušší je vyjádřit tento výraz ve tvaru konst $\cdot (1+x)^n$, kde x je bezrozměrová veličina mnohem menší než jednička. Můžeme psát

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = (a^n)(1+x)^n,$$

kde $(1+x)^n$ je potřebný výraz s bezrozměrovou proměnnou $x = \frac{b}{a}$. Mocninu $(1+x)^n$ můžeme rozepsat pomocí binomické věty s tím, že vezmeme v úvahu jen tolik členů, kolik je při dané přesnosti úlohy třeba. (Takové rozhodování ovšem vyžaduje jistou zkušenost.)

Binomická věta, uvedená v dod. E, má tvar

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots. \qquad (7.55)$$

Vykřičníky ve vztahu (7.55) představují faktoriály, tj. postupné násobení celých čísel vzniklých z dané hodnoty n odečítáním jednotky. Například $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Výpočet faktoriálů můžete pravděpodobně provádět i na své kalkulačce.

V předchozím textu jsme použili binomického rozvoje v rov. (7.53) pro $x = -\beta^2$ a $n = -\frac{1}{2}$.

Pro procvičení vypočtěte hodnotu $(1 + 0{,}045)^{-2{,}3}$ jak na kalkulačce, tak použitím rozvoje (7.55), v němž dosadíte $x = 0{,}045$ a $n = -2{,}3$. Vypočtěte si různé členy rozvoje, abyste se přesvědčili o jejich rychlém poklesu.

7.9 VZTAŽNÉ SOUSTAVY

Připomeňme, že Newtonovy zákony platí v inerciálních vztažných soustavách. Tyto preferované vztažné soustavy jsou spojeny s volnými částicemi a navzájem se pohybují rovnoměrně přímočaře.

V případě některých fyzikálních veličin naměří pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách tytéž hodnoty. V newtonovské mechanice jsou těmito *invariantními* veličinami síla, hmotnost, zrychlení, čas. Jestliže například jeden z pozorovatelů v inerciální vztažné soustavě zjistí, že hmotnost určité částice je 3,15 kg, je jisté, že pozorovatelé ve všech ostatních inerciálních soustavách naměří stejnou hodnotu. Jiné fyzikální veličiny, například posunutí částice nebo její rychlost, nabývají pro pozorovatele v různých inerciálních vztažných soustavách různých hodnot. Tyto veličiny *nejsou* invariantní.

Jestliže tedy posunutí částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní závislá i práce sil, které na částici působí, neboť práce ($W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$) je pomocí posunutí definována. Uvažujme například o částici, která se pohybuje podél společného směru osy x tří různých vztažných soustav. Dejme tomu, že její posunutí je v jedné vztažné soustavě $+2{,}47$ m, v jiné je nulové a v další třeba $-3{,}64$ m. Předpokládejme, že na částici působí ve směru jejího pohybu síla $\boldsymbol{F}$. Protože je síla $\boldsymbol{F}$ ve všech třech soustavách stejná (je invariantní), je zřejmé, že její práce měřená pozorovatelem v první soustavě je kladná, v druhé nulová a ve třetí záporná. Co můžeme usoudit o kinetické energii částice? Protože rychlost částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní záviset i kinetická energie ($E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$), která je pomocí rychlosti definována. Znamená to snad, že vztah mezi prací a kinetickou energií je chybný?

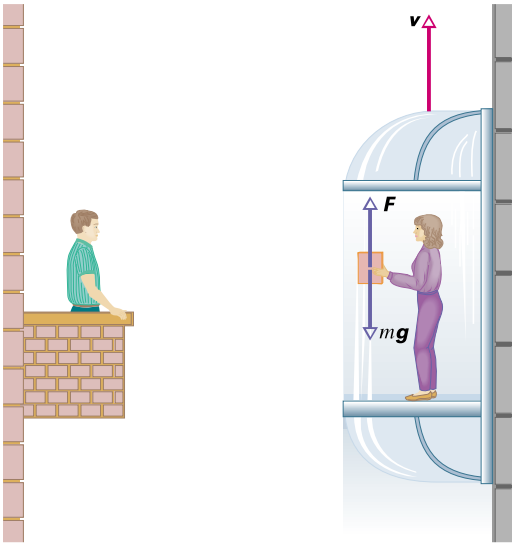
V průběhu doby, která uplynula od Galileiových experimentů až po Einsteinovy objevy, dospěli fyzikové k přesvědčení, že platí tzv. **princip invariance**:

> Fyzikální zákony musí mít stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Některé *fyzikální veličiny* nabývají sice v různých vztažných soustavách různých hodnot, avšak volba vztažné soustavy nemůže ovlivnit platnost *fyzikálních zákonů*. Intuitivně cítíme, že v tomto formálním tvrzení o invarianci je skryta skutečnost, že dva různí pozorovatelé, kteří budou studovat tutéž událost, musí dojít k závěru, že příroda funguje pro oba naprosto stejně.

Mezi zákony, kterých se princip invariance týká, patří i vztah mezi prací a kinetickou energií. Přestože se hodnoty práce naměřené různými pozorovateli budou lišit, stejně jako hodnoty kinetické energie, budou pozorovatelé zjišťovat, že vztah mezi prací a kinetickou energií platí ve vztažné soustavě každého z nich. Zaměřme se na jednoduchý příklad.

Na obr. 7.18 sledujeme Soňu, jak stoupá v kabině výtahu vzhůru stálou rychlostí a v ruce drží knihu. Štěpán stojí na balkoně a pozoruje, že kabina stoupla do výšky h. Posuďte platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií z hlediska obou pozorovatelů, kteří sledují pohyb knihy.



Obr. 7.18 Soňa jede ve výtahu vzhůru a drží knihu. Štěpán ji pozoruje. Každý z nich sleduje ve své vztažné soustavě pohyb knihy a zkoumá platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií.

1. *Sonin komentář.* „Mou vztažnou soustavou je kabina výtahu. Na knihu působí moje ruka silou, která směřuje svisle vzhůru. Tato síla však nekoná práci, protože kniha je v mé vztažné soustavě v klidu. Ze stejného důvodu nekoná práci ani tíhová síla, jíž působí na knihu Země. Celková práce všech sil působících na knihu je tedy nulová. V souhlasu se vztahem mezi prací a kinetickou energií se kinetická energie knihy nemění. To je přesně to, co pozoruji: kinetická energie knihy je v mé vztažné soustavě nulová a zachovává se. Všechno je tedy v pořádku.“

2. *Štěpánův komentář.* „Mou vztažnou soustavou je balkon. Vidím, že Soňa působí na knihu silou $\boldsymbol{F}$. Vzhledem k mé vztažné soustavě se působiště této síly pohybuje a práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při zvednutí knihy do výšky h, je Fh. Protože se kniha pohybuje rovnoměrně přímočaře, musí síla $\boldsymbol{F}$ kompenzovat sílu tíhovou, takže platí $Fh = +mgh$. Vím také, že i tíhová síla, působící na knihu, koná práci. Její hodnota je $-mgh$. Celková práce, kterou vykonají síly

působící na knihu při jejím posunutí do výšky h, je nulová. Ve shodě se vztahem mezi prací a kinetickou energií je kinetická energie knihy neměnná. A právě to pozoruji. V mé vztažné soustavě je kinetická energie knihy konstantní a má hodnotu $\frac{1}{2}mv^2$. Všechno souhlasí."

I když Soňa a Štěpán nezaznamenají shodné výsledky při měření posunutí knihy či její kinetické energie, každý z nich dospívá k závěru, že v jeho vztažné soustavě platí rovnost mezi prací všech sil působících na knihu a změnou její kinetické energie.

Není podstatné, jakou (inerciální) vztažnou soustavu si zvolíme pro řešení úlohy, jestliže (1) si dobře uvědomíme a zapamatujeme, jakou konkrétní soustavu jsme si zvolili, a (2) při řešení úlohy používáme stále tutéž vztažnou soustavu.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kinetická energie

Kinetická energie E_k částice o hmotnosti m, která se pohybuje velmi malou rychlostí $\boldsymbol{v}$ ve srovnání s rychlostí světla, je

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \tag{7.1}$$

Práce

Práce W každé ze sil působících na daný objekt přispívá ke změně jeho energie. Je-li práce vykonaná určitou silou kladná (síla práci *koná*), je odpovídající příspěvek ke změně energie objektu *přírůstkem*, je-li záporná (síla práci *spotřebovává*), dochází k *úbytku* energie objektu.

Práce a kinetická energie

Jsou-li podmínky při působení síly na daný objekt takové, že se může měnit pouze jeho kinetická energie, můžeme tuto změnu ΔE_k vyjádřit vztahem

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií),} \tag{7.4}$$

kde $E_{k,i}$ je počáteční kinetická energie objektu a $E_{k,f}$ je jeho kinetická energie poté, co síla vykonala práci W. Rovnost (7.4) je vhodné přepsat do tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \tag{7.5}$$

Práce konstantní síly

Práce, kterou vykoná konstantní síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím posunutí $\boldsymbol{d}$, je

$$W = Fd\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní síly),} \tag{7.9, 7.11}$$

kde φ je konstantní úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Působí-li na částici více sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, …, jejichž výslednice je konstantní, je jejich výsledná práce

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right)\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní výslednice sil).} \tag{7.13}$$

Tato práce je rovna součtu prací vykonaných jednotlivými silami. Jsou-li tyto síly rovněž konstantní, platí

$$W = \boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3\cdot\boldsymbol{d} + \ldots = \\ = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \qquad \text{(celková práce).} \tag{7.14}$$

Dosazením výrazu pro celkovou práci do vztahu mezi prací a kinetickou energií můžeme vyjádřit změnu kinetické energie částice jako celkovou práci všech sil, které na částici působí:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \tag{7.15}$$

Práce tíhové síly

Tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, působící na částici o hmotnosti m, vykoná při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ práci

$$W_g = mgd\cos\varphi, \tag{7.16}$$

kde φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$.

Práce při vzestupu a poklesu tělesa

Působí-li na částici v blízkosti povrchu Země kromě tíhové síly ještě další síla $\boldsymbol{F}_a$ (či síly o výslednici $\boldsymbol{F}_a$), určuje celková práce těchto sil W_a spolu s prací síly tíhové W_g změnu kinetické energie částice

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g. \tag{7.19}$$

Změní-li se výška částice nad povrchem Země beze změny její kinetické energie, zjednoduší se vztah (7.19) takto:

$$W_a = -W_g. \tag{7.20}$$

Práce síly $\boldsymbol{F}_a$ a práce tíhové síly se tedy v takovém případě liší pouze znaménkem. Přírůstek kinetické energie částice daný působením síly $\boldsymbol{F}_a$ je roven úbytku, který způsobila síla tíhová.

Práce proměnné síly

Síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici při jejím pohybu po křivce $\mathscr{C}$ z počátečního bodu $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ do koncového bodu $\boldsymbol{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$, může obecně záviset na poloze částice. Práce takové síly je dána křivkovým integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z) = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t. \tag{7.31}$$

Okamžiky t_i a t_f odpovídají počátečnímu a koncovému bodu křivky $\mathscr{C}$.

V jednorozměrném případě se vztah (7.31) zjednoduší na tvar

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.27}$$

Pružná síla

Pro pružnou sílu platí

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \tag{7.37}$$

kde $\boldsymbol{d}$ je posunutí volného konce pružiny z **nenapjatého stavu** (pružina v tomto stavu není natažena ani stlačena) a k je **tuhost** pružiny. Zvolíme-li osu x podél pružiny a počátek ztotožníme s polohou jejího volného konce v nenapjatém stavu, lze vztah (7.37) přepsat ve tvaru

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \tag{7.38}$$

Práce pružné síly

Přesune-li se těleso připevněné k volnému konci pružiny z počáteční polohy x_i do koncové polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2. \tag{7.40}$$

Pro $x_\mathrm{i} = 0$ a $x_\mathrm{f} = x$ je

$$W_\mathrm{p} = -\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{7.41}$$

Výkon

Výkon síly je „*rychlost*“, s jakou tato síla koná práci. Vykoná-li síla v časovém intervalu Δt práci ΔW, je *průměrný výkon* v tomto časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{7.44}$$

Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$ je „okamžitá rychlost“ konání práce

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{7.45}$$

Svírá-li síla $\boldsymbol{F}$ s trajektorií částice úhel φ, je okamžitý výkon roven

$$P = Fv\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{7.49, 7.50}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost částice.

Relativistická kinetické energie

Kinetickou energii objektu pohybujícího se rychlostí blízkou rychlosti světla c je třeba počítat z relativistického vztahu

$$E_\mathrm{k} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{7.51}$$

Tento vztah přejde na tvar (7.1) v případě, že v je mnohem menší než c.

Princip invariance

Některé veličiny (např. hmotnost, síla, zrychlení a čas v newtonovské mechanice) jsou *invariantní*. To znamená, že při jejich měření v různých inerciálních vztažných soustavách zaznamenáváme stejné hodnoty. Jiné veličiny (například rychlost, kinetická energie, práce) mají v různých vztažných soustavách různé hodnoty. Fyzikální *zákony* však mají stejný *tvar* ve všech inerciálních vztažných soustavách. Tuto skutečnost nazýváme **principem invariance**.

OTÁZKY

1. Uspořádejte následující rychlosti tak, aby odpovídající hodnoty kinetické energie byly řazeny sestupně: (a) $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, (e) $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i}$ a (f) $v = 5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, svírá-li vektor rychlosti s vodorovnou rovinou úhel 30°.

2. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro rychlost částice (a) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$, (b) $v = -4t$, $t > 0$.

3. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro polohu částice (a) $x = 4t^2 - 2$, (b) $x = -3t + 14$, (c) $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{r} = (2t^2 - 3)\boldsymbol{i} + (4t - 2)\boldsymbol{j}$. Ve všech případech je $t > 0$.

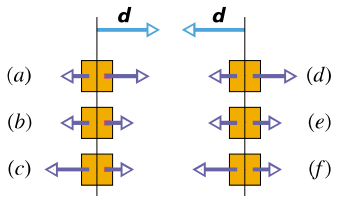
4. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ ve směru osy x. Částice se posune po ose x o 5 m. Můžeme pro výpočet práce, kterou síla vykonala, použít vztahů (7.9) a (7.11), je-li její velikost (v newtonech) (a) $F = 3$, (b) $F = 2x$, (c) $F = 2t$?

5. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ je v následujících případech kladná, či záporná: (a) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 30°, (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 100°, (c) $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{i}$.

6. Částice o hmotnosti 5 kg se pohybuje rovnoměrně po kružnici rychlostí o velikosti $4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jakou práci vykoná dostředivá síla působící na částici (a) v libovolně zvoleném časovém intervalu, (b) během jednoho oběhu částice?

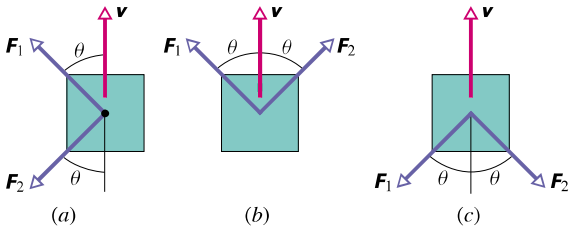
7. Na obr. 7.19 vidíme šest situací, v nichž na krabici pohybující se po vodorovné dokonale hladké podložce působí současně dvě síly. Jedna z nich směřuje vpravo, druhá vlevo. Síly mají velikosti 1 N, resp. 2 N, a v obrázku jsou znázorněny vektory

různých délek. V jednotlivých případech rozhodněte, zda je práce výslednice obou sil při posunutí krabice o vyznačený vektor **d** kladná, záporná, či nulová.



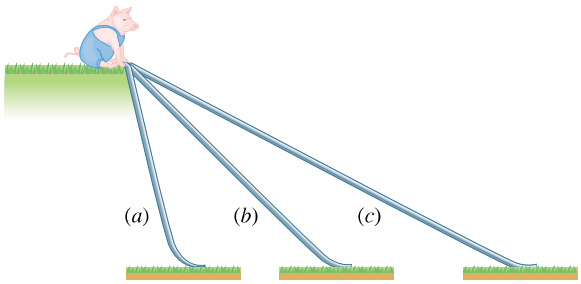
Obr. 7.19 Otázka 7

8. Na obr. 7.20 jsou v pohledu shora zobrazeny tři situace, kdy na krabici působí dvě síly ($\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$) stejných velikostí. Síly svírají s rychlostí krabice stálé úhly. Rozhodněte, zda celková práce, kterou síly konají při pohybu krabice, je kladná, záporná, či nulová.



Obr. 7.20 Otázka 8

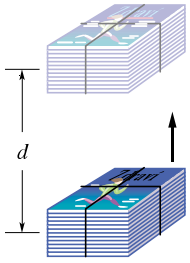
9. Vepřík na obr. 7.21 může sklouznout po jedné ze tří dokonale hladkých skluzavek. Uspořádejte skluzavky sestupně podle velikosti práce, kterou při takové jízdě vykoná tíhová síla působící na vepříka.



Obr. 7.21 Otázka 9

10. Představme si poměrně absurdní situaci. Ulovili jsme pásovce a chceme jej zvednout na mořský útes. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou, kterou při tom na pásovce působíme, závisí (a) na jeho hmotnosti, (b) na tíhové síle, kterou na něj působí Země, (c) na výšce útesu, (d) na době, během níž pásovce zvedneme, (e) na tom, zda pásovce vychylujeme do stran, nebo jej zvedáme přímo vzhůru.

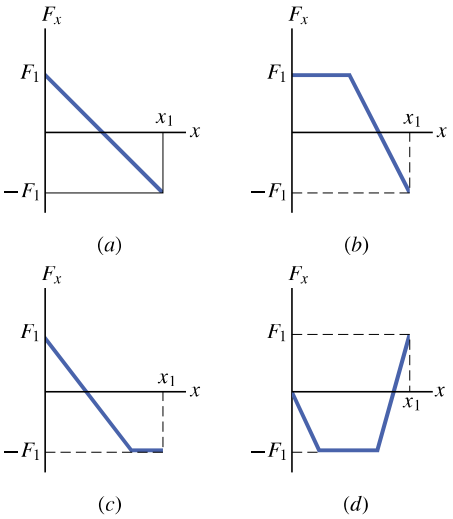
11. Obr. 7.22 zachycuje balík časopisů, který je třeba zvednout do výšky d. Balík zvedáme tahem za provaz, jímž je ovázán. V tabulce je uvedeno šest dvojic hodnot udávajících velikost rychlosti balíku (v metrech za sekundu) v_0, resp. v na počátku, resp. na konci jeho posunutí o svislou vzdálenost d. Uspořádejte tyto dvojice sestupně podle práce vykonané tahovou silou provazu při daném posunutí.



	a	b	c	d	e	f
v =	0	2	2	2	0	1
v_0 =	0	2	0	1	2	2

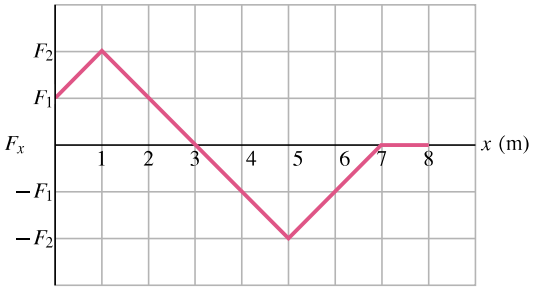
Obr. 7.22 Otázka 11

12. Na obr. 7.23 jsou znázorněny čtyři grafy závislosti proměnné síly **F**, působící na částici pohybující se podél osy x, na poloze této částice. Poloha je určena souřadnicí x, síla **F** má směr osy x. Stupnice na odpovídajících si osách grafů jsou stejné. Seřaďte grafy sestupně podle hodnoty práce, kterou síla **F** vykonala při posunutí částice z polohy $x = 0$ do polohy x_1.



Obr. 7.23 Otázka 12

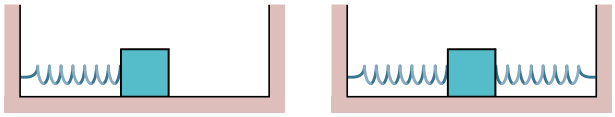
13. Síla **F** rovnoběžná s osou x působí na částici pohybující se ve směru osy x. Obr. 7.24 znázorňuje závislost této síly na



Obr. 7.24 Otázka 13

poloze částice, zadané souřadnicí x. V počáteční poloze $x = 0$ byla částice v klidu. Jaká je její poloha v okamžiku, kdy má (a) největší kinetickou energii, (b) největší rychlost, (c) nulovou rychlost? (d) Jaký je směr pohybu částice při jejím průchodu bodem o souřadnici $x = 6\,\mathrm{m}$?

14. Kostka je upevněna k volnému konci nenapjaté pružiny podle obr. 7.25a. Tuhost pružiny k je taková, že při posunutí kostky o vektor $\boldsymbol{d}$ vpravo vykoná pružná síla práci W_1. Velikost pružné síly na konci posunutí je F_1. Kostku připojíme na opačné straně ještě k druhé, stejné pružině, podle obr. 7.25b. Vzdálenost uchycení pružin je zvolena tak, aby ve výchozím stavu byly obě nenapjaté. Kostku posuneme opět o vektor $\boldsymbol{d}$. (a) Jaká je velikost výslednice sil, jimiž na kostku působí obě pružiny? (b) Jakou práci vykonaly pružné síly?

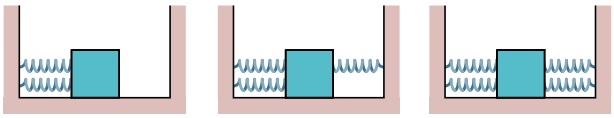


(*a*) (*b*)

Obr. 7.25 Otázka 14

15. Pružina A je tužší než pružina B, tj. $k_A > k_B$. Pružiny stlačujeme působením vnější síly tak, že (a) docílíme jejich stejného stlačení, (b) obě pružiny stlačujeme stejně velkými vnějšími silami. V každém z případů (a) a (b) rozhodněte, která z pružných sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ vykonala větší práci.

16. Na obr. 7.26 jsou znázorněny tři situace. V každé z nich je kostka připojena ke stejným pružinám. V okamžiku, kdy je kostka uprostřed, jsou pružiny nenapjaté. Seřaďte situace sestupně podle velikosti výsledné síly, která bude působit na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo. Seřaďte situace sestupně podle celkové práce pružných sil působících na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo.



(1) (2) (3)

Obr. 7.26 Otázka 16

17. Jakým násobkem tuhosti pružiny je tuhost každé z pružin, které vzniknou rozpůlením pružiny původní? (*Tip*: Uvažte, jaké protažení každé z poloviních pružin způsobí vnější síla o dané velikosti.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 7.1 Kinetická energie

1C. Jaká je kinetická energie rakety Saturn V, spojené s kosmickou stanicí Apollo, je-li jejich celková hmotnost $2{,}9\cdot10^5\,\mathrm{kg}$ a dosáhnou-li společné rychlosti $11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$?

2C. Volný elektron (hmotnost $m = 9{,}11\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$) v mědi má při nejnižší dosažitelné teplotě kinetickou energii $6{,}7\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}$. Jak velká je jeho rychlost?

3C. Určete kinetickou energii následujících objektů, pohybujících se danou rychlostí: (a) fotbalový obránce o hmotnosti 110 kg, který běží rychlostí 8,1 m/s, (b) kulka o hmotnosti 4,2 g letící rychlostí 950 m/s, (c) letadlová loď *Nimitz* o výtlaku 91 400 tun při rychlosti 32 uzlů (1 uzel $\doteq 0{,}51\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

4C. Dne 10. srpna 1972 proletěl atmosférou nad východním územím USA a Kanady velký meteorit. Odrážel se od horní vrstvy atmosféry, asi jako když se kamenem hází žabičky po vodě. Ohnivá koule na obloze byla tak jasná, že byla vidět i ve dne (obr. 7.27). Hmotnost meteoritu byla asi $4\cdot10^6\,\mathrm{kg}$, velikost jeho rychlosti zhruba $15\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Kdyby meteorit vstoupil do atmosféry ve svislém směru, dosáhl by povrchu Země s přibližně nezměněnou rychlostí. (a) Vypočtěte ztrátu energie meteoritu (v joulech) při jeho zabrzdění po kolmém dopadu na povrch Země. (b) Vyjádřete tuto energii jako násobek energie uvolněné při výbuchu jedné megatuny TNT, která činí $4{,}2\cdot10^{15}\,\mathrm{J}$. (c) Energie uvolněná při výbuchu atomové bomby svržené na Hirošimu byla ekvivalentní 13 kilotunám TNT. Kolika „hirošimským bombám“ odpovídá srážka meteoritu se Zemí?

Obr. 7.27 Cvičení 4. Velký meteorit prolétá atmosférou nad pohořím (vpravo nahoře).

5C. Výbuch na zemském povrchu zanechá kráter, jehož průměr je úměrný třetí odmocnině z energie, která se při tom uvolnila. Při výbuchu jedné megatuny TNT vznikne kráter o průměru 1 km. Pod Huronským jezerem v Michiganu byl objeven starý kráter o průměru 50 km. Jaká byla kinetická energie tělesa, které kráter vytvořilo, vyjádřená (a) v megatunách TNT, (b) v jednotkách odpovídajících ekvivalentu hirošimské bomby (cvič. 4)? (Takový dopad meteoritu nebo komety mohl významně ovlivnit pozemské podnebí či přispět k vyhynutí dinosaurů i jiných forem života.)

6Ú. Proton (hmotnost $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) prochází *lineárním urychlovačem* se zrychlením o velikosti $3{,}6\cdot10^{15}$ m·s^{-2}. Počáteční rychlost protonu byla $2{,}4\cdot10^{7}$ m·s^{-1}. (a) Jaká je velikost jeho rychlosti poté, co prošel vzdálenost 3,5 cm? (b) Jaký je přírůstek jeho kinetické energie v elektronvoltech?

7Ú. Otec běží o závod se svým synem. Kinetická energie otce je ve srovnání se synem poloviční, hmotnost dvojnásobná. Jestliže otec zvýší svou rychlost o 1 m·s^{-1}, bude mít stejnou kinetickou energii jako syn. Určete velikost počáteční rychlosti otce i syna.

8Ú. Jaká je kinetická energie Země při jejím oběhu kolem Slunce? (Potřebné číselné údaje vyhledejte v dodatku C.)

ODST. 7.3 Práce a kinetická energie

9C. Objekt o hmotnosti 102 kg se pohybuje po vodorovné přímce a je brzděn se zpožděním 2,0 m·s^{-2}. Jeho počáteční rychlost má velikost 53 m·s^{-1}. (a) Jaká je velikost brzdící síly? (b) Jakou vzdálenost těleso urazí, než se zastaví? (c) Jakou práci vykoná brzdná síla? (d) Zodpovězte otázky (a) až (c) pro případ, že zpoždění je 4,0 m·s^{-2}.

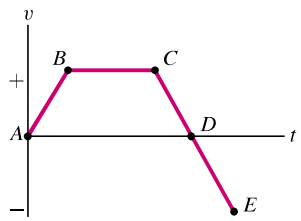
10C. Dělník vleče bednu o hmotnosti 50 kg po dokonale hladké vodorovné podlaze. Působí na ni při tom silou o velikosti 210 N pod úhlem 20° vzhledem k podlaze. Zjistěte, jakou práci vykonaly při posunutí bedny o 3,0 m následující síly: (a) síla, kterou působí na bednu dělník, (b) tíhová síla, (c) tlaková síla, jíž působí na bednu podlaha. (d) Jaká je celková práce všech sil působících na bednu?

11C. Plovoucí ledová kra je hnána proudem vody podél pobřeží. Proud na ni působí silou $\boldsymbol{F} = (210\,\text{N})\boldsymbol{i} - (150\,\text{N})\boldsymbol{j}$. Jakou práci vykoná tato síla při posunutí kry o vektor $\boldsymbol{d} = (15\,\text{m})\boldsymbol{i} - (12\,\text{m})\boldsymbol{j}$?

12C. Částice se posune po přímce o vektor $\boldsymbol{d} = (8\,\text{m})\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil, které na částici působí, je $\boldsymbol{F} = (2\,\text{N})\boldsymbol{i} - (4\,\text{N})\boldsymbol{j}$. Pro jaké hodnoty c je práce této síly při posunutí $\boldsymbol{d}$ (a) nulová, (b) kladná, (c) záporná?

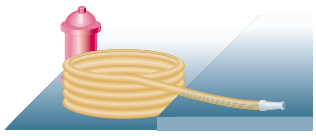
13C. Proton, který byl zpočátku v klidu, byl v cyklotronu urychlen na výslednou rychlost o velikosti $3{,}0\cdot10^{6}$ m·s^{-1}. Jakou práci (v elektronvoltech) při tom vykonala elektrická síla, která proton urychlila? (I když velikost zadané rychlosti činí již 1 % rychlosti světla, nepočítejte s relativistickou opravou.)

14C. Na částici pohybující se po přímce působí jediná síla. Obr. 7.28 ukazuje časovou závislost rychlosti částice. Určete znaménko (plus, resp. minus) práce, kterou tato síla vykoná v každém z časových intervalů AB, BC, CD a DE.



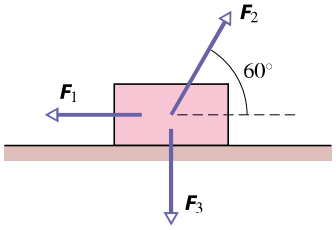
Obr. 7.28 Cvičení 14

15C. Dvanáctimetrovou požární hadici (obr. 7.29) rozvíjíme tak, že její konec s tryskou táhneme po dokonale hladké podlaze stálou rychlostí o velikosti 2,3 m·s^{-1}. Hmotnost jednoho metru hadice je 0,25 kg (její délková hustota tedy je 0,25 kg·m^{-1}). Jakou práci vykoná síla působící na hadici při jejím rozvíjení do okamžiku, kdy je celá hadice v pohybu?



Obr. 7.29 Cvičení 15

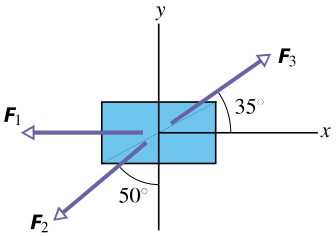
16Ú. Na obr. 7.30 jsou znázorněny tři síly působící na kufr, který se posune o 3,00 m vlevo po dokonale hladké podlaze. Velikosti sil jsou $F_1 = 5{,}00$ N, $F_2 = 9{,}00$ N a $F_3 = 3{,}00$ N. (a) Jaká je celková práce těchto sil při uvedeném posunutí kufru? (b) Rozhodněte, zda kinetická energie kufru vzroste, nebo poklesne.



Obr. 7.30 Úloha 16

17Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici o hmotnosti 3,0 kg tak, že její poloha závisí na čase vztahem $x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + 1{,}0t^3$. Souřadnice x je zadána v metrech a čas t v sekundách. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (*Tip*: Určete rychlost částice v obou okamžicích.)

18Ú. Obr. 7.31 představuje pohled shora na nádobu pohybující se po dokonale hladké podlaze, na kterou působí tři síly. Nádoba byla zpočátku v klidu. Velikosti sil jsou $F_1 = 3{,}00$ N, $F_2 = 4{,}00$ N a $F_3 = 10{,}00$ N. Jakou celkovou práci tyto síly vykonají při posunutí nádoby o 4,00 m od okamžiku, kdy se dala do pohybu?



Obr. 7.31 Úloha 18

19Ú. Na částici o hmotnosti 2,0 kg působí stálá síla o velikosti 10 N, která svírá se směrem kladné osy x úhel 150°

(měřeno v kladném smyslu, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček). Jakou práci vykoná tato síla při posunutí částice z počátku soustavy souřadnic do bodu o polohovém vektoru $(2{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (4{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$?

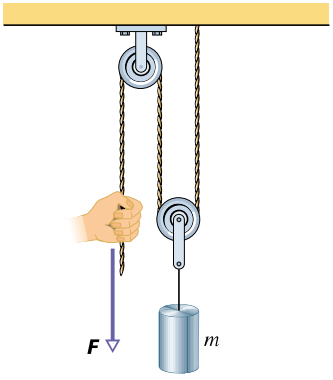
ODST. 7.4 Práce tíhové síly

20C. (a) Při úpravách montrealského velodromu v roce 1975 bylo třeba vycentrovat jeho střechu vážící 41 000 tun. K tomu bylo nutné ji nadzvednout asi o 10 cm. Jakou práci při tom vykonaly síly, které střechu zvedaly? (b) V roce 1960 prý paní Maxwell Rogersová z Tampy na Floridě dokázala nadzvednout jeden konec auta, které spadlo na jejího syna poté, co selhal zvedák. Připusťme, že v takovém šoku byla skutečně schopna nadzvednout automobil o váze 16 000 N silou o velikosti 4 000 N asi o 5 cm. Jakou práci tato síla vykonala?

21C. Dělník tlačí bednu o hmotnosti 25,0 kg vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 25,0°. Působí na ni při tom silou o velikosti 209 N, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Vypočtěte práci, kterou při posunutí bedny o 1,50 m vykonají síly působící na bednu: (a) síla, kterou působí dělník, (b) tíhová síla, (c) normálová (tlaková) síla nakloněné roviny. (d) Jaká je celková práce, kterou vykonaly síly působící na bednu?

22C. Kostka ledu o hmotnosti 45 kg klouže dolů po nakloněné rovině dlouhé 1,5 m a vysoké 0,91 m. Dělník tlačí kostku silou směřující vzhůru podél nakloněné roviny tak, aby klesala stálou rychlostí. (a) Jakou silou působí dělník na kostku? Určete práci, kterou vykonají síly působící na kostku: (b) síla, kterou působí dělník, (c) tíhová síla, (d) normálová síla, jíž působí na kostku povrch nakloněné roviny, (e) výsledná síla.

23C. Na obr. 7.32 je znázorněno zařízení s volnou kladkou: provaz je veden přes dvě nehmotné kladky, které se mohou otáčet bez tření. Na volné kladce visí nádoba o hmotnosti $m = 20\,\mathrm{kg}$, na volný konec provazu působíme silou $\boldsymbol{F}$. (a) Jak velká musí



Obr. 7.32 Cvičení 23

být síla $\boldsymbol{F}$, máme-li nádobu zvedat stálou rychlostí? (b) O jakou vzdálenost musíme posunout volný konec provazu, chceme-li nádobu zvednout o 2,0 cm? Určete, jakou práci vykonají při tomto posunutí následující síly: (c) síla $\boldsymbol{F}$, (d) tíhová síla působící na nádobu. (*Tip*: Provaz vedený přes kladku podle obrázku na ni působí celkovou silou, jejíž velikost je rovna dvojnásobku velikosti tahové síly provazu.)

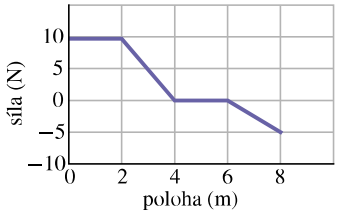
24Ú. Helikoptéra zvedala 72 kg astronauta na laně z hladiny oceánu do výšky 15 m se zrychlením $g/10$. Určete práci, kterou při tom vykonaly síly působící na astronauta: (a) síla, kterou působila helikoptéra, (b) tíhová síla. Jakou (c) kinetickou energii a (d) rychlost astronaut získal?

25Ú. Kostku o hmotnosti M, která byla zpočátku v klidu, spouštíme na laně svisle dolů se zrychlením $g/4$. Jakou práci vykonala (a) tahová síla lana, (b) tíhová síla, do okamžiku, kdy kostka poklesla o vzdálenost d? (c) Jaká je v tomto okamžiku kinetická energie kostky a (d) její rychlost?

26Ú. Speleologická záchranná četa zvedá zraněného průzkumníka ze zborcené jeskyně přímo vzhůru na laně navíjeném pomocí motoru. Akce má tři fáze, z nichž každá vyžaduje zvednutí člověka o svislou vzdálenost 10,0 m: (1) Člověk, který byl zpočátku v klidu, je zvedán s jistým zrychlením, až dosáhne rychlosti o velikosti $5{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (2) Další zdvih se děje stálou rychlostí, jíž bylo dosaženo v předchozí fázi. (3) Následuje rovnoměrně zpožděný pohyb až do zastavení. Jakou práci vykoná v každé fázi pohybu síla, jíž působí na speleologa tažné lano?

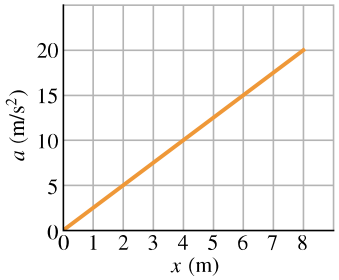
ODST. 7.5 Práce proměnné síly

27C. Kostka o hmotnosti 5,0 kg se pohybuje přímočaře po dokonale hladké vodorovné rovině. Na kostku působí síla, jejíž závislost na poloze kostky je znázorněna na obr. 7.33. Jakou práci vykoná tato síla při přemístění kostky z počátku soustavy souřadnic do polohy o souřadnici $x = 8{,}0\,\mathrm{m}$?



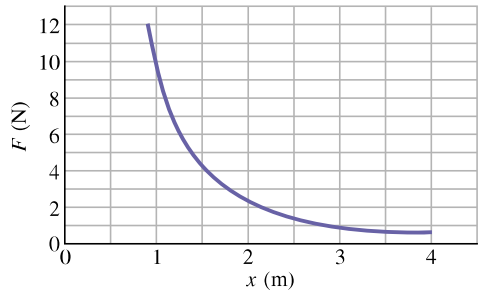
Obr. 7.33 Cvičení 27

28C. Těleso o hmotnosti 10 kg se pohybuje po ose x. Závislost jeho zrychlení na poloze je znázorněna na obr. 7.34. Jaká je celková práce vykonaná silami, které udělují tělesu toto zrychlení, jestliže se těleso přemístí z polohy $x = 0$ do polohy $x = 8{,}0\,\mathrm{m}$?



Obr. 7.34 Cvičení 28

29Ú. (a) Na částici pohybující se po ose x působí ve směru této osy síla, jejíž závislost na poloze částice je znázorněna v grafu 7.35. Odhadněte práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 1\,\text{m}$ do polohy $x = 3\,\text{m}$. Zjemněte použitou metodu tak, abyste si udělali představu, jak blízko se vám podařilo přiblížit se přesné hodnotě 6 J. (b) Rovnice znázorněné křivky má tvar $F = ax^{-2}$, kde $a = 9\,\text{N}\cdot\text{m}^2$. Vypočtěte hledanou práci pomocí integrace.



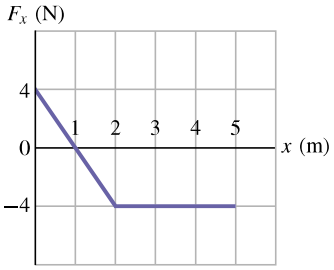
Obr. 7.35 Úloha 29

30Ú. Na částici působí síla $F = F_0(\frac{x}{x_0} - 1)$. Určete práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 0$ do polohy $x = 2x_0$ (a) přibližně z grafu závislosti $F(x)$, (b) integrací funkce $F(x)$ v daných mezích proměnné x.

31Ú. Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F} = (2x\,\text{N})\boldsymbol{i} + (3\,\text{N})\boldsymbol{j}$ působící na částici při jejím posunutí z polohy $\boldsymbol{r}_\text{i} = (2\,\text{m})\boldsymbol{i} + (3\,\text{m})\boldsymbol{j}$ do polohy $\boldsymbol{r}_\text{f} = -(4\,\text{m})\boldsymbol{i} - (3\,\text{m})\boldsymbol{j}$?

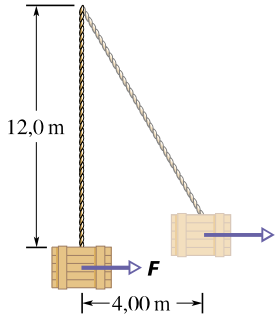
32Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici pohybující se podél osy x. Síla má směr kladně orientované osy x a závislost její velikosti na poloze částice je popsána funkcí $F(x) = 10\exp(-x/2{,}0)\,\text{N}$, kde proměnná x je zadávána v metrech. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice z počátku osy x do polohy o souřadnici $x = 2{,}0\,\text{m}$ (a) jako obsah plochy pod grafem funkce $F(x)$, (b) výpočtem pomocí integrálu.

33Ú. Na těleso o hmotnosti 2,0 kg působí při jeho pohybu podél osy x jediná síla. Její závislost na poloze tělesa je znázorněna na obr. 7.36. Rychlost tělesa v bodě $x = 0$ je $v_x = 4{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je kinetická energie tělesa v bodě $x = 3\,\text{m}$? (b) V jaké poloze x má těleso kinetickou energii 8 J? (c) Jaká je největší kinetická energie, které těleso dosáhne během pohybu z polohy $x = 0$ do polohy $x = 5{,}0\,\text{m}$?



Obr. 7.36 Úloha 33

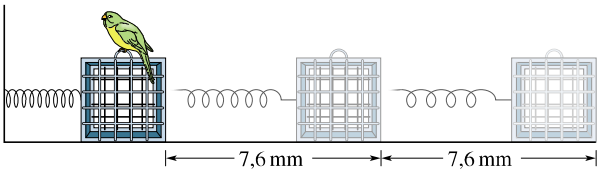
34Ú. Bedna o hmotnosti 230 kg visí na konci lana o délce 12,0 m. Na bednu začneme působit ve vodorovném směru silou $\boldsymbol{F}$ o proměnné velikosti a posuneme ji o 4,00 m ve vodorovném směru, jak ukazuje obr. 7.37. (a) Jaká je velikost síly $\boldsymbol{F}$ v koncové poloze bedny? (b) Jakou celkovou práci vykonaly síly působící na bednu při jejím posunutí? (c) Jakou práci vykonala tíhová síla a (d) tahová síla lana? (e) Za předpokladu, že bedna byla zpočátku v klidu, určete pomocí výsledků (b), (c) a (d) práci síly $\boldsymbol{F}$. (f) Vysvětlete, proč práce síly $\boldsymbol{F}$ není rovna součinu velikosti vodorovného posunutí bedny a velikosti síly $\boldsymbol{F}$ zjištěné v části (a) této úlohy?



Obr. 7.37 Úloha 34

ODST. 7.6 Práce pružné síly

35C. Ke konci pružiny o tuhosti $15\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-1}$ je připevněna klec (obr. 7.38). (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí pružina na klec, při stlačení o 7,6 mm z výchozího nenapjatého stavu? (b) Jakou práci vykoná při dalším stlačení o 7,6 mm?



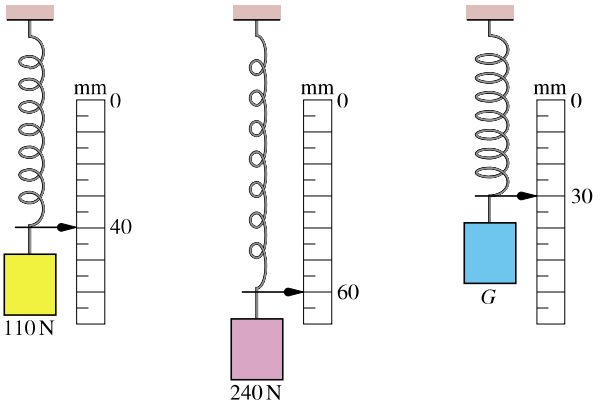
Obr. 7.38 Cvičení 35

36C. Studenti MIT (Massachusetts Institute of Technology, jedna z renomovaných univerzit v USA) obývající dvě sousední budovy studentské koleje East Campus zorganizovali jednou v rámci obvyklých studentských recesí bitvu, při níž používali praků vyrobených z chirurgických hadic, uchycených v okenních rámech. Míč naplněný obarvenou vodou vložili do „kapsy“ praku, připevněné k hadici. Hadici pak napjali přes celou šířku pokoje, uvolnili a míč tak vymrštili proti soupeřům bydlícím v protilehlé budově. Předpokládejme, že se napjatá hadice řídí Hookovým zákonem a že její tuhost je $100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Jakou práci vykoná pružná síla, jíž působí hadice na kapsu s míčem, od okamžiku uvolnění hadice protažené o 5,00 m do okamžiku vymrštění míče, kdy je již hadice v nenapjatém stavu?

37Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje po ose x. x-ová složka jediné síly, která na těleso působí, je tvaru $F_x = -6x\,\text{N}$. Souřadnice x je zadána v metrech. Rychlost tělesa v bodě o souřadnici $x = 3{,}0\,\text{m}$ je $v_x = 8{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je rychlost tělesa

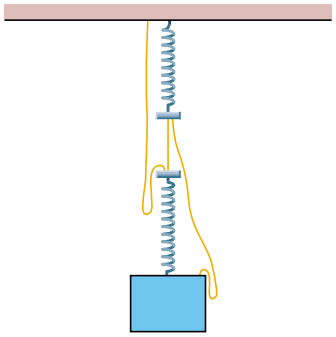
v poloze $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$? (b) V jaké poloze má těleso rychlost $v_x = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

38Ú. Pružinový siloměr má stupnici cejchovanou v milimetrech. Na siloměr zavěšujeme postupně tři různá závaží (obr. 7.39). (a) Jakou hodnotu ukáže ukazatel siloměru na stupnici, jestliže závaží sejmeme? (b) Jaká je velikost tíhové síly G?



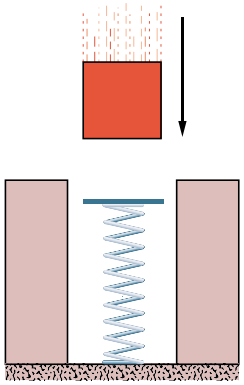
Obr. 7.39 Úloha 38

39Ú. Na obr. 7.40 jsou znázorněny dvě stejné pružiny spojené krátkým vláknem o délce 10 cm. Délka každé z pružin v nenapjatém stavu je 50 cm a tuhost $500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Horní pružina je připevněna ke stropu, na volném konci dolní pružiny visí krabice o váze 100 N. Další dvě ohebná vlákna, každé o délce 85 cm (v dobrém přiblížení neměnné) jsou k soustavě připojena podle obrázku. Krátké vlákno přepálíme, takže krabice zůstane zavěšena pouze na pružinách a dlouhých vláknech a začne se pohybovat. Vlivem odporové síly prostředí se krabice nakonec zastaví v nové rovnovážné poloze. (a) Rozhodněte, zda tato poloha bude ležet nad, či pod původní rovnovážnou polohou, kterou zaujímala krabice před přepálením krátkého vlákna a (b) určete, jak daleko bude od ní vzdálena. (c) Jakou celkovou práci vykonaly pružné síly obou pružin v časovém intervalu mezi přepálením vlákna a ustálením nové rovnovážné polohy?



Obr. 7.40 Úloha 39

40Ú. Kostka o hmotnosti 250 g dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 2{,}5\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ (obr. 7.41) a pevně se s ní spojí. Soustava začne kmitat. V okamžiku, kdy kostka poprvé dosáhne bodu obratu, je stlačení pružiny $d = 12\,\mathrm{cm}$. Určete, jakou práci vykonaly do tohoto okamžiku následující síly působící na kostku: (a) tíhová síla, (b) pružná síla. (c) Jaká byla rychlost kostky bezprostředně před dopadem na pružinu? (Třecí a odporové síly považujeme za zanedbatelné.) (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny při dvojnásobné rychlosti dopadu kostky?



Obr. 7.41 Úloha 40

ODST. 7.7 Výkon

41C. Plně zatížená kabina výtahu má hmotnost $3{,}0{\cdot}10^3\,\mathrm{kg}$ a stoupá stálou rychlostí. Za 23 s urazí 210 m. Jaký je průměrný výkon tahové síly lana kabiny?

42C. Lyžařský výtah vytáhne 100 lyžařů, z nichž každý má hmotnost průměrně 70 kg, do výšky 150 m za 60 s. Rychlost pohybu je konstantní. Jaký je průměrný výkon tažné síly výtahu?

43C. Kabina nákladní zdviže má hmotnost 4 500 kg, nejvyšší povolená hmotnost nákladu je 1 800 kg. Jaký musí být výkon tahové síly lana zdviže, zvedá-li se plně naložená kabina stálou rychlostí $3{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

44C. (a) Určete okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F} = (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (9{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působící na částici, v okamžiku, kdy je její rychlost $\boldsymbol{v} = -(2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{k}$. (b) Předpokládejme, že v jiném okamžiku má rychlost částice nenulový průmět pouze do směru vektoru $\boldsymbol{j}$ a že síla $\boldsymbol{F}$ zůstala nezměněna. Jaká je nyní rychlost částice, je-li okamžitý výkon síly $-12\,\mathrm{W}$?

45Ú. Kostka o hmotnosti 100 kg je tažena stálou rychlostí o velikosti $5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ po dokonale hladké podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 122 N. Síla svírá s podlahou úhel 37° a je orientován směrem vzhůru. Jaký je výkon síly $\boldsymbol{F}$?

46Ú. Kůň táhne vozík silou o velikosti 180 N svírající s vodorovnou rovinou úhel +30°. Jedou stálou rychlostí o velikosti $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tažná síla během 10 min jízdy? (b) Jaký je průměrný výkon této síly (ve wattech a v jednotkách HP)?

47Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg, které bylo zpočátku v klidu, se začne pohybovat rovnoměrně zrychleně a během 3,0 s dosáhne rychlosti o velikosti $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná výsledná urychlující síla během uvedených 3,0 s? Jaký je okamžitý výkon

této síly (b) na konci uvedeného časového intervalu a (c) na konci jeho první poloviny?

48Ú. Síla o velikosti 5,0 N začne působit na těleso o hmotnosti 15 kg, které je zpočátku v klidu. Určete (a) práci, kterou tato síla vykoná během první, druhé a třetí sekundy od počátku pohybu, a (b) okamžitý výkon síly na konci třetí sekundy.

49Ú. Kabina plně naložené nákladní zdviže má hmotnost 1 200 kg. Kabinu je třeba zvednout do výšky 54 m za 3,0 min. Protizávaží má hmotnost pouze 950 kg, takže motor zdviže musí napomáhat k vyvažování kabiny. Jaký musí být průměrný výkon (v jednotkách HP) tažné síly motoru, který působí na kabinu prostřednictvím tažného lana?

50Ú. Síla, kterou je třeba vléci loď, aby se pohybovala rovnoměrně, je úměrná okamžité rychlosti lodi. (Tato síla musí kompenzovat odporovou sílu vody.) Její výkon při rychlosti 4 km/h je 7,5 kW. Jaký okamžitý výkon tažné síly odpovídá rychlosti 12 km/h?

51Ú. Tělísko o hmotnosti 0,30 kg, které může klouzat po vodorovné dokonale hladké podložce, je připevněno k volnému konci pružiny o tuhosti $k = 500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, jejíž druhý konec je pevný. V okamžiku průchodu rovnovážnou polohou (v tomto okamžiku je pružná síla působící na tělísko nulová) má tělísko kinetickou energii 10 J. (a) Jaký je okamžitý výkon pružné síly při průchodu tělíska rovnovážnou polohou? (b) Jaký je okamžitý výkon pružné síly v okamžiku, kdy je pružina stlačena o 0,10 m a tělísko se vzdaluje od rovnovážné polohy?

ODST. 7.8 Kinetická energie při vysokých rychlostech

52C. Elektron urazí dráhu 5,1 cm za 0,25 ns. (a) Vyjádřete jeho rychlost v jednotkách rychlosti světla a (b) jeho kinetickou energii v elektronvoltech. (c) Jak velké chyby v procentech se dopustíme při výpočtu kinetické energie, použijeme-li klasickou formuli namísto relativistické?

53C. Vztah mezi prací a kinetickou energií lze použít pro částice s libovolnou rychlostí. Jakou práci (v elektronvoltech) je třeba vykonat při urychlení elektronu z klidu na rychlost o velikosti (a) $0{,}500c$, (b) $0{,}990c$, (c) $0{,}999c$?

54Ú. Elektron má rychlost o velikosti $0{,}999c$. (a) Jaká je jeho kinetická energie? (b) O kolik procent vzroste jeho kinetická energie, vzroste-li velikost rychlosti o 0,05 %?

PRO POČÍTAČ

55Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (3{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působí na těleso o hmotnosti 2,00 kg, které se posune z počáteční polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{i} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ do koncové polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{f} = -(5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ za dobu 4,00 s. Určete (a) práci síly $\boldsymbol{F}$ v uvedeném časovém intervalu, (b) její průměrný výkon v tomto intervalu a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{d}_\mathrm{f}$.

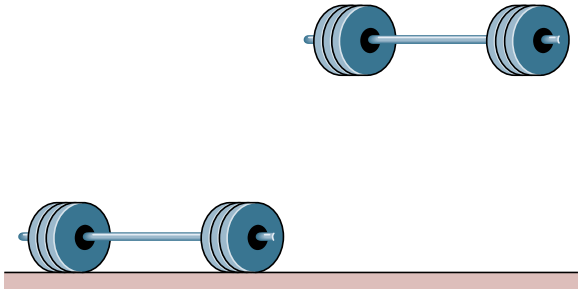
8
Potenciální energie a zákon zachování energie

Jedním z nebezpečných „sportů“ je bungee-jumping (v překladu „zaražené skákání“). Skokan, připoutaný za kotníky ke speciálnímu pružnému lanu, se vrhá dolů z velké výšky, většinou z vysokých mostních konstrukcí. Napínající se lano způsobí zbrzdění střemhlavého letu. Lze vůbec zjistit, jaké největší hloubky skokan dosáhne? Odpověď na tuto otázku je pochopitelně obecně zajímavá, pro skokana však navíc životně důležitá.

8.1 POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V kap. 7 jsme definovali kinetickou energii částice, resp. bodového objektu a přesvědčili jsme se, že její změny bezprostředně souvisejí se silami, jimiž na částici působí její okolí. Změna kinetické energie částice je totiž rovna výsledné práci všech těchto sil. Uvědomili jsme si také, že v případě soustavy částic či tělesa, které nelze považovat za bodový objekt, přispěje ke změně kinetické energie nejen práce sil, jimiž působí na částice soustavy její okolí, ale i práce interakčních sil, jimiž na sebe částice soustavy působí navzájem. V této kapitole se budeme problémem práce těchto *vnitřních sil* zabývat podrobněji a ukážeme, že za jistých podmínek lze pomocí ní definovat nový typ energie *soustavy*, tzv. **potenciální energii** E_p. Vzhledem k její souvislosti s **konfigurací** soustavy (tj. uspořádáním částic) hovoříme někdy o energii konfigurační. Mění-li se konfigurace soustavy, mění se i její potenciální (konfigurační) energie.

Jedním z typů potenciální energie je **tíhová**, případně* **gravitační** potenciální energie, jež souvisí s konfigurací soustavy částic, které na sebe působí tíhovými (gravitačními) silami. Když Vasilij Aleksejev zvedal nad hlavu 562librovou činku, zvyšoval tím vzdálenost mezi činkou a Zemí. Měnil tak konfiguraci soustavy činka + Země a tím i její tíhovou potenciální energii (obr. 8.1).



(*a*) (*b*)

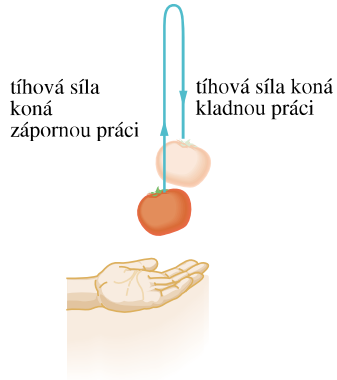
Obr. 8.1 Při zvedání činky nad hlavu zvyšoval V. Aleksejev její vzdálenost od Země a měnil tak konfiguraci soustavy činka + + Země z výchozí konfigurace (a) ve výslednou (b).

Jiným typem potenciální energie je **pružná potenciální energie**, která souvisí se stavem napjatosti (protažení či stlačení) pružných těles, například pružin. Silou, která zde hraje podstatnou roli, je pružná síla. Stlačíme-li nebo napneme-li pružinu, měníme tím vzájemné polohy jejích závitů. Pružná síla působí proti takovým změnám a to vede ke zvýšení pružné potenciální energie pružiny.

* Jemný rozdíl mezi nimi vyložíme v čl. 14.4.

Práce a potenciální energie

Pro úvahy o souvislosti práce vnitřních sil působících v soustavě částic a změnách potenciální energie zvolíme nejprve nejjednodušší možný model, soustavu libovolné těleso + Země. Vraťme se proto k příkladu jablíčka, vrženého svisle vzhůru podle obr. 8.2. Pro jednoduchost zanedbejme otáčení Země kolem Slunce i její rotaci kolem vlastní osy a popisujme vše v takové inerciální soustavě, v níž jsou obě tělesa Země + jablíčko zpočátku v klidu. V kap. 7 jsme konstatovali, že ve fázi výstupu je práce W_g vykonaná tíhovou silou působící na jablíčko záporná a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá.



Obr. 8.2 Rajské jablíčko je vrženo vzhůru. Při výstupu koná tíhová síla zápornou práci a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá. Roste však tíhová potenciální energie soustavy jablíčko + Země. Při sestupu je práce tíhové síly působící na jablíčko kladná, jeho kinetická energie vzhledem k Zemi roste a tíhová potenciální energie soustavy klesá.

Můžeme zřejmě očekávat, že potenciální energie soustavy jablíčko + Země, kterou se snažíme definovat jako energii závislou na vzájemné poloze obou částic, roste právě na úkor kinetické energie.

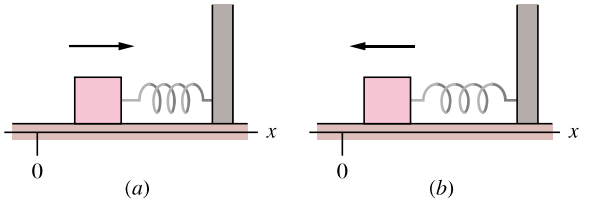
V další fázi pokusu se jablíčko zpomaluje, zastaví se a začíná padat, neboť je k Zemi přitahováno tíhovou silou. Při pádu se energiové poměry obrátí: práce W_g vykonaná tíhovou silou je nyní kladná, kinetická energie jablíčka roste a tíhová potenciální energie soustavy jablíčko+Země klesá. Úvahy z kap. 7 nyní zpřesníme.

Při pohybu tělesa v blízkosti povrchu Země je změna ΔE_p tíhové potenciální energie soustavy těleso + Země definována jako záporně vzatá práce vykonaná interakčními tíhovými silami $\boldsymbol{F}_g$ a $-\boldsymbol{F}_g$. Píšeme

$$\Delta E_p = -W_g. \qquad (8.1)$$

Veličinu E_p nazýváme **tíhovou potenciální energií soustavy** těleso + Země nebo také **potenciální energií tělesa**

v tíhovém poli Země. Při užívání druhého z obou názvů bychom si měli neustále připomínat, že potenciální energie přísluší *soustavě* obou objektů, tělesa i Země, neboť je definována pomocí práce *obou* interakčních sil. Stejný vztah platí pro soustavu kostka+pružina s upevněným koncem (obr. 8.3), přesněji řečeno pro soustavu kostka + Země s přidanou pružnou interakcí, zprostředkovanou pružinou. Jestliže náhle udeříme do kostky směrem vpravo a uvedeme ji tak do pohybu, koná pružná síla působící na kostku během pohybu vpravo zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a na její úkor roste pružná potenciální energie soustavy. (Vzhledem k tomu, že tato potenciální energie je určena výhradně změnou délky pružiny, hovoříme někdy stručně o potenciální energii pružiny.) Kostka se zpomaluje, zastaví se a začne se vlivem pružné síly pohybovat v opačném směru. Směr energiových změn se obrátí, kinetická energie kostky roste na úkor pružné potenciální energie soustavy.



Obr. 8.3 Kostka, která je připevněná k pružině a je zpočátku v klidu v poloze $x = 0$, je uvedena do pohybu směrem vpravo. (a) Při pohybu kostky vpravo (vyznačeno šipkou) koná pružná síla působící na kostku zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a potenciální energie pružiny roste. Kostka se zastaví v okamžiku, kdy je její kinetická energie nulová. (b) Poté se kostka pohybuje zpět směrem k poloze $x = 0$, pružná síla koná kladnou práci, kinetická energie kostky roste za současného poklesu potenciální energie pružiny.

Konzervativní a nekonzervativní síly

Shrňme klíčové prvky diskuse týkající se předchozích dvou situací:

1. *Soustava* se skládá ze dvou nebo více objektů.
2. Sledovaná částice (jablíčko, resp. kostka) a zbytek soustavy na sebe navzájem působí *interakčními silami*.
3. Mění-li se konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_1 a kinetická energie soustavy E_k se mění.
4. Obrátí-li se směr změn konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_2.

Jestliže za všech okolností platí $W_1 = -W_2$, lze pomocí práce interakčních sil definovat potenciální energii soustavy. O interakčních silách hovoříme v takovém případě jako o **silách konzervativních**. Jak se dalo tušit, jsou tíhová i pružná síla silami konzervativními (jinak bychom nemohli mluvit o tíhové či pružné potenciální energii).

Ne všechny síly jsou ovšem konzervativní. Představme si například kostku, jak klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Při pohybu kostky koná dynamická třecí síla zápornou práci. Pohyb kostky se zpomaluje, její kinetická energie klesá. Nakonec se kostka zastaví a její kinetická energie je nulová. Práce třecích sil, jimiž na sebe navzájem působí kostka a podlaha podél styčných ploch, se spotřebovala na zvýšení vnitřní energie soustavy kostka + podlaha (dokladem toho je zahřátí obou těles). Experimentálně je však prokázáno, že opačný proces není možný: kostku nedokážeme uvést do pohybu tím, že ji ochladíme. I když tedy v soustavě kostka + podlaha působí interakční (třecí) síly, které konají práci na úkor kinetické energie soustavy, nelze tuto práci vyjádřit jako změnu nějakého druhu potenciální energie. Vnitřní energie soustavy kostka + podlaha není energií potenciální, síly tření jsou silami **nekonzervativními**.

Působí-li na částici výhradně konzervativní síly, můžeme jinak složitý problém jejího pohybu značně zjednodušit. V následujícím článku formulujeme kritéria, na základě nichž lze rozpoznat konzervativní síly, a vyjasníme si, v čem zmíněné zjednodušení spočívá.

8.2 NEZÁVISLOST PRÁCE KONZERVATIVNÍCH SIL NA TRAJEKTORII

K formulaci základního kritéria umožňujícího rozhodnout, zda daná síla je či není konzervativní, dospějeme postupnými úvahami: předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že na částici pohybující se po *uzavřené trajektorii* působí jediná síla. Počáteční a koncová poloha částice na uzavřené trajektorii splývají, částice vykoná „*okružní cestu*“, která začíná a končí v tomtéž bodě. Síla působící na částici je konzervativní právě tehdy, je-li kinetická energie částice na počátku i na konci tohoto okruhu stejná. Práce, kterou síla vykoná při oběhu částice po uzavřené trajektorii je tedy nulová. Jako jeden z přirozených příkladů takové situace poslouží oběh Země kolem Slunce po prakticky kruhové trajektorii (nebo i komety po protáhlé eliptické trajektorii), který se skutečně děje vlivem jediné síly působící na planetu. Tou je gravitační síla, jíž na planetu působí Slunce. Jiným příkladem je pohyb jablíčka vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli Země.

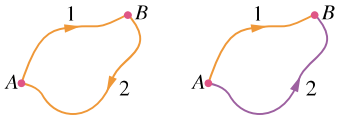
Obecně bychom ovšem měli umět určit práci zkoumané síly $\boldsymbol{F}$ při pohybu částice po *libovolné* trajektorii. Sama síla $\boldsymbol{F}$ však k zajištění takového předem naplánovaného pohybu obvykle nestačí. Musíme proto doplnit další, vhodně zvolenou sílu. Je výhodné, je-li tato síla kolmá k požadované trajektorii, protože potom nekoná práci. Typic-

kým příkladem takové *vazební síly* je tlaková síla vhodně tvarované podložky umístěné v tíhovém poli Země, po níž pouštíme těleso jako po skluzavce.

Předpokládejme tedy, že jsme studovanou sílu $\boldsymbol{F}$ doplnili vhodně zvolenou vazební silou. Sílu $\boldsymbol{F}$ nazveme konzervativní, je-li její příspěvek ke změně kinetické energie při každém oběhu částice po jakékoli uzavřené cestě nulový. Jinými slovy:

Práce vykonaná konzervativní silou působící na částici pohybující se po libovolné uzavřené trajektorii je nulová.

Experimenty ukazují, že tíhová síla toto kritérium splňuje. Příkladem je hra s jablíčkem na obr. 8.2. Jablíčko opouští výchozí bod s rychlostí o velikosti v_0 a kinetickou energií $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla Země jablíčko zpomaluje až do zastavení a jablíčko padá nazpět. V okamžiku návratu do výchozího bodu je velikost jeho rychlosti opět v_0 a kinetická energie má hodnotu $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla tedy během výstupu jablíčka spotřebovala stejně velkou práci ($W_1 < 0$), jako vykonala při jeho zpětném pádu do výchozího bodu ($W_2 > 0$, $W_1 = -W_2$). Tíhová síla, jíž působí Země na jablíčko, vykoná při jeho oběhu po uzavřené trajektorii celkově nulovou práci.



Obr. 8.4 (a) Částice, na niž působí mj. konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, se pohybuje po okruhu z bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se zpět po cestě 2. (b) Částice může přejít z bodu A do bodu B jak po cestě 1, tak po cestě 2.

Obr. 8.4a znázorňuje oběh částice po obecně zvolené uzavřené trajektorii. Jednou ze sil působících na částici je i síla $\boldsymbol{F}$, jejíž konzervativnost studujeme. Částice se pohybuje z počátečního bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se do bodu A po cestě 2. Síla $\boldsymbol{F}$ koná jistou práci při pohybu částice po jakékoli trajektorii. Aniž bychom specifikovali, pro které části vyznačené trajektorie je tato práce kladná, resp. záporná, označme jako $W_{AB,1}$ práci, kterou uvažovaná síla vykonala při pohybu částice z bodu A do bodu B po cestě 1, a jako $W_{BA,2}$ práci vykonanou při pohybu z B do A po cestě 2. Je-li síla konzervativní, pak výsledná práce, kterou vykoná při pohybu částice po celém okruhu, musí být nulová:

$$W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0,$$

tj.

$$W_{AB,1} = -W_{BA,2}. \tag{8.2}$$

Vyjádřeno slovy, práce, kterou síla vykoná při cestě částice z bodu A do bodu B, musí být rovna záporně vzaté práci vykonané při návratu částice.

Uvažujme nyní práci $W_{AB,2}$, kterou síla vykoná při pohybu částice z bodu A do bodu B, avšak po cestě 2 (obr. 8.4b).

Je-li síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní, je tato práce až na znaménko rovna práci $W_{BA,2}$:

$$W_{AB,2} = -W_{BA,2}. \tag{8.3}$$

Dosazením $W_{AB,2}$ namísto $-W_{BA,2}$ do vztahu 8.2 dostaneme

$$W_{AB,1} = W_{AB,2}. \tag{8.4}$$

Tato jednoduchá rovnost představuje velmi silný výsledek, neboť umožňuje zjednodušit obtížné problémy pohybu částic v případě, že na ně působí pouze konzervativní síly. Vyplývá z ní totiž, že práce konzervativní síly při pohybu částice z určitého počátečního bodu A do koncového bodu B nezávisí na tom, po *jaké konkrétní cestě* se tento pohyb děje.

Práce konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu mezi dvěma body je nezávislá na trajektorii částice.

Předpokládejme, že potřebujeme vypočítat práci konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu po určité trajektorii spojující dva zadané body. Může se stát, že přímý výpočet je pro tuto konkrétní trajektorii složitý. Výsledek však lze získat pro jinou trajektorii spojující oba body, avšak zvolenou způsobem, který vede k usnadnění výpočtu. Tuto skutečnost dokumentuje př. 8.1.

PŘÍKLAD 8.1

Obr. 8.5a znázorňuje balíček o hmotnosti 2,0 kg, jak klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B. Celková dráha, kterou po skluzavce urazí, je 2,0 m. Svislá vzdálenost bodů A a B je 0,80 m. Jakou práci vykoná při pohybu balíčku tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Dejme tomu, že známe konkrétní tvar skluzavky $\mathscr{C}$. Počítejme práci tíhové síly podle vztahu (7.31):

$$W = \int_{\mathscr{C}} m\boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{C}} (0\cdot \mathrm{d}x + (-mg)\,\mathrm{d}y) =$$

$$= -mg\int_{y_i}^{y_f} \mathrm{d}y = -mg(y_f - y_i).$$

Integrál tedy na tvaru skluzavky vůbec nezávisí.

Protože je tíhová síla konzervativní, můžeme určit hledanou práci mnohem snadněji. Pro výpočet vybereme jinou

trajektorii spojující body A a B tak, abychom jej zjednodušili. Zvolme trajektorii složenou ze dvou přímých úseků, které jsou v obr. 8.5b vyznačeny přerušovanou čarou. Podél vodorovného úseku je úhel φ konstantní a je roven $90°$. I když neznáme posunutí balíčku ve vodorovném směru, můžeme ze vztahu (7.16) usoudit, že práce tíhové síly po vodorovném úseku je nulová:

$$W_h = mgd\cos 90° = 0.$$

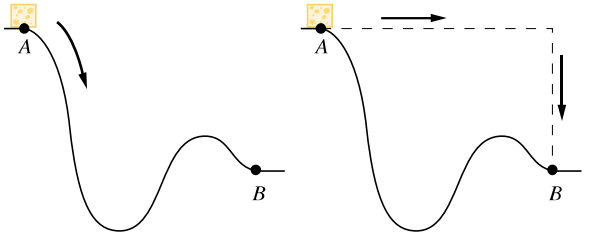
Posunutí balíčku podél svislého úseku je $d = 0{,}80\,\mathrm{m}$. Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{d}$ a $m\boldsymbol{g}$ je opět konstantní a roven $0°$. Podle (7.16) je tedy práce vykonaná tíhovou silou při pohybu balíčku po svislém úseku

$$W_v = mgd\cos 0° = (2{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}80\,\mathrm{m})(1) = \\ = 15{,}7\,\mathrm{J}.$$

Celková práce vykonaná tíhovou silou působící na balíček při jeho pohybu z bodu A do bodu B po cestě vyznačené přerušovanou čarou je tedy

$$W = W_h + W_v = 0 + 15{,}7\,\mathrm{J} \doteq 16\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

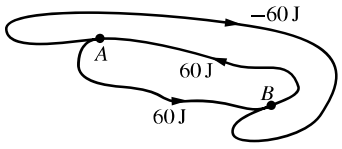
Tato práce je ovšem stejná jako při pohybu balíčku z A do B po skluzavce.



(a) (b)

Obr. 8.5 Příklad 8.1. (a) Balíček klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B. (b) Výpočet práce vykonané při tomto pohybu tíhovou silou je snažší pro případ trajektorie vyznačené přerušovanou čarou než pro skutečnou trajektorii. Výsledky jsou však stejné.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje tři cesty spojující body A a B. Síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici koná při pohybu částice po jednotlivých úsecích práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku vyznačeny. Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní.*



* Dokázali byste rozhodnout i v případě, že by údaj u nejníže zakresleného úseku byl −60 J?

8.3 URČENÍ HODNOT POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Uvažujme nyní bodový objekt (třeba meloun), který náleží do soustavy (řekněme meloun+Země), v níž působí konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Změna potenciální energie soustavy ΔE_p při přechodu z počáteční do koncové konfigurace je rovna záporně vzaté práci, kterou při této změně konfigurace vykonaly interakční síly. Tuto skutečnost jsme již vyjádřili vztahem (8.1) ($\Delta E_p = -W$). Práce, kterou vykonají konzervativní interakční síly uvnitř soustavy přitom závisí pouze na její výchozí a výsledné konfiguraci, nikoli však na způsobu, jakým ke změně konfigurace došlo. V případě částice (meloun), jejíž pohyb neovlivní konfiguraci zbytku soustavy (Země), je konfigurace určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(t)$ této částice vzhledem k vybranému bodu zbytku soustavy (polohový vektor melounu vůči středu Země). Změna potenciální energie soustavy při přesunu částice z polohy $\boldsymbol{r}_i$ do polohy $\boldsymbol{r}_f$ po křivce $\mathscr{C}$ je

$$\Delta E_p = -W = -\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (8.5)$$

Tento integrál však díky konzervativnosti interakčních sil $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ a $-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ nezávisí na tvaru křivky $\mathscr{C}$ a změna potenciální energie souvisí pouze s polohou jejího počátečního a koncového bodu. Znamená to tedy, že každé konfiguraci soustavy lze přisoudit určitou hodnotu potenciální energie E_p? Odpověď je kladná.

Velmi často se setkáváme se zvlášť jednoduchými případy soustav, jejichž konfiguraci lze popsat jedinou skalární veličinou, tzv. **konfigurační proměnnou**. Označme ji pro jednoduchost symbolem x, i když nemusí nutně jít o x-ovou souřadnici. (V případě soustavy meloun+Země jí může být například vzdálenost melounu od povrchu Země, pro soustavu vzniklou připoutáním tělesa k Zemi pružinou může mít x význam prodloužení pružiny, u soustavy planeta + Země pak význam vzdálenosti středů obou těles, apod.) Závisí-li navíc konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ pouze na této jediné proměnné, velmi často se výpočet změny potenciální energie zjednodušuje do tvaru analogického rov. (7.27):

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.6)$$

Tíhová potenciální energie

Uvažujme nyní částici o hmotnosti m pohybující se v blízkosti povrchu Země. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby osa y směřovala svisle vzhůru. Za konfigurační proměnnou soustavy částice + Země můžeme zvolit y-ovou souřadnici částice. Při pohybu částice z bodu (x_i, y_i, z_i) do

bodu (x_f, y_f, z_f) závisí totiž práce interakčních sil $m\boldsymbol{g}$ a $-m\boldsymbol{g}$ pouze na hodnotách y_i a y_f (př. 8.1). Odpovídající změnu tíhové potenciální energie soustavy lze tedy určit užitím vztahu (8.6), v němž zaměníme x za y a dosadíme $F = -mg$. Dostáváme

$$\Delta E_p = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\,dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f},$$

a tedy

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \qquad (8.7)$$

Fyzikální význam má pouze změna ΔE_p tíhové potenciální energie (či potenciální energie jiného typu). Abychom však zjednodušili výpočet i další diskusi, můžeme požadovat, aby s každou konfigurací soustavy byla spojena určitá hodnota potenciální energie. Řekněme, že v případě soustavy částice + Země označíme jako E_p hodnotu tíhové potenciální energie příslušnou té konfiguraci, při které je částice v poloze o souřadnici y. Přepišme vztah (8.7) do tvaru

$$E_p - E_{p,i} = mg(y - y_i). \qquad (8.8)$$

Hodnotu $E_{p,i}$ pak chápeme jako tíhovou potenciální energii soustavy v tzv. **referenční konfiguraci**, při níž se částice nachází v **referenčním bodě** o y-ové souřadnici y_i. Obvykle klademe $E_{p,i} = 0$ pro $y_i = 0$. Podle vztahu (8.8) pak je

$$E_p - 0 = mg(y - 0),$$

a tedy

$$E_p(y) = mgy \quad \text{(tíhová potenciální energie).} \qquad (8.9)$$

Ze vztahu (8.9) je vidět, že tíhová potenciální energie soustavy částice+Země závisí pouze na svislé poloze y částice vzhledem k referenční poloze o souřadnici $y = 0$ (tj. na výšce částice nad referenčním bodem).

Pružná potenciální energie

Zabývejme se nyní soustavou kostka + (pružina) + Země, znázorněnou na obr. 8.3. Tuhost pružiny je k. Za konfigurační proměnnou soustavy zvolíme souřadnici x. Při pohybu kostky z bodu x_i do bodu x_f vykonají interakční pružné síly jistou práci. Odpovídající změna potenciální energie soustavy je opět dána vztahem (8.6), do kterého však tentokrát dosadíme $F = -kx$,

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \tfrac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f},$$

tj.

$$\Delta E_p = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2. \qquad (8.10)$$

Abychom mohli hovořit o potenciální energii E_p v obecné konfiguraci soustavy určené polohou kostky x, zvolme jako referenční bod rovnovážnou polohu kostky $x_i = 0$ a přisuďme jí nulovou potenciální energii $E_{p,i} = 0$. Ze vztahu (8.10) pak dostaneme

$$E_p - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

odkud

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(pružná potenciální energie).} \qquad (8.11)$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.1: *Užití pojmu „potenciální energie“*

Potenciální energie je spojena se soustavou jako celkem. Za jistých okolností ji však můžeme spojovat s některou z částí soustavy. Můžeme třeba říci: „Jablko na stromě má tíhovou potenciální energii 30 J.“ Taková tvrzení jsou často přijatelná (například u soustav tvořených dvěma částicemi s velmi rozdílnými hmotnostmi). Musíme však mít stále na paměti, že potenciální energie je charakteristikou celé soustavy, v našem případě soustavy jablko+Země. Dále nesmíme zapomínat, že hovořit o potenciální energii objektu či soustavy (v příkladu s jablkem na stromě hodnota 30 J) má smysl *jen tehdy*, je-li zvolené referenční konfiguraci přisouzena referenční hodnota potenciální energie.

PŘÍKLAD 8.2

Lenochod o hmotnosti 2,0 kg se drží větve, která je 5,0 m vysoko nad zemí (obr. 8.6).

(a) Jaká je tíhová potenciální energie E_p soustavy lenochod+Země, volíme-li za referenční bod místo o souřadnici $y = 0$, ležící (1) na povrchu Země, (2) na podlaze balkonu, jejíž úroveň je ve výšce 3,0 m nad zemí, (3) na větvi, (4) ve výšce 1,0 m nad větví? Bodu $y = 0$ přisuzujeme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie.

ŘEŠENÍ: Pomocí vztahu (8.9) vypočteme E_p pro každou volbu polohy počátku souřadnicové osy y, $y = 0$. V případě (1) je lenochod v poloze $y = 5{,}0$ m a platí

$$E_p = mgy = (2{,}0\,\text{kg})\cdot(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(5{,}0\,\text{m}) = \\ = 98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V dalších případech je

(2) $E_p = mgy = mg(2{,}0\,\text{m}) = 39\,\text{J}$,

(3) $E_p = mgy = mg(0) = 0\,\text{J}$,

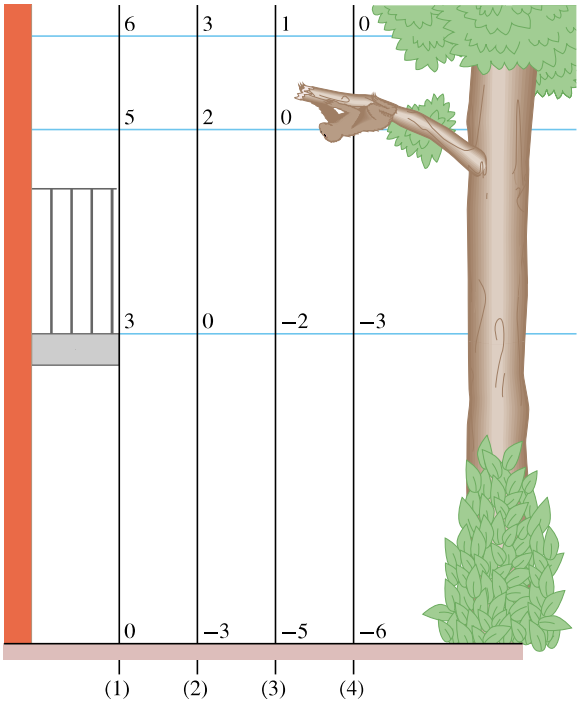
(4) $E_p = mgy = mg(-1{,}0\,\text{m}) = -19{,}6\,\text{J} \doteq \\ \doteq -20\,\text{J}.$ (Odpověď)

(b) Lenochod spadne na zem. Pro každou z předchozích možností volby referenčního bodu určete změnu potenciální energie soustavy lenochod + Země, ke které při pádu lenochoda došlo.

ŘEŠENÍ: Ve všech čtyřech situacích je $\Delta y = -5{,}0\,\mathrm{m}$, takže pro každou z nich podle (8.7) platí

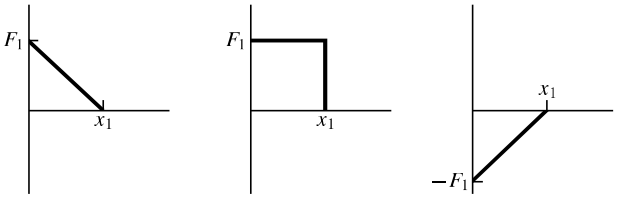
$$\Delta E_p = mg\Delta y = (2{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(-5{,}0\,\mathrm{m}) = \\ = -98\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

I když hodnota E_p závisí na volbě polohy počátku soustavy souřadnic, je *změna* potenciální energie na ní nezávislá. Připomeňme, že fyzikální význam má pouze změna ΔE_p potenciální energie, nikoli samotná hodnota E_p, která je závislá na libovůli při volbě referenční konfigurace.



Obr. 8.6 Příklad 8.2. Čtyři možnosti volby referenčního bodu $y = 0$. Osa y je ve všech případech cejchována v metrech.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po ose x z bodu $x = 0$ do bodu x_1. Působí na ni konzervativní síla, která má směr osy x. Obrázek ukazuje tři případy závislosti této síly na souřadnici x. Uspořádejte tyto situace sestupně podle odpovídající změny potenciální energie.



8.4 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE

Mechanická energie E soustavy je definována jako součet její potenciální energie E_p a celkové kinetické energie E_k všech jejích objektů:

$$E = E_p + E_k \qquad \text{(mechanická energie).} \qquad (8.12)$$

V tomto článku se budeme zabývat otázkou, co se děje s mechanickou energií soustavy, ve které působí výhradně konzervativní interakční síly. (Teprve později budeme uvažovat o vlivu sil nekonzervativních.)

Uvažujme nyní soustavu částic, které neinteragují s okolními objekty (tzv. **izolovaná soustava**). Práce W, kterou konají konzervativní interakční síly, jimiž na sebe navzájem působí částice soustavy, určuje změnu kinetické energie soustavy. Současně ji však lze vyjádřit jako záporně vzatou změnu energie potenciální. Kinetická energie soustavy se tedy mění na úkor její energie potenciální. Skutečně, podle vztahu (7.4) je změna kinetické energie

$$\Delta E_k = W \qquad (8.13)$$

a pro změnu potenciální energie platí podle (8.1)

$$\Delta E_p = -W. \qquad (8.14)$$

Kombinací posledních dvou vztahů dostáváme

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \qquad (8.15)$$

Jinými slovy, vzrůst jedné z obou forem energie je přesně vyvážen poklesem druhé.

Vztah (8.15) lze přepsat takto:

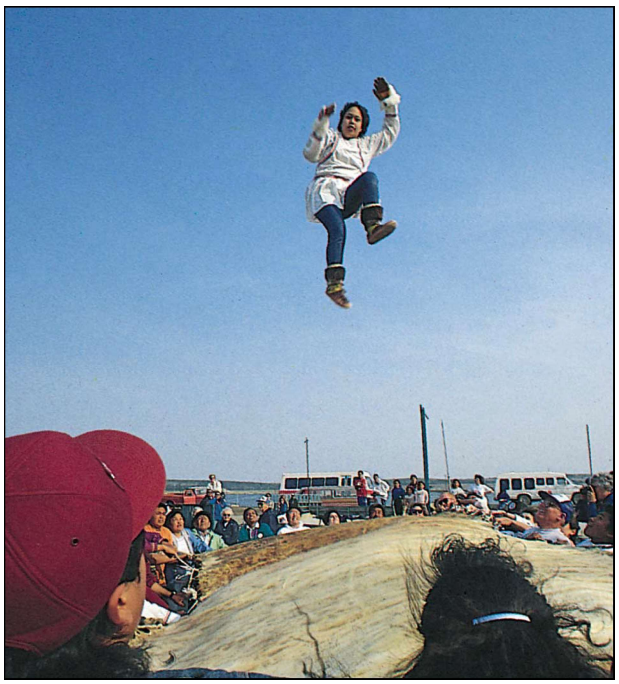
$$E_{k,2} - E_{k,1} = -(E_{p,2} - E_{p,1}), \qquad (8.16)$$

kde se indexy 1 a 2 vztahují ke dvěma různým okamžikům, tj. ke dvěma různým konfiguracím soustavy. Úpravou (8.16) dostaneme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1} \qquad \text{(zákon zachování mechanické energie).} \qquad (8.17)$$

Levá a pravá strana rovnosti (8.17) představují mechanickou energii v různých okamžicích, a tedy ve dvou různých konfiguracích soustavy. Vztah (8.17) vyjadřuje rovnost obou hodnot:

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, mění se její kinetická a potenciální energie tak, že jejich součet, tj. mechanická energie soustavy, je stálý.



Kdysi se eskymáci z Aljašky nechali vyhazovat do vzduchu napnutou plachtou, aby po široké pláni dohlédli co nejdále. Dnes se to dělá jen pro zábavu. Všimněme si však, co se při takovém pohybu (viz fotografie) děje z fyzikálního hlediska. Při vzestupu klesá kinetická energie dítěte vzhledem k Zemi a roste tíhová potenciální energie soustavy dítě + Země. Maximální výška výstupu odpovídá situaci, kdy je kinetická energie nulová. Během pádu se sled energiových změn obrací: kinetická energie roste na úkor energie potenciální.

Tento výsledek vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie**. (Z toho vidíme, jak vznikl termín „konzervativní“ síla: uchovává (lat. conservare) energii.) Pomocí vztahu (8.15) můžeme zákon zachování mechanické energie ještě přepsat ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = 0. \qquad (8.18)$$

Tento zákon umožňuje řešit problémy, jejichž řešení pomocí samotných Newtonových zákonů by bylo obtížné:

Zachovává-li se mechanická energie soustavy, můžeme porovnávat součet celkové kinetické a potenciální energie v různých okamžicích, *aniž bychom uvažovali o pohybu soustavy v intervalu mezi těmito okamžiky* a *počítali práci interakčních sil částic soustavy.*

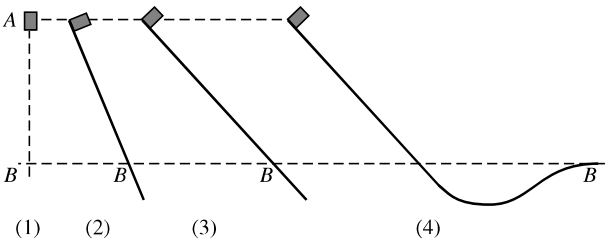
Obr. 8.7 znázorňuje případ, kdy je vhodné zákon zachování mechanické energie použít: kmity kyvadla v tíhovém poli Země. Při kmitavém pohybu kyvadla se mění kinetická i potenciální energie soustavy kyvadlo+Země tak, že součet $E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}$ je konstantní. Známe-li tíhovou potenciální energii soustavy v konfiguraci, kdy je kulička kyvadla v nejvyšším bodě své trajektorie (obr. 8.7c, g), můžeme určit kinetickou energii kuličky (vzhledem k Zemi) v nejnižším bodě (obr. 8.7a, e) užitím vztahu (8.17).

Zvolme například konfiguraci, při níž je kulička v nejnižší poloze, za referenční a přisuďme jí potenciální energii $E_{\mathrm{p},2} = 0$. Předpokládejme, že při této volbě referenční konfigurace odpovídá nejvyšší poloze kuličky potenciální energie $E_{\mathrm{p},1} = 20\,\mathrm{J}$. Kulička má v nejvyšším bodě nulovou rychlost, takže její kinetická energie je $E_{\mathrm{k},1} = 0$. Dosazením těchto hodnot do vztahu (8.17) zjistíme kinetickou energii $E_{\mathrm{k},2}$ v nejnižším bodě:

$$E_{\mathrm{k},2} + 0 = 0 + 20\,\mathrm{J}, \qquad \text{tj.} \qquad E_{\mathrm{k},2} = 20\,\mathrm{J}.$$

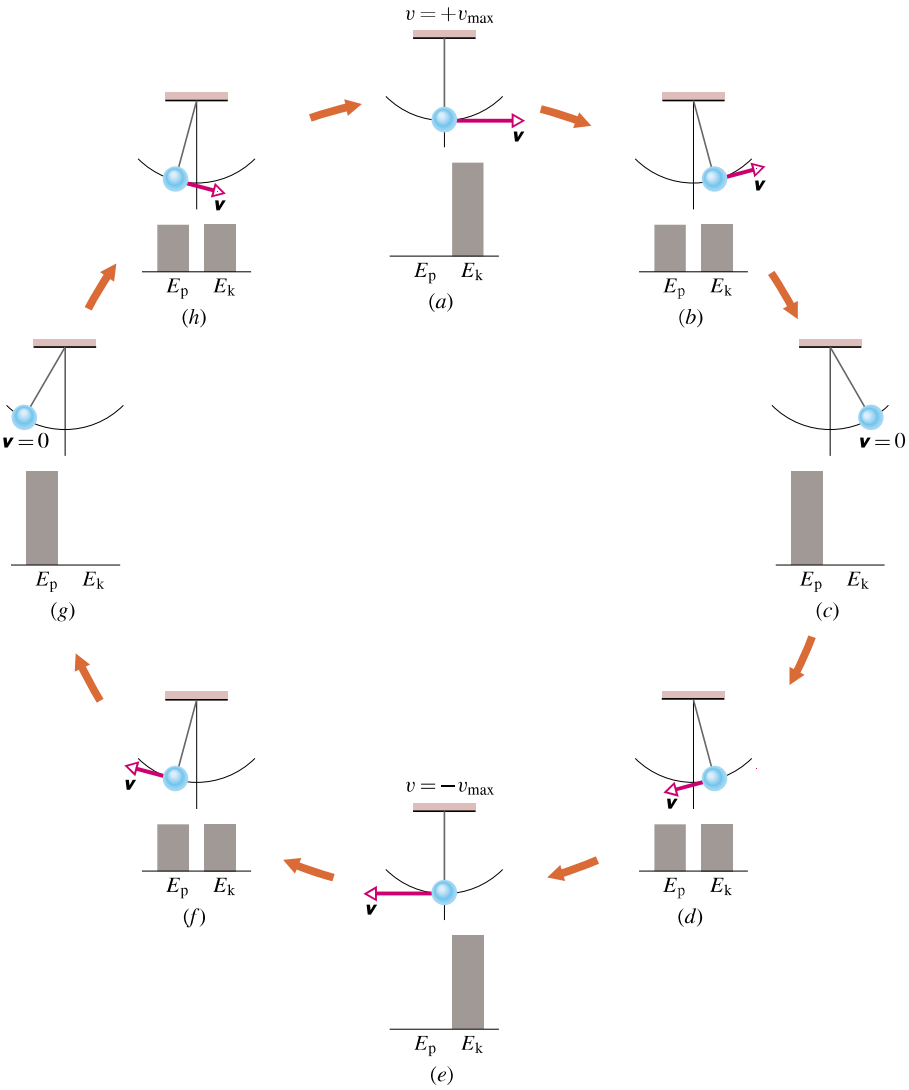
Všimněte si, že tento výsledek jsme získali, aniž bychom se zajímali o pohyb kyvadla mezi nejnižším a nejvyšším bodem (např. obr. 8.7d) a aniž bychom museli počítat práci sil působících na tělesa soustavy.

KONTROLA 3: Následující obrázek ukazuje čtyři situace. V prvé z nich kostka, která byla zpočátku v klidu, volně padá a v ostatních třech sjíždí po dokonale hladké skluzavce. Uspořádejte tyto situace sestupně podle (a) hodnoty kinetické energie kostky v bodě B a podle (b) velikosti rychlosti kostky v bodě B.



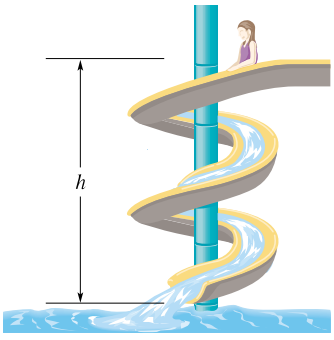
PŘÍKLAD 8.3

Na obr. 8.8 se dítě spouští z vrcholu vodní skluzavky. Dítě je zpočátku v klidu a nejvyšší bod skluzavky je ve výšce $h = 8{,}5\,\mathrm{m}$ nad jejím ústím do bazénu. Předpokládejme, že



Obr. 8.7 Kyvadlo, jehož hmotnost je soustředěna v kuličce upevněné na konci vlákna, koná kmitavý pohyb. Obrázek zachycuje jednu periodu tohoto pohybu. Během periody se hodnoty kinetické i potenciální energie soustavy kyvadlo + Země spojitě mění, ale její celková mechanická energie zůstává zachována. Pro názornost můžeme použít i takovou představu, že se celková energie E spojitě „přelévá“ z jedné formy v druhou (potenciální v kinetickou a naopak). Ve stavech (a) a (e) je celková energie dána pouze energií kinetickou. Kulička je v nejnižším bodě a má největší rychlost. Ve stavech (c) a (g) je naopak celková energie rovna energii potenciální, neboť kulička je v nejvyšším bodě a její rychlost je v tom okamžiku nulová. V případech (b), (d), (f) a (h) tvoří jak kinetická, tak potenciální energie právě polovinu energie celkové. Pokud by se při kmitech kyvadla uplatňovaly třecí síly v závěsu nebo odporová síla vzduchu, energie E by se nezachovávala a kyvadlo by se nakonec zastavilo.

skluzavka je dokonale hladká díky proudu vody, který po ní stéká. Určete, s jakou rychlostí dítě vklouzne do bazénu.



Obr. 8.8 Příklad 8.3. Dítě sjíždí po vodní skluzavce z výšky h.

ŘEŠENÍ: Pokud bychom chtěli tuto úlohu řešit pouze na základě znalostí z kap. 2 až kap. 6, museli bychom obecně pracovat s neznámým vyjádřením tvaru skluzavky a k výsledku, který je na tvaru skluzavky nezávislý, bychom nakonec dospěli po zbytečných výpočtech. Užitím závěrů kap. 7 a kap. 8 ji však vyřešíme snadno. Nejprve si uvědomme, že zanedbáváme třecí sílu. Jedinou silou, kterou na dítě působí skluzavka, je tedy normálová (tlaková) síla, která je neustále kolmá k povrchu skluzavky. Dítě se ovšem pohybuje *podél* skluzavky. Normálová síla je proto stále kolmá k vektoru posunutí a nekoná práci.

Při pohybu dítěte po skluzavce konají práci pouze tíhové síly, které jsou konzervativní. Mechanická energie soustavy dítě + Země se tedy při jízdě dítěte po skluzavce zachovává.

Její hodnota E_d v okamžiku, kdy je dítě v dolním bodě

skluzavky, je stejná jako hodnota E_v v okamžiku, kdy je na vrcholu, tj. $E_d = E_v$. Vyjádříme-li tuto skutečnost pomocí vztahu (8.17), dostaneme

$$E_{k,d} + E_{p,d} = E_{k,v} + E_{p,v},$$

tj.

$$\tfrac{1}{2}mv_d^2 + mgy_d = \tfrac{1}{2}mv_v^2 + mgy_v.$$

Po vydělení této rovnice hmotností m a úpravě máme

$$v_d^2 = v_v^2 + 2g(y_v - y_d)$$

a po dosazení $v_v = 0$ a $y_v - y_d = h$ dostaneme

$$v_d = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(8{,}5\ \mathrm{m})} = \\ = 13\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejně velké rychlosti by dítě dosáhlo, kdyby z výšky 8,5 m spadlo. Na skutečné skluzavce se však přece jen nějaké třecí síly uplatňují, takže rychlost dítěte nebude tak velká.

Již jsme se zmínili, že řešení tohoto problému pomocí Newtonových zákonů by sice bylo možné, ale zbytečně zdlouhavé. Užitím zákona zachování mechanické energie jsme je získali velmi jednoduše. Kdybychom se však zajímali o to, za jak dlouho dítě po skluzavce sjede, pak by nás „energiová metoda“ k výsledku nepřivedla. Abychom dobu jízdy zjistili, museli bychom znát tvar skluzavky a provést poměrně složitý výpočet.

PŘÍKLAD 8.4

Pružina nabité vzduchovky je oproti výchozímu nenapjatému stavu stlačena o délku $d = 3{,}2\ \mathrm{cm}$. Náboj má hmotnost $m = 12\ \mathrm{g}$. S jakou rychlostí opustí náboj po výstřelu hlaveň? Tuhost pružiny je $k = 7{,}5\ \mathrm{N\cdot cm^{-1}}$. Předpokládejme, že hlaveň je při výstřelu vodorovná, tření při pohybu náboje je zanedbatelné a že po výstřelu zůstane pružina v nenapjatém stavu.

ŘEŠENÍ: Označme E_i mechanickou energii soustavy náboj + puška v počátečním stavu (před výstřelem) a E_f její mechanickou energii v koncovém stavu (poté, co náboj opustil hlaveň). V počátečním stavu je mechanická energie dána pouze potenciální energií stlačené pružiny $E_{p,i} = \frac{1}{2}kd^2$, v koncovém stavu pak pouze kinetickou energií náboje $E_{k,f} = \frac{1}{2}mv^2$. Poněvadž se mechanická energie soustavy zachovává, platí

$$E_i = E_f,$$
$$E_{p,i} + E_{k,i} = E_{p,f} + E_{k,f},$$

a tedy

$$\tfrac{1}{2}kd^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

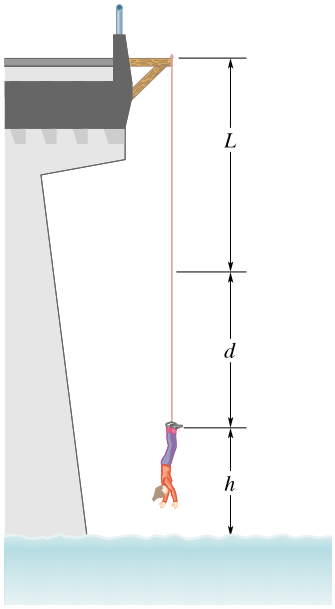
Řešením této rovnice vzhledem k neznámé v dostáváme

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0{,}032\ \mathrm{m})\sqrt{\frac{(750\ \mathrm{N\cdot m^{-1}})}{(12{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg})}} = \\ = 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 8.5

Vyznavač bungee-jumpingu se chystá ke skoku z mostu vysokého 45,0 m. Jeho hmotnost je $m = 61{,}0\ \mathrm{kg}$ a pružné lano, které hodlá použít, má v nenapjatém stavu délku $L = 25{,}0\ \mathrm{m}$. Předpokládejme, že se lano řídí Hookovým zákonem* a jeho tuhost je $160\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Tělo skokana považujeme při pohybu za bodový objekt.

(a) Jaká je výška chodidel skokana nad hladinou řeky, tekoucí pod mostem, v okamžiku, kdy se jeho let zastaví v dolním bodě obratu?



Obr. 8.9 Příklad 8.5. Skokan bungee-jumpingu v dolním bodě obratu.

ŘEŠENÍ: V souhlasu s obr. 8.9 označme d prodloužení lana v okamžiku dosažení bodu obratu. Změna tíhové potenciální energie soustavy skokan + Země vzhledem k počátečnímu stavu, kdy skokan stál na mostě, je

$$\Delta E_{p,g} = mg\Delta y = -mg(L + d).$$

Změna pružné potenciální energie je

$$\Delta E_{p,p} = \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Počátečnímu stavu i bodu obratu přísluší nulová kinetická energie.

* Ve skutečnosti se guma chová mnohem složitěji. Nesvěřujte svůj život první aproximaci.

Užitím (8.18) dostáváme pro soustavu skokan + Země vztahy

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p,p}} + \Delta E_{\mathrm{p,g}} &= 0,\\ 0 + \tfrac{1}{2}kd^2 - mg(L+d) &= 0,\\ \tfrac{1}{2}kd^2 - mgL - mgd &= 0.\end{aligned}$$

Dosazením zadaných údajů pak získáme kvadratickou rovnici

$$\tfrac{1}{2}(160\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})d^2 - (61{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(25{,}0\,\mathrm{m}) - \\ - (61{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})d = 0.$$

Jejím řešením dostaneme

$$d = 17{,}9\,\mathrm{m}.$$

(Druhý kořen rovnice je záporný a pro naši úlohu nemá význam.) Chodidla skokana tedy budou v hloubce $(L+d) = 42{,}9\,\mathrm{m}$ pod úrovní mostu, a tedy

$$h = 45{,}0\,\mathrm{m} - 42{,}9\,\mathrm{m} = 2{,}1\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velmi vysoký skokan by se tedy mohl i namočit.*

(b) Jaká je výsledná síla působící na skokana v nejnižším bodě? (Je nulová?)

ŘEŠENÍ: Na skokana působí směrem dolů tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ o velikosti $mg = 597{,}8\,\mathrm{N}$ a směrem vzhůru pružná síla, jejíž velikost v bodě obratu je podle Hookova zákona rovna

$$F = kd = (160\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})(17{,}9\,\mathrm{m}) = 2\,864\,\mathrm{N}.$$

Celková síla má velikost

$$2\,864\,\mathrm{N} - 597{,}8\,\mathrm{N} \doteq 2\,270\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná síla, která působí na skokana v nejnižším bodě jeho trajektorie, je tedy v porovnání s jeho váhou téměř čtyřnásobná. Umíte si jistě představit, jak to s ním „trhne“ vzhůru.

* V případě, že výšku skokana l nepovažujeme za zanedbatelnou, měli bychom výpočet zpřesnit. Hmotný bod, kterým skokana nahrazujeme při použití zákona zachování mechanické energie, umístíme do jeho těžiště, které leží zhruba v polovině jeho výšky. Za předpokladu, že před seskokem odvážlivec na mostě stojí a v bodě obratu naopak visí na laně podle obr. 8.9, je $\Delta y = -(L+d+l)$. V kvadratické rovnici pro neznámou veličinu d je pak třeba zaměnit člen $-mgL$ za $-mg(L+l)$. Proveďte tuto záměnu a rovnici vyřešte. Vezměte v úvahu přesnost zadání výchozích hodnot a posuďte, má-li toto zpřesnění vliv na výsledek.

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.2: *Zachování mechanické energie*

Při řešení úloh pomocí zákona zachování mechanické energie si vždy položme následující otázky:

Jak je definována soustava, na kterou hodláme zákon zachování mechanické energie aplikovat? Je třeba, abychom uměli vymezit soustavu a její okolí. Představme si vždy uzavřenou plochu zakreslenou tak, že všechno, co je uvnitř, patří do naší soustavy, zatímco všechno ostatní náleží jejímu okolí. V př. 8.3 tvoří soustavu *dítě + Země*. V př. 8.4 je to dvojice *náboj + puška*. V př. 8.5 pak *skokan + (lano) + Země*.

Jsou ve hře třecí nebo odporové síly? Působí-li uvnitř soustavy třecí nebo odporové síly, její mechanická energie se nezachovává.

Platí pro naši soustavu zákon zachování mechanické energie? Zákon zachování mechanické energie platí především pro *izolované soustavy*, tj. v situacích, kdy na objekty soustavy nepůsobí žádné *vnější síly* (částice soustavy neinteragují s jejím okolím). Pro soustavy neizolované jej lze použít ve speciálních případech, kdy vnější síly nekonají práci. Kdybychom třeba v př. 8.4 zvolili jako zkoumanou soustavu samotný náboj, nebylo by možné zákona zachování mechanické energie použít. Na náboj totiž působí pružná síla, která koná práci. Jeho mechanická energie, která je shodná s jeho energií kinetickou, se nezachovává.

Jaký je počáteční a koncový stav soustavy? Stav soustavy se s časem mění. Z jistého počátečního stavu (či konfigurace) dospěje soustava do stavu koncového. Při aplikaci zákona zachování mechanické energie obvykle využíváme skutečnosti, že mechanická energie má v obou těchto stavech stejnou hodnotu E. Je však třeba si předem ujasnit, jak jsou tyto dva stavy definovány.

8.5 INTERPRETACE KŘIVKY POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Vraťme se k problematice izolované soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Mechanická energie takové soustavy, daná součtem její celkové kinetické energie a všech typů její energie potenciální, se zachovává. Uvažujme velmi speciální situaci, kdy hmotnost jedné z částic soustavy je velmi malá ve srovnání s celkovou hmotností ostatních objektů, jako např. u soustavy typu jablko+Země. V tomto přiblížení (čl. 8.1) je změna kinetické energie soustavy dána změnou kinetické energie uvažované částice, tj. prací konzervativních sil působících na částici. Předpokládejme dále, že pohyb částice je vázán na osu x. V uvedeném přiblížení lze vyjádřit potenciální energii soustavy $E_{\mathrm{p}}(x)$ jako funkci polohy částice x, která tak hraje roli konfigurační proměnné. Ukazuje se, že celou řadu informací

o pohybu částice lze získat již z průběhu křivky $E_p(x)$. Než se však do takové diskuse pustíme, potřebujeme ještě další vztahy.

Analytické vyjádření síly

Vztah (8.6) umožňuje vyjádřit potenciální energii v jednorozměrné situaci, známe-li sílu $F(x)$. Uvažujme však opačný problém. Předpokládejme, že známe průběh potenciální energie $E_p(x)$ a potřebujeme vyjádřit sílu.

Síla $F(x)$, působící na částici pohybující se podél osy x, vykoná při jejím posunutí o Δx práci $W = F(x)\Delta x$. Podle rov. (8.1) je

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x.$$

Vyjádříme $F(x)$ a provedeme limitní přechod $\Delta x \to 0$. Dostaneme

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \qquad \text{(jednorozměrný pohyb).} \qquad (8.19)$$

Tento výsledek můžeme ověřit například pro pružnou potenciální energii $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Podle očekávání dostaneme ze vztahu (8.19) výraz pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, tj. Hookův zákon. Podobně pro tíhovou potenciální energii $E_p(x) = mgx$ částice o hmotnosti m ve výšce x nad zemským povrchem dostaneme z (8.19) tíhovou sílu $F(x) = -mg$ působící na částici.

Křivka potenciální energie

Na obr. 8.10a vidíme graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ na poloze částice, která koná jednorozměrný pohyb, při kterém na ni působí konzervativní síla $F(x)$ (resp. konzervativní síly, jejichž výslednice je $F(x)$). Průběh síly $F(x)$ můžeme snadno určit graficky tak, že budeme zjišťovat směrnici křivky $E_p(x)$ v jejích různých bodech (vztah (8.19)). Na obr. 8.10b je graf funkce $F(x)$ získaný právě takovým způsobem.

Body obratu

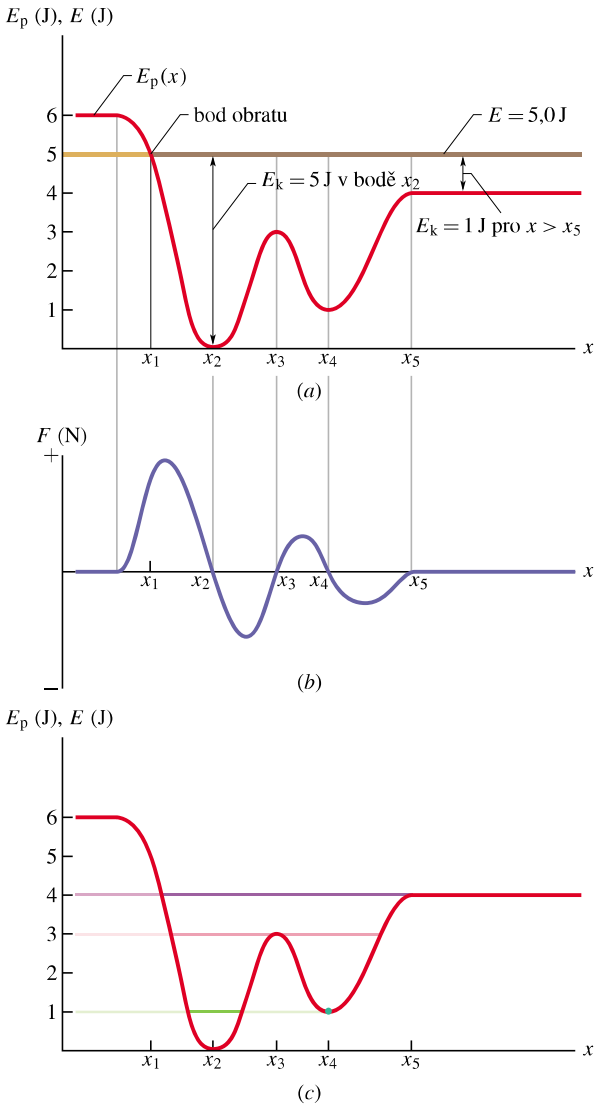
Nepůsobí-li v izolované soustavě nekonzervativní síly, její mechanická energie E se zachovává:

$$E_p(x) + E_k(x) = E. \qquad (8.20)$$

Funkce $E_k(x)$ popisuje *závislost kinetické energie* částice na její poloze x. Vztah (8.20) můžeme přepsat do tvaru

$$E_k(x) = E - E_p(x). \qquad (8.21)$$

Předpokládejme, že hodnota E (mějme na paměti, že je konstantní) činí 5,0 J. Tato hodnota je vyznačena vodorovnou přímkou, která prochází značkou 5,0 J na energiové ose (obr. 8.10a).



Obr. 8.10 (a) Graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ soustavy na poloze částice, která se pohybuje po ose x. Částice náleží do soustavy. Nepůsobí-li v soustavě třecí síly, zachovává se její mechanická energie. (b) Graf závislosti síly $F(x)$, působící na částici, na její poloze. Graf je konstruován z hodnot směrnic tečen ke křivce $E_p(x)$ v různých bodech. (c) Graf $E_p(x)$ s vyznačením tří různých hodnot energií E.

Rovnice (8.21) dává návod, jak určit kinetickou energii částice v poloze x: na křivce $E_p(x)$ najdeme hodnotu E_p odpovídající této poloze a odečteme ji od E. Je-li částice např.

v kterémkoli bodě vpravo od x_5, je $E_k = 1{,}0\,\mathrm{J}$. Nejvyšší hodnoty (5 J) nabývá E_k, je-li částice v bodě x_2 a nejnižší (0 J), je-li v bodě x_1.

Protože kinetická energie nemůže být záporná (hodnota v^2 je vždy kladná), nemůže se částice nikdy ocitnout vlevo od bodu x_1 (v této oblasti poloh by byl rozdíl $E - E_p$ záporný). Blíží-li se částice k bodu x_1, její kinetická energie klesá, částice se zpomaluje. Při $E_k = 0$ je její rychlost nulová.

Všimněme si, že v okamžiku, kdy částice dosáhne bodu x_1, působí na ni síla, daná vztahem (8.19). Tato síla míří ve směru kladné osy x (směrnice $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ je záporná). To znamená, že částice nezůstane v klidu v bodě x_1, ale začne se pohybovat doprava, tj. opačným směrem. Polohu x_1 proto nazveme **bodem obratu**, tj. místem, kde kinetická energie částice nabývá nulové hodnoty a směr jejího pohybu se obrací.

Vpravo od bodu x_1 již žádný bod obratu není. Pohyb částice směrem vpravo bude pokračovat donekonečna.

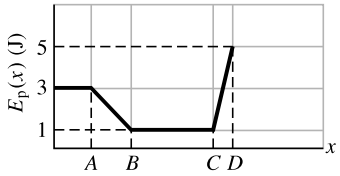
Rovnovážné konfigurace

V grafu potenciální energie $E_p(x)$ na obr. 8.10c jsou vyznačeny tři další hodnoty mechanické energie E. Všimněme si podrobněji jednotlivých situací, abychom zjistili, jaký vliv má volba hodnoty E na pohyb částice. Je-li $E = 4{,}0\,\mathrm{J}$ (fialová čára), posune se bod obratu z polohy x_1 do nové polohy, která leží mezi x_1 a x_2. Dále vidíme, že v každém bodě ležícím napravo od x_5 je potenciální energie konstantní a její hodnota splývá s hodnotou energie mechanické. Kinetická energie částice je nulová, stejně jako síla $\boldsymbol{F}(x)$. Částice setrvává v klidu. V takovém případě hovoříme o **volné** (neboli indiferentní) **rovnovážné poloze**. Příkladem je kulička ležící na vodorovném stole.

Pro $E = 3{,}0\,\mathrm{J}$ (růžová čára) existují dva body obratu. Jeden z nich leží mezi x_1 a x_2, druhý mezi x_4 a x_5. V bodě x_3 je navíc $E_k = 0$. Nachází-li se částice právě v tomto bodě, je $F(x) = 0$ a částice setrvává v klidu. Při sebemenším vysunutí částice z této polohy na kteroukoli stranu (například působením náhodných vlivů) však vznikne nenulová síla $F(x)$ ve směru původní náhodné výchylky a částice se začne pohybovat. Takovou polohu proto nazýváme **vratkou** (neboli labilní) **rovnovážnou polohou**. Ve vratké rovnovážné poloze je například malá kulička položená na vrch velké kulečníkové koule.

Nakonec uvažujme chování částice při hodnotě $E = 1{,}0\,\mathrm{J}$ (zelená čára). Vložíme-li částici do polohy x_4, částice v ní setrvá a sama od sebe se z ní nemůže vychýlit v žádném směru. Všem bodům v blízkém okolí x_4 by totiž odpovídala záporná kinetická energie. Vysuneme-li částici z polohy x_4 vlevo či vpravo, začne na ni působit vratná síla a částice se bude pohybovat zpět k bodu x_4. Hovoříme o tzv. **stálé** (neboli stabilní) **rovnovážné poloze**. Příkladem může být kulička na dně duté polokoule. Částice na dně *potenciálové jámy* tvaru „poháru“ s minimem v bodě x_2 se bude pohybovat v rozmezí bodů obratu ležících někde mezi x_2 a x_1, resp. x_2 a x_3.

KONTROLA 4: Na obrázku je křivka potenciální energie $E_p(x)$ pro případ jednorozměrného pohybu částice. (a) Uspořádejte úseky AB, BC a CD sestupně podle velikosti síly působící na částici. (b) Jaký směr má síla působící na částici v úseku AB?



Mechanická energie dvoučásticové soustavy

V tomto odstavci se přesnějšími úvahami vracíme k problematice zákona zachování mechanické energie dvoučásticových izolovaných soustav s konzervativní interakcí a k podrobnější diskusi o oprávněnosti přiblížení, jichž jsme používali u soustav typu těleso + Země, charakterizovaných velmi malou hodnotou poměru hmotností m/M.

Uvažujme tedy libovolnou izolovanou soustavu složenou ze dvou těles o hmotnostech m a M, která na sebe navzájem působí interakčními (vnitřními, interními) silami jakékoli povahy. Nechť $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ je síla, jíž působí těleso M na m a $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ označuje působení tělesa m na M. Při změnách konfigurace soustavy konají obě tyto síly práci. Práce síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ je podle vztahu (7.4) rovna změně kinetické energie tělesa m, zatímco práce síly $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ určuje změnu kinetické energie tělesa M. Celková práce interakčních sil W_{int} tedy představuje změnu kinetické energie soustavy vzhledem k libovolně zvolené inerciální vztažné soustavě. Předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že jiné interakční síly než $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ v naší soustavě nepůsobí, a označme zrychlení těles m a M jako $\boldsymbol{a}_m$ a $\boldsymbol{a}_M$. Platí

$$m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$$

a

$$M\boldsymbol{a}_M = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}.$$

Odtud

$$m\boldsymbol{a}_m + M\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{0}.$$

Označíme-li $\Delta\boldsymbol{v}_m$ a $\Delta\boldsymbol{v}_M$ změny rychlosti těles m a M při určité změně konfigurace soustavy, vidíme, že

$$m\Delta\boldsymbol{v}_m + M\Delta\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}$$

a veličina

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M,$$

zvaná **hybnost** soustavy, se tedy zachovává. Tato skutečnost umožňuje zvolit pro řešení našeho problému takovou inerciální vztažnou soustavu* $\mathscr{S}$, ve které je $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Opravdu, pokud bychom jako $\overline{\boldsymbol{v}}_m$ a $\overline{\boldsymbol{v}}_M$ označili rychlosti těles m a M vzhledem k inerciální vztažné soustavě $\overline{\mathscr{S}}$, na jejíž konkrétní volbu jsme nekladli žádné požadavky, bude celková hybnost soustavy těles nulová v každé vztažné soustavě $\mathscr{S}$, která se vůči $\overline{\mathscr{S}}$ pohybuje rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_M}{m + M}.$$

Tato rychlost bude konstantní, neboť celková hybnost $\overline{\boldsymbol{p}}_0$ izolované soustavy dvou těles se zachovává. Rychlosti těles v nové vztažné soustavě jsou $\boldsymbol{v}_m = \overline{\boldsymbol{v}}_m - \boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{v}_M = \overline{\boldsymbol{v}}_M - \boldsymbol{v}_0$. Platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M = m(\overline{\boldsymbol{v}}_m - \boldsymbol{v}_0) + M(\overline{\boldsymbol{v}}_M - \boldsymbol{v}_0) = \\
&= m\left(\overline{\boldsymbol{v}}_m - \frac{m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_M}{m + M}\right) + M\left(\overline{\boldsymbol{v}}_M - \frac{m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_M}{m + M}\right) = \\
&= \frac{m}{m + M}(m\overline{\boldsymbol{v}}_m + M\overline{\boldsymbol{v}}_m - m\overline{\boldsymbol{v}}_m - M\overline{\boldsymbol{v}}_M) + \\
&\quad + \frac{M}{m + M}(m\overline{\boldsymbol{v}}_M + M\overline{\boldsymbol{v}}_M - m\overline{\boldsymbol{v}}_m - M\overline{\boldsymbol{v}}_M) = \\
&= \frac{mM}{m + M}(\overline{\boldsymbol{v}}_m - \overline{\boldsymbol{v}}_M) + \frac{mM}{m + M}(\overline{\boldsymbol{v}}_M - \overline{\boldsymbol{v}}_m) = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Rychlosti $\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{v}_M$ nyní vyjádříme pomocí rychlosti $\boldsymbol{v}$ tělesa m vzhledem k tělesu M,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_M.$$

Ve vztažné soustavě $\mathscr{S}$ platí

$$m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}.$$

Řešením posledních dvou rovnic vzhledem k neznámým $\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{v}_M$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_m &= \frac{M\boldsymbol{v}}{m + M}, \\
\boldsymbol{v}_M &= -\frac{m\boldsymbol{v}}{m + M}.
\end{aligned}$$

Celková kinetická energie soustavy těles měřená vzhledem k $\mathscr{S}$ je pak

$$\begin{aligned}
E_\mathrm{k} &= \tfrac{1}{2}mv_m^2 + \tfrac{1}{2}Mv_M^2 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{m(Mv)^2}{(m + M)^2} + \frac{1}{2}\frac{M(-mv)^2}{(m + M)^2} = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v^2.
\end{aligned}$$

* Nazývá se **těžišťová**, protože vůči ní je v klidu těžiště soustavy; to však zavedeme až v čl. 9.2. Srovnej př. 9.10.

Veličina

$$m_\mathrm{red} = \frac{mM}{m + M}$$

charakterizuje soustavu jako celek a nazývá se **redukovaná hmotnost** soustavy. Změna kinetické energie naší soustavy při změně její konfigurace je určena celkovou prací W_int interakčních sil $\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$, tj.

$$\tfrac{1}{2}m_\mathrm{red}\Delta(v^2) = W_\mathrm{int}.$$

Tento závěr je platný bez ohledu na povahu interakčních sil. Pohybuje-li se během změny konfigurace soustavy těleso m po křivce $\mathscr{C}_m$ a těleso M po křivce $\mathscr{C}_M$, platí

$$W_\mathrm{int} = \int_{\mathscr{C}_m} \boldsymbol{F}_\mathrm{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_m + \int_{\mathscr{C}_M} -\boldsymbol{F}_\mathrm{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_M.$$

Označíme-li jako $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M$ vektor, který udává polohu tělesa m vzhledem k M a určuje tedy konfiguraci soustavy, dostaneme

$$W_\mathrm{int} = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}_\mathrm{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se pohybuje těleso m vzhledem k M. (Pro lepší pochopení předchozího výpočtu se vraťte k poznámce o křivkových integrálech v čl. 7.5.)

Jsou-li však síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ konzervativní, lze jejich práci W_int zapsat jako záporně vzatou změnu odpovídajícího typu potenciální energie soustavy:

$$W_\mathrm{int} = -\Delta E_\mathrm{p}.$$

Dostáváme tak zákon zachování mechanické energie dvoučásticové izolované soustavy ve tvaru

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\Delta(v^2) + \Delta E_\mathrm{p} = 0.$$

Působí-li v soustavě více typů konzervativních interakčních sil, je třeba náš výsledek zobecnit:

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\Delta(v^2) + \Delta E_{\mathrm{p},1} + \Delta E_{\mathrm{p},2} + \ldots = 0.$$

Vyjádření zákona zachování mechanické energie lze zobecnit i na vícečásticové soustavy. Pojem redukované hmotnosti, který je velmi užitečný při praktických výpočtech u dvoučásticových soustav, však nemá analogii u soustav vícečásticových.

Mechanická energie dvoučásticové (resp. vícečásticové) izolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je definována jako součet kinetických energií obou (všech) částic a všech typů potenciální energie soustavy, příslušejících jednotlivým dvojicím konzervativních interakčních sil. Při změnách konfigurace soustavy se mechanická energie nemění.

S pojmem redukované hmotnosti je užitečné se vrátit k úvahám o přiblíženích, o nichž jsme se již předběžně zmínili v článku 8.1 při rozboru energiové bilance soustav typu těleso + Země. Tyto soustavy se vyznačují mizivou hodnotou poměru m/M. Upravme výraz pro redukovanou hmotnost na tvar:

$$m_{\mathrm{red}} = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}.$$

Z tohoto vyjádření je ihned patrný vliv podílu m/M na odchylku redukované hmotnosti soustavy od hmotnosti tělesa m. Veličina $x = \frac{m}{M}$ je velmi malá, takže v rozvoji funkce

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

lze členy s vyššími mocninami proměnné x zanedbat. Pro redukovanou hmotnost dvoučásticové soustavy pak dostáváme

$$m_{\mathrm{red}} \approx m\left(1 - \frac{m}{M}\right) \approx m.$$

Náhradou redukované hmotnosti hmotností méně hmotného tělesa se tedy při výpočtu kinetické energie soustavy dopouštíme relativní chyby m/M. Tato hodnota například pro soustavu tvořenou tělesem o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$ a Zemí, jejíž hmotnost je $M \doteq 6{\cdot}10^{24}\,\mathrm{kg}$, je zhruba 10^{-24}. Namísto o celkové kinetické energii soustavy těleso + Země pak můžeme hovořit o kinetické energii tělesa vzhledem k Zemi (kap. 7).

Na závěr toho odstavce si uvědomme ještě jeden aspekt pojmu redukovaná hmotnost. Pozorovatel spojený s tělesem M a sledující pohyb částice m nemůže pro tuto částici přímo použít druhý Newtonův zákon, neboť vztažná soustava spojená s M je neinerciální (na těleso M působí síla $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$). Pomocí druhého Newtonova zákona lze však vyjádřit zrychlení $\boldsymbol{a}_m$ a $\boldsymbol{a}_M$ (viz výše) a určit zrychlení $\boldsymbol{a}$ částice m vzhledem k vztažné soustavě spojené s M:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_M = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}}{m} - \frac{(-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}})}{M} = \\ = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{m_{\mathrm{red}}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}},$$

odkud

$$m_{\mathrm{red}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}.$$

Tento vztah má formálně tvar zápisu druhého Newtonova zákona pro částici o hmotnosti m_{red}, na kterou působí síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$. Neinerciálnost vztažné soustavy spojené s tělesem M, způsobenou přítomností tělesa m, lze tedy při formulaci pohybového zákona pro těleso m „vykompenzovat“ záměnou jeho skutečné hmotnosti redukovanou hmotností soustavy. Víme již, že relativní chyba, které se dopustíme zanedbáním této neinerciálnosti a dosazením $m_{\mathrm{red}} \approx m$, je řádu m/M. Je-li v roli tělesa M Země, je tato nepřesnost opět zcela neměřitelná. Je zřejmé, že neinerciálnost laboratorní vztažné soustavy, spojené s povrchem Země, je v daleko větší míře způsobena pohybem Země kolem Slunce a především její vlastní rotací (pozn. pod čarou u čl. 5.2).

8.6 PRÁCE VNĚJŠÍCH A NEKONZERVATIVNÍCH SIL

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, je její mechanická energie konstantní. Jsou-li však interakční síly v soustavě nekonzervativní, nebo působí-li na částice soustavy vnější síly, které konají nenulovou práci, nebude se mechanická energie soustavy zachovávat. V takových případech *nemůžeme* použít vztahů (8.17) a (8.18). Co potom můžeme říci o změnách energie soustavy? Abychom na tuto otázku odpověděli, všimneme si odděleně obou situací, v nichž se mechanická energie soustavy nezachovává. Zvláštní pozornost budeme věnovat případu, kdy v soustavě působí třecí síly.

Práce nekonzervativních interakčních sil

Představme si, že zvedáme kuželkovou kouli svisle vzhůru. Soustavu koule+člověk+Země můžeme opět považovat za izolovanou. Můžeme si představit, že koule a Země takto interagují prostřednictvím vazby, kterou zajišťuje člověk. Působí-li člověk na kouli silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$, změní se tlaková síla, jíž působí na podložku pod svýma nohama, o vektor $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$. Obě tyto síly jsou *vnitřními* silami soustavy. Při zvedání koule dochází ke změnám konfigurace soustavy. Tíhové síly při tom vykonají práci W_{g}, která určuje změnu tíhové potenciální energie soustavy $\Delta E_{\mathrm{p,g}} = -W_{\mathrm{g}}$. Celkovou práci *obou* sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ i $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ označme W_{int}. Pokud tyto síly nejsou konzervativní, nelze jim přisoudit potenciální energii. Víme, že mechanická energie soustavy je součtem kinetických energií všech objektů a všech druhů potenciální energie příslušných *konzervativním interakčním silám*. Mechanická energie naší soustavy je tedy součtem její tíhové potenciální energie a kinetických energií koule a zbytku soustavy. Ukážeme, že se nebude zachovávat, ale bude se měnit právě na úkor práce nekonzervativních sil

$\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\text{int}}$: vzhledem k zanedbatelnému poměru hmotnosti koule a zbytku soustavy je změna kinetické energie soustavy při zvedání koule dána změnou kinetické energie koule samotné. Ze zkušenosti víme, že kouli můžeme v rámci tohoto experimentu považovat za bodový objekt. Užitím vztahu (7.15) mezi prací a kinetickou energií dostaneme změnu kinetické energie koule:

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{int}} + W_{\text{g}}.$$

Tíhová síla je konzervativní, a tak můžeme práci W_{g} zapsat pomocí odpovídající změny tíhové potenciální energie soustavy koule + člověk + Země:

$$W_{\text{g}} = -\Delta E_{\text{p,g}}. \tag{8.22}$$

Dosazením za W_{g} do rov. (8.22) dostaneme

$$\Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}} = W_{\text{int}}. \tag{8.23}$$

Levá strana této rovnice představuje změnu ΔE mechanické energie soustavy koule + člověk + Země. Vlivem nekonzervativních interakčních sil v soustavě se tedy obecně mění mechanická energie soustavy.

Práce vnější síly

Stejně jako v předchozím odstavci uvažujme i nyní soustavu koule + Země. Místo člověka, který byl součástí soustavy a působil na kouli silou $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$, bude však na kouli působit jiné těleso, které do soustavy nepatří (je součástí jejího okolí). Soustava koule + Země tedy *nebude* izolovaná a o síle $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou působí na kouli vnější těleso, budeme hovořit jako o síle **vnější** (externí). Označme W_{ext} práci, kterou tato síla koná při změnách vzdálenosti koule od povrchu Země. Podle (7.15) opět platí

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{ext}} + W_{\text{g}}.$$

Užitím (8.22) dostaneme

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{p,g}}$$

a nakonec

$$\Delta E = W_{\text{ext}}. \tag{8.24}$$

Vidíme, že změna mechanické energie neizolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je rovna práci vykonané vnějšími silami.

Získané závěry lze zobecnit i pro soustavy, které nejsou izolované a v nichž působí jak konzervativní, tak nekonzervativní interakční síly:

Změna mechanické energie soustavy je rovna celkové práci nekonzervativních interakčních sil soustavy a vnějších sil, jimiž na objekty soustavy působí její okolí.

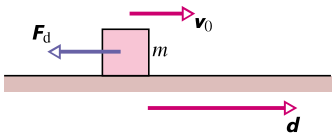
Platí

$$\Delta E = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}. \tag{8.25}$$

Tento vztah platí pro libovolnou soustavu, ať již je tvořena jediným objektem jako v kap. 7, nebo dvěma (či více) objekty, jako například u soustavy koule + Země, jíž jsme se zabývali před chvílí.

Práce třecí síly

Kostka o hmotnosti m na obr. 8.11 klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Počáteční rychlost kostky má velikost v_0. Vlivem dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ se kostka zastaví poté, co urazila dráhu d. Z experimentu víme, že působením třecí síly klesá kinetická energie kostky a soustava kostka + podložka + Země se zahřeje. V kap. 19 až 21 uvidíme, že toto zahřátí souvisí se změnou vnitřní energie těles, způsobenou urychlením neuspořádaného pohybu částic, z nichž jsou tělesa složena.



Obr. 8.11 Kostka o hmotnosti m klouže po podlaze, která není dokonale hladká, počáteční rychlostí v_0. Vlivem dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ se kostka zpomaluje a po posunutí d se zcela zastaví.

Z experimentu je známo i to, že takový proces vzrůstu vnitřní energie soustavy na úkor její energie kinetické je nevratný. Říkáme, že kinetická energie kostky je *rozptylována* (disipována) působením síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$, nebo že dochází k energiovým ztrátám. Práce W_{f} třecích sil $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\text{d}}$, které jsou *nekonzervativními vnitřními* silami soustavy kostka + podložka + Země, je záporná a její velikost je rovna úbytku kinetické energie kostky vzhledem k podložce. Tento úbytek představuje rozptýlenou energii (energiovou ztrátu) a přispívá ke zvýšení vnitřní energie jak kostky, tak i podložky.

Předchozí úvahu objasníme ještě na příkladu kostky z obr. 8.11. Dejme tomu, že jsme při měření změny kinetické energie kostky získali hodnotu $\Delta E_{\text{k}} = -100\,\text{J}$. Tato hodnota představuje současně i práci W_{d} vykonanou silami dynamického tření. Rozptýlená energie je tedy 100 J. O tuto hodnotu vzroste vnitřní energie soustavy kostka + + podložka + Země, tj. $\Delta E_{\text{int}} = 100\,\text{J}$. Předpokládejme dále, že jsme bezprostředně po zastavení kostky zjistili

pomocí přesných kalorimetrických měření, že při brzdění došlo ke zvýšení její vnitřní energie o 60 J. Je zřejmé, že vnitřní energie podložky se zvýšila o 40 J.

Situace na obr. 8.11 je podobná jako na obr. 7.2 v čl. 7.3. Můžeme tedy použít vztah (7.8) se dvěma obměnami. Velikost síly je nyní F_d namísto F a úhel φ mezi silou a posunutím je 180°. Vztah (7.8) pak nabude tvaru

$$\Delta E_k = F_d d \cos 180^\circ = -F_d d. \qquad (8.26)$$

Hodnota součinu $-F_d d$ tedy představuje pokles kinetické energie kostky na obr. 8.11 vlivem působení třecích sil. Kdyby se měnila i potenciální energie soustavy (kostka by například sjížděla po šikmé rampě), představovala by tato hodnota pokles mechanické energie soustavy E vlivem třecích sil, tj. energiovou ztrátu:

$$\Delta E = -F_d d \qquad \text{(rozptýlená mechanická energie).} \qquad (8.27)$$

Rozptýlená energie přispěje částečně ke zvýšení vnitřní energie kostky (zahřátí), částečně ke zvýšení vnitřní energie podložky.

PŘÍKLAD 8.6

Vadný robot o hmotnosti $m = 40\,\text{kg}$ je tažen na laně po stěně sopečného kráteru (obr. 8.12). Stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Tažná síla lana $\boldsymbol{F}$ má velikost 380 N, velikost dynamické třecí síly působící proti pohybu robota je 140 N. Robot se posune o vzdálenost $d = 0{,}50\,\text{m}$ podél stěny kráteru.

(a) Jaká je ztráta mechanické energie soustavy robot + Země způsobená vlivem třecích sil při posunutí robota o vektor $\boldsymbol{d}$?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.27) a zadaných údajů dostaneme

$$\Delta E = -F_d d = -(140\,\text{N})(0{,}50\,\text{m}) = \\ = -70\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vnitřní energie robota a podložky se tedy zvýšila o 70 J.

(b) Jakou práci vykonají při posunutí robota tíhové síly?

ŘEŠENÍ: Podle vztahů (8.1) a (8.7) je

$$W_g = -\Delta E_p = -mg\Delta y. \qquad (8.28)$$

Na obr. 8.12 vidíme, že změna y-ové souřadnice robota, v obrázku označená jako h, je $h = d \sin 30^\circ$. Dosazením tohoto výrazu do (8.28) a užitím zadaných hodnot dostáváme

$$W_g = -mgh = -mgd \sin 30^\circ = \\ = -(40\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(0{,}50\,\text{m})0{,}5 = \\ = -98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

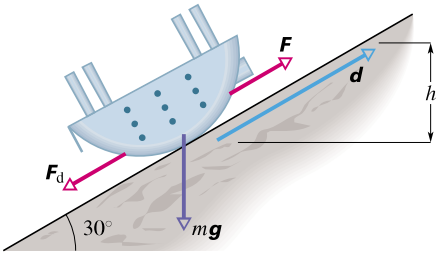
Potenciální energie soustavy robot + Země vzrostla během posunutí robota o 98 J.

(c) Jakou práci vykonala síla $\boldsymbol{F}$?

ŘEŠENÍ: Práce síly $\boldsymbol{F}$ je prakticky rovna celkové práci W_{int} sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. (Silou $-\boldsymbol{F}$ působí robot prostřednictvím tažného lana na naviják, který je pevně spojen se stěnou kráteru a náleží tedy rovněž do studované soustavy.) Pro její výpočet užijeme vztahu (7.9) ($W = Fd\cos\varphi$). Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 0°. Dosazením do (7.9) dostáváme:

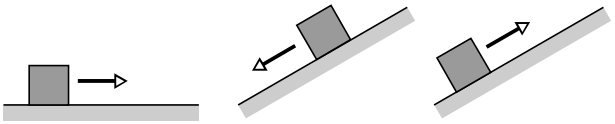
$$W_{int} = Fd\cos\varphi = (380\,\text{N})(0{,}50\,\text{m})\cos 0^\circ = \\ = 190\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Působením sil $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ při posunutí robota došlo ke zvýšení mechanické energie soustavy robot + Země o 190 J.



Obr. 8.12 Příklad 8.6. Vadný robot je tažen na laně po šikmé stěně sopečného kráteru silou $\boldsymbol{F}$, proti pohybu působí dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$. Robot se posune podél nakloněné roviny o vektor $\boldsymbol{d}$, jeho výška nad dnem kráteru při tom vzroste o h.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje tři možnosti pohybu kostky po nakloněné rovině, která není dokonale hladká. Ve všech případech je velikost počáteční rychlosti kostky stejná. Pohyb kostky sledujeme až do zastavení. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti rozptýlené mechanické energie.



8.7 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Představme si kostku, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze. Soustavu tvořenou samotnou kostkou můžeme považovat za izolovanou v tom smyslu, že žádná ze sil, které na ni působí (tíhová síla a tlaková síla podložky), nekoná práci. Na tuto jednoduchou soustavu lze samozřejmě rovněž aplikovat zákon zachování energie: energie kostky se zachovává.

Nyní nechme kostku klouzat po podlaze, která není dokonale hladká. Uvažujeme-li opět soustavu tvořenou samotnou kostkou, musíme konstatovat, že tentokrát se o izolovanou soustavu nejedná. Dynamická třecí síla, která na kostku působí, je z hlediska zvolené soustavy silou vnější. Energie soustavy (kostky) se nezachovává.

Můžeme však soustavu rozšířit tak, že do ní zahrneme jak kostku, tak podložku pevně spojenou se Zemí. V této soustavě jsou již třecí síly silami vnitřními, soustava je izolovaná a její energie se zachovává. Zobecníme-li náležitě představy o tom, co rozumíme *soustavou*, můžeme formulovat nový zákon zachování energie, který umožňuje uvažovat o různých energiových přeměnách.

Dospějeme k němu pomocí vztahu (8.27) pro vyjádření mechanické energie rozptýlené třecími silami $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$. V případě kostky pohybující se po vodorovné podlaze zahrnuje mechanická energie pouze energii kinetickou a vztah (8.27) má tvar

$$\Delta E_\mathrm{k} = -F_\mathrm{d} d, \tag{8.29}$$

kde ΔE_k je změna kinetické energie. Celý úbytek kinetické energie přispěje ke zvýšení vnitřní energie kostky a podložky (obě se zahřejí). Změna vnitřní energie soustavy je tedy

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\Delta E_\mathrm{k}, \tag{8.30}$$

odkud

$$\Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{int} = 0. \tag{8.31}$$

A tak i když se mechanická energie kostky nezachovává, je součet její mechanické energie a vnitřní energie soustavy kostka+podložka konstantní. Tento součet představuje *celkovou energii* soustavy kostka + podložka. Nově získaný vztah pro zachovávající se energii nazýváme **zákonem zachování energie**. Užitím vztahu (8.31) jej můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta E_\mathrm{celk} = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{int} = 0. \tag{8.32}$$

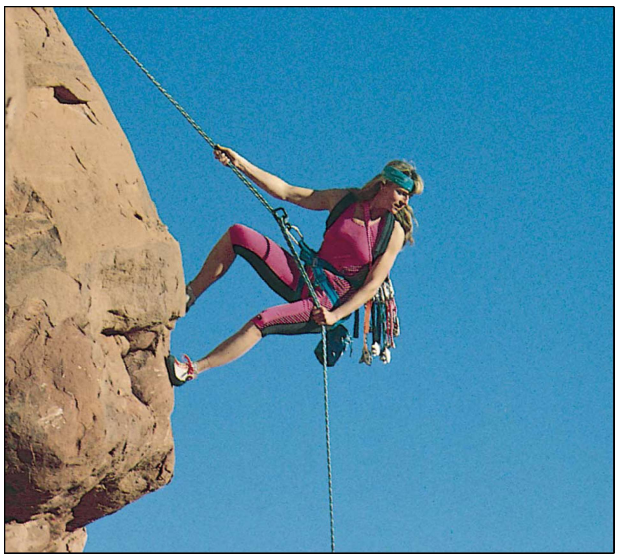
Působí-li navíc v soustavě konzervativní interakční síly, máme opět poněkud širší a obecnější pojem izolované soustavy, ve které může kromě změn kinetické a vnitřní energie jednotlivých objektů docházet i ke změnám energie potenciální. Celková energie se bude opět zachovávat a zákon zachování nabude tvaru

$$\Delta E_\mathrm{celk} = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} + \Delta E_\mathrm{int} = 0 \quad \text{(izolovaná soustava, zákon zachování celkové energie).} \tag{8.33}$$

Objevíme-li ještě jiné formy energie, můžeme je vždy zahrnout do zákona zachování energie a přepsat vztah (8.33) takto:

$$\Delta E_\mathrm{celk} = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} + \Delta E_\mathrm{int} + \Delta E_\mathrm{ostatní} = 0. \tag{8.34}$$

Uvědomme si, že tento obecný zákon zachování energie jsme *nijak* neodvodili. Naopak, vyplývá z nesčetných experimentů. Vědci ani konstruktéři dosud neobjevili žádnou výjimku z tohoto zákona. Jeho značná účinnost při analýze obtížných situací spočívá právě v tom, že přisuzuje celkové energii úlohu zachovávající se veličiny i v situacích, kdy se dílčí energie různých typů mění.



Obr. 8.13 Při sestupu se snižuje tíhová potenciální energie soustavy horolezkyně s výstrojí + Země. Lano je provlečeno kovovými karabinami a tře se o ně. Podstatná část úbytku potenciální energie tak přispěje ke vzrůstu vnitřní energie soustavy a kinetická energie horolezkyně se prakticky nezvyšuje.

V izolované soustavě může docházet ke změnám všech typů energie, které lze soustavě přisoudit. Celková energie však zůstává zachována.

Chceme-li tuto skutečnost vyjádřit méně formálně, můžeme říci, že energie nemůže záhadně mizet ani se objevovat.

Nad obr. 8.13 můžeme například uvažovat tak, že do soustavy zahrneme jak horolezkyni s kompletní výstrojí, tak Zemi. Při slaňování po skalní stěně musí horolezkyně řídit pokles potenciální energie soustavy (tato energie nemůže najednou záhadně zmizet). Část jejího úbytku se jistě může projevit přírůstkem kinetické energie horolezkyně, ten však nesmí být příliš velký. V tom tkví podstata slaňování: lano je provlečeno kovovými karabinami. Třecí síly mezi lanem a karabinami řízeně a pomalu rozptylují

převážnou část mechanické energie soustavy a zvyšují tak energii vnitřní.

Není-li soustava izolovaná a vnější síly konají práci, nelze vztahy (8.33) a (8.34) použít. Je třeba je nahradit obecnějším vztahem

$$W = \Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p}} + \Delta E_{\text{int}}, \qquad (8.35)$$

kde W je celková práce vnějších sil působících na objekty soustavy. Kdybychom například lano horolezkyně (obr. 8.13) nezahrnuli do soustavy, bylo by třeba třecí sílu, jíž působí lano na karabiny, považovat za vnější sílu, jejíž práce W přispívá ke změně kinetické, potenciální a vnitřní energie soustavy.

Výkon

Poté, co jsme podrobně prodiskutovali problematiku a mechanismy energiových přeměn a uvědomili jsme si přitom existenci různých typů energie, můžeme rozšířit i definici výkonu formulovanou v čl. 7.7. Tam jsme výkon definovali jako „rychlost“, s jakou síla koná práci, tj. vykonanou práci vztaženou k časové jednotce. V obecnějším smyslu bude výkon veličinou, která určuje, jak „rychle“ dochází ke změnám energie. Označíme-li ΔE změnu energie soustavy, k níž došlo působením jisté síly za dobu Δt, můžeme definovat **průměrný výkon** této síly jako podíl

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \qquad (8.36)$$

Analogicky definujeme **okamžitý výkon** síly

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (8.37)$$

PŘÍKLAD 8.7

Cvičený pudl (obr. 8.14) o hmotnosti 6,0 kg vběhl rychlostí o velikosti $v_0 = 7{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ na levý okraj skluzavky, který leží ve výšce 8,5 m nad podlahou. Při skluzu po ní se dostal do bodu obratu, ležícího ve výšce $y = 11{,}1$ m nad podlahou. Jaký byl při tom přírůstek vnitřní energie soustavy pudl + + skluzavka + Země?

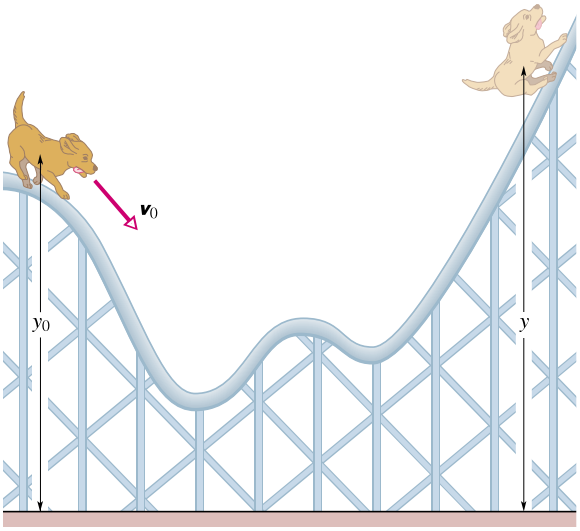
ŘEŠENÍ: Soustavu pudl + skluzavka + Země můžeme považovat za izolovanou a použít vztahu (8.33), neboť jedinými silami, které v soustavě působí, jsou síly tíhové, normálové (tlakové) a třecí. Tíhové síly jsou konzervativní a jsou spjaty se změnami tíhové potenciální energie soustavy. Vlivem třecích sil dochází při pohybu pudla po skluzavce k rozptylu mechanické energie soustavy za současného přírůstku vnitřní energie soustavy o hodnotu ΔE_{int}. Normálové síly nekonají práci, neboť jsou trvale kolmé k trajektorii pudla. Nepřispívají tedy k energiovým změnám.

V bodě obratu má pudl nulovou rychlost a tedy i nulovou kinetickou energii. Užitím vztahu (8.33) pro soustavu pudl + + skluzavka + Země dostáváme:

$$\Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$
$$(0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) + mg(y - y_0) + \Delta E_{\text{int}} = 0.$$

Odtud určíme ΔE_{int}:

$$\Delta E_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(6{,}0\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 -$$
$$-(6{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(11{,}1\,\mathrm{m} - 8{,}5\,\mathrm{m}) \doteq$$
$$\doteq 30\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 8.14 Příklad 8.7. Pudl klouže po skluzavce z výšky y_0 s počáteční rychlostí o velikosti v_0 a dosáhne bodu obratu ve výšce y.

PŘÍKLAD 8.8

Ocelová kulka o hmotnosti 5,2 g je vystřelena svisle dolů z výšky $h_1 = 18$ m. Její počáteční rychlost má velikost $v_0 = 14\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (obr. 8.15a). Kulka se zaryje do písku a zastaví se v hloubce $h_2 = 21$ cm.

(a) K jaké změně mechanické energie kulky přitom došlo?

ŘEŠENÍ: V místě, kde se kulka zastavila, je její rychlost, a tedy i kinetická energie, nulová. Změna mechanické energie kulky je dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}}. \qquad (8.38)$$

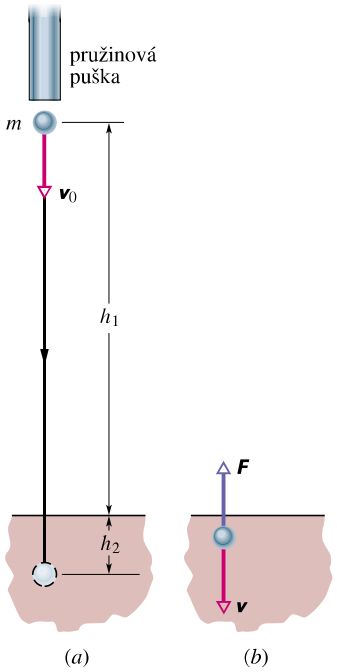
Odtud užitím vztahu (8.8) ($\Delta E_{\text{p,g}} = mg\Delta y$) dostáváme

$$\Delta E = (0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) - mg(h_1 + h_2),$$

kde $-(h_1 + h_2)$ je celkové posunutí kulky. Dosazením zadaných údajů určíme hodnotu ΔE:

$$\Delta E = -\tfrac{1}{2}(5{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 - \\ -(5{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(18\,\mathrm{m} + 0{,}21\,\mathrm{m}) = \\ = -1{,}437\,\mathrm{J} \doteq -1{,}4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Všimněte si, že jsme v této úloze hovořili o potenciální energii kulky, místo abychom ji správně přisuzovali soustavě kulka + Země. Jedná se o přiblížení, jehož oprávněnost jsme již zdůvodnili v bodě 8.1.)



Obr. 8.15 Příklad 8.8. (a) Kulka je vystřelena svisle dolů a zabrzdí se v písku. Její mechanická energie se při pohybu po dráze h_1 zachovává, při brzdění po dráze h_2 působí na kulku odporová síla $\boldsymbol{F}$. (b) Při působení odporových sil klesá mechanická energie kulky a roste vnitřní energie soustavy kulka + písek.

(b) Jaká je změna vnitřní energie soustavy kulka + pískoviště + Země?

ŘEŠENÍ: Soustavu kulka + pískoviště + Země po výstřelu lze považovat za izolovanou. Jedinými vnitřními silami jsou síly tíhové a odporové síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$, jimiž na sebe vzájemně působí kulka a částečky písku (obr. 8.15b). Lze tedy použít vztah (8.33). Dosazením ze vztahu (8.38) do (8.33) získáme pro soustavu kulka + pískoviště + Země vztah

$$\Delta E + \Delta E_{\mathrm{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = -\Delta E = -(-1{,}437\,\mathrm{J}) \doteq \\ \doteq 1{,}4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při průchodu kulky pískem konají odporové síly práci a dochází k rozptylu mechanické energie soustavy. Vnitřní energie soustavy roste.

(c) Jaká je velikost průměrné odporové síly $\boldsymbol{F}$?

ŘEŠENÍ: Mechanická energie soustavy se nemění, dokud kulka nedoletí k pískovišti. Při zarytí kulky do hloubky h_2 se však změní o hodnotu ΔE. Vztah (8.27) ($-F_{\mathrm{d}}d = \Delta E$) lze přepsat do tvaru

$$-Fh_2 = \Delta E.$$

Řešením vzhledem k neznámé F dostaneme

$$F = \frac{\Delta E}{-h_2} = \frac{(-1{,}437\,\mathrm{J})}{(-0{,}21\,\mathrm{m})} = 6{,}84\,\mathrm{N} \doteq 6{,}8\,\mathrm{N}. \text{ (Odpověď)}$$

Hodnotu F bychom mohli určit také užitím postupů vyložených v kap. 2: zjistili bychom velikost rychlosti kulky těsně nad pískovištěm a její průměrné zrychlení při brzdění v písku. Užitím druhého Newtonova zákona bychom zjistili F. Tento postup by však vyžadoval provedení většího počtu algebraických výpočtů.

8.8 HMOTNOST A ENERGIE

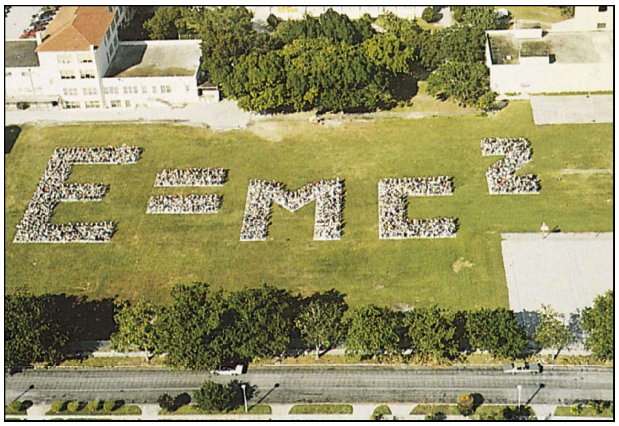
Klasická chemie byla založena na předpokladu, že při chemických reakcích se zachovává jak energie, tak hmotnost. V roce 1905 však ukázal Albert Einstein v rámci své speciální teorie relativity, že hmotnost lze ekvivalentně vyjádřit pomocí energie a že zákon zachování energie říká jinými slovy totéž, co zákon zachování hmotnosti.

Při chemických reakcích jsou ovšem změny hmotnosti odpovídající změnám energie ve smyslu Einsteinovy teorie tak nepatrným zlomkem celkové hmotnosti látek, které se reakce účastní, že není naděje na jejich registraci ani při nejpřesnějších laboratorních analýzách. Situace se tedy *jeví* tak, že hmotnost i energie se skutečně zachovávají odděleně. Během reakcí jaderných však často dochází k uvolnění energie až milionkrát větší a změny hmotnosti lze měřit docela snadno. Úvahy o souvislostech změn hmotnosti a energie při jaderných reakcích se již staly součástí laboratorní rutiny.

Vztah mezi hmotností a energií je zcela jistě nejznámější rovnicí fyziky (obr. 8.16):

$$E = mc^2, \qquad (8.39)$$

kde E je energie ekvivalentní hmotnosti m (tzv. **energiový ekvivalent hmotnosti**), c je rychlost světla ve vakuu. (Při hlubším studiu fyziky mimo rámec této knihy se jistě časem setkáte s hlubším rozborem vztahu mezi hmotností a energií a pravděpodobně i s různými názory na jeho správnou interpretaci.)



Obr. 8.16 Takto vzdali hold Albertu Einsteinovi studenti střední školy Shenandoah Junior v Miami (Florida) při oslavách stého výročí jeho narození v roce 1979. Slavnou formuli vytvořili svými těly.

Tabulka 8.1 shrnuje energiové ekvivalenty hmotností vybraných objektů. Energie uložená v běžných objektech je obrovská. Například výroba energiového ekvivalentu tří-gramové mince by stála desítky milionů korun. Také hmotnostní ekvivalenty některých typických hodnot energie jsou šokující. Například celá roční produkce elektrické energie v USA odpovídá hmotnosti pouhých několika stovek kilogramů látky (kamení, brambor, prostě čehokoliv!).

Tabulka 8.1 **Energiové ekvivalenty vybraných objektů**

OBJEKT	HMOTNOST (kg)	ENERGIOVÝ EKVIVALENT
Elektron	$9{,}11\cdot10^{-31}$	$8{,}2\cdot10^{-14}$ J (= 511 keV)
Proton	$1{,}67\cdot10^{-27}$	$1{,}5\cdot10^{-10}$ J (= 938 MeV)
Atom uranu	$4{,}0\cdot10^{-25}$	$3{,}6\cdot10^{-8}$ J (= 225 GeV)
Prachová částice	$1\cdot10^{-13}$	$1\cdot10^{4}$ J (= 2 kcal)
Mince	$3{,}1\cdot10^{-3}$	$2{,}8\cdot10^{14}$ J (= 78 GW·h)

Chceme-li použít vztah (8.39) pro chemické či jaderné reakce, je vhodné jej přepsat do tvaru

$$Q = -\Delta m\, c^2, \tag{8.40}$$

kde Q je energie uvolněná (kladná hodnota), nebo pohlcená (záporná hodnota) při reakci a Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti částic v důsledku reakce. Při jaderném štěpení, kdy se větší jádra rozpadnou v jádra s nižším atomovým číslem, činí hmotnostní úbytek méně než 0,1% původní hmotnosti. Při chemických reakcích je toto procento zhruba milionkrát nižší.

Při praktických výpočtech pomocí vztahu (8.40) se jen zřídka užívá jednotek SI, neboť jsou pro tento účel příliš velké. Hmotnost obvykle udáváme v atomových jednotkách (zkratka u, čl. 1.6), kde

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}66\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}. \tag{8.41}$$

Obvyklou jednotkou energie je elektronvolt či jeho násobky. Podle (7.3) je

$$1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{8.42}$$

V jednotkách definovaných vztahy (8.41) a (8.42) má kvadrát rychlosti světla hodnotu

$$c^2 = 9{,}315\cdot10^{8}\,\mathrm{eV\cdot u^{-1}} = 9{,}315\cdot10^{5}\,\mathrm{keV\cdot u^{-1}} = \\ = 931{,}5\,\mathrm{MeV\cdot u^{-1}}. \tag{8.43}$$

PŘÍKLAD 8.9

Při *jaderném štěpení*

$$\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Ce} + {}^{94}\mathrm{Zr} + \mathrm{n} + \mathrm{n}$$

je neutron (n) zachycen jádrem uranu (^{235}U). Vznikne nestabilní jádro, které se rozštěpí na dvě menší jádra (^{140}Ce a ^{94}Zr) za současného uvolnění dvou neutronů. Hmotnosti zúčastněných elementů jsou

$$\begin{aligned} \text{hmotnost } (^{235}\mathrm{U}) &= 235{,}04\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost } (^{94}\mathrm{Zr}) &= 93{,}91\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost } (^{140}\mathrm{Ce}) &= 139{,}91\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost (n)} &= 1{,}008\,67\,\mathrm{u}. \end{aligned}$$

(a) Jaká je relativní změna hmotnosti interagujících částic?

ŘEŠENÍ: Změnu hmotnosti Δm získáme odečtením hmotnosti částic, které vstupují do reakce od hmotnosti částic, které jsou výsledkem reakce:

$$\Delta m = (139{,}91 + 93{,}91 + 2\cdot 1{,}008\,67)\,\mathrm{u} - \\ - (235{,}04 + 1{,}008\,67)\,\mathrm{u} = \\ = -0{,}211\,\mathrm{u}.$$

Hmotnost částic vstupujících do reakce je

$$M = 235{,}04\,\mathrm{u} + 1{,}008\,67\,\mathrm{u} = 236{,}05\,\mathrm{u}.$$

Tomu odpovídá relativní úbytek hmotnosti

$$\frac{|\Delta m|}{M} = \frac{0{,}211\,\mathrm{u}}{236{,}05\,\mathrm{u}} = \\ = 0{,}000\,89, \quad \text{tj. asi } 0{,}1\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jakkoli je tato veličina malá, je poměrně snadno měřitelná.

(b) Jaká energie se při štěpné reakci uvolní?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.40) dostaneme

$$Q = -\Delta m\, c^2 = -(-0{,}211\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV\cdot u^{-1}}) = \\ = 197\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Za c^2 jsme dosadili hodnotu uvedenou ve vztahu (8.43). Uvolněná energie 197 MeV, připadající na jednu reakci, je mnohonásobně větší než typické hodnoty energie uvolněné při chemických reakcích, které se pohybují v jednotkách elektronvoltů.

PŘÍKLAD 8.10

Jádro atomu deuteria (tzv. těžký vodík) se nazývá **deuteron**. Je složeno z protonu a neutronu. Jak velká energie se uvolní, či absorbuje při procesu, při němž dojde k odtržení neutronu a protonu? Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou:

$$\left.\begin{aligned} \text{deuteron: } m_\mathrm{d} &= 2{,}013\,55\ \mathrm{u} \\ \text{proton: } m_\mathrm{p} &= 1{,}007\,28\ \mathrm{u} \\ \text{neutron: } m_\mathrm{n} &= 1{,}008\,67\ \mathrm{u} \end{aligned}\right\} \ 2{,}015\,95\ \mathrm{u}$$

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že celková hmotnost volného protonu a volného neutronu je větší než hmotnost deuteronu, je při štěpení deuteronu nutno energii dodat. Přírůstek hmotnosti při reakci činí

$$\Delta m = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n}) - m_\mathrm{d} = \\ = (1{,}007\,28 + 1{,}008\,67)\ \mathrm{u} - (2{,}013\,55)\ \mathrm{u} = 0{,}002\,40\ \mathrm{u}.$$

Odpovídající energie je dána vztahem (8.40):

$$Q = -\Delta m\, c^2 = -(0{,}002\,40\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV\cdot u^{-1}}) = \\ = -2{,}24\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

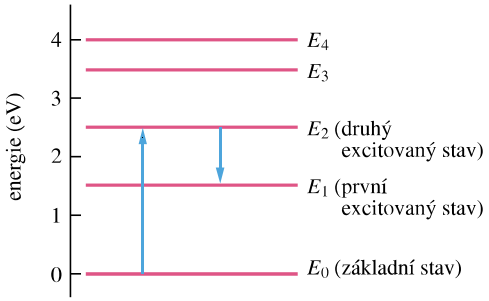
Znaménko minus ve výsledku potvrzuje, že při této reakci se energie absorbuje. Hodnota 2,24 MeV se nazývá *vazební energie* deuteronu. Vazební energie jádra je definována jako energie, kterou by bylo třeba jádru dodat, aby se rozštěpilo na volné protony a neutrony, resp. energie, která by se musela uvolnit, kdybychom měli jádro z volných protonů a neutronů vytvořit.

KONTROLA 6: Představme si, že bychom nějakým způsobem dokázali přimět šest volných protonů a stejný počet volných neutronů, aby se spojily v jádro uhlíkového atomu ^{12}C. Byla by hmotnost jádra větší, či menší než celková hmotnost volných částic?

8.9 KVANTOVÁNÍ ENERGIE

Dosud jsme předpokládali, že energie soustavy může nabývat *jakýchkoli* hodnot. Tento předpoklad je nepochybně rozumný u soustav, s nimiž se setkáváme v každodenním životě. Pro soustavy z oblasti mikrosvěta, jako jsou atomy nebo i tzv. *kvantové tečky* (laboratorně vyrobené shluky elektronů, které se atomům podobají), však nevyhovuje. Vnitřní energie takových mikrosoustav je **kvantována**, může nabývat jen některých hodnot. Přísluší-li soustavě určitá hodnota energie, říkáme, že se soustava nachází v **kvantovém stavu** s touto energií.

Obr. 8.17 ukazuje typický diagram hodnot energie (tzv. *energiových hladin*) atomu.* Energie je vynesena na svislé stupnici a každá z pěti nejnižších energiových hladin $E_0, E_1, \ldots, E_4$ je vyznačena vodorovnou čarou (odtud název *hladiny*). Energie atomu nemůže nabývat žádné hodnoty ležící mezi povolenými hladinami. Kvantový stav spojený s nejnižší hladinou, označenou na obr. 8.17 jako E_0, se nazývá *základním stavem* atomu. (V obr. 8.17 je mu přisouzena nulová hodnota energie.) Kvantové stavy s vyšší energií se nazývají *excitované*. Stav s energií E_1 je první excitovaný stav, stav s energií E_2 druhý excitovaný stav atd.



Obr. 8.17 Diagram energiových hladin atomu, znázorňující kvantované hodnoty energie (energiové hladiny). Každá hladina odpovídá jistému kvantovému stavu atomu. Nejnižší energie, označená jako E_0, přísluší základnímu stavu. Šipka směřující vzhůru symbolizuje kvantový přechod atomu ze základního stavu do druhého excitovaného stavu, jemuž odpovídá energie E_2. Šipka směřující dolů odpovídá kvantovému přechodu z druhého do prvního excitovaného stavu o energii E_1.

Atomy mají tendenci zaujímat konfiguraci základního stavu, jemuž odpovídá nejnižší energie (podobně jako se koule kutálí po svahu dolů). Atom může přejít do excitovaného stavu s vyšší energií jen tehdy, je-li mu z vnějšího zdroje dodána energie daná rozdílem mezi excitovaným a základním stavem. Atom může tuto energii získat na-

* I když ve zkratce hovoříme o energiových hladinách atomu, máme většinou na mysli možné hodnoty energie jednotlivých elektronů jeho elektronového obalu.

příklad při srážce s jiným atomem nebo volným elektronem, případně při pohlcení (absorpci) světla. Každopádně je třeba, aby získaná energie postačovala pro přechod na některou z vyšších hladin. Kvantovány jsou tedy nejen hodnoty energie samotné, ale i jejich možné změny (přírůstky i ztráty). Při změnách energie dochází ke kvantovým *přechodům* neboli *přeskokům* atomu mezi jednotlivými energiovými hladinami.

Šipka mířící v obr. 8.17 vzhůru představuje kvantový skok ze základního do druhého excitovaného stavu. Podle diagramu je pro takový přechod třeba, aby atom získal energii 2,5 eV. Při absorpci fotonu s touto energií foton zanikne a celá jeho energie přispěje k přírůstku energie atomu. Světlo tedy musí mít energii právě 2,5 eV, aby byl atom schopen je pohltit. Je-li energie světla o něco větší či menší, k absorpci nedojde.

Aby došlo k absorpci světla atomem, musí být energie absorbovaného fotonu rovna rozdílu energiových hladin odpovídajících výslednému a výchozímu stavu atomu.

Přejde-li atom do excitovaného stavu, nesetrvá v něm, ale je rychle *deexcitován*. Ztrácí energii buď při srážkách nebo vyzářením (emisí) světla. Světlo vyzářené při deexcitaci atomu při ní skutečně *vzniká* (předtím neexistovalo). Při kterémkoli z obou deexcitačních procesů je však třeba, aby atom ztratil přesně definovanou energii, a mohl tak přejít na některou z nižších energiových hladin.

Energie světla emitovaného atomem je vždy rovna rozdílu energií výchozí hladiny atomu a některé nižší hladiny.

Šipka, směřující v obr. 8.17 dolů, označuje kvantový přechod z druhého do prvního excitovaného stavu. Energie světla vyzářeného při tomto přechodu je 1,0 eV. Poté atom přejde do základního stavu a znovu vyzáří světlo, tentokrát o energii 1,5 eV. Místo tohoto dvoustupňového procesu mohl také atom přejít do základního stavu rovnou a vyzářit světlo o energii 2,5 eV.

KONTROLA 7: Bylo zjištěno, že kvantový systém vyzářil světlo čtyř různých energií, aniž byl mezitím znovu excitován. Tři hodnoty energie emitovaného světla byly změřeny: 1,1 eV, 1,4 eV a 2,8 eV. Pořadí emisí není známo. Energiové hladiny systému jsou tyto:

$E_8 = 7{,}7\,\text{eV}$ $E_5 = 4{,}8\,\text{eV}$ $E_2 = 2{,}7\,\text{eV}$
$E_7 = 6{,}6\,\text{eV}$ $E_4 = 4{,}2\,\text{eV}$ $E_1 = 1{,}3\,\text{eV}$
$E_6 = 5{,}5\,\text{eV}$ $E_3 = 3{,}9\,\text{eV}$ $E_0 = 0{,}0\,\text{eV}$

(a) Jaký byl počáteční stav systému a (b) jakou energii mělo světlo vyzářené při čtvrté emisi?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Konzervativní síly

Síla působící na částici je **konzervativní**, je-li celková práce, kterou vykoná při pohybu částice po libovolné uzavřené trajektorii, nulová. Ekvivalentní vyjádření: Síla působící na částici je konzervativní, jestliže práce, kterou vykoná při přemístění částice mezi dvěma zadanými body, nezávisí na trajektorii, po které se částice pohybovala. Tíhová síla a pružná síla jsou konzervativní. Dynamická třecí síla je *nekonzervativní*.

Potenciální energie

Potenciální energie souvisí s konfigurací soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Změna potenciální energie soustavy je definována jako záporně vzatá práce, kterou konzervativní interakční síly vykonají při odpovídající změně konfigurace soustavy

$$\Delta E_p = -W_g. \tag{8.1}$$

Je-li konfigurace soustavy (poloha částice vzhledem ke zvolenému bodu zbytku soustavy) určena jedinou skalární proměnnou x a závisí-li konzervativní síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ popisující interakci částice se zbytkem soustavy pouze na této proměnné, je často možné vyjádřit změnu potenciální energie vztahem

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx, \tag{8.6}$$

kde x_i je počáteční a x_f koncová poloha částice.

Tíhová potenciální energie

Potenciální energie soustavy s tíhovou interakcí se nazývá **tíhová potenciální energie**. Jedná-li se o soustavu zahrnující Zemi a částici, která se pohybuje v blízkosti jejího povrchu, hovoříme o **tíhové potenciální energii**. Při přechodu částice mezi body ležícími ve výškách y_i a y_f nedaleko od povrchu Země je změna tíhové potenciální energie soustavy částice+Země rovna

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \tag{8.7}$$

Je-li **referenční konfigurace** soustavy zvolena tak, že $y_i = 0$, a je-li jí přisouzena nulová hodnota tíhové potenciální energie $E_{p,i} = 0$, můžeme tíhovou potenciální energii soustavy v obecné konfiguraci (resp. tíhovou potenciální energii částice v obecné poloze vzhledem k Zemi) vyjádřit vztahem

$$E_p = mgy. \tag{8.9}$$

Pružná potenciální energie

Pružná potenciální energie je spojena se stavem napjatosti (při napínání či stlačování) pružných objektů. Pro pružinu, která vyhovuje lineárnímu vztahu pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, je pružná potenciální energie

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{8.11}$$

Tento vztah platí pro případ, že referenční konfigurace odpovídá nenapjaté pružině a je jí přisouzena nulová potenciální energie. Je tedy $E_p = 0$ pro $x = 0$.

Mechanická energie

Mechanickou energii E soustavy definujeme jako součet její kinetické energie E_k a potenciální energie E_p:

$$E = E_k + E_p. \tag{8.12}$$

Kinetická energie soustavy je součtem kinetických energií všech jejích objektů. Potenciální energie je součtem všech příspěvků odpovídajících konzervativním interakčním silám uvnitř soustavy. Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, nemění se její mechanická energie E. Tuto skutečnost nazýváme **zákonem zachování mechanické energie** a píšeme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1}. \tag{8.17}$$

Indexy 1 a 2 odpovídají různým okamžikům v průběhu energiových změn. Zákon zachování mechanické energie lze zapsat i ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \tag{8.18}$$

Křivky potenciální energie

Je-li sledovaná částice v soustavě popsána svou polohou x a známe-li závislost potenciální energie E_p soustavy na této poloze, můžeme vyjádřit výslednou sílu, kterou zbytek soustavy působí na částici:

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{8.19}$$

Při zadání funkce $E_p(x)$ grafem lze pro libovolnou hodnotu x zjistit hodnotu $F(x)$ jako záporně vzatou směrnici tohoto grafu. Kinetickou energii částice lze pak spočítat ze vztahu

$$E_k(x) = E - E_p(x), \tag{8.21}$$

kde E je mechanická energie soustavy. **Bodem obratu** rozumíme takovou polohu x, v níž se obrací směr pohybu částice (tj. $E_k = 0$). Částice je v **rovnováze** v každém bodě, v němž je směrnice grafu funkce $E_p(x)$ nulová ($F(x) = 0$).

Práce vnějších a nekonzervativních sil

Uvažujme částici, která je součástí soustavy. Působí-li na ni vnější síla $\boldsymbol{F}$, která při změně konfigurace soustavy vykoná práci W, změní se o tuto hodnotu mechanická energie soustavy:

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E. \tag{8.24, 8.25}$$

Působí-li v soustavě dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_d$ a $-\boldsymbol{F}_d$, je změna celkové mechanické energie soustavy dána vztahem

$$\Delta E = -F_d d, \tag{8.27}$$

kde d je velikost posunutí sledované částice při změně konfigurace soustavy. O úbytku mechanické energie, k níž vlivem třecích sil došlo, hovoříme jako o **energii rozptýlené** třecími silami. Rozptýlená energie je rovna práci sil $\boldsymbol{F}_d$ a $-\boldsymbol{F}_d$.

Zákon zachování energie

V izolované soustavě může docházet ke změnám různých typů energie, avšak celková energie soustavy E_{celk} se zachovává. Tento zákon zachování lze zapsat ve tvaru

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} + \Delta E_{ostatní} = 0. \tag{8.34}$$

ΔE_{int} je změna vnitřní energie soustavy a zahrnuje změny vnitřní energie všech jejích objektů.

Není-li soustava izolovaná, dochází vlivem působení vnějších sil ke změnám její celkové energie. Změna celkové energie soustavy je rovna práci vykonané vnějšími silami

$$W = \Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int}. \tag{8.35}$$

Výkon

Výkon síly udává, s jakou „rychlostí" dochází při jejím působení ke změnám energie soustavy. Dojde-li za dobu Δt ke změně energie o ΔE (tato změna je rovna práci, kterou síla za dobu Δt vykonala), je **průměrný výkon** síly roven

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8.36}$$

Okamžitý výkon síly je dán vztahem

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{8.37}$$

Hmotnost a energie

Energiovým ekvivalentem E hmotnosti m rozumíme energii danou vztahem

$$E = mc^2, \tag{8.39}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Pro výpočet energiového ekvivalentu v megaelektronvoltech je třeba údaj o hmotnosti zadaný v atomových jednotkách (u) vynásobit faktorem $931{,}5\ \mathrm{MeV \cdot u^{-1}}$. Energii uvolněnou či pohlcenou při jaderných nebo chemických reakcích vyjadřujeme vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2, \tag{8.40}$$

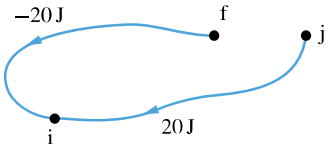
kde Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti. (Hodnota Q je kladná, jestliže se při reakci energie uvolňuje, a záporná, je-li reakce doprovázena pohlcením energie.)

Kvantování energie

Energie v mikroskopických soustavách, jakými jsou např. atomy, je **kvantována** (nabývá pouze některých hodnot). Soustava se může nacházet v **kvantových stavech** charakterizovaných povolenými hodnotami energie. Energie soustavy nenabývá žádných jiných hodnot. Nejnižší energie odpovídá **základnímu stavu** soustavy, vyšší hodnoty energie příslušejí jejím **excitovaným stavům**. Jestliže soustava získává, či ztrácí energii pohlcením (absorpcí), či vyzářením (emisí) světla, je energie světla vždy rovna rozdílu některých povolených hodnot energie soustavy.

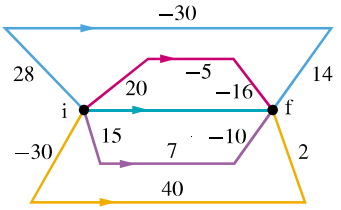
OTÁZKY

1. Částice na obr. 8.18 se pohybuje mezi polohami (f) a (i), resp. (j) a (i) ve vyznačených směrech. Přitom na ni působí konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, která při jednotlivých přesunech částice vykoná práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jakou práci by síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při přemístění částice z polohy (f) do polohy (j)?



Obr. 8.18
Otázka 1

2. Částice na obr. 8.19 se může dostat z polohy (i) do polohy (f) různými cestami. V obrázku je vyznačena jedna přímá cesta a čtyři možnosti pohybu částice po lomených čarách. Při pohybu po přímé cestě a po třech ze čtyř lomených čar působí na částici pouze konzervativní síla $\boldsymbol{F}_c$. Při pohybu po čtvrté trajektorii se přidá ještě působení nekonzervativní síly $\boldsymbol{F}_{nc}$. Každý z přímých úseků jednotlivých lomených trajektorií je opatřen údajem o práci (v joulech), kterou vykonala výslednice sil působících na částici při jejím pohybu po tomto úseku. (a) Jakou práci vykonaly všechny síly působící na částici při jejím pohybu z (i) do (f) po přímé trajektorii? (b) Jakou práci vykonala nekonzervativní síla $\boldsymbol{F}_{nc}$ při pohybu částice po čtvrté trajektorii?

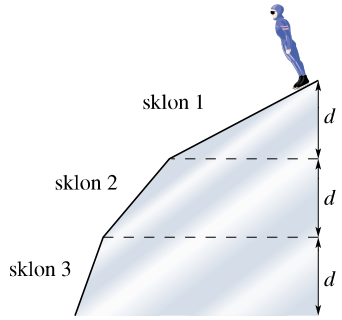


Obr. 8.19
Otázka 2

3. Pružina je oproti nenapjatému stavu protažena o 3,0 cm. Uvažujeme čtyři možné koncové stavy pružiny: (a) protažena o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm, (d) protažena o 4,0 cm. Uspořádejte tyto možnosti sestupně podle změny potenciální energie pružiny při přechodu z počátečního do koncového stavu.

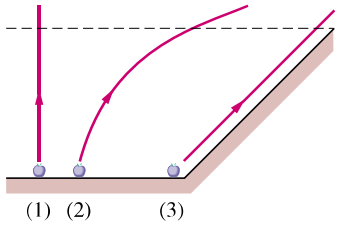
4. Odvážný bruslař na obr. 8.20 sjíždí po ledovém svahu se třemi různými sklony. Výška všech úseků je stejná a rovna d. Uspořádejte jednotlivé úseky sestupně podle (a) práce vykonané tíhovou silou působící na bruslaře, (b) změny jeho kinetické energie.

5. Kokosový ořech je vržen ze skalního útesu do širokého plochého údolí s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Následující možnosti volby směru počáteční rychlosti uspořádejte sestupně (a) podle počáteční kinetické energie ořechu, (b) podle kinetické energie ořechu při jeho dopadu na dno údolí: (1) vektor $\boldsymbol{v}$ směřuje téměř svisle vzhůru, (2) $\boldsymbol{v}$ směřuje vzhůru pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (3) směr vektoru $\boldsymbol{v}$ je vodorovný, (4) $\boldsymbol{v}$ směřuje dolů pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (5) $\boldsymbol{v}$ směřuje téměř svisle dolů.



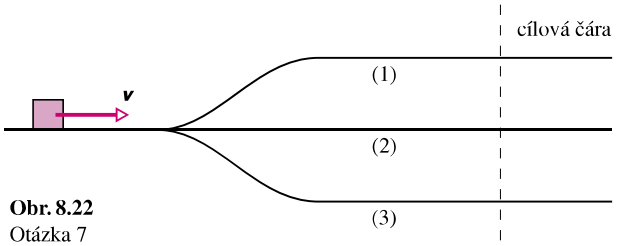
Obr. 8.20
Otázka 4

6. Na obr. 8.21 jsou tři švestky, které jsou vymrštěny z míst ležících na stejné vodorovné úrovni rychlostmi o stejných velikostech. Jedna z nich se pohybuje svisle vzhůru, druhá je vržena pod malým úhlem vzhledem ke svislému směru a třetí klouže po dokonale hladké nakloněné rovině. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti výsledné rychlosti švestek při dosažení úrovně vyznačené přerušovanou čarou.



Obr. 8.21
Otázka 6

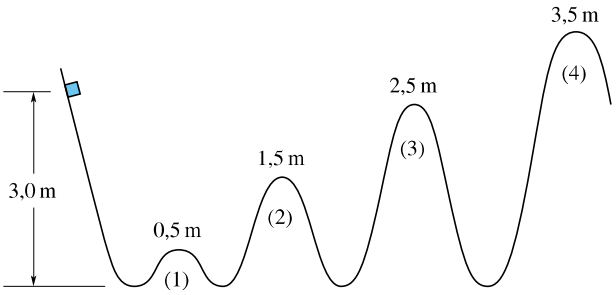
7. Kostku pohybující se zpočátku po vodorovné podložce (obr. 8.22) je možné navést na kteroukoli ze tří vyznačených drah



Obr. 8.22
Otázka 7

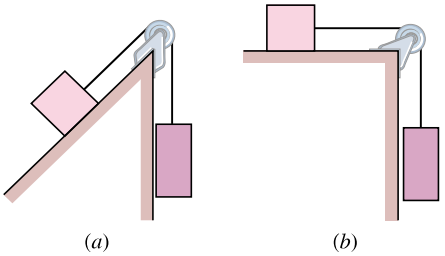
vedených v různých úrovních vzhledem k původní vodorovné rovině. Ve všech případech je podložka dokonale hladká. Kostku sledujeme do okamžiku, než dospěje k cílové čáře (zakreslena přerušovaně). Uspořádejte dráhy sestupně (a) podle velikosti rychlosti kostky v okamžiku průchodu cílovou čarou, (b) podle doby pohybu.

8. Malá krychlička je volně vypuštěna z bodu ve výšce 3,0 m nad základní úrovní po dokonale hladké trati (obr. 8.23). V obrázku jsou vyznačeny výšky vrcholků, které jsou na trati vymodelovány. Všechny pahorky mají v okolí nejvyššího bodu stejný kruhový tvar. Předpokládáme, že krychlička v žádném bodě neztratí kontakt s dráhou. (a) Přes který pahorek krychlička nepřejde? (b) Jaký bude její další pohyb? (c) Na kterém z vrcholků má krychlička největší dostředivé zrychlení a (d) na kterém z nich na ni podložka působí nejmenší tlakovou silou?



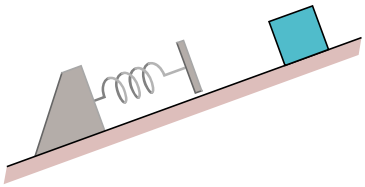
Obr. 8.23 Otázka 8

9. Na obr. 8.24 vidíme dvě uspořádání dvou experimentů s dvojicí kostek. Kostky jsou spojeny lankem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti, která se může otáčet bez tření. Podložka, po které se pohybuje světlejší kostka, je v obou případech dokonale hladká. V obou případech visutá kostka po uvolnění soustavy klesá. Uvažujme celkovou energii kostek v časovém intervalu, během něhož kostka klesne o vzdálenost d. Rozhodněte, zda kinetická energie kostek v uspořádání (a) je po uplynutí tohoto intervalu větší, menší, nebo stejná jako v uspořádání (b).



Obr. 8.24 Otázka 9

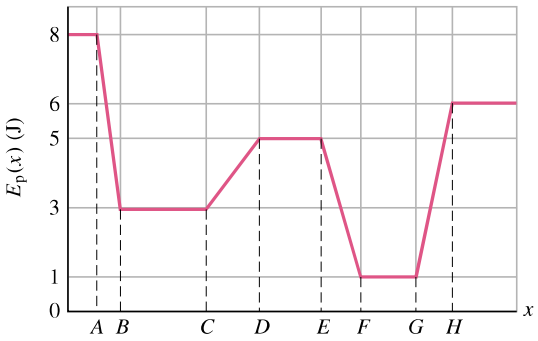
10. Kostku zakreslenou na obr. 8.25 jsme v okamžiku t_1 vypustili z klidu po dokonale hladké nakloněné rovině. V okamžiku t_2 narazí kostka na pružinu zanedbatelné hmotnosti, připevněnou k nakloněné rovině, a stlačuje ji. Stlačení pružiny je maximální v okamžiku t_3. Jak se v časovém intervalu od t_1 do t_3 mění (a) kinetická energie kostky, (b) tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země, (c) pružná potenciální energie pružiny, (d) mechanická energie soustavy tvořené jen kostkou a Zemí, (e) mechanická energie pružiny, (f) mechanická energie soustavy kostka + pružina + Země?



Obr. 8.25 Otázka 10

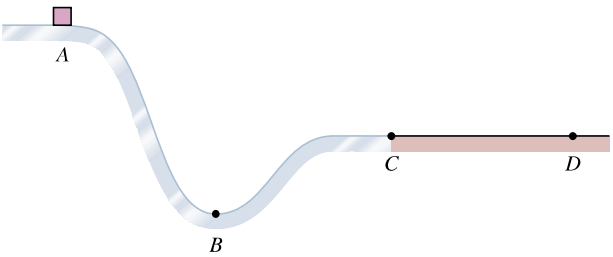
11. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie E a kinetická energie E_k částice v kontrole 4, (a) má-li být částice uvězněna v potenciálové jámě, (b) má-li být umožněn pohyb částice pouze vlevo od bodu D?

12. Na obr. 8.26 je graf potenciální energie částice. (a) Uspořádejte úseky AB, BC, CD a DE sestupně podle velikosti síly působící na částici. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie částice E, má-li částice (b) být uvězněna v levé potenciálové jámě, (c) v pravé potenciálové jámě, (d) mít možnost pohybu mezi jámami, ale nedostat se vpravo za bod H? V případě situace (d) určete, ve kterém z úseků má částice (e) největší kinetickou energii, (f) nejmenší rychlost.



Obr. 8.26 Otázka 12

13. Kostka sjíždí po skluzavce znázorněné na obr. 8.27. Mezi body A a C je skluzavka dokonale hladká, mezi body C a D působí na kostku třecí síla. Rozhodněte, zda v jednotlivých úsecích dráhy kinetická energie kostky roste, klesá, nebo zůstává konstantní: (a) AB, (b) BC, (c) CD. (d) Jak je tomu v každém z těchto úseků s mechanickou energií kostky?



Obr. 8.27 Otázka 13

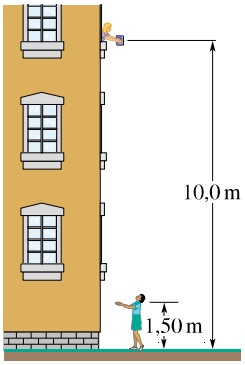
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 8.3 Určení hodnot potenciální energie

1C. Částice náleží do soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$. Je-li částice v bodě A, je potenciální energie soustavy rovna 40 J. Během pohybu částice z bodu A do bodu B vykonají interakční síly práci +25 J. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je částice v bodě B?

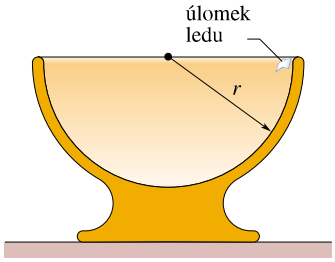
2C. Jaká je tuhost pružiny, jejíž potenciální energie je 25 J při stlačení o 7,5 cm vzhledem k nenapjatému stavu?

3C. Student hodil kamarádovi z okna knihu, jejíž hmotnost je 2,00 kg. Přítel stojí pod oknem a drží ruce ve výšce 1,5 m nad zemí, aby knihu zachytil (obr. 8.28). (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na knihu od okamžiku jejího vypuštění do chvíle, kdy ji přítel chytil? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy kniha + Země? Zvolme nulovou hladinu tíhové potenciální energie této soustavy na zemském povrchu. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku (c) vypuštění knihy, (d) zachycení knihy?



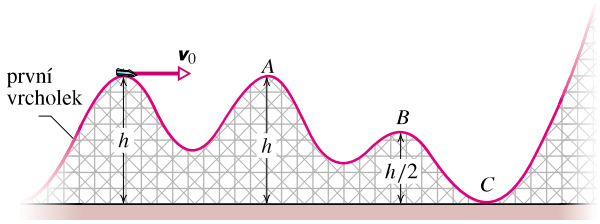
Obr. 8.28 Cvičení 3 a 12

4C. Ledový úlomek o hmotnosti 2,00 g jsme volně vypustili z bodu na vnitřním okraji polokulového poháru o poloměru $r = 22{,}0$ cm (obr. 8.29). Tření mezi ledem a stěnou poháru je zanedbatelné. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na úlomek při jeho přesunutí na dno poháru? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy úlomek + Země? (c) Konfiguraci, v níž je úlomek na dně poháru, přisoudíme nulovou potenciální energii. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku vypuštění ledového úlomku? (d) Jaká je hodnota potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je úlomek na dně poháru, jestliže pro změnu přisoudíme její nulovou hodnotu konfiguraci, v níž je na jeho okraji?



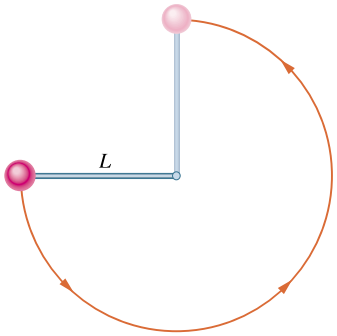
Obr. 8.29 Cvičení 4 a 13

5C. Vozík horské dráhy má hmotnost m a pohybuje se po dráze bez tření. Prvním vrcholkem dráhy (obr. 8.30) projíždí rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na vozík, od tohoto počátečního okamžiku do okamžiku průjezdu vozíku (a) bodem A, (b) bodem B, (c) bodem C? Tíhové potenciální energii soustavy vozík + Země přisoudíme nulovou hodnotu v konfiguraci, v níž je vozík v bodě C. Jaká je její hodnota při průjezdu vozíku (d) bodem B, (e) bodem A?



Obr. 8.30 Cvičení 5 a 14

6C. Koule o hmotnosti m je upevněna na konci tenké tyčky o délce L (obr. 8.31), jejíž hmotnost je zanedbatelná. Druhý konec tyčky je uchycen tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ve svislé rovině. Tyčku nastavíme do vodorovné polohy a udělíme kouli směrem dolů takovou rychlost, aby prošla částí kružnice vyznačenou na obrázku a dosáhla nejvyššího bodu právě s nulovou rychlostí. Určete práci, kterou vykonala tíhová síla působící na kouli mezi počátečním bodem a (a) nejnižším bodem trajektorie, (b) nejvyšším bodem trajektorie, (c) bodem ležícím na protilehlé straně trajektorie na stejné úrovni s počátečním bodem. (d) Konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v počátečním bodě, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguracím (a), (b) a (c)?

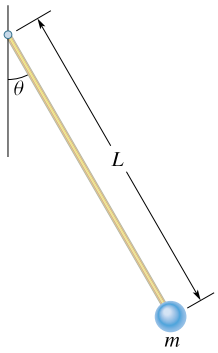


Obr. 8.31 Cvičení 6 a 15

7Ú. Pružina o tuhosti $3\,200\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ je protažena tak, že její pružná potenciální energie je 1,44 J. (Pro nenapjatou pružinu klademe $E_p = 0$.) Jaká bude změna pružné potenciální energie, změní-li se stav pružiny tak, že pružina bude (a) napjata o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm?

8Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg házíme ze skály vysoké 12,5 m. Počáteční rychlost koule svírá s vodorovnou rovinou úhel 41,0°, míří vzhůru a má velikost $14{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na kouli, od počátečního okamžiku do okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skálou? (b) Jak se během letu koule změní tíhová potenciální energie soustavy koule+Země? (c) Konfiguraci, v níž je koule na vrcholku skály, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie soustavy koule + Země. Jaká je její hodnota při dopadu koule na zem?

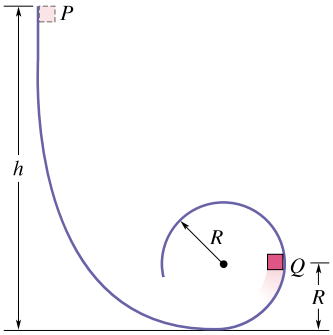
9Ú. Tenká tyč délky L a zanedbatelné hmotnosti je na konci uchycena tak, aby se mohla otáčet ve svislé rovině, podle obr. 8.32. K jejímu druhému konci je upevněna těžká koule o hmotnosti m. Tyč odchýlíme od svislého směru o úhel θ a volně vypustíme. Uvažme časový interval mezi uvolněním tyče a okamžikem, kdy koule prochází nejnižším bodem své trajektorie. (a) Jakou práci vykoná v tomto intervalu tíhová síla působící na kouli? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy koule+Země? (c) Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v krajní poloze, přisoudíme-li nejnižší poloze koule nulovou hodnotu této energie?



Obr. 8.32 Úlohy 9 a 20

10Ú. Malá kostka o hmotnosti m může klouzat bez tření po dráze tvaru „smyčky smrti“, znázorněné na obr. 8.33. Kostku vypustíme z klidové polohy v bodě P, který leží ve výšce $h = 5R$ nade dnem smyčky. Jakou práci vykoná tíhová síla působící na kostku od okamžiku jejího vypuštění z bodu P do okamžiku průchodu (a) bodem Q, (b) vrcholem smyčky? Konfiguraci soustavy kostka + Země, v níž je kostka na dně smyčky, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká je tíhová potenciální energie soustavy, je-li kostka (c) v bodě P, (d) v bodě Q, (e) ve vrcholu smyčky?

11Ú. Částice se pohybuje podél osy x z bodu $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$ do bodu $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$ a pak zpět do výchozího bodu $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Jednou



Obr. 8.33 Úlohy 10 a 39

ze sil, které na ni při tom působí, je síla $\boldsymbol{F}$, která má rovněž směr osy x. Jakou práci vykoná tato síla při každém takovém oběhu částice, jestliže její složka ve směru osy x nabývá při pohybu z počátečního bodu do bodu obratu, resp. při návratu, těchto hodnot: (a) pohyb k bodu obratu: $F_x = 3{,}0\,\mathrm{N}$, resp. pohyb zpět: $F_x = -3{,}0\,\mathrm{N}$, (b) 5,0 N, resp. 5,0 N, (c) $2{,}0x$, resp. $-2{,}0x$, (d) $3{,}0x^2$, resp. $3{,}0x^2$? Souřadnice x je zadávána v metrech a údaje o síle $\boldsymbol{F}$ v newtonech. (e) Ve kterých z uvedených případů by mohla být síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní?

ODST. 8.4 Zákon zachování mechanické energie

12C. (a) Jak velkou rychlost má kniha, o níž jsme uvažovali ve cvič. 3, v okamžiku, kdy ji zachytí člověk pod oknem? (b) Jaká by v okamžiku zachycení byla rychlost knihy, jejíž hmotnost by byla dvojnásobná?

13C. (a) Jak velkou rychlost má na dně poháru úlomek ledu, kterým jsme se zabývali ve cvič. 4? (b) Jak velkou rychlost by měl na dně poháru jiný úlomek, jehož hmotnost by byla dvojnásobná?

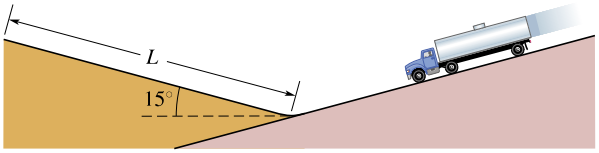
14C. Určete rychlost vozíku horské dráhy ze cvič. 5 v bodech (a) A, (b) B a (c) C. (d) Poslední, nejvyšší, pahorek již vozík nepřekoná. Do jaké výšky vyjede po jeho svahu? (e) Zodpovězte znovu otázky (a) až (d) pro vozík o dvojnásobné hmotnosti.

15C. (a) Jakou počáteční rychlost jsme udělili kouli ve cvič. 6? Jaká byla její rychlost (b) v nejnižším bodě trajektorie, (c) v bodě protilehlém k počátečnímu bodu?

16C. Člověk o hmotnosti 70,0 kg vyskočil z okna a dopadl do záchranné plachty rozestřené a uchycené v hloubce 11,0 m pod oknem. Během brzdění pádu se plachta napínala a v okamžiku, kdy člověk dosáhl nulové rychlosti, bylo její dno 1,50 m pod původní úrovní. Předpokládejme, že se mechanická energie soustavy člověk+plachta+Země během popsaného děje zachovává a že chování pružné plachty lze popsat pomocí modelu ideální pružiny. Určete pružnou energii plachty ve stavu, kdy je napjata o 1,50 m.

17C. Nákladní automobil s vadnými brzdami sjíždí po svahu (obr. 8.34). V okamžiku, kdy jej řidič navádí na bezpečnostní nájezd o sklonu 15°, ukazuje tachometr údaj $130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou nejmenší délku L by musel nájezd mít, aby na něm automobil

ještě dosáhl nulové okamžité rychlosti? Proč bývají bezpečnostní nájezdy obvykle pokryty silnou vrstvou písku, nebo štěrku?



Obr. 8.34 Cvičení 17

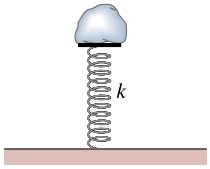
18C. Proud sopečného popela se pohybuje po vodorovném povrchu a dorazí ke svahu se stoupáním 10°. Čelo proudu urazí podél svahu ještě 920 m a zastaví se. Dejme tomu, že plyny unášené proudem jej nadnášejí a minimalizují tak tření mezi částečkami popela a zemským povrchem. Předpokládejme také, že mechanická energie souboru částic v oblasti čela proudu se zachovává. Jaká je počáteční rychlost čela proudu?

19Ú. Balon naplněný vodou o hmotnosti 1,50 kg je vyhozen svisle vzhůru počáteční rychlostí 3,00 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je v tom okamžiku kinetická energie balonu? (b) Jakou práci vykoná tíhová síla působící na balon během jeho výstupu k bodu obratu? (c) Jak se během výstupu změní tíhová potenciální energie soustavy balon + Země? (d) Jaká je tíhová potenciální energie této soustavy v okamžiku, kdy balon dosáhne nejvyššího bodu, přisoudíme-li nulovou hodnotu této energie konfiguraci, v níž je soustava v počátečním okamžiku? (e) Položme naopak $E_p = 0$ v konfiguraci, v níž je balon v nejvyšším bodě své trajektorie. Jaká byla potenciální energie soustavy balon + Země v okamžiku vyhození balonu? (f) Jaké výšky nad povrchem Země balon dosáhne?

20Ú. Jaká je rychlost koule z úlohy 9 v nejvyšším bodě její trajektorie, je-li $L = 2{,}00$ m a $\theta = 30°$?

21Ú. (a) Určete velikost rychlosti sněhové koule z úlohy 8 v okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skaliskem. Při řešení úlohy je samozřejmě možné použít výsledků kap. 4. Vyjděte však raději z energiových úvah. (b) Jak by se změnil výsledek úlohy (a), kdyby byla koule vyhozena opět pod úhlem 41,0° vzhledem k vodorovné rovině, avšak směrem *dolů*?

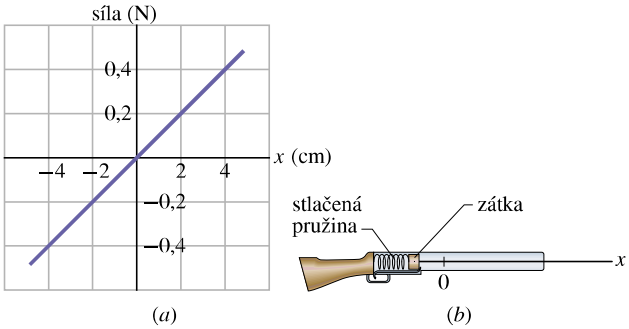
22Ú. Na obr. 8.35 je vyobrazen kámen o hmotnosti 8 kg spočívající na svislé pružině. Pružina je kamenem stlačena o 10,0 cm. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu stlačíme o dalších 30,0 cm a uvolníme. Bod, v němž se kámen nachází v tomto okamžiku, označme U. Jaká je pružná potenciální energie soustavy bezprostředně před uvolněním pružiny? (c) Jaká změna tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země odpovídá přemístění kamene z bodu U do nejvyššího bodu nad povrchem Země, jehož kámen dosáhne? (d) Jaká je největší výška kamene nad bodem U?



Obr. 8.35
Úloha 22

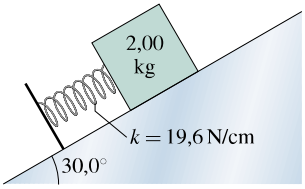
23Ú. Kulka o hmotnosti 5,0 g je vystřelena ze vzduchovky svisle vzhůru. Má-li kulka právě doletět k terči umístěnému ve výšce 20 m nad místem, v němž se nacházela před výstřelem (spočívala na horním konci stlačené svislé pružiny), musí být pružina před výstřelem stlačena o 8,0 cm. (a) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kulka + Země během výstupu kulky? (b) Jak se změní pružná potenciální energie pružiny během výstřelu? (c) Jaká je tuhost pružiny?

24Ú. Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny na obr. 8.36a odpovídá dětské špuntovce z obr. 8.36b. Pružina připravená k výstřelu je stlačena o 5,5 cm, hmotnost zátky sloužící jako náboj je 3,8 g. (a) S jak velkou rychlostí opustí zátka hlaveň za předpokladu, že ztrácí s pružinou kontakt v okamžiku, kdy konec pružiny prochází polohou odpovídající nenapjatému stavu? (b) Předpokládejme pro změnu, že se zátka k pružině přilepila a ještě ji o 1,5 cm protáhne, než s ní ztratí kontakt. Jaká bude rychlost vystřelené zátky nyní?



Obr. 8.36 Úloha 24

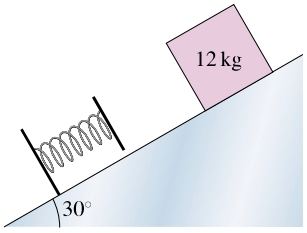
25Ú. Dvoukilogramová kostka spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0° a proti sklouznutí je zajištěna pružinou (obr. 8.37). Pružinu, jejíž tuhost je 19,6 $\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$, stlačíme tak, aby její celkové stlačení bylo 20,0 cm, a uvolníme. (a) Jaká je pružná potenciální energie stlačené pružiny? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země od okamžiku uvolnění pružiny do okamžiku, kdy kostka dostoupí při pohybu podél nakloněné roviny do nejvyššího bodu své trajektorie? (c) Jakou dráhu urazí kostka podél nakloněné roviny během pohybu popsaného v části (b)?



Obr. 8.37 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 12 kg položíme na nakloněnou rovinu o úhlu sklonu $\theta = 30°$ a vypustíme s nulovou počáteční rychlostí. Na nakloněné rovině je připevněna pružina (obr. 8.38), jejíž tuhost je taková, že ji silou o velikosti 270 N dokážeme stlačit

o 2,0 cm. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o 5,5 cm. (a) Jakou dráhu urazila kostka podél nakloněné roviny od okamžiku, kdy byla vypuštěna, do okamžiku, kdy dosáhla bodu obratu? (b) S jakou rychlostí narazila do pružiny?



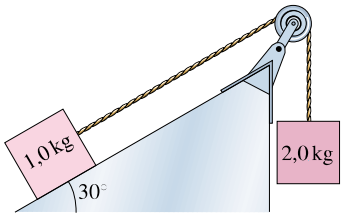
Obr. 8.38 Úloha 26

27Ú. Střela o hmotnosti 0,55 kg je vystřelena z hrany skalního útesu s počáteční kinetickou energií 1 550 J. Nejvyšší bod, kterého střela dosáhne, leží ve výšce 140 m nad ústím hlavně. (a) Jaká je vodorovná složka rychlosti střely? (b) Jaká je svislá složka její rychlosti bezprostředně po výstřelu? (c) V jistém okamžiku má svislá složka rychlosti velikost 65 $m \cdot s^{-1}$. Jaká je v tomto okamžiku poloha střely vzhledem k ústí hlavně (vodorovná vzdálenost a výška, resp. hloubka)?

28Ú. Z okna vyletěl 50 g míček s počáteční rychlostí 8,0 $m \cdot s^{-1}$ vzhůru pod elevačním úhlem 30°. Pomocí energiové metody určete (a) kinetickou energii míčku na vrcholu jeho dráhy, (b) jeho rychlost v okamžiku, kdy je 3 m pod oknem. Závisí tato rychlost na (c) hmotnosti míčku, (d) počátečním úhlu?

29Ú. Pružina dětské vzduchovky má tuhost 7,0 $N \cdot cm^{-1}$. Dítě vystřelilo kulku o hmotnosti 30 g pod úhlem 30° šikmo vzhůru. Kulka dosáhla maximální výšky 1,8 m nad ústím hlavně. (a) Jakou rychlostí opustila kulka hlaveň? (b) Jaké bylo stlačení pružiny před výstřelem?

30Ú. Nakloněná rovina v experimentu na obr. 8.39 je dokonale hladká, kladka má zanedbatelnou hmotnost a může se otáčet bez tření. Tělesa spojená napjatou nepružnou šňůrou jsou nejprve v klidu a pak je uvolníme. Jaká je celková kinetická energie soustavy v okamžiku, kdy těleso o hmotnosti 2,0 kg pokleslo o 25 cm?

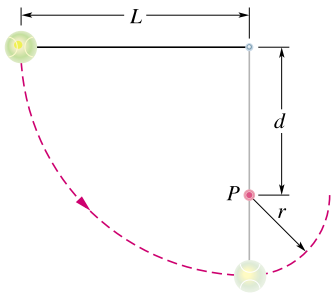


Obr. 8.39 Úloha 30

31Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg jsme vyhodili šikmo vzhůru pod elevačním úhlem 34,0° s počáteční rychlostí o velikosti 20,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je její počáteční kinetická energie? (b) Jak se změní potenciální energie soustavy koule + Země od počátečního okamžiku do okamžiku, kdy koule dosáhne největší výšky nad výchozím místem? (c) Určete tuto výšku.

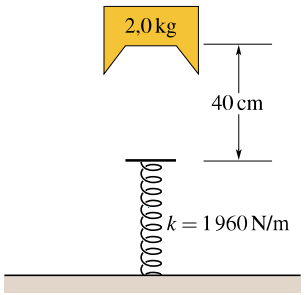
32Ú. Kyvadlo je vyrobeno z kamene o hmotnosti 2,0 kg, který se může houpat na nehmotné šňůře o délce 4,0 m. Při průchodu nejnižším bodem své trajektorie má kámen rychlost 8,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jak velká je jeho rychlost v okamžicích, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel 60°? (b) Jaké největší hodnoty dosahuje během pohybu kyvadla úhel mezi šňůrou a svislým směrem? (c) Určete celkovou mechanickou energii soustavy kyvadlo + + Země, přisoudíme-li nulovou hodnotu její potenciální energie konfiguraci, v níž je kámen v nejnižší poloze.

33Ú. Délka šňůry kyvadla na obr. 8.40 je $L = 120$ cm. V bodě P je umístěn pevný kolík, jehož vzdálenost od bodu závěsu kyvadla je $d = 75{,}0$ cm. Kuličku kyvadla zvedneme tak, aby šňůra byla vodorovná a volně ji vypustíme (obr. 8.40). Kulička se pohybuje po trajektorii vyznačené v obrázku přerušovanou čarou. Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy dosáhne (a) nejnižšího bodu trajektorie, (b) nejvyššího bodu poté, co se šňůra zachytí o kolík.



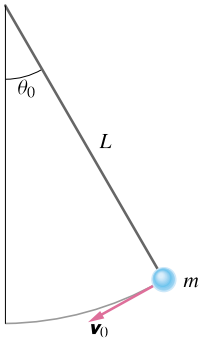
Obr. 8.40 Úlohy 33 a 41

34Ú. Kostka o hmotnosti 2,0 kg je upuštěna z výšky 40 cm a dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 1\,960$ $N \cdot m^{-1}$ (obr. 8.41). Určete největší stlačení pružiny.



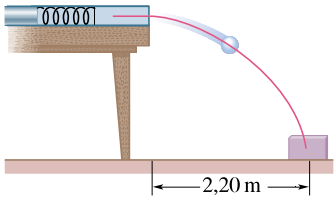
Obr. 8.41 Úloha 34

35Ú. Na obr. 8.42 je nakresleno kyvadlo délky L. Kulička, která prakticky nese veškerou hmotnost kyvadla, má rychlost $\boldsymbol{v}_0$ v okamžiku, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel θ_0. (a) Odvoďte vztah pro rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie. Jaká je nejmenší možná hodnota v_0, má-li kyvadlo (b) dosáhnout polohy, v níž je šňůra vodorovná, (c) projít nejvyšším bodem nad místem závěsu tak, aby se šňůra nepokrčila?



Obr. 8.42 Úloha 35

36Ú. Dvě děti hrají hru, při níž se snaží kuličkou z dětské pušky, připevněné ke stolu, trefit do malé krabičky na podlaze (obr. 8.43). Krabička leží ve vzdálenosti 2,20 m od stolu. Honza stlačil pružinu pušky o 1,10 cm a kulička dopadla 27,0 cm před střed krabičky. Jak musí stlačit pružinu Eva, aby zasáhla cíl?



Obr. 8.43 Úloha 36

37Ú. Velikost gravitační síly, jíž na sebe působí dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2, je dána vztahem

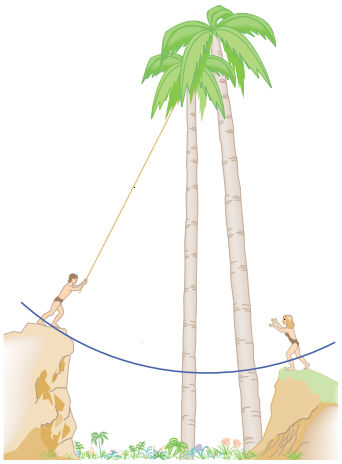
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

kde G je konstanta a x je vzdálenost částic. (a) Najděte odpovídající funkci pro potenciální energii $E_p(x)$. Předpokládejte, že $E_p(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. (b) Jakou práci vykonají síly, jimiž je třeba na částice působit, abychom jejich vzdálenost zvýšili z hodnoty x_1 na hodnotu $x = x_1 + d$ (beze změny jejich kinetické energie)?

38Ú. Na těleso o hmotnosti 20 kg, které je součástí izolované soustavy, působí ve směru osy x konzervativní síla $F = -3{,}0x - 5{,}0x^2$, kde F je v newtonech a x v metrech. Potenciální energii soustavy spojenou s tímto silovým působením považujeme za nulovou při $x = 0$. (a) Jaká je potenciální energie soustavy pro $x = 2{,}0$ m? (b) V okamžiku, kdy je poloha tělesa určena souřadnicí $x = 5{,}0$ m, má jeho rychlost velikost 4,0 m·s^{-1} a je nesouhlasně rovnoběžná s osou x. Jaká je velikost rychlosti tělesa v okamžiku, kdy prochází počátkem soustavy souřadnic? (c) Odpovězte na otázky (a) a (b) za předpokladu, že konfiguraci $x = 0$ přisoudíme potenciální energii $-8{,}0$ J.

39Ú. (a) Jaká je výslednice sil, které působí na kostku z úlohy 10, v okamžiku jejího průchodu bodem Q? (b) Z jaké výšky h je třeba kostku volně vypustit, aby ztratila kontakt se smyčkou právě při průchodu jejím vrcholem? (*Ztráta kontaktu se smyčkou* je charakterizována tím, že tlaková síla smyčky na kostku se právě anuluje.)

40Ú. Představme si románového hrdinu Tarzana, jak se zhoupne ze skalního výběžku na liáně dlouhé 18 m (obr. 8.44). Nejnižší bod trajektorie leží 3,2 m pod úrovní výběžku. Liána vydrží zátěž 950 N, Tarzan váží 688 N. (a) Přetrhne se liána? (b) Jestliže ne, zjistěte, jak velká je největší síla, která ji napíná během zhoupnutí.

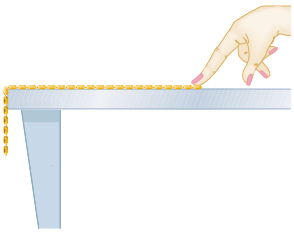


Obr. 8.44 Úloha 40

41Ú. Ukažte, že kulička na obr. 8.40 může oběhnout pevný kolík (při napjaté šňůře) jedině tehdy, je-li $d > 3L/5$. (*Tip*: Kulička musí mít v nejvyšším bodě kruhové trajektorie stále ještě nenulovou rychlost. Víte proč a jak velkou?)

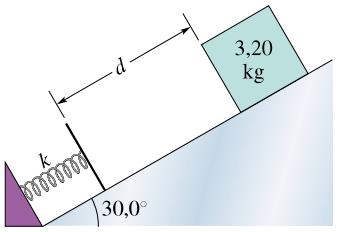
42Ú. Kyvadlo je tvořeno kuličkou o hmotnosti m připevněnou na konci tuhé tyče délky L. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Kuličku zvedneme tak, aby tyčka mířila přímo vzhůru, a pak uvolníme. (a) Jaká je rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie? (b) Jakou silou je napínána tyč při průchodu kuličky tímto bodem? (c) Kyvadlo nyní vychýlíme tak, aby tyč byla vodorovná, a opět uvolníme. Jaký úhel svírá tyč se svislým směrem v okamžiku, kdy jsou tíhová síla a tahová síla tyče působící na kuličku stejně velké?

43Ú*. Řetěz přidržujeme na dokonale hladkém vodorovném stole tak, že jedna čtvrtina jeho délky visí přes okraj (obr. 8.45). Řetěz má délku L a hmotnost m. Jak velkou práci musíme vykonat, abychom vytáhli celý řetěz zpět na stůl?



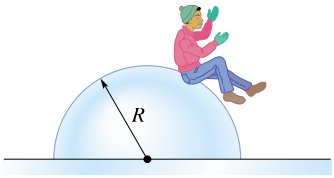
Obr. 8.45 Úloha 43

44Ú*. Kostka o hmotnosti 3,20 kg může klouzat po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Na nakloněné rovině leží pružina o tuhosti 431 $\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, připevněná k jejímu spodnímu okraji (obr. 8.46). Kostka je vypuštěna s nulovou počáteční rychlostí z místa, jehož vzdálenost od volného konce pružiny, měřená podél nakloněné roviny, je d. Kostka narazí do pružiny a urazí ještě 21,0 cm, než se dostane do bodu obratu (její rychlost je v tom okamžiku nulová). (a) Určete vzdálenost d. (b) Určete vzdálenost mezi bodem prvního kontaktu kostky s pružinou a bodem, v němž je rychlost kostky největší.



Obr. 8.46 Úloha 44

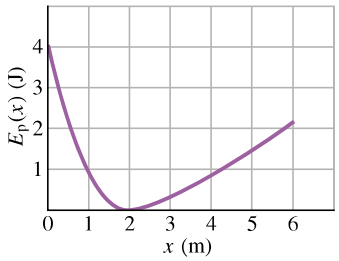
45Ú*. Chlapec si sedl na vršek polokulového ledového náspu (obr. 8.47). Nepatrně se odrazil a začal klouzat dolů. Tření považujte za zanedbatelné a ukažte, že chlapec ztratil kontakt s ledovou polokoulí v bodě ležícím ve výšce $2R/3$ nad vodorovnou podložkou. (*Tip*: Při ztrátě kontaktu se anuluje tlaková síla podložky.)



Obr. 8.47 Úloha 45

ODST. 8.5 Interpretace křivky potenciální energie

46C. Na částici pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Na obr. 8.48 je graf závislosti příslušné potenciální energie E_p na poloze částice. (a) Nakreslete závislost $F(x)$. Použijte stejnou stupnici proměnné x jako na obr. 8.48. (b) Mechanická energie soustavy E je 4,0 J. Nakreslete graf závislosti kinetické energie $E_\mathrm{k}(x)$ částice na poloze x.



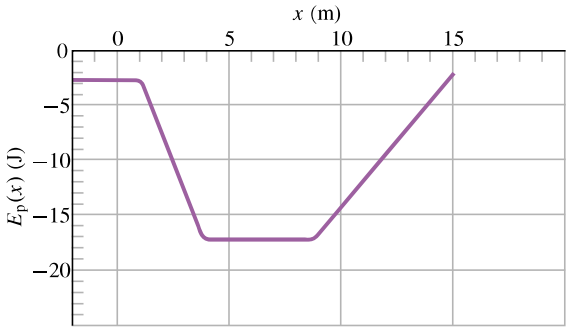
Obr. 8.48 Cvičení 46

47Ú. Potenciální energie dvouatomové molekuly (např. H_2 nebo O_2) je dána vztahem

$$E_\mathrm{p} = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

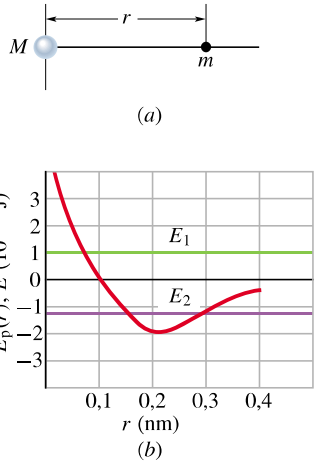
kde r je vzdálenost atomů v molekule a A a B jsou kladné konstanty. Tato potenciální energie souvisí s interakčními (vazebními) silami, které drží molekulu pohromadě. (a) Určete *rovnovážnou vzdálenost* atomů, tj. vzdálenost, jíž odpovídají nulové interakční síly. Rozhodněte, zda je výsledná síla vzájemného působení atomů odpudivá, nebo přitažlivá, jestliže je vzdálenost atomů (b) menší, (c) větší než vzdálenost rovnovážná.

48Ú. Na částici o hmotnosti $m = 2$ kg pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Graf odpovídající potenciální energie je na obr. 8.49.



Obr. 8.49 Úloha 48

V poloze $x = 2{,}0$ m má částice rychlost $v_x = -1{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou velikost a směr má v této poloze síla $F(x)$? (b) Mezi jakými krajními hodnotami x se částice pohybuje? (c) Jaká je rychlost částice v bodě $x = 7{,}0$ m?



Obr. 8.50 Úloha 49

49Ú. Na obr. 8.50a je dvouatomová molekula. Hmotnosti atomů jsou m a M ($m \ll M$) a jejich vzdálenost je r. Na obr. 8.50b je graf závislosti potenciální energie molekuly $E_\mathrm{p}(r)$ na vzdálenosti r. Popište pohyb atomů, (a) je-li celková mechanická

energie molekuly E kladná (např. E_1), (b) záporná (např. E_2). Pro $E_1 = 1{\cdot}10^{-19}$ J a $r = 0{,}3$ nm určete (c) potenciální energii soustavy, (d) celkovou kinetickou energii obou atomů, (e) sílu (velikost a směr) působící na každý atom. Pro jaké hodnoty r je interakce atomů (f) odpudivá, (g) přitažlivá, (h) nulová?

ODST. 8.6 Práce nekonzervativních sil

50C. Pes vleče svou boudu vodorovnou silou 8,0 N. Na boudu působí dynamická třecí síla o velikosti 5,0 N. (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí na boudu pes, a (b) jak velká mechanická energie bude rozptýlena vlivem třecí síly při posunutí boudy o 0,70 m?

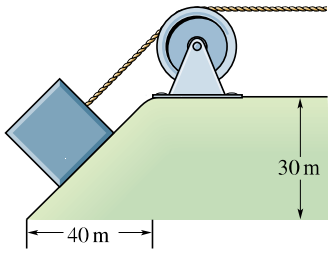
51C. Na kostku z umělé hmoty působí vodorovná síla o velikosti 15 N. Kostka se pohybuje po podlaze stálou rychlostí, přičemž je průběžně zaznamenávána její teplota. Zjistilo se, že při posunutí o 3,0 m se zvýšila vnitřní energie kostky o 20 J. Jakou práci vykonala dynamická třecí síla působící na kostku?

52Ú. Dělník sune bednu o hmotnosti 27 kg po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Síla, kterou na ni při tom působí, svírá s vodorovnou rovinou úhel 32° a míří dolů. (a) Jakou práci vykoná tato síla při posunutí bedny o 9,2 m, je-li koeficient dynamického tření mezi bednou a podlahou 0,20? (b) Určete mechanickou energii rozptýlenou třecími silami.

53Ú. Stroj tlačí kmen o hmotnosti 50 kg stálou rychlostí vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Síla, kterou stroj na kmen působí, je stálá a má vodorovný směr. Koeficient tření mezi kmenem a nakloněnou rovinou je 0,20. (a) Určete práci, kterou vykoná síla stroje při posunutí kmenu o 6,0 m, a (b) práci tíhové síly působící na kmen. (c) Jaká energie je rozptýlena třecími silami?

54Ú. Kostka o hmotnosti 3,57 kg je tažena na laně po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Tahová síla lana má velikost 7,68 N a míří vzhůru po úhlem 15° vzhledem k vodorovné rovině. Vypočtěte (a) práci tahové síly lana při posunutí kostky o 4,06 m a (b) koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou. (c) Jaká energie je přitom rozptýlena třecími silami?

55Ú. Žulový blok o hmotnosti 1 400 kg je tažen pomocí navijáku po nakloněné rovině stálou rychlostí 1,34 m·s^{-1} (obr. 8.51). Koeficient dynamického tření mezi blokem a nakloněnou rovinou je 0,40. Jaký je výkon tahové síly lana?



Obr. 8.51 Úloha 55

ODST. 8.7 Zákon zachování energie

56C. Fotbalista o hmotnosti 70 kg běží rychlostí 10 m·s^{-1}, sklouzne po trávníku a zastaví se vlivem třecích sil. (a) Jak velká energie je třecími silami rozptýlena? (b) Jaká je změna vnitřní energie fotbalisty a podložky, po níž klouže?

57C. Dítě vyhodilo míček o hmotnosti 75 g z místa ve výšce 1,1 m nad zemí. Udělilo mu přitom rychlost o velikosti 12 m·s^{-1}. Ve výšce 2,1 m nad zemí měla rychlost míčku velikost 10,5 m·s^{-1}. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na míček? (b) K jaké energiové ztrátě došlo vlivem odporu vzduchu?

58C. Brankář vyhodil míč rychlostí o velikosti 35 m·s^{-1}. Bezprostředně před tím, než míč zachytil ve stejné výšce útočník, byla velikost rychlosti míče 28 m·s^{-1}. Zjistěte, k jaké ztrátě energie míče došlo vlivem odporu prostředí. Hmotnost míče je 0,3 kg.

59C. Hráč vyhodil míč o hmotnosti 0,63 kg počáteční rychlostí 14 m·s^{-1}. Míč vystoupil do výšky 8,1 m. Jakou energiovou ztrátu způsobil odpor prostředí?

60C. Střela o hmotnosti 9,4 kg byla vystřelena svisle vzhůru. Během jejího výstupu došlo vlivem odporu prostředí k energiové ztrátě 68 kJ. O kolik metrů výše by střela vystoupila při zanedbatelném odporu prostředí?

61C. Výška peřejí na řece je 15 m. Velikost rychlosti toku řeky nad peřejemi je 3,2 m·s^{-1}, pod nimi 13 m·s^{-1}. Jaká část změny tíhové potenciální energie soustavy voda+Země (v procentech), k níž došlo při pádu vody, přispěla k přírůstku energie kinetické? (*Tip*: Úvahu proveďte pro zvolené množství vody, řekněme 10 kg.)

62C. Niagarským vodopádem protéká přibližně $5{,}5{\cdot}10^6$ kg vody za sekundu. (a) K jak velkému poklesu tíhové potenciální energie soustavy voda + Země každou sekundu dochází, padá-li voda z výšky 50 m? (b) Představme si, i když je to nemožné, že by se této energie využilo pro výrobu elektřiny. Jak velký elektrický výkon by byl dodáván do sítě? (c) Kolik bychom získali ročně, kdyby cena jedné kilowatthodiny elektrické energie byla 30 haléřů?

63C. Vodopádem o výšce 100 m proteče 1 200 m^3 vody za každou sekundu. Tři čtvrtiny kinetické energie, kterou voda získá pádem z této výšky, se využijí pro výrobu elektrické energie ve vodní elektrárně. Jaký je výkon generátoru?

64C. Rozloha pevninské části USA je asi $8{\cdot}10^6$ km^2, průměrná nadmořská výška je 500 m. Průměrné roční srážky činí 75 cm. Dvě třetiny dešťové vody se opět odpaří do atmosféry, zbytek se dostává do oceánu. Představme si, že by odpovídající přírůstek tíhové potenciální energie soustavy voda + Země mohl být plně využit pro výrobu elektrické energie. Jaký by byl průměrný výkon pomyslné elektrárny?

65C. Výsadkář o hmotnosti 68 kg padá s konstantní mezní rychlostí 59 m·s^{-1}. (a) Jak rychle klesá tíhová potenciální energie soustavy výsadkář + Země? (b) Jak rychle dochází ke ztrátám mechanické energie (energiová ztráta za sekundu)?

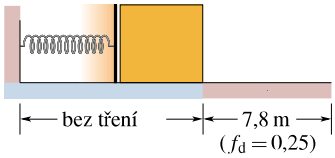
66C. Medvídek o hmotnosti 25 kg sjel ze stromu o výšce 12 m. V počátečním okamžiku byla jeho rychlost nulová, těsně před dopadem na zem měla velikost 5,6 m·s^{-1}. (a) Jak se změnila

potenciální energie soustavy medvídek + Země? (b) Jakou kinetickou energii měl medvídek těsně nad zemí? (c) Jak velká průměrná třecí síla na něj působila?

67C. Kámen o hmotnosti 520 kg sjíždí po svahu dlouhém 500 m a vysokém 300 m. Kámen je zpočátku v klidu. Koeficient dynamického tření mezi kamenem a svahem je 0,25. Zvolme hladinu nulové tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země na úpatí svahu. (a) Jaká byla potenciální energie soustavy, než se kámen dal do pohybu? (b) K jaké ztrátě mechanické energie soustavy došlo během skluzu vlivem tření? (c) Jaká je kinetická energie kamene na úpatí svahu? (d) Jaká je jeho rychlost?

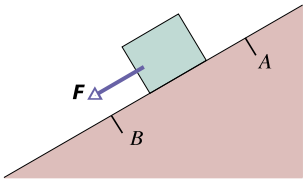
68C. Střela o hmotnosti 30 g letící vodorovnou rychlostí o velikosti 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se zaryla 12 cm hluboko do stěny. (a) Jak se změnila její mechanická energie? (b) Jaká byla velikost průměrné brzdící síly působící na střelu?

69Ú. Kostka o hmotnosti 3,5 kg na obr. 8.52 je urychlována stlačenou pružinou. Tuhost pružiny je 640 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. V okamžiku, kdy je pružina nenapjatá, ztrácí s ní kostka kontakt a pohybuje se dále po vodorovné podložce. Podložka je zčásti dokonale hladká, zčásti je vyrobena z materiálu, který působí na kostku třecí silou charakterizovanou koeficientem tření 0,25. Poloha rozhraní obou částí je shodná s polohou volného konce nenapjaté pružiny (obr. 8.52). Po ztrátě kontaktu s pružinou urazí kostka ještě 7,8 m a zastaví se. (a) K jaké ztrátě mechanické energie došlo při brzdění kostky vlivem třecích sil? (b) Jaká byla největší hodnota kinetické energie kostky? (c) Jaké bylo stlačení pružiny na začátku pokusu?



Obr. 8.52 Úloha 69

70Ú. Kostka na obr. 8.53 se posune po nakloněné rovině z bodu A do bodu B, vzdáleného o 5,0 m. Kromě tíhové, tlakové a třecí síly působí na kostku ještě síla F o velikosti 2,0 N, rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Velikost třecí síly je 10 N. Při přesunu mezi body A a B vzrostla kinetická energie kostky o 35 J. Jakou práci vykonala tíhová síla?

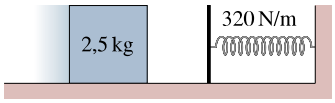


Obr. 8.53 Úloha 70

71Ú. Jeden konec pružiny upevníme ke stropu a na druhý připevníme hlávku zelí. Hlávku pomalu uvolňujeme, až přejde do rovnovážné polohy, v níž je pružná síla kompenzována silou tíhovou. Ukažte, že změna tíhové potenciální energie soustavy hlávka + Země je rovna dvojnásobku přírůstku pružné potenciální energie. Jak to, že se tyto dvě veličiny nerovnají?

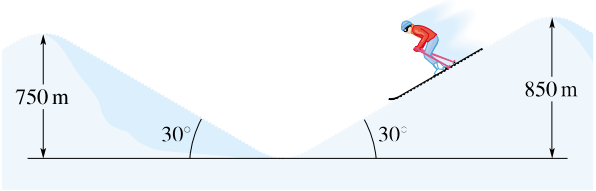
72Ú. Kostku o hmotnosti 2,0 kg přitiskneme k volnému konci vodorovné pružiny a stlačíme pružinu o 15 cm. Poté kostku uvolníme. Kostka bude klouzat po vodorovném stole a zastaví se ve vzdálenosti 75 cm od místa, kde byla uvolněna. Tuhost pružiny je 200 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Určete koeficient tření mezi kostkou a deskou stolu.

73Ú. Kostka o hmotnosti 2,5 kg narazí na konec vodorovné pružiny o tuhosti 320 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ (obr. 8.54). V okamžiku, kdy je kostka v bodě obratu, je pružina stlačena o 7,5 cm. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podložkou je 0,25. (a) Jakou práci vykonala pružná síla působící na kostku během jejího brzdění? (b) K jak velké ztrátě mechanické energie došlo vlivem třecích sil? (c) Jaká byla rychlost kostky v okamžiku nárazu na pružinu?



Obr. 8.54 Úloha 73

74Ú. Výšky dvou zasněžených vrcholků nad údolím jsou 850 m a 750 m. Lyžař sjede z vyššího z nich, zamíří do protisvahu a vyjede na nižší vrcholek. Urazí přitom celkovou dráhu 3,2 km. Průměrný sklon obou svahů je 30° (obr. 8.55). (a) Předpokládejme, že lyžař odstartuje z vyššího vrcholku s nulovou rychlostí, a zanedbejme vliv tření. Jakou rychlost má na nižším vrcholku, neodráží-li se holemi? (b) Jaký by musel být koeficient tření mezi lyžemi a sněhovou pokrývkou, aby se lyžař na nižším vrcholku právě zastavil?



Obr. 8.55 Úloha 74

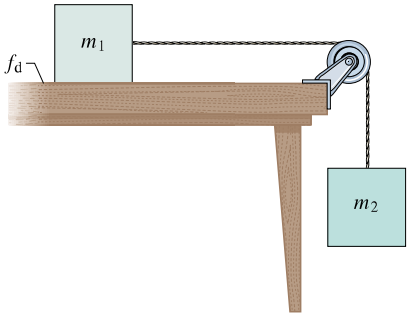
75Ú. V továrně došlo nešťastnou náhodou k uvolnění bedny o hmotnosti 0,2 tuny, která byla upevněna v nejvyšším bodě šikmé rampy. Rampa má délku 4,0 m a její úhel sklonu vzhledem k vodorovné podložce je 39°. Koeficient dynamického tření mezi rampou a bednou je 0,28. (a) Jaká je rychlost bedny na konci rampy? (b) Jak daleko bude bedna klouzat po vodorovné podlaze? (Předpokládáme, že kinetická energie bedny se v okamžiku sklouznutí z rampy na podlahu nezmění.) (c) Vysvětlete, proč jsou odpovědi na otázky (a) i (b) nezávislé na hmotnosti bedny?

76Ú. Dvě kostky spojené šňůrou podle obr. 8.56 jsou uvolněny z klidového stavu. Ukažte, že velikost rychlosti kostek je v zá-

vislosti na uražené dráze L dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - f_d m_1)gL}{m_1 + m_2}},$$

kde f_d je koeficient dynamického tření mezi kostkou m_1 a deskou stolu. Předpokládáme, že kladka má zanedbatelnou hmotnost a otáčí se bez tření.



Obr. 8.56 Úloha 76

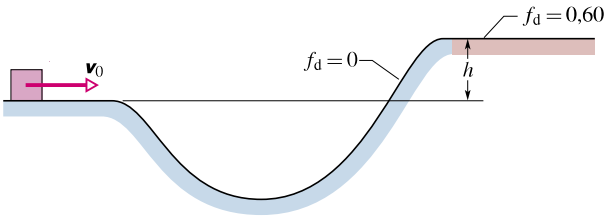
77Ú. Balík o hmotnosti 4,0 kg je uveden do pohybu směrem vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Jeho počáteční kinetická energie je 128 J. Jak daleko bude balík klouzat po nakloněné rovině, je-li koeficient tření 0,30?

78Ú. Nádoba se pohybuje vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 40°. V bodě ležícím ve vzdálenosti 0,55 m od jejího dolního konce (měřeno podél nakloněné roviny) je rychlost nádoby 1,4 m·s^{-1}. Koeficient dynamického tření mezi nádobou a nakloněnou rovinou je 0,15. (a) Jak daleko se bude nádoba podél nakloněné roviny ještě pohybovat? (b) Jaká bude její rychlost poté, co opět sklouzne k dolnímu konci nakloněné roviny?

79Ú. Experimentátor zjistil, že pružina používaná k pokusům *nevyhovuje* Hookovu zákonu. Pružná síla (v newtonech) má při prodloužení o vzdálenost x (v metrech) velikost $52{,}8x + 38{,}4x^2$ a působí proti prodloužení. (a) Vypočtěte práci potřebnou k prodloužení pružiny z hodnoty $x = 0{,}500$ m na hodnotu $x = 1{,}00$ m. (b) Jeden konec pružiny upevníme a k druhému připojíme částici o hmotnosti 2,17 kg. Pružinu protáhneme o $x = 1{,}00$ m a uvolníme. Určete rychlost částice v okamžiku, kdy je pružina prodloužena o $x = 0{,}500$ m. (c) Rozhodněte, zda síla, jíž působí pružina na částici, je konzervativní či nikoliv. Zdůvodněte.

80Ú. Dívenka vážící 267 N se vozí po dětské skluzavce. Skluzavka měří 6,1 m a svírá s vodorovnou rovinou úhel 20°. Koeficient dynamického tření je 0,10. (a) Jakou práci vykoná během jedné „jízdy“ tíhová síla působící na holčičku? (b) Určete energiovou ztrátu způsobenou třecími silami. (c) Jak velkou rychlost bude mít holčička na konci skluzavky, jestliže na jejím vrcholu startuje s rychlostí o velikosti 0,457 m·s^{-1}?

81Ú. Kostka se pohybuje po vodorovném úseku kolejnic na obr. 8.57 rychlostí $v_0 = 6{,}0$ m·s^{-1}, projede dolíkem a vyjede na plošinu vyvýšenou nad původní úroveň o $h = 1{,}1$ m. Na horní plošině je kostka brzděna třecí silou, charakterizovanou koeficientem dynamického tření $f_d = 0{,}60$ a zastaví se poté, co urazila vzdálenost d. Určete tuto vzdálenost.

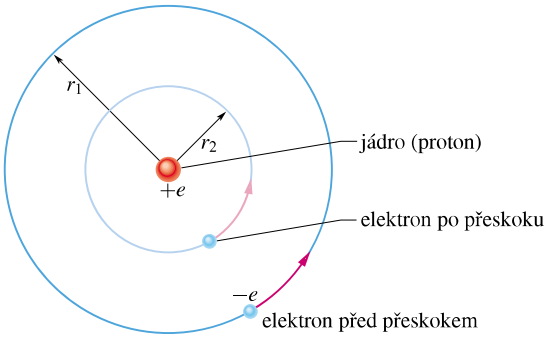


Obr. 8.57 Úloha 81

82Ú. Velikost přitažlivých elektrostatických sil, jimiž na sebe vzájemně působí kladně nabité jádro (proton) a záporně nabitý elektron ve vodíkovém atomu, je dána vztahem

$$F = k\frac{e^2}{r^2},$$

kde e je velikost náboje elektronu a protonu, k je konstanta a r je vzdálenost elektronu od jádra. Předpokládejme, že jádro je nepohyblivé. Představme si, že elektron, který zpočátku obíhal kolem jádra po kružnici o poloměru r_1, náhle „přeskočí“ na kruhovou dráhu o menším poloměru r_2 (obr. 8.58). (a) Určete změnu kinetické energie elektronu užitím druhého Newtonova zákona. (b) Na základě znalosti vztahu mezi silou a potenciální energií určete změnu potenciální energie atomu. (c) Jaký je pokles celkové energie atomu při tomto ději? (Celková energie atomu musí klesnout, neboť při popsaném přechodu elektronu vyzáří atom světlo.)



Obr. 8.58 Úloha 82

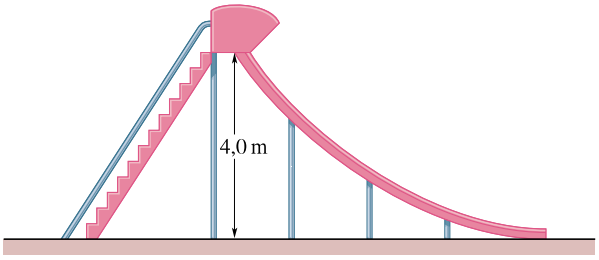
83Ú. Kámen o váze G (v newtonech) je vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Předpokládáme, že na letící kámen působí stálá odporová síla vzduchu o velikosti F. (a) Ukažte, že kámen dosáhne maximální výšky

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + \frac{F}{G})}.$$

(b) Dále ověřte, že rychlost kamene bezprostředně před dopadem na zem je

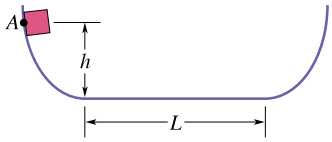
$$v = v_0\left(\frac{G - F}{F + G}\right)^{1/2}.$$

84Ú. Skluzavka ve tvaru kruhového oblouku o poloměru 12 m je vysoká 4,0 m a dotýká se povrchu Země (obr. 8.59). Dítě o hmotnosti 25 kg sjede z vrcholu skluzavky. Při nulové počáteční rychlosti je velikost jeho rychlosti na konci skluzavky 6,2 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je délka skluzavky? (b) Jaká je průměrná velikost třecí síly působící na dítě? Představme si nyní, že by skluzavka byla umístěna tak, aby svislá přímka procházející jejím nejvyšším bodem byla tečnou ke kruhovému oblouku. (c) Jaká by byla v tomto případě délka skluzavky a (d) průměrná velikost třecí síly působící na dítě při skluzu?



Obr. 8.59 Úloha 84

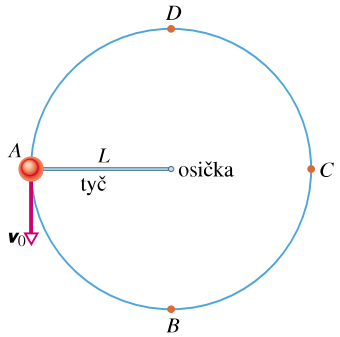
85Ú. Částice může klouzat po kolejnici upravené do tvaru znázorněného na obr. 8.60. Střední vodorovný úsek má délku L. Zakřivené úseky kolejnice jsou dokonale hladké, v rovném úseku však na částici působí třecí síla charakterizovaná koeficientem tření $f_\mathrm{d} = 0{,}20$. Částice je volně vypuštěna z bodu A, ležícího ve výšce $h = L/2$ nad vodorovným úsekem. Kde se částice nakonec zastaví?



Obr. 8.60 Úloha 85

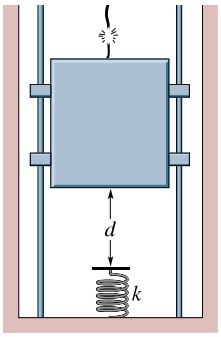
86Ú. Ke konci tenké tuhé tyče o zanedbatelné hmotnosti a délce L je připevněna koule o hmotnosti m (obr. 8.61). Druhý konec tyče je nasazen na tenké osičce tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ležící ve svislé rovině. Koule je z výchozí polohy A, kdy je tyč vodorovná, uvedena do pohybu počáteční rychlostí o velikosti v_0, směřující dolů. Rychlost koule se anuluje právě v okamžiku jejího průchodu bodem D. (a) Vyjádřete v_0 pomocí L, m a g. (b) Jakou silou je namáhána tyč, je-li koule právě v bodě B? (c) Osičku posypeme jemným pískem, aby otáčení tyče bylo poněkud brzděno třením, a uvedeme kyvadlo do pohybu stejným způsobem jako v předchozím pokusu. Koule však nyní dostoupí pouze do bodu C. Jak velká je ztráta mechanické energie způsobená třením? (d) Po několika kmitech se kyvadlo zastaví v poloze B. Určete celkovou energiovou ztrátu způsobenou třením od okamžiku vypuštění kyvadla z výchozí polohy A.

87Ú. Kabina zdviže na obr. 8.62 váží 20 000 N. Tažné lano zdviže se přetrhlo v okamžiku, kdy zdviž stála v prvním poschodí a její dno bylo ve vzdálenosti $d = 4$ m od konce tlumicí pružiny



Obr. 8.61 Úloha 86

o tuhosti $k = 1{,}2{\cdot}10^5\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Při přetržení lana bylo uvedeno do chodu bezpečnostní zařízení, které sevřelo kabinu mezi svislé vodicí kolejnice. Na kabinu tak začala působit třecí síla o stálé velikosti 5 000 N, směřující proti jejímu pohybu. (a) Jaká byla rychlost kabiny těsně před nárazem na tlumicí pružinu? (b) Určete maximální stlačení x pružiny. (c) Jakou dráhu urazí kabina od okamžiku odskoku od pružiny do okamžiku, kdy se dostane do bodu obratu a začne opět padat? (d) Pomocí zákona zachování energie určete přibližně celkovou dráhu, kterou kabina urazí od okamžiku přetržení lana do úplného zastavení. Proč může být odpověď pouze přibližná?

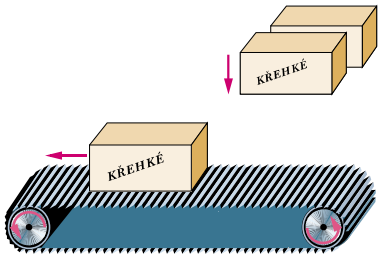


Obr. 8.62 Úloha 87

88Ú. Brusič tlačí kovový nástroj ke kotouči brusky silou o velikosti 180 N. Kotouč má poloměr 20 cm a vykoná 2,5 otáčky za sekundu. Koeficient tření mezi nástrojem a kotoučem je 0,32. Jaký je výkon třecí síly (energiová ztráta způsobená třecí silou za jednu sekundu, která se projeví přírůstkem vnitřní energie soustavy)?

89Ú*. Zboží z balírny se expeduje v krabicích na pásovém přepravníku. Hmotnost krabice se zbožím je 300 kg. Motor přepravníku udržuje velikost rychlosti pásu na stálé hodnotě 1,20 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Balicí stroj uvolňuje krabice tak, aby na pás dopadaly kolmo (obr. 8.63). Koeficient dynamického tření mezi pásem a krabicí je 0,400. Po dopadu pás pod krabicí nejprve prokluzuje. Během velmi krátké doby Δt však prokluzování ustane a krabice se začne pohybovat spolu s pásem. Zvolte vztažnou soustavu spojenou s místností balírny a určete (a) kinetickou energii,

kterou získá krabice za dobu Δt, (b) velikost dynamické třecí síly, kterou působí pás na krabici, (c) energii dodanou soustavě pás + krabice za dobu Δt motorem přepravníku. (d) Vysvětlete, proč se odpovědi (a) a (c) liší.



Obr. 8.63 Úloha 89

ODST. 8.8 Hmotnost a energie

90C. (a) Jaká energie (v joulech) odpovídá hmotnosti 102 g? (b) Kolik let by takový „zdroj energie“ mohl zásobovat jednu domácnost, je-li k provozu domácnosti potřeba průměrný výkon 1,00 kW?

91C. „Mohutnost“ zemětřesení M v tzv. Richterově stupnici souvisí s uvolněnou energií E (v joulech) vztahem

$$\log E = 5{,}24 + 1{,}44M.$$

(a) V roce 1906 bylo San Francisco postiženo zemětřesením o velikosti 8,2 stupňů Richterovy stupnice (obr. 8.64). Kolik energie se při tomto zemětřesení uvolnilo? (b) Jak velká hmotnost je ekvivalentní této energii?

92C. Celková produkce elektrické energie v USA činila v roce 1983 $2{,}31\cdot10^{12}$ kW·h. Určete odpovídající hmotnostní ekvivalent.

93Ú. Jaká nejmenší energie je potřebná k rozštěpení jádra uhlíku ^{12}C (hmotnost 11,996 71 u) na tři jádra helia ^{4}He (hmotnost každého z nich je 4,001 51 u)?

94Ú. Jádro atomu zlata obsahuje 79 protonů a 118 neutronů. Jeho hmotnost je 196,923 2 u. Jaká je jeho vazební energie? Další potřebné údaje najdete v př. 8.10.

95Ú. Při jaderné fúzi popsané rovnicí $\mathrm{d} + \mathrm{t} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n}$ se deuteron (označený symbolem d) sloučí s atomem tritia (označený symbolem t, obsahuje jeden proton a dva neutrony). Vzniká jádro helia (dva protony a dva neutrony) a volný neutron (n). Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou tyto:

d: 2,013 55 u	^{4}He: 4,001 51 u
t: 3,015 50 u	n: 1,008 67 u

(a) Rozhodněte, zda při této reakci dochází k uvolnění energie, nebo k jejímu pohlcení. (b) Jak velká je uvolněná, resp. pohlcená energie?

ODST. 8.9 Kvantování energie

96C. V následující tabulce jsou uvedeny energie pěti nejnižších energiových hladin tří typů hypotetických atomů v elektronvoltech:

TYP A	TYP B	TYP C
3,8	3,2	3,1
3,0	2,7	2,9
2,4	2,0	2,2
1,4	1,2	1,5
0	0	0

U každého z těchto „atomů“ byly zaznamenány dvě emisní spektrální čáry: (a) 1,4 eV, (b) 1,5 eV. Pro každou z nich najděte odpovídající přechody elektronu v jednotlivých atomech.

Obr. 8.64 Cvičení 91. Oblast Nob Hill v San Francisku zničená zemětřesením v roce 1906. Čára zlomu v oblasti San Andreas měřila přes 400 km.

97C. Přístroj sledující chování hypotetického atomu zaznamenal pět případů emise světla, aniž při tom došlo k nové excitaci atomu. Energie vyzářeného světla ve čtyřech z nich jsou 0,7 eV; 0,8 eV; 0,9 eV a 2,0 eV. Poslední hodnota a údaje o pořadí jednotlivých přechodů se ztratily chybou v počítači. Následující tabulka uvádí dvanáct nejnižších energiových hladin atomu v elektronvoltech:

6,5	4,1	2,6
5,3	3,8	2,0
4,9	3,4	1,5
4,5	2,9	0

(a) Jaká energiová hladina odpovídala kvantovému stavu excitovaného atomu před vyzářením? (b) Jaká byla hodnota energie vyzářeného světla, která se ztratila chybou v počítači?

PRO POČÍTAČ

98Ú. Mezní rychlost kulky o hmotnosti 9,8 g při pohybu ve vzduchu je 7,3 m·s^{-1}. Kulku vystřelíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti 15 m·s^{-1}. Numerickou integrací s krokem

$\Delta t = 0{,}1$ s určete polohu a rychlost kulky v libovolném okamžiku $t_n = n \cdot \Delta t$ od výstřelu do okamžiku jejího návratu k místu výstřelu. V každém z okamžiků t_n určete kinetickou energii kulky, její potenciální energii v tíhovém poli Země (potenciální energie soustavy kulka + Země) a celkovou mechanickou energii. K jak velké ztrátě mechanické energie soustavy kulka+Země dojde při výstupu kulky vlivem odporu vzduchu? Jaká je energiová ztráta při pádu kulky? V okamžiku výstřelu přisuzujeme soustavě nulovou potenciální energii.

99Ú. Kostku o hmotnosti 700 g upustíme z výšky h_0 přesně nad koncem svislé pružiny. Pružina má zanedbatelnou hmotnost a její tuhost je $k = 400\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V bodě obratu je pružina stlačena o 19,0 cm. Jakou práci vykonala (a) síla, jíž působila kostka na pružinu, (b) síla, jíž působila pružina na kostku? (c) Z jaké výšky h_0 kostka padala? (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny, kdyby kostka padala z dvojnásobné výšky?

100Ú. Kyvadlo je tvořeno tělesem o hmotnosti 300 g zavěšeným na niti dlouhé 1,4 m. Kyvadlo vychýlíme tak, aby napjatá nit svírala se svislým směrem úhel 30° a uvolníme. Určete (a) rychlost tělesa v okamžiku, kdy nit svírá se svislým směrem úhel 20°, a (b) největší rychlost, jíž těleso dosáhne. (c) Jaký úhel svírá nit se svislým směrem v okamžiku, kdy velikost rychlosti tělesa dosahuje jedné třetiny největší hodnoty?

9
Soustavy částic

Potemnělé hlediště a ozářená scéna. Obecenstvo s obdivem sleduje sólový výstup primabaleríny. Je nadšeno zejména efektními skoky „grand jeté“, při nichž se její hlava i trup pohybují takřka vodorovně téměř po celou dobu letu. Baletka se na scéně doslova vznáší. Laik v hledišti asi není podrobně obeznámen s problematikou gravitačního působení a pohybu těles v tíhovém poli Země. Ví však, že kdyby se sám pokusil takto vyskočit, bude dráha jeho trupu i hlavy spíše parabolická, podobně jako je tomu v případě vyhozeného kamene či fotbalového míče po brankářově výkopu. Na scéně se tedy zjevně děje něco velmi neobvyklého. Jak to baletka dokáže, že se jí gravitace příliš „netýká“?

9.1 VÝZNAČNÝ BOD

Fyzikové rádi přemýšlejí nad složitými problémy a hledají v nich něco jednoduchého a známého. Představme si například, že vyhazujeme do vzduchu baseballovou pálku. Pálka se otáčí. Její pohyb je tedy mnohem složitější než třeba pohyb míčku, který se chová jako hmotný bod (obr. 9.1a). Trajektorie jednotlivých elementů pálky jsou navzájem odlišné. Proto ji při popisu jejího pohybu nelze nahradit hmotným bodem. Pálku je třeba chápat jako soustavu hmotných bodů.

Při podrobnějším zkoumání však zjistíme, že jeden z bodů pálky má význačné postavení. Pohybuje se totiž po jednoduché parabolické dráze, stejně jako se pohybuje částice při šikmém vrhu (obr. 9.1b). Jeho pohyb je přesně takový, jako kdyby (1) v něm byla soustředěna veškerá hmota pálky a (2) působila v něm celková tíhová síla působící na pálku. Tento význačný bod se nazývá **střed hmotnosti** pálky neboli **těžiště**.* Obecně platí:

> Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu).

Těžiště baseballové pálky leží na její podélné ose. Můžeme ho najít tak, že si pálku položíme vodorovně na napjatý prst a vyvážíme ji. Těžiště pak bude ležet na ose pálky právě nad prstem.

9.2 TĚŽIŠTĚ

Zabývejme se nyní problémem, jak nalézt těžiště nejrůznějších soustav. Začneme u soustavy složené pouze z několika částic a teprve pak budeme uvažovat o souborech obsahujících velké množství částic (např. baseballová pálka).

Soustavy částic

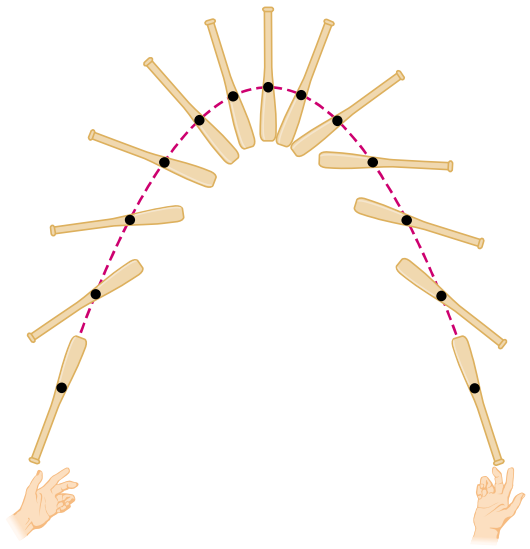
Na obr. 9.2a jsou zakresleny dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2. Jejich vzdálenost je d. Počátek osy x, jehož volba není nijak omezena, jsme vybrali tak, aby splýval s částicí m_1. Polohu těžiště této dvoučásticové soustavy *definujeme* vztahem

$$x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \qquad (9.1)$$

Abychom posoudili, nakolik je tato definice rozumná, uvažujme speciální případy. Zvolme nejprve $m_2 = 0$. Tato volba odpovídá soustavě s jedinou částicí m_1. Její těžiště

* V celé knize užíváme označení „těžiště“, „hmotný střed“ a „střed hmotnosti“ jako synonyma. V čl. 13.3 najdete podrobné zdůvodnění.

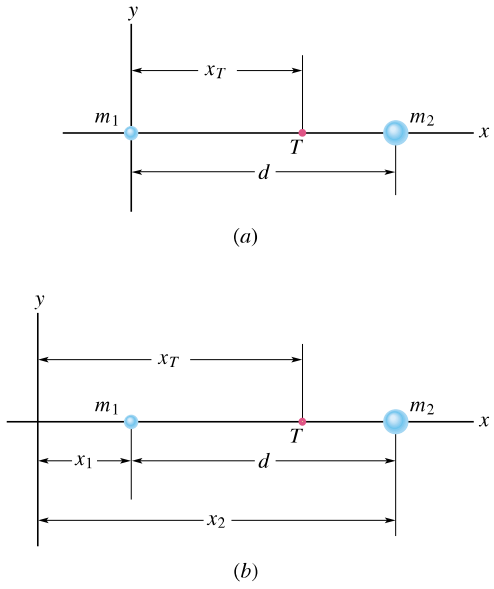
(a)



(b)

Obr. 9.1 (a) Míček vržený šikmo vzhůru se pohybuje po parabolické trajektorii. (b) Těžiště baseballové pálky (černá tečka) vyhozené do vzduchu se rovněž pohybuje po parabole, ostatní body pálky však opisují trajektorie komplikovanější.

by mělo s touto částicí splývat. Z rov. (9.1) skutečně plyne $x_T = 0$. Je-li naopak $m_1 = 0$, obsahuje soustava opět jedinou částici, tentokrát m_2. Podle očekávání dostáváme $x_T = d$. Pro $m_1 = m_2$ by mělo být těžiště uprostřed mezi částicemi. Skutečně tomu tak je, neboť z rov. (9.1) dostáváme $x_T = d/2$. Ze vztahu (9.1) také vyplývá, že pro obecně zvolené nenulové hmotnosti obou částic leží hodnota x_T vždy uvnitř intervalu $(0, d)$. Těžiště tedy v každém případě leží někde mezi oběma částicemi.



Obr. 9.2 (a) Vzdálenost dvou částic o hmotnostech m_1 a m_2 je d. Bod označený symbolem T je těžištěm dvoučásticové soustavy, vypočteným z rov. (9.1). (b) Situace se od obr. (a) liší obecným umístěním počátku soustavy souřadnic. Těžiště je vypočteno z rov. (9.2). Poloha těžiště soustavy vzhledem k oběma částicím je v obou případech stejná.

Na obr. 9.2b je znázorněna situace odpovídající obecnější volbě počátku soustavy souřadnic. Poloha těžiště je v takovém případě definována vztahem

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.2}$$

Všimněme si, že pro $x_1 = 0$ přejde rov. (9.2) na jednodušší tvar (9.1). Posunutí počátku soustavy souřadnic nemá vliv na polohu těžiště vzhledem k jednotlivým částicím.

Přepišme rov. (9.2) do tvaru

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \tag{9.3}$$

kde M je celková hmotnost soustavy, $M = m_1 + m_2$. Platnost tohoto vztahu lze snadno zobecnit na případ soustavy n částic umístěných na ose x. Celková hmotnost soustavy je $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a těžiště je v bodě o souřadnici

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{M} = \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9.4}$$

Sčítací index i nabývá všech celočíselných hodnot od 1 do n. Představuje pořadové (identifikační) číslo částice a „čísluje“ i její hmotnost a x-ovou souřadnici.

Jsou-li částice soustavy rozmístěny v trojrozměrném prostoru, je poloha jejího těžiště určena trojicí souřadnic. Získáme ji zobecněním rov. (9.4) na trojrozměrný případ:

$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \\ y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \\ z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9.5}$$

Polohu těžiště můžeme zapsat i použitím vektorové symboliky. Polohu i-té částice lze totiž zadat buď jejími souřadnicemi x_i, y_i a z_i, nebo polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k}. \tag{9.6}$$

Index i označuje částici, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory kartézské soustavy souřadnic. Těžiště je zadáno polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_T = x_T \boldsymbol{i} + y_T \boldsymbol{j} + z_T \boldsymbol{k}. \tag{9.7}$$

Tři skalární rovnice (9.5) lze tak nahradit jedinou vektorovou rovnicí:

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i. \tag{9.8}$$

O její správnosti se můžeme přesvědčit dosazením z (9.6) a (9.7) a rozepsáním do souřadnic. Dostaneme skalární rovnice (9.5).

Tuhá tělesa

Běžné těleso, jakým je například i baseballová pálka, obsahuje tak obrovské množství částic (atomů), že je přirozenější posuzovat je jako objekt se spojitě rozloženou hmotou. Takový objekt již není tvořen jednotlivými navzájem oddělenými částmi, nýbrž infinitezimálně malými

částicemi (elementy) o hmotnosti $\mathrm{d}m$. Součty v rovnicích (9.5) je třeba nahradit integrály a souřadnice těžiště definovat vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\qquad y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\qquad z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

M opět představuje celkovou hmotnost tělesa. Integrály symbolizují „sčítání“ všech elementů v celém tělese. Jejich výpočet je ovšem třeba provádět v souřadnicích. Je-li těleso homogenní, lze jeho hustotu ϱ (hmotnost jednotkového objemu) vyjádřit vztahem

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{M}{V}, \tag{9.10}$$

kde $\mathrm{d}V$ je objem elementu hmotnosti $\mathrm{d}m$ a V je celkový objem tělesa. V rov. (9.9) můžeme element $\mathrm{d}m$ nahradit výrazem $\varrho\,\mathrm{d}V$ získaným z rov. (9.10) a dostaneme

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\qquad y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\qquad z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V. \tag{9.11}$$

Integračním oborem těchto integrálů je objem tělesa, tj. útvar vymezený tímto tělesem v trojrozměrném prostoru (př. 9.4).

Celá řada těles má určitou geometrickou symetrii, například středovou, osovou nebo rovinnou. Poloha těžiště takového symetrického *homogenního* tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Je-li těleso středově symetrické, splývá jeho těžiště se středem symetrie. Těžiště tělesa s osovou (resp. rovinnou) symetrií leží na ose (resp. v rovině) symetrie. Těžiště homogenní koule splývá s jejím geometrickým středem. Těžiště homogenního kužele leží na jeho ose. Těžiště banánu, jehož rovina symetrie jej dělí na dvě zrcadlově stejné části, leží v této rovině.

Těžiště však nemusí nutně ležet v tělese. Tak například v těžišti preclíku není žádné těsto a v těžišti podkovy není žádné železo.

PŘÍKLAD 9.1

Na obr. 9.3 jsou tři částice o hmotnostech $m_1 = 1{,}2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ a $m_3 = 3{,}4\,\mathrm{kg}$ umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 140\,\mathrm{cm}$. Určete polohu těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Zvolme souřadnicové osy x a y tak, aby jedna z částic byla umístěna v počátku a osa x splývala s jednou ze stran trojúhelníka. Částice mají tyto souřadnice:

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,4	70	121

Díky vhodné volbě soustavy souřadnic jsou tři souřadnice v tabulce nulové. Výpočet bude velmi jednoduchý.

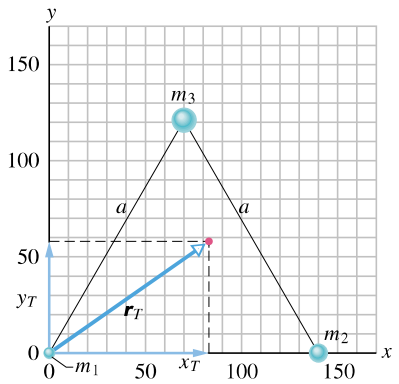
Z rov. (9.5) plyne, že souřadnice těžiště jsou

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(140\,\mathrm{cm}) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(70\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} = 83\,\mathrm{cm} \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(0) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(121\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} = 58\,\mathrm{cm}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Těžiště soustavy na obr. 9.3 je určeno polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_T$ o souřadnicích x_T a y_T.



Obr. 9.3 Příklad 9.1. Tři částice s různými hmotnostmi tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a. Polohový vektor těžiště je $\boldsymbol{r}_T$.

PŘÍKLAD 9.2

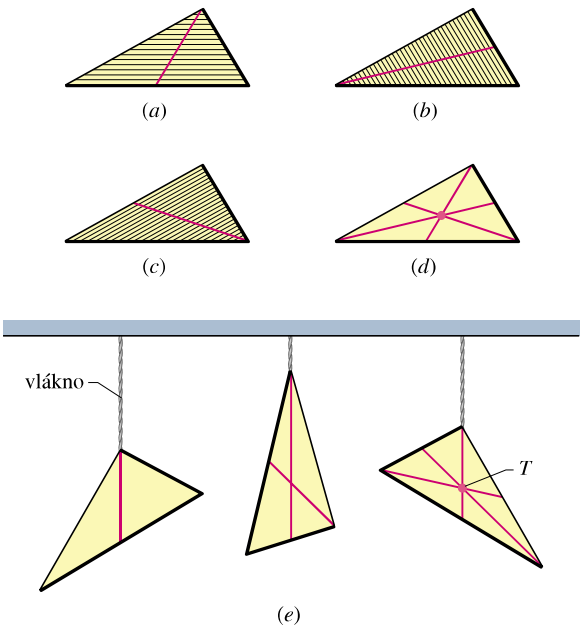
Najděte těžiště homogenní trojúhelníkové desky znázorněné na obr. 9.4.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.4a znázorňuje desku rozdělenou na úzké proužky rovnoběžné s jednou z jejích stran. Ze symetrie je

zřejmé, že těžiště úzkého homogenního proužku leží v jeho geometrickém středu. Těžiště trojúhelníkové desky musí proto ležet někde na spojnici středů všech rovnoběžných proužků. Touto spojnicí je přímka spojující vrchol trojúhelníka se středem protilehlé strany, tj. je těžnicí trojúhelníka. Kdybychom desku podepřeli rovným ostřím nože přesně podél těžnice, byla by v rovnováze.

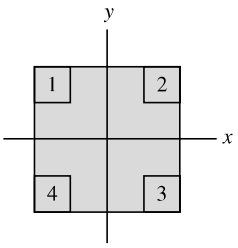
Na obr. 9.4b, c jsme desku rozdělili na proužky rovnoběžné s dalšími dvěma stranami. V každém z těchto případů leží těžiště desky na přímce spojující středy proužků (na těžnici trojúhelníka), podobně jako na obr. 9.4a. Všechny tři těžnice mají společný průsečík. V něm leží těžiště desky (obr. 9.4d).

Předchozí závěr můžeme ověřit jednoduchým pokusem. Využijeme při tom správnou intuitivní představu, že těleso zavěšené v jednom bodě zaujme takovou polohu, v níž jeho těžiště leží pod bodem závěsu. Zavěsíme tedy trojúhelníkovou desku postupně v jednotlivých vrcholech a podle obr. 9.4e vedeme z každého vrcholu svislou přímku. Těžiště desky splývá s průsečíkem těchto tří přímek. Kdybychom desku umístili do vodorovné polohy a podepřeli ji v těžišti hrotem, byla by v rovnováze.



Obr. 9.4 Příklad 9.2. Na obrázcích (a), (b) a (c) je trojúhelníková deska rozdělena na soustavu úzkých proužků rovnoběžných s některou její stranou. Těžiště desky leží na těžnici trojúhelníka, tj. na spojnici středů proužků. (d) Průsečík těžnic splývá s těžištěm desky. (e) Experimentální zjištění polohy těžiště. Trojúhelník postupně zavěšujeme v jeho vrcholech.

KONTROLA 1: Na obrázku je nakreslena homogenní čtvercová deska, z níž byly odříznuty čtyři stejné čtverce. (a) Jaká je poloha těžiště původní desky? (b) Odhadněte polohu těžiště zbylého útvaru po odstranění čtverce 1, (c) čtverců 1 a 2, (d) čtverců 1 a 3, (e) čtverců 1, 2 a 3, (f) všech čtyř čtverců. Neprovádějte žádný přesný výpočet. Využijte pouze symetrie útvaru nebo naopak jeho asymetrie vzniklé odstraňováním čtverců a rozhodněte, v kterém z kvadrantů, na které ose či v kterém bodě těžiště leží.



PŘÍKLAD 9.3

Obr. 9.5a znázorňuje zbytek homogenní kruhové kovové desky o poloměru $2R$, z níž byl vyříznut kotouč o poloměru R. Vzniklé těleso označme X. Jeho těžiště leží na ose x a v obrázku je označeno tečkou. Určete jeho souřadnici.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.5b ukazuje desku C před vyjmutím kotouče D. Ze symetrie vyplývá, že těžiště desky C je v jejím středu (obr. 9.5b).

Těleso C je složeno ze dvou částí, D a X. Můžeme předpokládat, že hmotnost každé z nich je soustředěna v jejím těžišti. Těžiště dvoučásticové soustavy $T_D + T_X$ splývá s těžištěm tělesa C. Polohy těžišť těles C, D a X na ose x jsou vyznačeny v obr. 9.5c.

Z rov. (9.2) vyplývá, že těžiště tělesa C je v bodě

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

kde x_D a x_X jsou souřadnice těžišť těles D a X. Vzhledem k tomu, že je $x_C = 0$, platí

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}. \qquad (9.12)$$

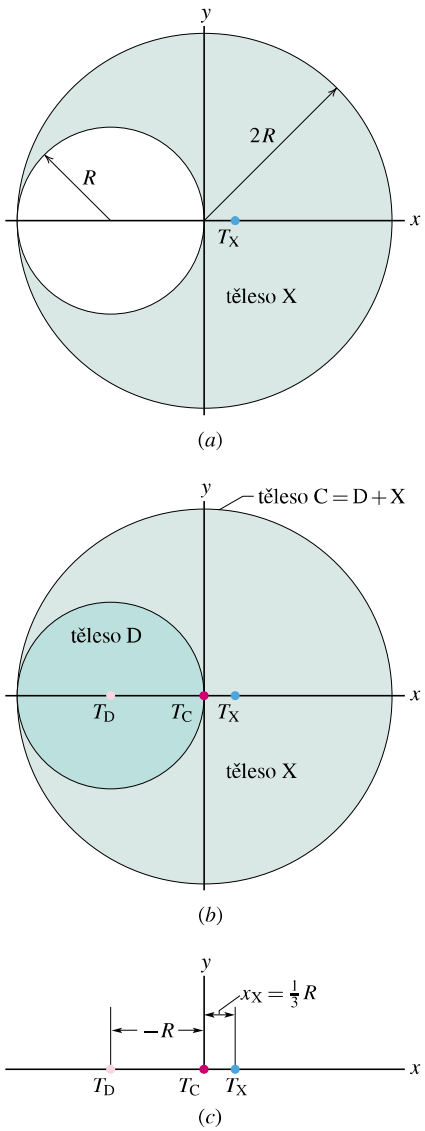
Označme ϱ hustotu materiálu desky a d její (konstantní) tloušťku. Pak

$$m_D = \pi R^2 \varrho d \qquad \text{a} \qquad m_X = \pi(2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d.$$

Uvážíme-li navíc, že $x_D = -R$, dostaneme z rov. (9.12) polohu těžiště tělesa X:

$$x_X = -\frac{(-R)(\pi R^2 \varrho d)}{\pi(2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d} = \frac{1}{3}R. \quad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že konstantní hustota a konstantní tloušťka desky se při výpočtu vykrátily. Na hodnotu x_X tedy nemají vliv.

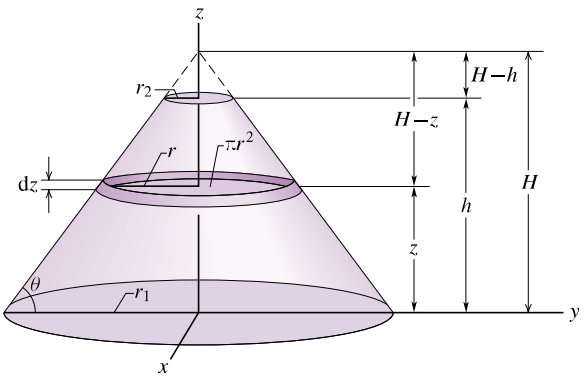


Obr. 9.5 Příklad 9.3. (a) Těleso X, jehož těžiště je označeno T_X, vzniklo vyříznutím kruhového otvoru o poloměru R v kovovém kotouči o poloměru $2R$. (b) Vyjmutý kotouč je označen symbolem D. Jeho těžiště T_D leží v jeho geometrickém středu a má souřadnici $x_D = -R$. Těleso C je složeno z částí X a D. Jeho těžiště je v počátku soustavy souřadnic. (c) Těžiště všech tří těles.

PŘÍKLAD 9.4

Obr. 9.6a zachycuje mohylu Silbury Hill, postavenou na pláních nedaleko Stonehenge před 4 600 lety. Účel stavby není přesně znám, pravděpodobně sloužila jako pohřebiště. Má tvar komolého kužele (obr. 9.6b) o výšce $h = 40\,\text{m}$ a poloměrech podstav $r_2 = 16\,\text{m}$ (horní podstava) a $r_1 = 88\,\text{m}$ (základna). Jeho objem je $V = 4{,}09{\cdot}10^5\,\text{m}^3$. Povrchové přímky kužele svírají s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$.

(a)



(b)

Obr. 9.6 Příklad 9.4. (a) Mohyla Silbury Hill v Anglii pochází z mladší doby kamenné. Její stavba si vyžádala asi $1{,}8{\cdot}10^7$ pracovních hodin. (b) Komolý kužel představující Silbury Hill. V obrázku je vyznačena vrstva o poloměru r s infinitezimální tloušťkou dz, ležící ve výšce z nad základnou kužele.

(a) Určete polohu těžiště mohyly.

ŘEŠENÍ: Mohyla je rotačně symetrická, takže její těžiště leží na její ose symetrie, ve výšce z_T nad základnou kužele. K výpočtu této výšky použijeme poslední z rovnic (9.11) a integrál zjednodušíme užitím symetrie mohyly. Uvažme tenkou vodorovnou vrstvu zvolenou podle obr. 9.6b. Vrstva má poloměr r, tloušťku dz a leží ve vzdálenosti z od základny

mohyly. Obsah její podstavy je πr^2 a objem

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \,\mathrm{d}z. \tag{9.13}$$

Mohyla je tvořena všemi takovými vrstvami, jejichž poloměr se mění od největší hodnoty r_1, odpovídající poloměru základny, po hodnotu r_2 poloměru horní podstavy. Výšku celého kužele, z něhož náš komolý kužel vznikl, označme H (obr. 9.6b). Pro poloměr r libovolné vrstvy pak platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

tj.

$$r = (H-z)\frac{r_1}{H}. \tag{9.14}$$

Dosazením z (9.13) a (9.14) do poslední z rovnic (9.11) dostaneme

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V = \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h z(H-z)^2\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2)\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2}\right]_0^h = \\ &= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3h} + \frac{H^2}{2h^2}\right]. \end{aligned}$$

Pro zadané číselné hodnoty pak vychází

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\pi(88\,\mathrm{m})^2(40\,\mathrm{m})^4}{(4{,}09\cdot10^5\,\mathrm{m}^3)(50{,}8\,\mathrm{m})^2}\cdot \\ &\quad\cdot\left[\frac{1}{4} - \frac{2(50{,}8\,\mathrm{m})}{3(40\,\mathrm{m})} + \frac{(50{,}8\,\mathrm{m})^2}{2(40\,\mathrm{m})^2}\right] = \\ &= 12{,}37\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

(b) Předpokládejme, že průměrná hustota materiálu, z něhož je mohyla Silbury Hill postavena, je $\varrho = 1{,}5\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou práci vykonali dělníci při vršení mohyly, jestliže zeminu zvedali z úrovně základny kužele?

ŘEŠENÍ: K výpočtu elementární práce $\mathrm{d}W$ potřebné k vyzdvižení hmotného elementu $\mathrm{d}m$ do výšky z použijeme rov. (7.21), do níž dosadíme $\varphi = 180°$:

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}m\,gz\cos 180° = gz\,\mathrm{d}m.$$

Ze vztahu (9.10) vyjádříme $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}W = \varrho g z\,\mathrm{d}V.$$

Celkovou práci vypočteme pomocí integrálu jako součet elementárních prací $\mathrm{d}W$:

$$W = \int \mathrm{d}W = \int \varrho g z\,\mathrm{d}V = \varrho g \int z\,\mathrm{d}V.$$

Ze vztahů (9.11) je zřejmé, že poslední integrál má hodnotu Vz_T. Nakonec tedy dostáváme

$$W = \varrho V g z_T. \tag{9.15}$$

Práce potřebná k navršení mohyly Silbury Hill je tedy stejná jako práce, kterou bychom museli vykonat při zvednutí stejně hmotného bodového objektu z úrovně základny do těžiště mohyly. Pro číselné hodnoty uvedené v zadání úlohy pak z rov. (9.15) dostaneme:

$$\begin{aligned} W &= (1{,}5\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})(4{,}09\cdot10^5\,\mathrm{m}^3)\cdot \\ &\quad\cdot(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(12{,}37\,\mathrm{m}) = \\ &= 7{,}4\cdot10^{10}\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.1: *Úlohy o těžišti*

V příkladech 9.1 až 9.3 jsme se seznámili se třemi různými způsoby zjednodušení úloh směřujících k výpočtu polohy těžiště: (1) Využití všech prvků symetrie zadaného tělesa (střed symetrie, osy symetrie, roviny symetrie). (2) Těleso lze pro účely výpočtu rozdělit na několik částí a každou z nich nahradit částicí umístěnou v jejím těžišti. (3) Vhodná volba souřadnicových os: volba souřadnic nemá vliv na polohu těžiště soustavy částic vzhledem k těmto částicím. Je proto vhodné volit počátek i osy soustavy souřadnic tak, aby se výpočet co nejvíce zjednodušil. Je-li zadaná soustava tvořena jen několika částicemi, volíme obvykle počátek soustavy souřadnic v některé z nich. Má-li soustava navíc osu symetrie, ztotožníme ji s některou ze souřadnicových os, například s osou x.

9.3 VĚTA O HYBNOSTI

Sledujeme-li srážku dvou kulečníkových koulí, z nichž jedna je zpočátku v klidu, přirozeně očekáváme, že i po srážce bude soustava nějak pokračovat v pohybu ve směru nárazu. Asi bychom se divili, kdyby se obě koule vrátily zpět nebo se třeba pohybovaly obě stejným směrem kolmým k pohybu první koule před srážkou.

Bod, který se stále pohybuje kupředu bez ohledu na srážku, opravdu existuje. Je jím těžiště soustavy našich dvou koulí. Snadno se o tom přesvědčíme přímo při kulečníkové hře. Stačí si uvědomit, že těžiště soustavy dvou stejně hmotných těles leží vždy uprostřed mezi nimi. Ať je srážka jakákoliv — přímá, nebo zcela obecná, těžiště se neochvějně pohybuje kupředu, jako by srážka vůbec nenastala. Sledujme tento jev podrobněji.

Místo dvojice kulečníkových koulí vezměme v úvahu soustavu n částic, jejichž hmotnosti jsou obecně různé. Budeme se zabývat pohybem těžiště této soustavy, *bez ohledu*

na pohyb jednotlivých částic. I když je těžiště pouze geometrickým bodem, můžeme o něm uvažovat jako o částici, jejíž hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy. Můžeme mu přisoudit polohu, rychlost i zrychlení. Později ukážeme, že vektorová rovnice popisující pohyb těžiště soustavy částic, zvaná **věta o hybnosti** (soustavy částic) neboli **první impulzová věta**,* má tvar

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \tag{9.16}$$

Vztah (9.16) má tvar druhého Newtonova zákona pro těžiště soustavy částic. Skutečně, má stejný tvar ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) jako druhý Newtonův zákon pro částici. Veličiny vystupující v rov. (9.16) je však třeba správně interpretovat:

1. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ je *vektorový* součet *všech vnějších sil* působících na soustavu, tj. všech sil, jimiž okolní objekty působí na jednotlivé částice soustavy. Síly, kterými na sebe působí jednotlivé částice, resp. části soustavy navzájem, se nazývají silami *vnitřními*. Ve vztahu (9.16) nevystupují, neboť podle třetího Newtonova zákona je jejich součet roven nule: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{0}$.
2. M je *celková hmotnost* soustavy. Předpokládáme, že nedochází k výměně hmoty mezi soustavou a jejím okolím, takže M je konstantní. Taková soustava se nazývá **uzavřená**.
3. $\boldsymbol{a}_T$ je zrychlení *těžiště* soustavy. Vztah (9.16) nedává žádnou informaci o zrychlení jiných bodů soustavy.

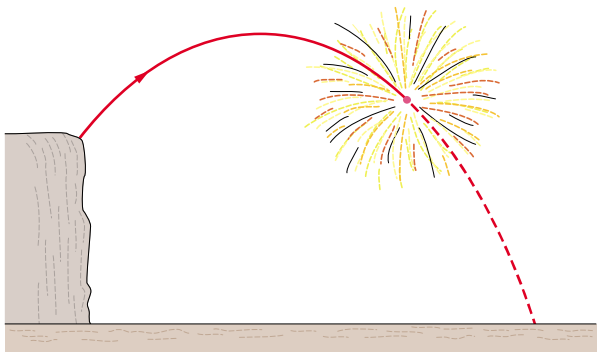
Jako každá vektorová rovnice je i rov. (9.16) ekvivalentní třem rovnicím skalárním pro složky vektorů $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ a $\boldsymbol{a}_T$ vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

$$\begin{aligned} Ma_{T,x} &= \sum F_{\text{ext},x}, \\ Ma_{T,y} &= \sum F_{\text{ext},y}, \\ Ma_{T,z} &= \sum F_{\text{ext},z}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Vraťme se nyní k původnímu problému a zkoumejme chování soustavy dvou kulečníkových koulí. Po uvedení první koule do pohybu je výsledná vnější síla působící na soustavu nulová, tj. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0}$. Podle rov. (9.16) je tedy nulové i zrychlení těžiště soustavy ($\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{0}$). Těžiště soustavy koulí se tedy před srážkou pohybuje konstantní rychlostí. Při srážce na sebe koule působí silami, které jsou z hlediska soustavy silami *vnitřními*. Tyto síly mají sice vliv na pohyb každé z koulí, neovlivní však pohyb těžiště soustavy. Nepřispívají totiž k výrazu $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jehož hodnota tak zůstává stále nulová. Těžiště soustavy se i po srážce pohybuje konstantní rychlostí, shodnou s jeho rychlostí před srážkou.

Rov. (9.16) platí nejen pro soustavu částic, ale i pro tuhé těleso, jakým je např. baseballová pálka na obr. 9.1b. V tomto případě značí M v rov. (9.16) hmotnost pálky a $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ představuje tíhovou sílu $M\boldsymbol{g}$, jíž na pálku působí Země.

Obr. 9.7 ukazuje jiný zajímavý případ. Raketa vystřelená při ohňostroji se pohybuje po parabolické dráze a najednou se roztrhne na malé části. Kdyby k explozi nedošlo, raketa by pokračovala v pohybu po parabole, vyznačené v obrázku. Síly, které způsobily explozi, jsou z hlediska soustavy, tvořené nejprve raketou a poté všemi jejími částmi, silami *vnitřními*, tj. silami vzájemného působení jednotlivých částí soustavy. Zanedbáme-li odpor vzduchu, je výslednice *vnějších* sil působících na soustavu určena výhradně silou tíhovou: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{g}$, bez ohledu na to, zda raketa explodovala či nikoliv. Z rov. (9.16) je tedy zřejmé, že zrychlení těžiště soustavy úlomků (pokud jsou ještě všechny v pohybu ve vzduchu) je $\boldsymbol{g}$ a těžiště opisuje tutéž parabolickou trajektorii, po jaké by se pohybovala raketa, kdyby se neroztrhla.



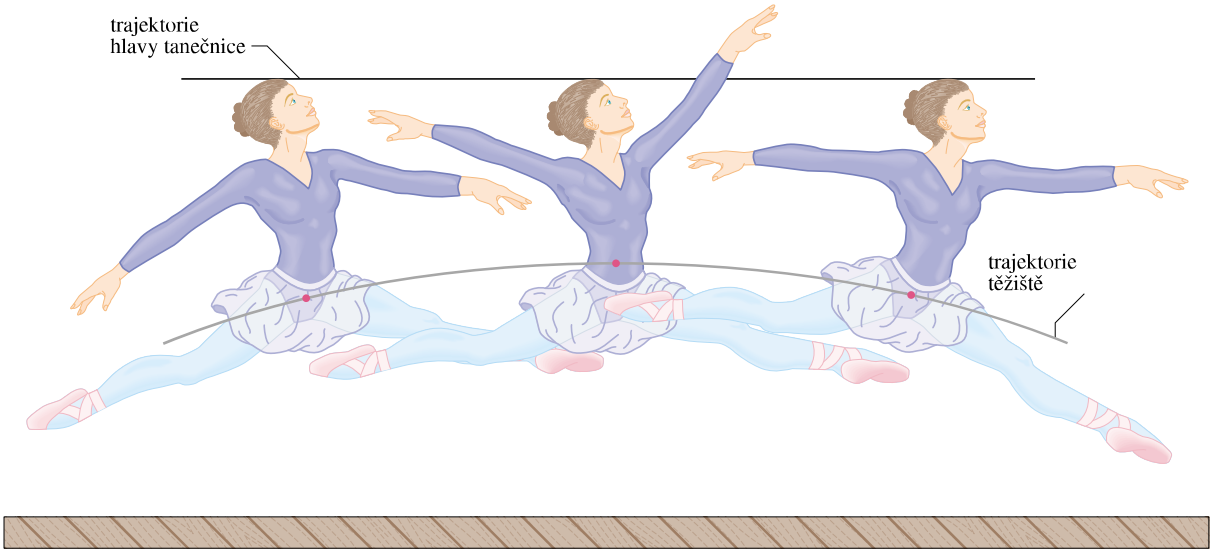
Obr. 9.7 Při ohňostroji exploduje raketa během letu. Zanedbáme-li odpor vzduchu, opisuje těžiště soustavy úlomků původní parabolickou dráhu rakety, dokud některý z úlomků nedopadne na zem.

Při figuře „grand jeté“, zvedne baletka ruce a napne nohy do vodorovné polohy (obr. 9.8). Tím posune těžiště uvnitř svého těla co nejvýše. Těžiště samozřejmě věrně sleduje parabolickou trajektorii. Hmotnost tanečnice je však vůči němu rozložena tak, že se její hlava a trup pohybují takřka vodorovně.

Odvození věty o hybnosti

Věta o hybnosti je jednou ze dvou významných pohybových rovnic soustavy částic. V tomto odstavci se věnujeme jejímu odvození. Uvažujme soustavu n částic. Podle

* Její první název pochopíme později z jejího ekvivalentního zápisu (9.28). Druhý název souvisí s rovnicí (10.4).



Obr. 9.8 Baletní skok „grand jeté“. (Převzato z Kennet Laws, *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984.)

rov. (9.8) pro ni platí

$$M\boldsymbol{r}_T = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n, \qquad (9.18)$$

kde M je její celková hmotnost, $\boldsymbol{r}_T$ polohový vektor jejího těžiště. Derivováním rov. (9.18) podle času dostaneme

$$M\boldsymbol{v}_T = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \qquad (9.19)$$

Symbolem $\boldsymbol{v}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i/\mathrm{d}t)$ jsme označili rychlost i-té částice a $\boldsymbol{v}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_T/\mathrm{d}t)$ představuje rychlost těžiště.

Dalším derivováním rov. (9.19) vzhledem k času již dospějeme ke vztahu

$$M\boldsymbol{a}_T = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n, \qquad (9.20)$$

kde $\boldsymbol{a}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}t)$ je zrychlení i-té částice a $\boldsymbol{a}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_T/\mathrm{d}t)$ zrychlení těžiště. Znovu si uvědomme, že těžiště je pouze geometrickým bodem. Má však smysl mu kromě polohy připisovat i rychlost a zrychlení, jako by se jednalo o hmotnou částici.

Podle druhého Newtonova zákona je součin $m_i\boldsymbol{a}_i$ určen výslednicí $\boldsymbol{F}_i$ všech sil působících na i-tou částici. Vztah (9.20) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$M\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \qquad (9.21)$$

Pravá strana rov. (9.21) zahrnuje kromě vnějších sil, jimiž na jednotlivé částice soustavy působí její okolí, i interakční síly, jimiž na sebe částice působí navzájem (vnitřní síly). Podle třetího Newtonova zákona je však součet vnitřních sil nulový, neboť je tvořen dvojicemi typu akce — reakce, tj. dvojicemi stejně velkých opačně orientovaných sil. Na pravé straně rov. (9.21) tak zůstane pouze vektorový součet *vnějších* sil působících na soustavu, ve shodě s větou o hybnosti (9.16).

KONTROLA 2: František a Eva bruslí ve dvojici. Drží přitom v rukou opačné konce dlouhé tyče. František má dvakrát větší hmotnost než Eva, hmotnost tyče je zanedbatelná. Tření mezi bruslemi a ledem rovněž zanedbáváme. Bruslaři jsou zpočátku v klidu. (a) Potom František začne ručkovat k Evě, zatímco ona drží pevně v rukou svůj konec tyče. Určete polohu bodu, v němž se setkají. (b) Řešte tutéž úlohu za předpokladu, že se Eva přitahuje k Františkovi, a (c) za předpokladu, že ručkují oba. Soustavu souřadnic volíme tak, že její počátek umístíme do počáteční polohy těžiště soustavy a jednu z os namíříme podél tyče.

PŘÍKLAD 9.5

Na obr. 9.9a je soustava tří částic, které jsou zpočátku v klidu. Na každou z nich působí vnější síla, která je v obrázku rovněž vyznačena. Určete zrychlení těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Podle př. 9.1 vypočteme počáteční polohu těžiště soustavy (obr. 9.9a). Jak napovídá obr. 9.9b, zacházíme s ním jako s částicí o hmotnosti M, shodné s celkovou hmotností soustavy (16 kg), na niž působí všechny vnější síly působící na soustavu. Výslednice všech vnějších sil působících na soustavu $\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ představuje tedy výslednici všech sil působících na těžiště. Její x-ová, resp. y-ová složka jsou

$$\sum F_{\mathrm{ext},x} = (14\,\mathrm{N}) - (6{,}0\,\mathrm{N}) + (12\,\mathrm{N})\cos 45^\circ = 16{,}5\,\mathrm{N},$$

resp.

$$\sum F_{\mathrm{ext},y} = (12\,\mathrm{N})\sin 45^\circ = 8{,}49\,\mathrm{N}.$$

Výsledná síla má velikost

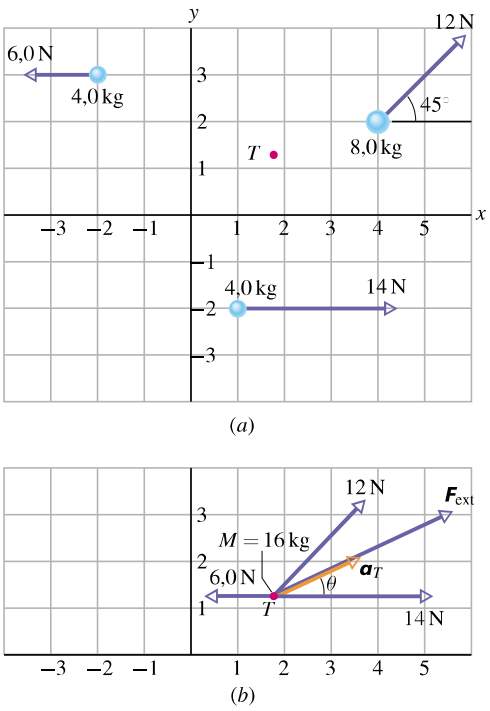
$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16{,}5\,\text{N})^2 + (8{,}49\,\text{N})^2} = 18{,}6\,\text{N}$$

a svírá s osou x úhel

$$\text{tg}\,\theta = \left(\frac{8{,}49\,\text{N}}{16{,}5\,\text{N}}\right) = 0{,}515,$$
$$\theta = 27^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tímto úhlem je určen směr zrychlení těžiště $\boldsymbol{a}_T$, jehož velikost je podle rov. (9.16)

$$a_T = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{(18{,}6\,\text{N})}{(16\,\text{kg})} = 1{,}16\,\text{m·s}^{-2} \doteq$$
$$\doteq 1{,}2\,\text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 9.9 Příklad 9.5. (a) Na tři částice, které jsou zpočátku v klidu, působí vnější síly. Těžiště soustavy je v bodě označeném T. (b) Vnější síly umístíme do těžiště. Jeho pohyb se řídí stejnými zákonitostmi jako pohyb částice o hmotnosti M shodné s celkovou hmotností soustavy. Obrázek zachycuje výslednici vnějších sil i zrychlení těžiště soustavy částic.

Pohyb každé z částic na obr. 9.9a je přímočarý a rovnoměrně zrychlený, stejně jako pohyb těžiště celé soustavy. Jednotlivá zrychlení jsou však navzájem různá. Poněvadž zpočátku byly částice v klidu, bude se každá z nich pohybovat s rovnoměrně rostoucí rychlostí ve směru síly, která na ni působí. Těžiště se bude pohybovat po přímce rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{a}_T$.

9.4 HYBNOST

Hybnost částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \qquad (9.22)$$

kde m je hmotnost částice a $\boldsymbol{v}$ její rychlost. Hmotnost částice je kladná skalární veličina. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou tedy souhlasně rovnoběžné. Z rov. (9.22) je také zřejmé, že jednotkou hybnosti v soustavě jednotek SI je kg·m·s^{-1}.

Původní Newtonova formulace druhého zákona již pojem hybnosti obsahovala:

> Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici sil, které na částici působí.

Matematické vyjádření tohoto zákona má tvar

$$\frac{\text{d}\boldsymbol{p}}{\text{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \qquad (9.23)$$

Předpokládejme, že hmotnost částice je neproměnná. Dosazením za $\boldsymbol{p}$ z definičního vztahu (9.22) a úpravou pak dostaneme

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\text{d}\boldsymbol{p}}{\text{d}t} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\text{d}\boldsymbol{v}}{\text{d}t} = m\boldsymbol{a}.$$

Vztahy $\sum \boldsymbol{F} = \text{d}\boldsymbol{p}/\text{d}t$ a $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ tedy představují dvě ekvivalentní vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb částice s konstantní hmotností v rámci klasické mechaniky.

Hybnost při velmi velkých rychlostech

Víme již, že pro částice s rychlostmi blízkými rychlosti světla nesouhlasí výsledky newtonovské mechaniky s experimenty. V takových případech musíme použít Einsteinovu speciální teorii relativity. Vztah $\text{d}\boldsymbol{p}/\text{d}t = \boldsymbol{F}$ zůstane v platnosti i v rámci této obecnější teorie *za předpokladu*, že změníme definici hybnosti takto:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (9.24)$$

Člen $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ signalizuje relativistický charakter vztahu.

Tabulka 9.1 **Některé definice a zákony v klasické mechanice**

DEFINICE NEBO ZÁKON	JEDNA ČÁSTICE	SOUSTAVA ČÁSTIC
Druhý Newtonův zákon	$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ (5.1)	$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (9.16)
Hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ (9.22)	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$ (9.26)
Druhý Newtonův zákon	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}$ (9.23)	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (9.28)

Rychlosti běžných makroskopických objektů, jakými jsou například míče, projektily nebo kosmické sondy, jsou ovšem mnohem menší než rychlost světla, takže veličina $(v/c)^2$ v rovnici (9.24) je prakticky nulová. V takovém případě lze (9.24) nahradit klasickou definicí (9.22) a Einsteinova speciální teorie relativity se redukuje na newtonovskou mechaniku. U elektronů a jiných subatomových částic lze však snadno dosáhnout rychlostí velmi blízkých rychlosti světla. Pak *je nutné* použít pro vyjádření hybnosti vztahu (9.24), a to dokonce i při rutinních technických výpočtech.

9.5 HYBNOST SOUSTAVY ČÁSTIC

Uvažujme nyní soustavu n částic, z nichž každá je charakterizována svou hmotností, rychlostí a hybností. Částice mohou vzájemně interagovat a okolní objekty na ně mohou působit vnějšími silami. Soustavě přisoudíme celkovou hybnost $\boldsymbol{P}$, definovanou jako vektorový součet hybností jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \\ = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \quad (9.25)$$

Porovnáme-li tento vztah s (9.19), vidíme, že platí

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T. \quad (9.26)$$

Hybnost soustavy částic můžeme tedy vyjádřit i jinak:

Hybnost soustavy částic je rovna součinu její celkové hmotnosti M a rychlosti jejího těžiště.

Derivací rov. (9.26) dostaneme

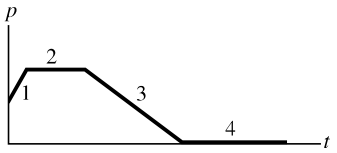
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_T}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{a}_T. \quad (9.27)$$

Porovnáním rov. (9.26) a (9.27) získáme nakonec ekvivalentní vyjádření věty o hybnosti ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \quad (9.28)$$

Tento výsledek můžeme považovat za zobecnění druhého Newtonova zákona pro částici, zapsaného ve tvaru $(\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t) = \sum \boldsymbol{F}$, na případ soustavy částic. (Uvědomme si, že jsme při formulaci tohoto zobecnění použili i třetího Newtonova zákona.) V tab. 9.1 jsou shrnuty důležité vztahy platné pro jednu částici a odpovídající vztahy odvozené pro soustavu částic.

KONTROLA 3: Na obrázku je znázorněna časová závislost hybnosti částice pohybující se po přímce. Na částici působí síla ve směru této přímky. (a) Seřaďte čtyři označené oblasti sestupně podle velikosti této síly. (b) V které oblasti je částice brzděna?



PŘÍKLAD 9.6

Obr. 9.10a zachycuje dětské autíčko o hmotnosti 2,0 kg před a za zatáčkou. Velikost jeho rychlosti před zatáčkou je 0,50 m·s^{-1}, za zatáčkou 0,40 m·s^{-1}. Určete odpovídající změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$.

ŘEŠENÍ: K vyjádření počáteční a výsledné hybnosti autíčka použijeme vztahu (9.26). Nejprve však musíme vyjádřit vektor jeho rychlosti $\boldsymbol{v}_\text{i}$ před zatáčkou a vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_\text{f}$ poté, co autíčko zatáčkou projelo. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 9.10a, dostaneme

$$\boldsymbol{v}_\text{i} = -(0{,}50\ \text{m·s}^{-1})\boldsymbol{j} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v}_\text{f} = (0{,}40\ \text{m·s}^{-1})\boldsymbol{i}.$$

Pro odpovídající hybnosti $\boldsymbol{P}_\text{i}$ a $\boldsymbol{P}_\text{f}$ pak podle rov. (9.26) platí

$$\boldsymbol{P}_\text{i} = M\boldsymbol{v}_\text{i} = (2{,}0\ \text{kg})(-0{,}50\ \text{m·s}^{-1})\boldsymbol{j} = (-1{,}0\ \text{kg·m·s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{P}_\text{f} = M\boldsymbol{v}_\text{f} = (2{,}0\ \text{kg})(0{,}40\ \text{m·s}^{-1})\boldsymbol{i} = (0{,}80\ \text{kg·m·s}^{-1})\boldsymbol{i}.$$

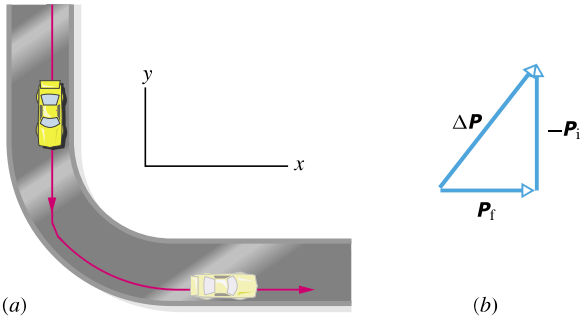
Tyto hybnosti mají různý směr. Proto *nemůžeme* vyjádřit změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ jako pouhý rozdíl velikostí vektorů $\boldsymbol{P}_\text{f}$ a $\boldsymbol{P}_\text{i}$. Změna hybnosti je dána vektorovým vztahem

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_\text{f} - \boldsymbol{P}_\text{i}, \quad (9.29)$$

tj.

$$\Delta \boldsymbol{P} = (0{,}80\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (-1{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} = \\ = (0{,}8\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 9.10b jsou vyznačeny vektory $\Delta\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Připomeňme si, že $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ odečítáme od $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ tak, že k vektoru $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ přičteme vektor $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.



Obr. 9.10 Příklad 9.6. (a) Autíčko v zatáčce závodní dráhy. (b) Změna hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ autíčka je vektorovým rozdílem jeho výsledné hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.

9.6 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Uvažujme soustavu částic, na kterou nepůsobí žádné vnější síly (soustava je izolovaná), anebo je výslednice vnějších sil nulová. Předpokládejme, že částice soustavu neopouštějí ani do ní nevstupují z okolí (soustava je uzavřená). S uvážením skutečnosti, že $\sum \boldsymbol{F}_\mathrm{ext} = \boldsymbol{0}$, dostaneme z rov. (9.28) vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \qquad (9.30)$$

Tento důležitý výsledek představuje **zákon zachování hybnosti** a lze jej vyjádřit také ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \qquad (9.31)$$

Indexy (i), resp. (f) označují hybnost soustavy v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Vztahy (9.30) i (9.31) vyjadřují, že celková hybnost soustavy částic se nemění, je-li výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová. Toto tvrzení zahrnuje i méně obecnou, avšak rovněž důležitou formulaci zákona zachování hybnosti: hybnost izolované soustavy částic je stálá.

Podobně jako v případě zákona zachování energie, formulovaného v kap. 8, sahá platnost zákona zachování hybnosti za rámec newtonovské mechaniky. Tento zákon totiž platí i v mikrosvětě, kde již s Newtonovými zákony nelze počítat. Nebude porušen ani pro soustavy částic pohybujících se velkými rychlostmi, pro něž je nutné nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou teorií relativity, pokud hybnost vyjádříme vztahem (9.24) namísto (9.22).

Z rov. (9.26) ($\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$) je zřejmé, že v případě konstantní celkové hybnosti $\boldsymbol{P}$ je stálá i rychlost těžiště soustavy $\boldsymbol{v}_T$. Znamená to, že jeho zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ je nulové, přesně ve shodě s větou o hybnosti uvedenou v tab. 9.1.

Vztahy (9.30) a (9.31) mají vektorový charakter a každý z nich je proto ekvivalentní třem skalárním rovnicím, vyjadřujícím zachování jednotlivých složek vektoru celkové hybnosti. V závislosti na silovém působení okolí na uvažovanou soustavu částic mohou nastat i situace, kdy se zachovává jen jedna nebo dvě složky celkové hybnosti:

Je-li některá složka výslednice *vnějších* sil působících na uzavřenou soustavu nulová, pak se odpovídající složka celkové hybnosti soustavy nemění.

Pro ilustraci si představme letící míč. Při zanedbatelném odporu prostředí je jedinou silou, která na míč při jeho pohybu působí, tíhová síla $m\boldsymbol{g}$. Ta ovšem směřuje svisle dolů. Svislá složka hybnosti míče se tedy mění, zatímco její vodorovná složka se zachovává.

Znovu připomeňme, že celkovou hybnost uzavřené soustavy lze změnit jen působením vnějších sil. Působení vnitřních sil může sice vést ke změnám hybnosti jednotlivých částí soustavy, ke změně celkové hybnosti však nepřispívá.

KONTROLA 4: Předmět spočívající v klidu na vodorovné dokonale hladké podložce explodoval a roztrhl se na dvě části. Jedna z nich se dala do pohybu podél kladné osy x. (a) Jaká byla celková hybnost soustavy po výbuchu? (b) Mohla se druhá část pohybovat po přímce svírající s osou x nenulový úhel? (c) Jaký byl směr vektoru hybnosti druhé části?

PŘÍKLAD 9.7

Záhadná bedna o hmotnosti $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze podél kladné osy x. Velikost její rychlosti je $v = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Náhle bedna vybuchne a rozpadne se na dvě části: jedna z nich, o hmotnosti $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, se dále pohybuje podél kladné osy x rychlostí o velikosti $v_1 = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je rychlost druhé části?

ŘEŠENÍ: Soustava částic, kterou sledujeme, je tvořena nejprve bednou a po jejím roztržení oběma jejími částmi. Jedná se sice o soustavu uzavřenou, nikoli však izolovanou. Na

bednu samotnou i na každou její část působí totiž jednak tíhová síla, jednak tlaková síla podlahy. Všechny tyto síly jsou svislé a nepřispějí proto ke změně vodorovné složky celkové hybnosti soustavy. Síly, jimiž na sebe působí jednotlivé části bedny při explozi, neovlivní celkovou hybnost vůbec, neboť jsou vnitřními silami soustavy. Vodorovná složka hybnosti soustavy se tedy zachovává a platí pro ni vztah (9.31).

Počáteční hybnost soustavy je určena hybností bedny

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = m\boldsymbol{v}.$$

Hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ po roztržení bedny je dána vektorovým součtem hybností obou částí:

$$\boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_2\boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = \boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} + \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Pro snazší vyjádření složek vektorů hybnosti spojíme soustavu souřadnic s podlahou a osu x zvolíme ve směru pohybu bedny. Všechny vektory hybnosti mají tedy směr osy x a jejich x-ové složky jsou dány přímo jejich velikostmi opatřenými příslušnými znaménky. Z (9.31) pak dostaneme

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x},$$

tj.

$$mv_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}.$$

Uvážíme-li, že hmotnost druhé části bedny je $m_2 = m - m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, a dosadíme-li do obecných vztahů vstupní číselné údaje, dostaneme nakonec

$$(6{,}0\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = (2{,}0\,\mathrm{kg})(8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (4{,}0\,\mathrm{kg})v_{2x},$$

odkud

$$v_{2x} = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota je kladná. Znamená to, že se druhá část bedny pohybuje rovněž ve směru kladné osy x.

PŘÍKLAD 9.8

Z děla o hmotnosti $M = 1\,300\,\mathrm{kg}$ byla ve vodorovném směru vypálena koule o hmotnosti $m = 72\,\mathrm{kg}$ (obr. 9.11). Rychlost koule vzhledem k dělu je $\boldsymbol{v}$ a má velikost $v = 55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při zpětnému rázu se dělo volně pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí $\boldsymbol{V}$.

(a) Určete vektor $\boldsymbol{V}$.

ŘEŠENÍ: Uvažujme soustavu složenou ze dvou těles, děla a koule. Díky této volbě budou síly vzájemného působení děla a koule při výstřelu vnitřními silami soustavy a není třeba se jimi zabývat. Vodorovné složky vnějších sil působících na soustavu jsou nulové a vodorovná složka celkové hybnosti soustavy se při výstřelu zachovává. Rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ je rovna vektorovému součtu rychlosti koule vzhledem k dělu a rychlosti děla vzhledem k Zemi, tj.

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{Z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}.$$

Soustavu souřadnic spojíme se zemským povrchem a osu x namíříme ve směru hlavně (na obr. 9.11 vpravo). Všechny rychlosti mají směr osy x. (V obrázku směřuje rychlost $\boldsymbol{V}$ doleva, její skutečnou orientaci však dosud neznáme.) Pak

$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x. \qquad (9.32)$$

Před výstřelem má soustava nulovou hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{0}$. Vodorovnou složku její hybnosti po výstřelu označme $P_{\mathrm{f},x}$. Podle (9.32) pro ni platí

$$P_{\mathrm{f},x} = MV_x + mv_{\mathrm{Z},x} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

První člen na pravé straně této rovnosti představuje vodorovnou složku hybnosti děla a druhý vodorovnou složku hybnosti koule vzhledem k Zemi.

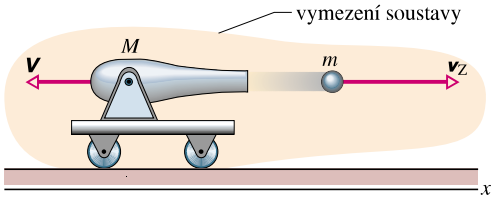
Vodorovná složka celkové hybnosti se ovšem nemění, tj. $P_{\mathrm{f},x} = P_{\mathrm{i},x}$. Platí tedy

$$0 = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé V_x dostaneme

$$V_x = -\frac{mv_x}{M+m} = -\frac{(72\,\mathrm{kg})(55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(1\,300\,\mathrm{kg} + 72\,\mathrm{kg})} =$$
$$= -2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko potvrzuje očekávání, že se dělo při zpětném rázu pohybuje v opačném směru než koule (v obr. 9.11 vlevo).



Obr. 9.11 Příklad 9.8. Dělo o hmotnosti M vypálilo kouli o hmotnosti m. Koule má rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ vzhledem k Zemi a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem k dělu. Rychlost zpětného rázu děla vzhledem k Zemi je $\boldsymbol{V}$.

(b) Určete rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (9.32) vyplývá

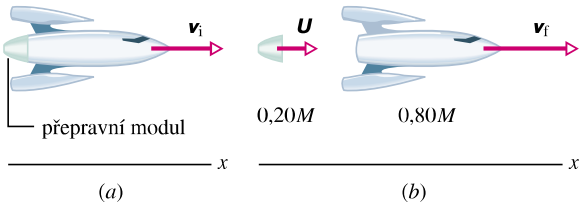
$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x = (55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (-2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) =$$
$$= 52\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vlivem zpětného rázu děla se koule pohybuje vzhledem k Zemi poněkud pomaleji, než kdyby ke zpětnému rázu nedocházelo.

Při řešení této úlohy jsme si mohli uvědomit důležitost vhodného vymezení studované soustavy částic (*dělo+koule*) i vhodné volby vztažné soustavy, vzhledem k níž vyjadřujeme složky vektorových veličin. (Ze dvou přirozeně se nabízejících možností, spojit soustavu souřadnic buď s povrchem Země, nebo s pohybujícím se dělem, jsme rozumně zvolili prvou možnost.)

PŘÍKLAD 9.9

Představme si vesmírnou loď o celkové hmotnosti M vybavenou přepravním modulem, která letí vesmírem rychlostí $v_i = 2\,100$ km/h vzhledem ke Slunci (obr. 9.12a). Poté, co se přepravní modul o hmotnosti $0{,}20M$ odpoutá od lodi pomocí malého výbuchu (obr. 9.12b), pohybuje se loď o 500 km/h rychleji než modul. (Velikost relativní rychlosti lodi vůči modulu je tedy $v_{rel} = 500$ km/h.) Určete velikost rychlosti lodi v_f vzhledem ke Slunci.



Obr. 9.12 Příklad 9.9. (a) Vesmírná loď s přepravním modulem se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. (b) Přepravní modul se odpoutal od lodi. Loď se nyní pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_f$ a modul rychlostí $\boldsymbol{U}$.

ŘEŠENÍ: Soustava tvořená lodí a modulem je uzavřená a izolovaná. Její celková hybnost se tedy zachovává, tj.

$$P_i = P_f. \tag{9.33}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy před a po odpoutání modulu. Soustava souřadnic je volena tak, že osa x směřuje ve směru pohybu lodi. Všechny vektorové veličiny popisující pohyb jednotlivých částí soustavy ve všech jeho fázích mají tedy nenulové pouze x-ové složky, které jsou navíc rovny velikostem příslušných vektorů. Platí

$$P_i = Mv_i. \tag{9.34}$$

Označíme-li symbolem $\boldsymbol{U}$ rychlost uvolněného modulu vzhledem ke Slunci, můžeme výslednou hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_f$ vyjádřit vztahem

$$P_f = (0{,}20M)U + (0{,}80M)v_f. \tag{9.35}$$

První člen na pravé straně odpovídá hybnosti modulu a druhý hybnosti lodi.

Relativní rychlost $\boldsymbol{v}_{rel}$ lodi vzhledem k modulu je rovna rozdílu jejich rychlostí, tj.

$$v_{rel} = v_f - U.$$

Odtud

$$U = v_f - v_{rel}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.35) a využitím vztahů (9.33) a (9.34) dostaneme

$$Mv_i = 0{,}20M(v_f - v_{rel}) + 0{,}80Mv_f.$$

Odtud již snadno získáme výslednou rychlost lodi:

$$v_f = v_i + 0{,}20v_{rel},$$

tj.

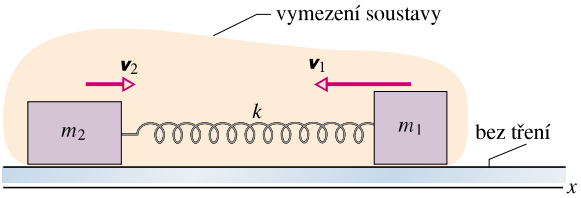
$$v_f = (2\,100\text{ km/h}) + 0{,}20(500\text{ km/h}) =$$
$$= 2\,200\text{ km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: V následující tabulce vztahující se k příkladu 9.9 jsou uvedeny některé hodnoty určující rychlost vesmírné lodi a přepravního modulu vzhledem ke Slunci, resp. relativní rychlost lodi vzhledem k modulu. Doplňte chybějící údaje.

	RYCHLOSTI (km/h)		RELATIVNÍ RYCHLOST (km/h)
	MODUL	LOĎ	
(a)	1 500	2 000	
(b)		3 000	400
(c)	1 000		600

PŘÍKLAD 9.10

Dvě tělesa na obr. 9.13 jsou spojena ideální pružinou a mohou se pohybovat po dokonale hladké vodorovné podložce. Jejich hmotnosti jsou m_1 a m_2. Tělesa nejprve oddálíme (pružina se napne) a poté uvolníme.



Obr. 9.13 Příklad 9.10. Dvě tělesa spojená pružinou a ležící na dokonale hladké vodorovné podložce nejprve oddálíme a poté uvolníme. Vektorový součet jejich hybností zůstává při jejich dalším pohybu nulový. V obrázku je vyznačen i způsob vymezení soustavy.

(a) Jaký je poměr rychlostí v_1/v_2 přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Sledujeme soustavu obou těles spojených pružinou. Vztažná soustava je spojena s podložkou a osa x směřuje podél pružiny. Počáteční hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ soustavy před uvolněním těles je nulová. V libovolném okamžiku po uvolnění těles lze hybnost soustavy zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}$, tj.

$$\boldsymbol{0} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{9.36}$$

S ohledem na speciální volbu soustavy souřadnic můžeme psát

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} = -\frac{m_2}{m_1}. \tag{9.37}$$

Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že rychlosti těles mají v každém okamžiku opačný směr. Rov. (9.37) platí v libovolném okamžiku po uvolnění těles bez ohledu na jejich okamžitou rychlost.

(b) Jaký je poměr kinetických energií $E_{\mathrm{k},1}/E_{\mathrm{k},2}$ přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Poměr $E_{k,1}/E_{k,2}$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_{1,x}^2}{\frac{1}{2}m_2v_{2,x}^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}\right)^2.$$

Dosazením za $v_{1,x}/v_{2,x}$ z rov. (9.37) a úpravou dostaneme

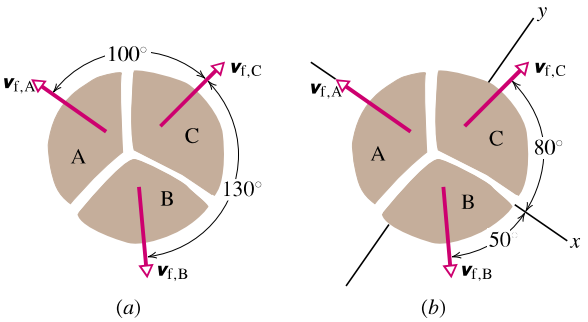
$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{9.38}$$

Zatímco se tělesa k sobě přibližují, zmenšuje se prodloužení spojovací pružiny. Pružná potenciální energie tak klesá ve prospěch kinetických energií těles. Hodnoty veličin $E_{\mathrm{k},1}$ a $E_{\mathrm{k},2}$ rostou, jejich poměr se však nemění. Podle rov. (9.38) je totiž v každém okamžiku určen podílem hmotností těles. Kinetická energie obou těles je největší ve chvíli, kdy je pružina opět nenapjatá. Poté se pružina začne stlačovat a pružná energie soustavy poroste na úkor energie kinetické. Vztah (9.38) však platí i v této fázi pohybu.

Vztahy (9.36) až (9.38) platí i v jiných situacích, kdy se dvě tělesa přitahují (nebo odpuzují). Můžeme je použít například při sledování pádu kamene k Zemi. V analogii s př. 9.10 a obr. 9.13 bude kámen představovat těleso 1 a Země těleso 2. Vzájemné působení kamene a Země je ovšem popsáno nikoli pružnými, nýbrž gravitačními silami. Vztažnou soustavu spojíme s těžištěm dvojice kámen + Země (takzvaná těžišťová soustava). Z rov. (9.36) je vidět, že vzhledem k takto zvolené vztažné soustavě jsou hybnosti kamene a Země v každém okamžiku stejně velké. Z rov. (9.37) a (9.38) je pak zřejmé, že padající kámen má vzhledem k těžišťové soustavě mnohem větší rychlost i kinetickou energii než Země, neboť $m_2 \gg m_1$.

PŘÍKLAD 9.11

Uvnitř tělesa o hmotnosti M, které leží na vodorovné dokonale hladké podlaze, je umístěna malá rozbuška. Výbuch roztrhne těleso na tři části, které se dají do pohybu po podlaze. Obr. 9.14 ukazuje pohled shora na situaci. Díl C o hmotnosti $0{,}30M$ má po výbuchu rychlost o velikosti $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 9.14 Příklad 9.11. Tři díly rozbitého tělesa se pohybují různými směry po dokonale hladké vodorovné podlaze. (a) Pohled na situaci shora. (b) Totéž s vyznačením soustavy souřadnic.

(a) Jaká je rychlost dílu B o hmotnosti $0{,}20M$?

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 9.14b: záporný směr osy x splývá se směrem vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,A}}$. Osa x svírá s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,C}}$ úhel 80° a s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,B}}$ úhel 50°.

Obě složky celkové hybnosti soustavy, tvořené nejprve tělesem a po rozpadu všemi jeho částmi, se zachovávají. Síly působící při výbuchu jsou totiž vnitřními silami soustavy a vnější síly (tíhová a normálová) jsou kolmé k souřadnicové rovině xy. Při výpočtu rychlosti dílu B vyjdeme ze zákona zachování pro y-ovou složku celkové hybnosti:

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y}. \tag{9.39}$$

Indexy (i) a (f) symbolizují jako obvykle počáteční a koncový stav soustavy.

Složky počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ jsou nulové, neboť těleso bylo zpočátku v klidu. Abychom získali $P_{\mathrm{f},y}$, vyjádříme y-ové složky výsledné hybnosti všech dílů tělesa:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{f,A},y} &= 0, \\ p_{\mathrm{f,B},y} &= -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B},y} = -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50^\circ, \\ p_{\mathrm{f,C},y} &= 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C},y} = 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C}}\sin 80^\circ. \end{aligned}$$

(Uvědomme si, že vzhledem k speciální volbě os soustavy souřadnic je $p_{\mathrm{f,A},y} = 0$.) Vztah (9.39) lze tedy přepsat do tvaru

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y} = p_{\mathrm{f,A},y} + p_{\mathrm{f,B},y} + p_{\mathrm{f,C},y}.$$

Dosazením $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ dostaneme

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50^\circ + (0{,}30M)(5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\sin 80^\circ$$

a odtud

$$v_{\mathrm{f,B}} = 9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 9{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je rychlost části B?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že se zachovává i x-ová složka celkové hybnosti, můžeme psát

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x}. \qquad (9.40)$$

Platí $P_{\mathrm{i},x} = 0$ (těleso bylo zpočátku v klidu). Vyjádříme x-ové složky výsledných hybností jednotlivých dílů tělesa (díl A má hmotnost $0{,}50M$):

$$p_{\mathrm{f,A},x} = -0{,}50M v_{\mathrm{f,A}},$$
$$p_{\mathrm{f,B},x} = 0{,}20M v_{\mathrm{f,B},x} = 0{,}20M v_{\mathrm{f,B}} \cos 50^\circ,$$
$$p_{\mathrm{f,C},x} = 0{,}30M v_{\mathrm{f,C},x} = 0{,}30M v_{\mathrm{f,C}} \cos 80^\circ.$$

Vztah (9.40) nabývá tvaru

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x} = p_{\mathrm{f,A},x} + p_{\mathrm{f,B},x} + p_{\mathrm{f,C},x}.$$

Dosadíme $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_{\mathrm{f,B}} = 9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a dostaneme

$$0 = -0{,}50M v_{\mathrm{f,A}} + 0{,}20M(9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \cos 50^\circ + \\ + 0{,}30M(5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \cos 80^\circ.$$

Odtud již získáme velikost rychlosti dílu A:

$$v_{\mathrm{f,A}} = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Předpokládejme, že těleso v př. 9.11 je urychlováno ve směru záporné osy y (pohybuje se například po nakloněné rovině). Rozhodněte, zda se zachovává (a) x-ová složka jeho celkové hybnosti (podle (9.40)) a (b) y-ová složka jeho celkové hybnosti (vztah (9.39)).

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.2: *Zachování hybnosti*

Je vhodné vrátit se k bodu 8.2, který se týkal zákona zachování mechanické energie. Otázky, které v něm byly formulovány, stojí za zamyšlení i v souvislosti s úvahami o zákonu zachování hybnosti.

Při výpočtech vycházejících ze zákona zachování hybnosti se především vždy ujistíme, zda soustava, pro niž chceme zákon zachování hybnosti použít, je uzavřená a izolovaná. *Uzavřenost* znamená, že si soustava nevyměňuje částice se svým okolím (žádná částice neprojde ze soustavy do okolí ani naopak). Soustavu považujeme za *izolovanou*, je-li její interakce s okolními objekty zanedbatelná. Z hlediska zákona zachování hybnosti se jako izolovaná chová i soustava, na kterou její okolí působí silami s nulovou výslednicí. Není-li soustava uzavřená nebo izolovaná, vztahy (9.30) a (9.31) neplatí.

Připomeňme si, že hybnost je vektorová veličina. Má tedy smysl uvažovat o zachování každé z jejích složek odděleně. Daná složka celkové hybnosti soustavy se zachovává za předpokladu, že odpovídající složka výslednice vnějších sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí, je nulová. V př. 9.8 byla nulová vodorovná složka výslednice vnějších sil působících na soustavu dělo + koule. Zachovávala se tedy vodorovná složka hybnosti soustavy. Svislá složka výsledné vnější síly ovšem nulová nebyla, neboť na letící kouli působila tíhová síla. Svislá složka hybnosti soustavy byla proměnná.

Vybereme dva vhodné stavy soustavy (počáteční a koncový) a vyjádříme její celkovou hybnost v každém z nich. Přitom bychom si měli stále uvědomovat, v jaké vztažné soustavě pracujeme. Musíme dát pozor, abychom do celkové hybnosti neopomněli zahrnout hybnost některé z částí studované soustavy, nebo naopak do ní omylem nezapočítali hybnost objektů, které do soustavy nepatří. Tak třeba v př. 9.8 jsme se nejprve museli rozhodnout, zda použijeme vztažnou soustavu spojenou se Zemí, nebo s dělem, které se pohybuje vlivem zpětného rázu.

Nakonec výrazy pro $\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}$ a $\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}$ porovnáme a řešením získané rovnice najdeme neznámou veličinu, požadovanou v zadání úlohy.

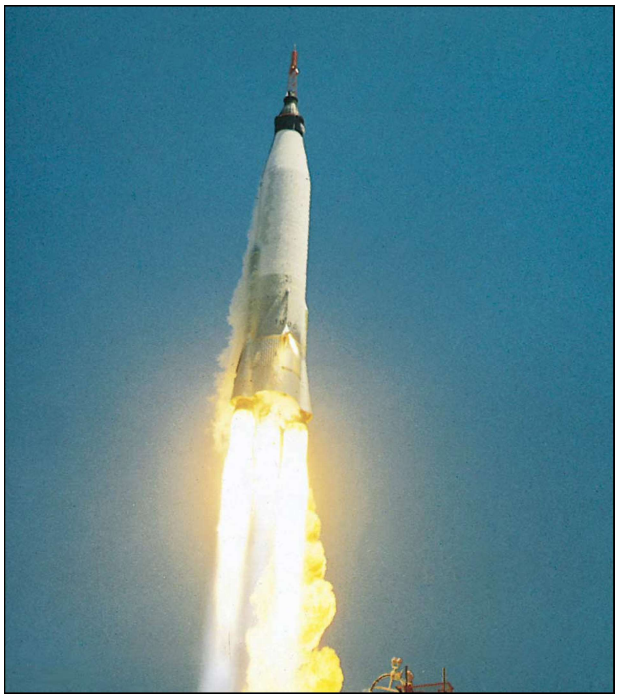
9.7 SOUSTAVY S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ: RAKETA

Prozatím jsme se zabývali soustavami, jejichž celková hmotnost byla konstantní. Tento předpoklad však nebývá vždy splněn. Uvažujme například startující raketu (obr. 9.15). Převážnou část její hmoty před startem tvoří pohonné látky, které se postupně spalují a proudí ven tryskou raketového motoru.

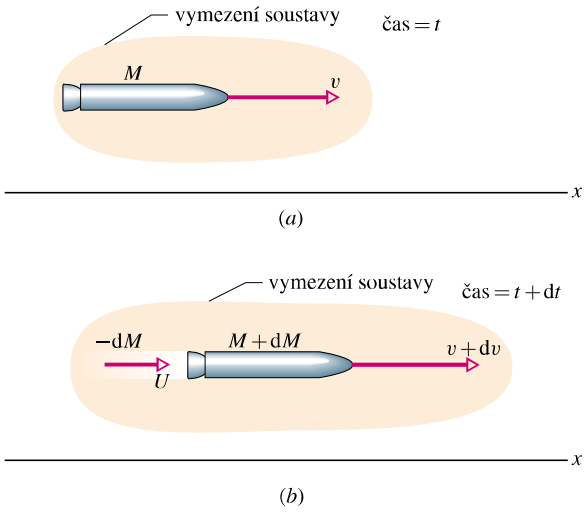
Pro popis pohybu rakety s proměnnou hmotností použijeme větu o hybnosti, nikoli však pro raketu samotnou, nýbrž pro soustavu, do níž kromě rakety zahrneme i zplodiny vzniklé spálením pohonných hmot, které raketu opouštějí. Hmotnost *takto vymezené soustavy* se *nemění*.

Výpočet zrychlení rakety

Sledujme raketu v pozdější fázi jejího pohybu v meziplanetárním prostoru, kde zanedbáme gravitační sílu i odpor prostředí. Přímočarý pohyb rakety budeme popisovat



Obr. 9.15 Start rakety v projektu Mercury



Obr. 9.16 (a) Zrychlený pohyb rakety o hmotnosti M sledujeme v inerciální vztažné soustavě. Obrázek odpovídá okamžiku t. (b) Raketa v okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Obrázek znázorňuje i odpad vzniklý spálením pohonných hmot v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a vypuzený do prostoru.

v inerciální vztažné soustavě a souřadnicovou osu x zvolíme ve směru tohoto pohybu. Označme M hmotnost rakety a v její rychlost (x-ová složka) v libovolném okamžiku t (obr. 9.16a).

Obr. 9.16b zachycuje situaci v pozdějším okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Raketa má nyní rychlost $v + \mathrm{d}v$ a její hmotnost je $M + \mathrm{d}M$. Uvědomme si, že změna hmotnosti $\mathrm{d}M$ je *záporná*. Zplodiny vzniklé spálením pohonných látek v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ mají hmotnost $-\mathrm{d}M$ a opouštějí raketu rychlostí U měřenou ve zvolené inerciální vztažné soustavě.

Uvažujme nyní soustavu tvořenou raketou a zplodinami, které ji opustily během časového intervalu $\mathrm{d}t$. Tato soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost se tedy v intervalu $\mathrm{d}t$ zachovává a platí

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f}. \tag{9.41}$$

Indexy (i) a (f) označují celkovou hybnost soustavy na začátku a na konci časového intervalu délky $\mathrm{d}t$. Rov. (9.41) můžeme přepsat do tvaru

$$Mv = -\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v), \tag{9.42}$$

kde první člen na pravé straně představuje hybnost zplodin vzniklých v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a druhý člen značí hybnost rakety na konci tohoto intervalu.

Vztah (9.42) lze ještě zjednodušit zavedením relativní rychlosti u zplodin vzhledem k raketě. Tato rychlost je rozdílem rychlosti $v + \mathrm{d}v$ rakety na konci intervalu $\mathrm{d}t$ a rychlosti zplodin U:

$$u = (v + \mathrm{d}v) - U,$$

tj.

$$U = v + \mathrm{d}v - u. \tag{9.43}$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.42) dostáváme po malé úpravě

$$-\mathrm{d}M\,u = M\,\mathrm{d}v. \tag{9.44}$$

Vydělením rov. (9.44) délkou časového intervalu $\mathrm{d}t$ dostaneme:

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}u = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{9.45}$$

Výraz $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ vyjadřuje rychlost ubývání hmotnosti rakety. Označme jej symbolem $-R$, kde R ($R > 0$) je rychlost spotřeby paliva v kg/s. Nakonec si uvědomme, že výraz $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ v rov. (9.45) představuje zrychlení a rakety a přepíšeme rovnici ve tvaru

$$Ma = Ru \quad \text{(rovnice Měščerského).} \tag{9.46}$$

Rovnice (9.46) platí v libovolném okamžiku pro okamžité hodnoty hmotnosti M rakety, rychlosti R spotřeby paliva a zrychlení a rakety.

Její levá strana má rozměr síly (kg·m·s^{-2} = N) a závisí pouze na vlastnostech raketového motoru (na rychlosti R spotřeby paliva a na rychlosti u zplodin vzhledem k raketě). Výraz Ru na pravé straně rovnice nazveme **tahem** raketového motoru a označíme jej symbolem T. Rov. (9.46) získává při tomto označení formální podobu druhého Newtonova zákona $Ma = T$, kde a je zrychlení rakety a M její hmotnost.

Výpočet rychlosti rakety

Položme si nyní otázku, jak se mění rychlost rakety při spalování pohonných hmot. Odpověď získáme integrací rovnice (9.44) upravené na tvar

$$\mathrm{d}v = -u\,\frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

Dostaneme

$$\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} \mathrm{d}v = -u \int_{M_\mathrm{i}}^{M_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

M_i a M_f představují počáteční a výslednou hmotnost rakety. Výpočtem integrálů dostaneme vztah

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}} \qquad \text{(vzorec Ciolkovského)}, \qquad (9.47)$$

který vyjadřuje změnu rychlosti rakety při změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f.* Dokumentuje rovněž výhodnost konstrukce vícestupňových raket, jejichž hmotnost M_f klesá nejen spalováním pohonných hmot, ale i uvolněním vyhořelých stupňů. Ideální raketu by v cíli jejího letu měl tvořit pouze užitečný náklad.

PŘÍKLAD 9.12

Raketa, jejíž počáteční hmotnost M_i je 850 kg, spotřebovává palivo rychlostí $R = 2{,}3\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Zplodiny opouštějí raketu relativní rychlostí $u = 2\,800\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

(a) Jaký je tah motoru?

ŘEŠENÍ: Tah motoru je

$$T = Ru = (2{,}3\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}})(2\,800\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}) = \\ = 6\,440\ \mathrm{N} \doteq 6\,400\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaké je počáteční zrychlení rakety?

ŘEŠENÍ: Z pohybové rovnice rakety dostáváme

$$a = \frac{T}{M_\mathrm{i}} = \frac{(6\,440\ \mathrm{N})}{(850\ \mathrm{kg})} = 7{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při startu rakety z povrchu Země musí být tah T motoru větší než tíhová síla, kterou na raketu působí Země. Ta má v našem případě velikost $M_\mathrm{i}g = (850\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 8\,300\ \mathrm{N}$. Tah motoru je však pouhých $T = 6\,400\ \mathrm{N}$, takže naše raketa nemůže odstartovat. Může však být do meziplanetárního prostoru vynesena nějakou silnější raketou.

(c) Předpokládejme, že naše raketa startuje z vesmírné lodi, která se již nachází v meziplanetárním prostoru. Gravitační síly tedy můžeme zanedbat. Po vyčerpání paliva má raketa hmotnost $M_\mathrm{f} = 180\ \mathrm{kg}$. Jaká je její rychlost vzhledem k lodi v tomto okamžiku? Předpokládejme, že hmotnost vesmírné lodi je tak velká, že start rakety její pohyb neovlivní.

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost rakety vzhledem k vesmírné lodi je $v_\mathrm{i} = 0$. Z rov. (9.47) dostaneme

$$v_\mathrm{f} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}} = \\ = (2\,800\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}) \ln \frac{(850\ \mathrm{kg})}{(180\ \mathrm{kg})} = \\ = (2\,800\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}) \ln 4{,}72 \doteq 4\,300\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledná rychlost rakety může převýšit relativní rychlost zplodin u vzhledem k raketě.

* Symbol „ln“ v rovnici (9.47) značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu e (= 2,718…).

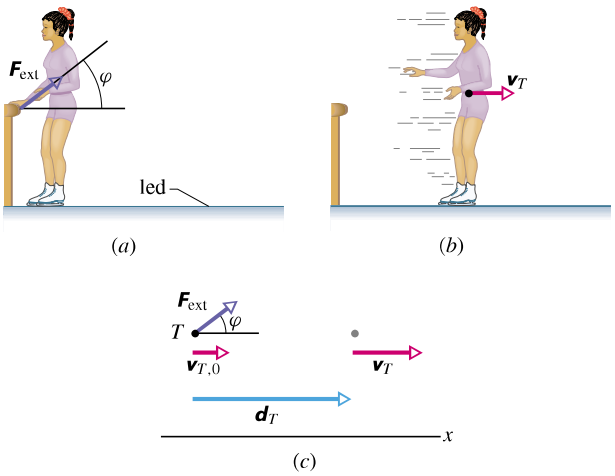
9.8 VNĚJŠÍ SÍLY A ZMĚNY VNITŘNÍ ENERGIE

Krasobruslařka na obr. 9.17a se odráží od mantinelu. Ten na ni působí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$, svírající s vodorovnou rovinou úhel φ. Bruslařka, která byla zpočátku v klidu, získá vlivem této síly určitou rychlost, s níž se pak vzdaluje od mantinelu (obr. 9.17b). Působením síly se tedy zvýšila kinetická energie bruslařky.

Případ bruslařky se liší od předchozích příkladů, kdy docházelo ke změně kinetické energie tělesa vlivem působení vnějších sil, ve dvou podstatných rysech:

1. V předchozích příkladech byla rychlost všech částí tělesa stejná (těleso jsme mohli při studiu jeho pohybu považovat za bodový objekt). V případě bruslařky již tomu tak není. Například pohyb jejích paží se liší od pohybu jejího trupu.

2. V předchozích příkladech se kinetická energie tělesa měnila vlivem působení vnějších sil na úkor energie okolí. V případě bruslařky dochází ke změně její kinetické energie na úkor energie vnitřní (biochemické). Vnější síla v tomto případě nekoná práci, neboť vektor posunutí jejího působiště je po celou dobu jejího působení nulový (síla působí na ruku bruslařky v pevném bodě mantinelu). Práci konají síly napínající svalstvo, tj. *vnitřní síly soustavy*.



Obr. 9.17 (a) Bruslařka se odráží od mantinelu, který na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$. (b) Její těžiště má v okamžiku ztráty kontaktu s mantinelem rychlost $\boldsymbol{v}_T$. (c) Vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na bruslařku při odrazu od mantinelu je zakreslena jako síla působící na její těžiště. Při posunutí těžiště o vektor $\boldsymbol{d}_T$ se jeho rychlost změní z $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na $\boldsymbol{v}_T$. Tato změna je určena vodorovnou složkou síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$.

Zdá se, že tyto rozdíly, odlišující popsaný případ bruslařky od všech ostatních příkladů změny kinetické energie těles, kterými jsme se prozatím zabývali, jsou naprosto zásadní. Přesto však je možné *formálně* vyjádřit změnu kinetické energie bruslařky jako práci síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na částici, jejímž pohybem lze nahradit pohyb bruslařky jako *celku*, tj. její **posuvný** neboli **translační** pohyb. Touto „náhradní“ částicí je těžiště bruslařky. Situaci ukazuje obr. 9.17c. Předpokládejme, že těžiště bruslařky se pohybuje vodorovně. Svislá složka výslednice sil působících na bruslařku, daná tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$, tlakovou silou ledové plochy $\boldsymbol{N}$ a svislým průmětem síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je tedy nulová. Vodorovná složka $F_{\text{ext}}\cos\varphi$ síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ určuje vodorovné zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ těžiště. Za dobu, po kterou tato síla působí, se rychlost těžiště změní z počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na výslednou rychlost $\boldsymbol{v}_T$. Odpovídající posunutí těžiště bruslařky označme $\boldsymbol{d}_T$. Podle rov. (2.16) je velikost výsledné rychlosti těžiště dána vztahem

$$v_T^2 = v_{T,0}^2 + 2a_{T,x}d_T. \tag{9.48}$$

Po vynásobení této rovnice hmotností M a malé úpravě dostaneme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_T. \tag{9.49}$$

Levá strana rov. (9.49) představuje změnu kinetické energie $\Delta E_{\text{k},T}$ těžiště bruslařky z počáteční hodnoty $(E_{\text{k},T})_{\text{i}}$ na výslednou hodnotu $(E_{\text{k},T})_{\text{f}}$. Vzhledem k platnosti věty o hybnosti (druhého Newtonova zákona pro těžiště) můžeme nahradit součin $Ma_{T,x}$ vodorovnou složkou vnější síly $F_{\text{ext}}\cos\varphi$:

$$\Delta E_{\text{k},T} = F_{\text{ext}}d_T\cos\varphi. \tag{9.50}$$

Tento *formální* výsledek lze interpretovat obvyklým způsobem: Kinetická energie příslušná posuvnému pohybu soustavy se mění na úkor práce, kterou koná výslednice vnějších sil umístěná v jejím těžišti.

Zdůrazněme ještě jednou důležitý aspekt problému bruslařky: Vnější síla, která na ni působí při odrazu od mantinelu, ve skutečnosti *nekoná práci*, neboť její skutečné působiště je v klidu. Změna kinetické energie $\Delta E_{\text{k},T}$ musí tedy být doprovázena změnou vnitřní energie ΔE_{int} soustavy. (Předpokládáme, že vnitřní energie bruslařky se změnila jen o biochemickou energii jejích svalů.) V souladu s obecnou formulací zákona zachování energie v kap. 8 platí

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta E_{\text{k},T}. \tag{9.51}$$

Dosazením z rov. (9.50) do (9.51) dostaneme změnu vnitřní energie bruslařky:

$$\Delta E_{\text{int}} = -F_{\text{ext}}d_T\cos\varphi. \tag{9.52}$$

Ze vztahů (9.51) a (9.52) je tedy nakonec zřejmé, že kinetická energie bruslařky se mění na úkor její energie vnitřní. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $F_{\text{ext}}d_T\cos\varphi$.

Představme si nyní ještě obecnější situaci, při níž se bude těžiště bruslařky pohybovat i ve svislém směru. Bude se při tom měnit i tíhová potenciální energie *izolované* soustavy bruslařka + Země. Označíme-li změnu tíhové potenciální energie jako $\Delta E_{\text{p},T}$, můžeme psát zákon zachování energie ve tvaru

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} + \Delta E_{\text{int}} = 0. \tag{9.53}$$

Změna vnitřní energie soustavy je dána prací sil napínajících svalstvo bruslařky. Tu můžeme opět formálně zapsat jako práci výslednice vnějších sil působících na bruslařku, umístěné však do jejího těžiště: zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x měla směr vodorovného posunutí těžiště bruslařky, osa y nechť je svislá. Zrychlení těžiště označme $\boldsymbol{a}_T$ a vektor jeho posunutí $\boldsymbol{d}_T$. Stejným postupem, jakým jsme odvodili vztah (9.49), získáme změnu kinetické energie bruslařky ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_{T,x} + Ma_{T,y}d_{T,y}.$$

Podle věty o hybnosti je zrychlení těžiště bruslařky určeno výslednicí všech vnějších sil, které na ni působí, tj. tíhové síly, tlakové síly ledové plochy a tlakové síly mantinelu:

$$M\boldsymbol{a}_T = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{ext}}.$$

Této vektorové rovnici odpovídají dvě skalární rovnice pro její složky:

$$Ma_{T,x} = F_{\text{ext}}\cos\varphi, \quad Ma_{T,y} = -Mg + N + F_{\text{ext}}\sin\varphi.$$

Pro změnu kinetické energie bruslařky tedy dostáváme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = F_{\text{ext}}\cos\varphi d_{T,x} + \\ + (-Mg + N + F_{\text{ext}}\sin\varphi)d_{T,y}.$$

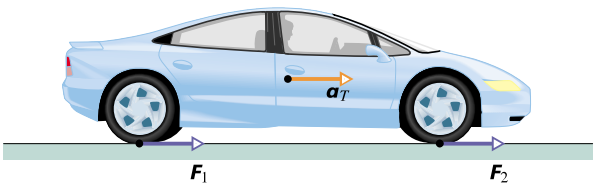
Výraz $-Mgd_{T,y}$ představuje práci tíhové síly, tj. záporně vzatou změnu tíhové potenciální energie soustavy bruslařka + Země. Porovnáme-li předchozí vztah s rov. (9.53), můžeme psát

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} - \\ -F_{\text{ext}}\cos\varphi d_{T,x} - (N + F_{\text{ext}}\sin\varphi)d_{T,y} = 0,$$

tj.

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} = (\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{d}_T. \quad (9.54)$$

ΔE značí změnu mechanické energie soustavy bruslařka + + Země, která se podle rov. (9.54) mění na úkor její vnitřní energie. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $(\boldsymbol{F}_{\text{ext}}+\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{d}_T$. (Uvědomme si, že síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí mantinel na ruku bruslařky, se stala vnitřní silou působící v nově zvolené izolované soustavě bruslařka+Země. Odpovídající reakcí je síla $-\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí bruslařka na mantinel. Vnitřními silami nové soustavy jsou i tíhové síly $M\boldsymbol{g}$ a $-M\boldsymbol{g}$, vyjadřující gravitační interakci bruslařky se Zemí, a tlakové síly $\boldsymbol{N}$ a $-\boldsymbol{N}$, popisující vzájemné působení bruslařky a ledové plochy.)



Obr. 9.18 Automobil, který je zpočátku v klidu, se rozjíždí směrem vpravo. Silnice působí na povrch pneumatik třecími silami, z nichž dvě $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ jsou v obrázku vyznačeny. Součet těchto sil určuje výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo.

Není-li vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, nahradíme ji ve vztazích (9.52) a (9.54) odpovídající průměrnou veličinou $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}}$.

Věnujme bruslařce ještě poslední úvahu a zkusme si uvědomit, jakým způsobem dochází ke vzniku silového působení mantinelu na její ruku. Bruslařka položí pokrčenou paži na mantinel a začne se od něj „odtlačovat" napínáním svalů. Svou vůlí tedy řídí vzájemné působení částí soustavy, ovlivňuje *vnitřní* síly. Ruka tlačí na mantinel určitou silou. Podle třetího Newtonova zákona působí naopak mantinel na ruku bruslařky silou opačnou. Tato síla, kterou jsme označili symbolem $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je ovšem z hlediska bruslařky silou *vnější*.

Vztahy (9.52) a (9.54) platí i pro jiné objekty, u nichž dochází, podobně jako u bruslařky, k vyvolání vnějších sil, či jejich změn prostřednictvím změn sil vnitřních. Pokud tyto vnější síly nekonají práci (například proto, že jejich působiště je v klidu), mění se mechanická energie takových soustav pouze na úkor vnitřní energie.

Uvažujme například rozjíždějící se automobil. Motor pohání kola, jejichž pneumatiky působí na vozovku třecími silami směřujícími proti zrychlení automobilu. Podle třetího Newtonova zákona působí vozovka na povrch pneumatik rovněž třecími silami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, avšak ve směru zrychlení (obr. 9.18). Tyto třecí síly tvoří výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo (tíhová a normálová síla jsou kompenzovány) a udílí jeho těžišti zrychlení $\boldsymbol{a}_T$. Vnitřní energie automobilu (uvolněná spalováním paliva v motoru) klesá ve prospěch jeho energie kinetické. Je-li síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, lze při daném posunutí $\boldsymbol{d}_T$ těžiště vozidla snadno vyjádřit změnu $\Delta E_{\text{k},T}$ kinetické energie pomocí rov. (9.54), položíme-li $\Delta E_{\text{p},T} = 0$ a uvážíme-li, že výsledná vnější síla svírá s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 0°$.

Vztah (9.54) platí i v situaci, kdy rozjetý automobil brzdí. Výsledná vnější síla je nyní orientována proti směru pohybu a svírá tedy s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = = 180°$. Kinetická energie těžiště vozidla klesá ve prospěch vnitřní energie (zahřívá se brzdové obložení).

PŘÍKLAD 9.13

Převrátí-li se brouk kovařík náhodou na záda, pomůže si obvykle tak, že prudce vyklene záda a vyskočí vzhůru. Při tom se energie uložená ve svalech „přemění" v kinetickou energii. Tento pohyb je doprovázen slyšitelným cvaknutím, s kterým souvisí anglický název brouka („clik beetle"). Videozáznam výskoku brouka ukázal, že se jeho těžiště během vyklenutí zad těsně před výskokem zvedlo o $d_T = 0{,}77\,\text{mm}$ a při výskoku dosáhlo výšky $h = 0{,}30\,\text{m}$. Hmotnost brouka je $m = 4{,}0\cdot10^{-6}\,\text{kg}$. Určete velikost průměrné síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou při výskoku působila podložka na záda brouka.

ŘEŠENÍ: Soustava brouk + Země je izolovaná. Její celková

energie se tedy zachovává. Aplikujme tento zákon zachování na časový interval T měřený od počátku výskoku do okamžiku, kdy těžiště brouka dosáhlo maximální výšky h. Během doby T dojde k následujícím změnám jednotlivých druhů energie: (1) Změna kinetické energie $\Delta E_{\mathrm{k},T}$ je nulová, protože na počátku i na konci uvažovaného časového intervalu je brouk v klidu. (2) Změna $\Delta E_{\mathrm{p},T}$ tíhové potenciální energie soustavy brouk + Země je rovna mgh. (3) Změna vnitřní energie ΔE_{int} svalstva brouka, která během „přípravy k výskoku“ vyvolá vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$.

Vztah vyjadřující skutečnost, že se energie soustavy brouk + Země v průběhu časového intervalu T zachovává, má tvar

$$\Delta E_{\mathrm{k},T} + \Delta E_{\mathrm{p},T} + \Delta E_{\mathrm{int}} = 0.$$

Dosazením za $\Delta E_{\mathrm{k},T}$ a $\Delta E_{\mathrm{p},T}$ dostaneme

$$0 + mgh + \Delta E_{\mathrm{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = -mgh. \tag{9.55}$$

Dosadíme z rov. (9.52) do (9.55):

$$\overline{F}_{\mathrm{ext}} d_T \cos\varphi = mgh,$$

odkud

$$\overline{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{mgh}{d_T \cos\varphi}. \tag{9.56}$$

Úhel φ mezi silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ směřující vzhůru a posunutím $\boldsymbol{d}_T$ je 0°. Pro zadané hodnoty nakonec dostaneme

$$\overline{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{(4{,}0\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}30\,\mathrm{m})}{(7{,}7\cdot10^{-4}\,\mathrm{m})\cos 0^\circ} = \\ = 1{,}5\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla je malá pouze zdánlivě. Velikost zrychlení, které uděluje tělu brouka při výskoku, dosahuje totiž hodnoty zhruba $380g$.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Těžiště

Těžiště soustavy částic je bod o souřadnicích

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\ y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\ z_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{9.5}$$

tj.

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{9.8}$$

kde M je celková hmotnost soustavy. Je-li hmota soustavy rozložena spojitě, je poloha těžiště dána vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\ z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

Je-li hustota tělesa (hmotnost jednotkového objemu) konstantní, lze rov. (9.9) přepsat ve tvaru

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\ y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\ z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V, \tag{9.11}$$

kde V je objem tělesa o hmotnosti M.

Věta o hybnosti pro soustavu částic

Pohyb těžiště libovolné soustavy částic se řídí **větou o hybnosti**:

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}. \tag{9.16}$$

Symbolem $\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ jsme označili výslednici *vnějších* sil působících na soustavu, M je celková hmotnost soustavy a $\boldsymbol{a}_T$ zrychlení jejího těžiště.

Hybnost a věta o hybnosti

Hybnost jedné částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{9.22}$$

Druhý Newtonův zákon pak můžeme pomocí hybnosti přepsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Pro soustavu částic mají předchozí vztahy tvar

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T \tag{9.26}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}. \tag{9.28}$$

Relativistická hybnost

Relativistická definice hybnosti má tvar

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Tuto definici, jejíž platnost je obecná, je třeba použít pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla c. Pro $v \ll c$ přejde rov. (9.24) v (9.22).

Zákon zachování hybnosti

Je-li soustava izolovaná, tj. nepůsobí-li na ni žádné *vnější* síly, je její hybnost $\boldsymbol{P}$ trvale konstantní:

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{konst}, \tag{9.30}$$

tj.

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \tag{9.31}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy $\boldsymbol{P}$ v počátečním a koncovém okamžiku časového intervalu, v němž soustavu sledujeme. Vztahy (9.30) a (9.31) představují ekvivalentní formulace **zákona zachování hybnosti**.

Soustavy s proměnnou hmotností

Při popisu pohybu soustavy s proměnnou hmotností postupujeme obvykle tak, že zkoumanou soustavu považujeme za součást rozšířené soustavy, vymezené tak, aby byla uzavřená (tj. *měla konstantní hmotnost*) a izolovaná. Pro ni pak použijeme zákon zachování hybnosti. V případě rakety bude rozšířená soustava obsahovat jak raketu, tak i zplodiny vzniklé spalováním pohonných hmot, které raketu opouštějí. Je-li takto zvolená rozšířená soustava izolovaná, lze ukázat, že se okamžité zrychlení rakety řídí rovnicí Meščerského

$$Ma = Ru, \tag{9.46}$$

kde M je okamžitá hmotnost rakety (včetně zbytku pohonných hmot), R je rychlost spotřeby paliva (v kg/s) a u představuje rychlost uvolňovaných zplodin vzhledem k raketě. Člen Ru se nazývá **tah** raketového **motoru**. Předpokládejme, že rychlost rakety (složka ve směru pohybu) se změnila z v_i na v_f při odpovídající změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f. V případě raketového motoru s konstantní rychlostí spotřeby paliva R a konstantní rychlostí u platí vzorec Ciolkovského

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}}. \tag{9.47}$$

Vnější síly a změny vnitřní energie

Vnější síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ působící na těleso může být vyvolána působením vnitřních sil, které konají práci a způsobují odpovídající změnu vnitřní energie tělesa ΔE_int:

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} \cdot \boldsymbol{d}_T = -F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.52}$$

Symbolem $\boldsymbol{d}_T$ jsme označili posunutí těžiště tělesa, φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_T$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$. Mění-li se na úkor vnitřní energie pouze kinetická energie tělesa, platí

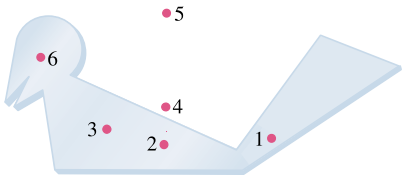
$$\Delta E_{\mathrm{k},T} = F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.50}$$

Dochází-li i ke změnám potenciální energie tělesa, je změna mechanické energie dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k},T} + \Delta E_{\mathrm{p},T} = (\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \tag{9.54}$$

OTÁZKY

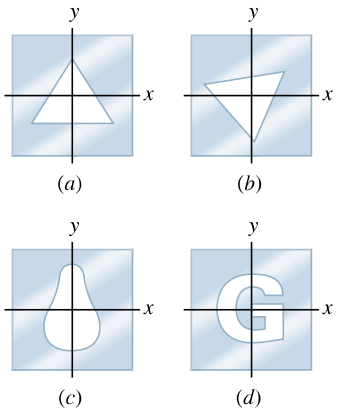
1. Chlapec vyrobil z kusu kovového plechu konstantní tloušťky c ptáka (obr. 9.19). Který z očíslovaných bodů je s největší pravděpodobností těžištěm modelu?



Obr. 9.19 Otázka 1

2. Na obr. 9.20 jsou zakresleny čtyři čtvercové kovové desky s vyříznutými otvory různých tvarů. Počátek soustavy souřadnic v rovině xy splývá ve všech případech se středem čtvercové desky, tj. s jejím těžištěm před vyříznutím otvoru. Odhadněte polohu těžiště každé desky s otvorem (je-li to možné, rozhodněte, v kterém leží kvadrantu, případně na které ose, nebo dokonce ve kterém bodě).

3. Na obr. 9.21 je zachycen tučňák stojící na levém konci homogenních sáněk délky L, které leží na dokonale hladkém ledovém povrchu. Hmotnosti obou těles jsou shodné. (a) Určete polohu těžiště sáněk. (b) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky. Tučňák přechází k pravému konci sáněk. Sáňky přitom kloužou po ledě. (c) Jak se pohybuje těžiště soustavy tučňák + sáňky? Doleva, doprava, nebo zůstává v klidu? (d) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky poté, co tučňák přešel k pravému konci sáněk. (e) Jakou dráhu tučňák urazil vzhledem k sáňkám? (f) Jakou dráhu urazilo těžiště sáněk vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky? (g) Jakou dráhu urazil vzhledem k němu tučňák? (Přípravná otázka k úloze 23.)

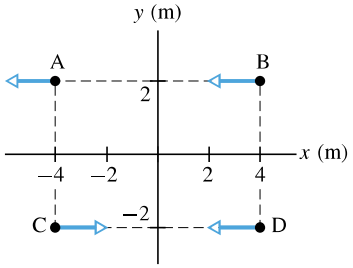


Obr. 9.20 Otázka 2

Obr. 9.21 Otázky 3 a 4

4. Předpokládejme, že se tučňák i sáňky z otázky 3 na obr. 9.21 zpočátku pohybují vpravo rychlostí v_0. (a) Rozhodněte, zda je rychlost v, kterou se pohybují sáňky vzhledem k ledu během přesunu tučňáka k jejich pravému konci, větší, menší, nebo stejná jako v_0. (b) Zodpovězte tutéž otázku, přechází-li tučňák zpět k levému konci sáněk.

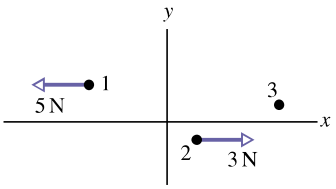
5. Na obr. 9.22 jsou zakresleny čtyři částice stejné hmotnosti, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné rovině stálými rychlostmi (pohled shora). Směry rychlostí jsou v obrázku vyznačeny, velikosti jsou shodné. Která dvojice částic tvoří soustavu, jejíž těžiště (a) je v klidu, (b) je v klidu v počátku soustavy souřadnic, (c) projde při svém pohybu počátkem soustavy souřadnic?



Obr. 9.22 Otázka 5

6. (a) Představme si poněkud absurdní situaci: dva melouny jsme současně upustili z mostu. Jaké je zrychlení těžiště této dvoučásticové soustavy? (b) Jaké bude zrychlení těžiště soustavy dvou padajících melounů, upustíme-li jeden z nich o něco později?

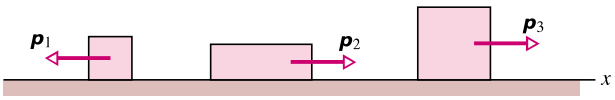
7. Obr. 9.23 představuje pohled shora na soustavu tří částic, na něž působí vnější síly. Směry a velikosti sil působících na dvě z těchto částic jsou v obrázku vyznačeny. Jaká je velikost a směr síly působící na třetí částici, jestliže (a) je těžiště soustavy v klidu, (b) pohybuje se konstantní rychlostí vpravo, (c) urychluje se směrem vpravo?



Obr. 9.23 Otázka 7

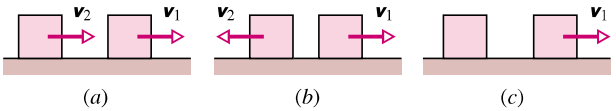
8. Těleso, které se pohybuje podél osy x po dokonale hladké vodorovné podložce, se náhle rozpadne na tři části. Každá z nich se dále pohybuje podél osy x ve směru vyznačeném v obr. 9.24. Následující tabulka obsahuje čtyři soubory hodnot velikostí hybností $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3$ jednotlivých částí tělesa v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte tyto soubory sestupně podle velikosti počáteční rychlosti tělesa.

	p_1	p_2	p_3
(a)	10	2	6
(b)	10	6	2
(c)	2	10	6
(d)	6	2	10



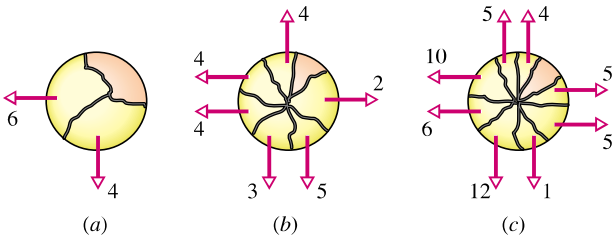
Obr. 9.24 Otázka 8

9. Podobně jako v př. 9.7 uvažujme těleso, které se pohybuje konstantní rychlostí ve směru kladné osy x a náhle se rozpadne na dvě části. Jedna z nich, o hmotnosti m_1, pokračuje v pohybu ve směru kladné osy x. Její rychlost je $\boldsymbol{v}_1$. Druhá část tělesa má hmotnost m_2 a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ (a) podél kladné osy x (obr. 9.25a), (b) podél záporné osy x (obr. 9.25b), (c) je v klidu (obr. 9.25c). Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.



Obr. 9.25 Otázka 9

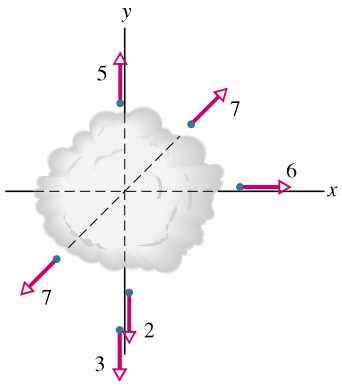
10. Obr. 9.26 ukazuje pohled shora na těleso, které se při výbuchu rozbušky rozpadlo (a) na tři části (obrázek (a)), (b) sedm částí, (c) devět částí. Díly tělesa se po výbuchu pohybovaly po dokonale hladké vodorovné podlaze. Pro každou situaci jsou v obr. 9.26 vyznačeny vektory hybnosti všech částí tělesa s výjimkou jedné, jejíž hybnost označíme $\boldsymbol{P}'$. Čísla uvedená u jednotlivých vektorů udávají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte situace na obrázcích sestupně podle velikosti (a) složky P'_x, (b) složky P'_y a (c) vektoru $\boldsymbol{P}'$.



Obr. 9.26 Otázka 10

11. Obr. 9.27 znázorňuje pohled shora na šest částic, které vznikly „dvojrozměrným“ výbuchem tělesa. Před výbuchem spočívalo těleso v klidu na dokonale hladké vodorovné podložce. Směry hybností částic jsou na obrázku vyznačeny vektory, čísla

znamenají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. (a) Vzniklo při explozi více částic, než je znázorněno? (b) Jestliže ano, najděte jejich výslednou hybnost a (c) směr jejich pohybu.



Obr. 9.27 Otázka 11

12. V tabulce jsou uvedeny hmotnosti a vzdálenosti pro tři různé dvojice částic:

	m_1	m_2	POČÁTEČNÍ VZDÁLENOST d
dvojice 1	$2m$	$8m$	1,0 m
dvojice 2	$3m$	$6m$	2,0 m
dvojice 3	$4m$	$9m$	0,5 m

Částice ve dvojicích na sebe působí přitažlivými silami. Zpočátku jsou obě částice každé dvojice udržovány vnějšími silami v klidu ve vzdálenosti d a v určité chvíli jsou uvolněny. V okamžiku, kdy jejich vzdálenost klesne na hodnotu $d/2$, má částice o hmotnosti m_1 rychlost v_1 a částice o hmotnosti m_2 rychlost v_2. Bez písemných výpočtů seřaďte dvojice částic sestupně podle hodnoty poměru v_1/v_2. (*Tip*: Př. 9.10.)

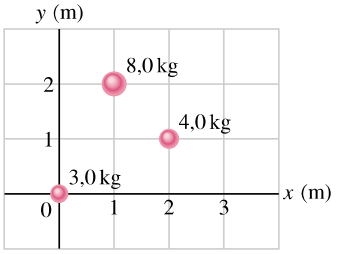
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 9.2 Těžiště

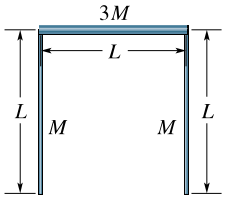
1C. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy Země + Měsíc od středu Země? (V dod. C jsou uvedeny hmotnosti Země a Měsíce i jejich vzdálenost). (b) Vyjádřete výsledek získaný v části (a) v jednotkách poloměru Země.

2C. Vzdálenost středů atomů uhlíku (C) a kyslíku (O) v molekule oxidu uhelnatého (CO) je $1{,}131\cdot10^{-10}$ m. Najděte polohu těžiště molekuly CO vzhledem ke středu atomu uhlíku. (Hmotnosti atomů C a O jsou uvedeny v dod. D.)

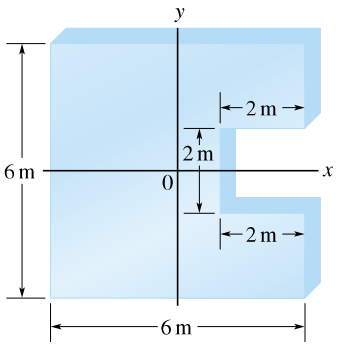
3C. (a) Určete souřadnice těžiště soustavy tří částic na obr. 9.28. (b) Co se bude dít s těžištěm, bude-li se hmotnost nejvýše položené částice postupně zvětšovat?



Obr. 9.28 Cvičení 3



Obr. 9.29 Cvičení 4



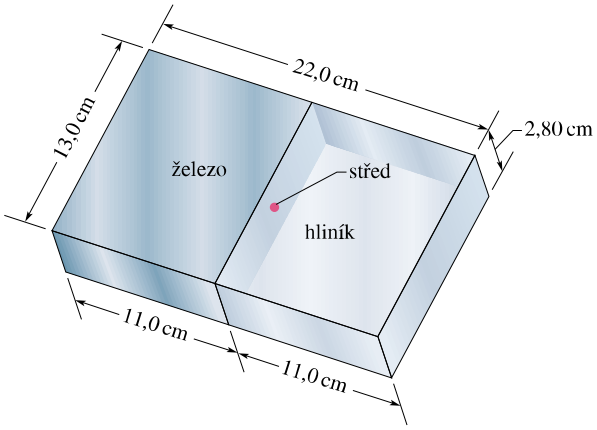
Obr. 9.30 Cvičení 5

4C. Tři tenké tyče o stejné délce L vytvořily těleso ve tvaru obráceného U (obr. 9.29). Dvě boční tyče mají hmotnost M, hmotnost třetí tyče je $3M$. Určete polohu těžiště tělesa.

5C. V homogenní čtvercové desce o straně 6 m byl vyříznut čtvercový otvor o straně 2 m podle obr. 9.30. Střed otvoru má souřadnice $x = 2$ m a $y = 0$. Určete polohu těžiště zbytku desky. Těžiště původní desky leželo v počátku soustavy souřadnic.

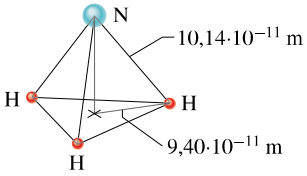
6Ú. Dokažte, že poměr vzdáleností částic dvoučásticové soustavy od jejího těžiště je roven převrácenému poměru hmotností částic.

7Ú. Na obr. 9.31 jsou uvedeny rozměry desky složené ze dvou částí. Polovina desky je vyrobena z hliníku s hustotou 2,70 g/cm^3 a polovina je ze železa o hustotě 7,85 g/cm^3. Najděte polohu těžiště desky.



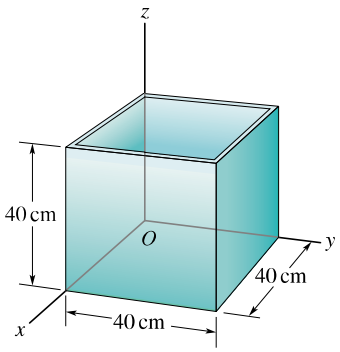
Obr. 9.31 Úloha 7

8Ú. Tři atomy vodíku (H) v molekule čpavku NH_3 (obr. 9.32) tvoří rovnostranný trojúhelník. Jeho těžiště leží ve vzdálenosti $9{,}40{\cdot}10^{-11}$ m od každého atomu vodíku. Atom dusíku (N) je vrcholem čtyřstěnu o podstavě tvořené atomy vodíku. Vzdálenost N-H je $10{,}14{\cdot}10^{-11}$ m, hmotnosti atomů N a H jsou v poměru 13,9 : 1,0. Určete polohu těžiště molekuly vůči atomu dusíku.



Obr. 9.32 Úloha 8

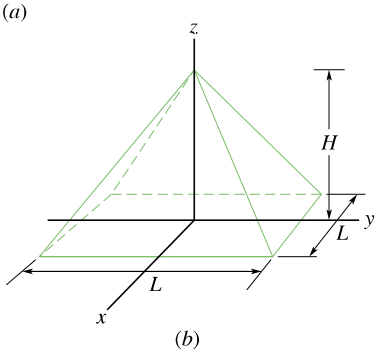
9Ú. Krychlová krabice bez horní stěny má délku hrany 40 cm. Je vyrobena z homogenního kovového plechu zanedbatelné tloušťky (obr. 9.33). Určete souřadnice jejího těžiště.



Obr. 9.33 Úloha 9

10Ú. Velká (Cheopsova) pyramida v egyptské Gíze (obr. 9.34a) měla kdysi výšku $H = 147$ m. Později z jejího vrcholu vypadl vrcholový kámen. Základnou pyramidy je čtverec o straně $L = 230$ m (obr. 9.34b), její objem je $L^2H/3$. Předpokládejme, že pyramida je homogenní těleso o hustotě $\varrho = 1{,}8{\cdot}10^3$ kg·m^{-3}. Určete (a) původní výšku těžiště pyramidy nad základnou, (b) práci potřebnou k vyzdvižení vypadlého kvádru z úrovně základny na původní místo.

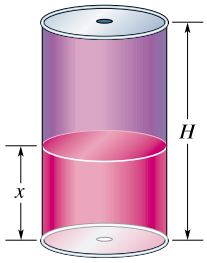
(*a*)



(*b*)

Obr. 9.34 Úloha 10

11Ú*. Válcová plechovka o hmotnosti M a výšce H je vyrobena z homogenního materiálu a naplněna limonádou o hmotnosti m (obr. 9.35). Do dna a horní podstavy plechovky vyvrtáme malé otvory, aby nápoj mohl vytékat. Okamžitou výšku těžiště plechovky nad jejím dnem označíme h. Určete hodnotu h (a) pro plnou plechovku a (b) v okamžiku, kdy již všechen nápoj vytekl. (c) Jak se mění hodnota h během vytékání nápoje? (d) Okamžitou výšku zbývajícího sloupce kapaliny v plechovce označme x. Vyjádřete hodnotu x pomocí M, H a m v okamžiku, kdy je těžiště plechovky se zbytkem nápoje v nejnižší možné poloze.



Obr. 9.35 Úloha 11

ODST. 9.3 Věta o hybnosti

12C. Dva bruslaři o hmotnostech 65 kg a 40 kg drží tyč o délce 10 m těsně u jejích konců. Tyč má zanedbatelnou hmotnost.

Bruslaři k sobě ručkují až do okamžiku setkání. Jak daleko se podél tyče posune bruslař o hmotnosti 40 kg?

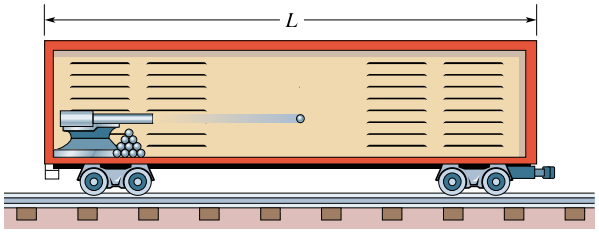
13C. Dva automobily o hmotnostech 2 400 kg a 1 600 kg jedou stejným směrem po přímé silnici rychlostmi 80 km/h a 60 km/h. Jakou rychlostí se pohybuje těžiště jejich soustavy?

14C. Člověk o hmotnosti m stojí na provazovém žebříku spuštěném z balonu o hmotnosti M (obr. 9.36). Balon je vzhledem k zemi v klidu. (a) Člověk začne stoupat rychlostí v vzhledem k žebříku. Určete rychlost balonu vzhledem k zemi (velikost a směr). (b) Popište pohybový stav soustavy od okamžiku, kdy člověk přestane šplhat.

Obr. 9.36 Cvičení 14

15C. Dvě částice P a Q o hmotnostech 0,10 kg a 0,30 kg jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti 1,0 m a přitahují se konstantní silou o velikosti $1{,}0\cdot10^{-2}$ N. Vnější síly na soustavu nepůsobí. (a) Popište pohyb těžiště soustavy. (b) V jaké vzdálenosti od původní polohy částice P se obě částice setkají?

16C. Dělo a munice jsou naloženy v uzavřeném železničním voze délky L (obr. 9.37). Dělo střílí směrem vpravo, vůz se při zpětném rázu pohybuje vlevo. Vypálené dělové koule se odrážejí od vzdálenější stěny vozu a padají na podlahu. (a) Do jaké největší vzdálenosti od své původní polohy se může vůz dostat, než dělo vystřílí všechny koule? (b) Za jakých podmínek vůz tuto vzdálenost skutečně urazí? (c) Jaká je rychlost vozu v okamžiku, kdy dělo vystřílí všechny koule?



Obr. 9.37 Cvičení 16

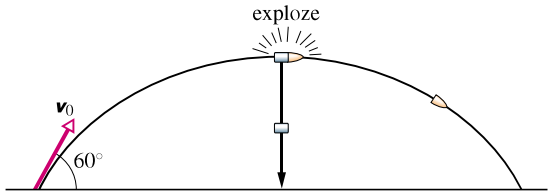
17Ú. Soustava je složena ze dvou částic o hmotnostech 3,0 kg a 4,0 kg. V jistém okamžiku má první částice rychlost 6,0 m·s^{-1} ve směru záporné osy y a druhá se pohybuje rychlostí 7,0 m·s^{-1} ve směru kladné osy x. Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

18Ú. Kámen byl uvolněn v okamžiku $t = 0$ a padá volným pádem. Jiný kámen o dvojnásobné hmotnosti je uvolněn z téhož místa o 100 ms později. Najděte (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy těchto dvou kamenů v okamžiku $t = 300$ ms. (Předpokládejte, že do tohoto okamžiku žádný z nich ještě nedopadl na zem.)

19Ú. Osobní automobil o hmotnosti 1 000 kg stojí před semaforem. Rozsvítí se zelená a automobil se rozjíždí s konstantním zrychlením 4,0 m·s^{-2}. V tom okamžiku jej předjede nákladní dodávka o hmotnosti 2 000 kg, která jede stálou rychlostí 8,0 m·s^{-1}. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy automobil + dodávka od semaforu v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

20Ú. Richard a Kamila sedí v kánoi na jezeře. Richard má hmotnost 80 kg a Kamila o něco menší. Hmotnost kánoe je 30 kg. Chlapec a dívka sedí ve vzdálenosti 3,0 m od sebe, symetricky vzhledem k těžišti prázdné kánoe. Voda je klidná a kánoe je vůči ní rovněž v klidu. Richard s Kamilou se rozhodli, že si vymění místa. Richard si všiml, že se kánoe při výměně posunula o 40 cm vzhledem ke kůlu ponořenému ve vodě. Na základě tohoto údaje se mu podařilo vypočítat hmotnost Kamily. Kolik mu vyšlo?

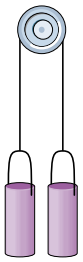
21Ú. Náboj je vystřelen s počáteční rychlostí 20 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 60°. Ve vrcholu své trajektorie se roztrhne na dvě části o stejné hmotnosti (obr. 9.38). Jedna část, jejíž rychlost je bezprostředně po výbuchu nulová, padá svisle dolů. Jak daleko od děla dopadne druhá část, stojí-li dělo na vodorovném terénu a zanedbáme-li odpor vzduchu?



Obr. 9.38 Úloha 21

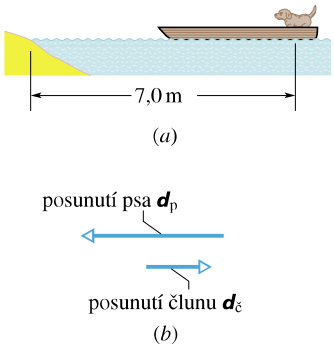
22Ú. Dvě stejné nádoby s cukrem jsou spojeny nehmotným vláknem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti o poloměru 50 mm. Kladka se může otáčet bez tření (obr. 9.39). Obě nádoby jsou ve stejné výši a původní hmotnost každé z nich je 500 g. (a) Určete polohu těžiště soustavy nádob. (b) Přidržíme nádoby, aby se nepohybovaly, a přemístíme 20 g cukru z jedné z nich do druhé. Určete polohu těžiště soustavy nyní. (c) Nádoby uvolníme. Jakým směrem se bude těžiště pohybovat? (d) Určete jeho zrychlení.

23Ú. Pes o hmotnosti 5,0 kg stojí na člunu ve vzdálenosti 7,0 m od břehu (obr. 9.40a). Rozběhne se ke břehu a zastaví se poté, co vzhledem k palubě člunu urazí dráhu 3,0 m. Člun má hmotnost 20,0 kg. Odporovou sílu, jíž působí voda proti pohybu člunu, můžeme zanedbat. Jak daleko je pes od břehu v okamžiku, kdy



Obr. 9.39 Úloha 22

se zastaví? (*Tip*: Na obr. 9.40b vidíme, že se pes pohybuje vlevo, zatímco člun ujíždí vpravo. Kterým směrem se bude pohybovat těžiště soustavy pes + člun?)



Obr. 9.40 Úloha 23

ODST. 9.5 Hybnost soustavy částic

24C. Jakou rychlostí by musel běžet člověk o hmotnosti 80 kg, aby měl stejnou hybnost jako automobil o hmotnosti 1 600 kg jedoucí rychlostí 1,2 km/h?

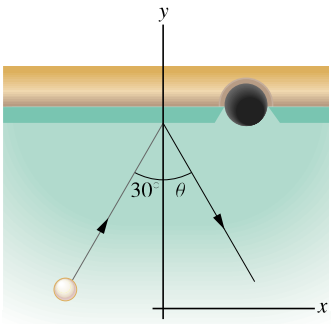
25C. Jakou rychlostí se musí pohybovat automobil o hmotnosti 816 kg, aby měl (a) stejnou hybnost, (b) stejnou kinetickou energii jako automobil o hmotnosti 2 650 kg, který jede rychlostí 16 km/h?

26C. Vypočtěte hybnost elektronu o rychlosti $0{,}99c$ ($c \doteq 3{,}00{\cdot}10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla).

27C. Měřením byla určena velikost hybnosti částice pohybující se rychlostí $1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Naměřená hodnota činila $2{,}9{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Vypočtěte hmotnost částice a zjistěte tak, zda šlo o elektron, nebo proton.

28C. Těleso o hmotnosti 0,70 kg se pohybuje vodorovně rychlostí $5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Po kolmém nárazu na svislou stěnu se odrazí rychlostí $2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete velikost změny jeho hybnosti.

29Ú. Kulečníková koule o hmotnosti 0,165 kg narazila do okraje kulečníkového stolu rychlostí o velikosti $2{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a odrazila se podle obr. 9.41. Obrázek zachycuje i volbu soustavy souřadnic. Při srážce se změnilo znaménko y-ové složky vektoru rychlosti koule, x-ová složka se nezměnila. (a) Určete úhel θ vyznačený v obr. 9.41. (b) Vyjádřete změnu hybnosti koule při srážce pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (Kutálení koule neovlivní odpověď (a) ani (b).)



Obr. 9.41 Úloha 29

30Ú. Nákladní automobil o hmotnosti 2 100 kg jel nejprve na sever rychlostí 41 km/h. Pak zabočil k východu a zvýšil svou rychlost na 51 km/h. (a) Jak se změnila kinetická energie automobilu? (b) Určete i změnu jeho hybnosti (velikost a směr).

31Ú. Radiolokátor zaregistroval objekt v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r} = (3\,500 - 160t)\boldsymbol{i} + 2\,700\boldsymbol{j} + 300\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Soustava souřadnic radiolokátoru je zvolena tak, že osa x směřuje na východ, osa y na sever a osa z svisle vzhůru. Objektem byla meteorologická raketa o hmotnosti 250 kg. Určete její (a) hybnost, (b) směr pohybu a (c) výslednou sílu, která na ni působila.

32Ú. Míč o hmotnosti 50 g je vyhozen počáteční rychlostí $16\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. (a) Určete jeho (a) kinetickou energii a (b) hybnost na počátku pohybu a těsně před dopadem na zem. (c) Dokažte, že velikost změny hybnosti míče je rovna součinu velikosti tíhové síly působící na míč a doby letu. Předpokládáme, že terén je vodorovný.

33Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost $\boldsymbol{p}$ o velikosti mc. Vyjádřete její rychlost v jednotkách rychlosti světla c.

ODST. 9.6 Zákon zachování hybnosti

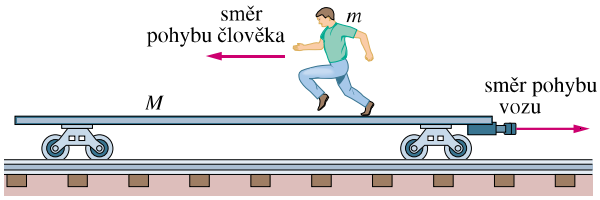
34C. Muž o hmotnosti 100 kg stojící na dokonale hladké vodorovné podlaze kopl do kamene o hmotnosti 0,08 kg, který ležel u jeho nohou. Kámen se po výkopu pohyboval vodorovně rychlostí $4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete rychlost pohybu člověka.

35C. Dvě tělesa o hmotnostech 1,0 kg a 3,0 kg jsou spojena pružinou a spočívají na dokonale hladké vodorovné podložce. Tělesa jsou uvedena do pohybu tak, že těžiště soustavy je v klidu a těleso o hmotnosti 1,0 kg se pohybuje směrem k němu počáteční rychlostí $1{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je počáteční rychlost druhého tělesa?

36C. Vesmírná loď se vzdaluje od Země rychlostí 4 300 km/h. Z lodi je vymrštěn vyhořelý raketový motor směrem zpět. Jeho rychlost vzhledem k lodi má velikost 82 km/h. Hmotnost raketového motoru je čtyřikrát větší než hmotnost zbytku lodi. Jaká je rychlost lodi vzhledem k Zemi po oddělení motoru?

37C. Muž o hmotnosti 75 kg jede na vozíku o hmotnosti 39 kg. Rychlost vozíku je $2{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Muž náhle vyskočí vzhůru tak, že vodorovná složka jeho rychlosti vzhledem k *pevné podložce* je nulová. Určete změnu rychlosti vozíku.

38C. Plošinový železniční vůz o hmotnosti M se může pohybovat bez tření po přímé vodorovné trati. Na voze stojí člověk o hmotnosti m. Soustava se pohybuje vpravo rychlostí v_0 podle obr. 9.42. Jak se změní rychlost vozu, poběží-li člověk vlevo rychlostí v_{rel} vzhledem k vozu?



Obr. 9.42 Cvičení 38

39Ú. Poslední stupeň rakety se pohybuje rychlostí 7 600 $m \cdot s^{-1}$. Skládá se ze dvou spojených částí: modulu s užitečným zatížením o hmotnosti 150,0 kg a raketového motoru, jehož hmotnost po vyčerpání pohonných hmot je 290,0 kg. V okamžiku, kdy je palivo spotřebováno, uvolní se spojovací mechanismus a části rakety se začnou od sebe vzdalovat díky působení stlačených pružin, které jsou mezi nimi umístěny. Vzájemná rychlost má velikost 910,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Určete rychlost každé z obou částí rakety vzhledem k Zemi. Předpokládáme, že všechny vektory rychlosti leží v téže přímce. (b) Určete celkovou kinetickou energii rakety před a po oddělení částí a vysvětlete případný rozdíl.

40Ú. Radioaktivní jádro je zpočátku v klidu. Rozpadá se a emituje elektron a neutrino v navzájem kolmých směrech. (*Neutrino* je jedna z elementárních částic.) Hybnost elektronu je $1{,}2 \cdot 10^{-22}$ kg·m·s^{-1}, hybnost neutrina $6{,}4 \cdot 10^{-23}$ kg·m·s^{-1}. (a) Určete směr a velikost hybnosti zbytku jádra po rozpadu. (b) Hmotnost zbytku jádra je $5{,}8 \cdot 10^{-26}$ kg. Jaká je jeho kinetická energie?

41C. Elektron (hmotnost $m_1 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg) a proton (hmotnost $m_2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) se přitahují elektrickou silou. Předpokládejme, že byly uvolněny z klidu a že jejich počáteční vzdálenost byla $d = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ m. Určete poměr (a) velikostí hybností elektronu a protonu, (b) jejich rychlostí a (c) kinetických energií v okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ m. (d) Jak se budou měnit odpovědi na otázky (a), (b) a (c) během dalšího přibližování částic?

42Ú. Těleso o hmotnosti 4,0 kg klouže po dokonale hladké vodorovné podložce. Náhle se roztrhne na dvě části o stejných hmotnostech. Rychlosti jednotlivých částí po výbuchu jsou 3,0 $m \cdot s^{-1}$ směrem na sever (azimut 0°) a 5,0 $m \cdot s^{-1}$ s azimutem 30° (odchylka 30° východním směrem). Určete rychlost tělesa před výbuchem.

43Ú. Těleso, které bylo zpočátku v klidu, vybuchlo a rozpadlo se na tři části. Dvě z nich, o stejné hmotnosti, se rozletěly stejně velkými rychlostmi 30 $m \cdot s^{-1}$ do kolmých směrů. Třetí část měla třikrát větší hmotnost než každá z předchozích dvou. Určete rychlost (velikost a směr) třetí části po výbuchu.

44Ú. Plošinový železniční vůz o hmotnosti 2 140 kg, který se může pohybovat po kolejích tak, že energiové ztráty vzniklé třením jsou zanedbatelné, stojí v klidu u nástupiště. Zápasník o hmotnosti 242 kg běží rychlostí 5,3 $m \cdot s^{-1}$ po nástupišti souběžně s tratí a vyskočí na vůz. Určete rychlost vozu v těchto případech: (a) Zápasník zůstane na voze stát. (b) Běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 $m \cdot s^{-1}$ původním směrem. (c) Otočí se a běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 $m \cdot s^{-1}$ opačným směrem.

45Ú. Raketové sáně o hmotnosti 2 900 kg jedou po zamrzlém jezeře rychlostí 250 $m \cdot s^{-1}$. Když projíždí kolem koryta, které je v ledu vysekáno pro možnost přístupu k vodě, spustí jezdec do vody nádobu a nabere do ní 920 kg vody. Pomocí zákona zachování hybnosti určete výslednou rychlost saní. Všechny brzdicí síly zanedbejte.

46Ú. Izolované těleso o hmotnosti 8 kg se pohybuje rychlostí 2 $m \cdot s^{-1}$. Náhle exploduje a rozpadne se na dvě části o hmotnostech 4 kg. Kinetická energie každé z nich bezprostředně po výbuchu je 16 J. Obě části se pohybují po původní přímkové trajektorii tělesa. Určete rychlost (velikost a směr) každé z nich.

47Ú. Sáně s jezdcem o celkové hmotnosti M spočívají v klidu na dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Jezdec naložil na sáně ještě dva kameny o hmotnostech m_1 a m_2, pro něž platí $M = 6{,}00m_1 = 12{,}0m_2$. Člověk hodlá uvést sáně do pohybu tak, že kameny vyhodí dozadu (současně nebo jeden po druhém) vodorovnou rychlostí v_{rel} vzhledem k saním. Určete výslednou rychlost saní, vymrští-li člověk kameny (a) současně, (b) nejprve m_1 a pak m_2 a (c) v opačném pořadí?

48Ú. Dělo o hmotnosti 1 400 kg vystřelilo náboj o hmotnosti 70,0 kg rychlostí o velikosti 556 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k hlavni děla. Hlaveň svírá s vodorovnou rovinou úhel 39,0°. Dělo je umístěno na vozíku, který se pohybuje bez tření. (a) Jaká je rychlost náboje vzhledem k zemi? (b) Pod jakým úhlem vzhledem k zemi je náboj vystřelen? (*Tip*: Vodorovná složka hybnosti soustavy se během výstřelu nemění.)

ODST. 9.7 Soustavy s proměnnou hmotností: raketa

49C. Raketa je v klidu v meziplanetárním prostoru, kde na ni nepůsobí gravitační síla. Její hmotnost je $2{,}55 \cdot 10^5$ kg, z toho $1{,}81 \cdot 10^5$ kg paliva. Raketový motor spotřebovává palivo rychlostí 480 kg/s, rychlost zplodin vzhledem k raketě je 3,27 km/s. Zážeh motoru trvá 250 s. (a) Určete tah motoru. (b) Jaká je hmotnost rakety po vypnutí motoru? (c) Jaká je její výsledná rychlost?

50C. Posádka rakety hodlá opustit sluneční soustavu. V okamžiku, kdy se raketa pohybuje rychlostí $6{,}0 \cdot 10^3$ $m \cdot s^{-1}$, zažehne se motor. Rychlost zplodin vzniklých spalováním pohonných hmot je $3{,}0 \cdot 10^3$ $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k raketě. V okamžiku zážehu má raketa hmotnost $4{,}0 \cdot 10^4$ kg a její zrychlení je 2,0 $m \cdot s^{-2}$. (a) Určete tah motoru a (b) rychlost spotřeby paliva.

51C. Vesmírná sonda o hmotnosti 6 090 kg letí přídí směrem k Jupiteru a má vzhledem ke Slunci rychlost 105 $m \cdot s^{-1}$. Během krátkodobého zážehu motoru vznikne 80,0 kg zplodin, které opustí sondu relativní rychlostí 253 $m \cdot s^{-1}$. Jaká je rychlost sondy po skončení zážehu?

52C. Raketa je v klidu ve vesmírném prostoru. Zjistěte, jaký musí být poměr počáteční a výsledné hmotnosti rakety, má-li

být po vyhoření paliva rychlost rakety (a) shodná s relativní rychlostí zplodin, (b) dvakrát větší než tato rychlost.

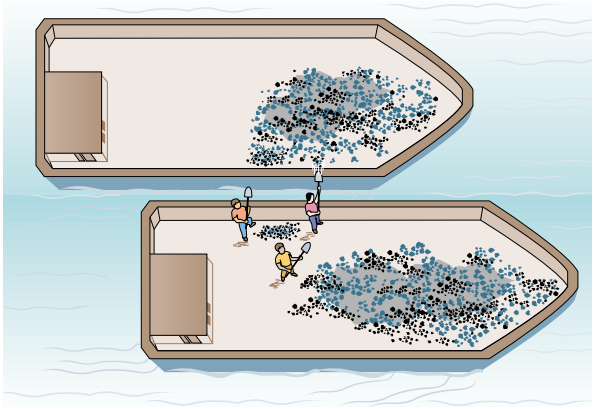
53C. Posádka lodi směřující k Měsíci je nucena provést korekci letu. Velikost rychlosti lodi je třeba zvýšit z počáteční hodnoty 400 $m \cdot s^{-1}$ o 2,2 $m \cdot s^{-1}$ při zachování směru letu. Relativní rychlost, s níž zplodiny vyhořelého paliva tryskají z raketového motoru, je 1 000 $m \cdot s^{-1}$. Jakou část původní hmotnosti lodi tvoří spálené palivo v okamžiku, kdy je korekce letu ukončena?

54C. Nákladní železniční vůz jede pod dopravníkem zrní stálou rychlostí 3,20 $m \cdot s^{-1}$. Za jednu minutu se z dopravníku vysype na vůz 540 kg zrní. Jakou silou musíme na vůz působit, aby se jeho rychlost neměnila? (Tření zanedbáváme.)

55Ú. Jednostupňová raketa o hmotnosti M je v klidu vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě $\mathscr{S}$. V okamžiku $t = 0$ dojde k zážehu motoru. Dokažte, že spálené plyny opouštějící trysku motoru budou vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ v klidu v okamžiku, kdy se hmotnost rakety sníží na hodnotu $0{,}368M$.

56Ú. Raketa o hmotnosti 6 100 kg startuje svisle z povrchu Země. Relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě je 1 200 $m \cdot s^{-1}$. Určete hmotnost zplodin opouštějících raketu za jednu sekundu ve dvou různých případech: (a) Tah motoru je roven váze rakety. (b) Velikost počátečního zrychlení rakety má hodnotu 21 $m \cdot s^{-2}$.

57Ú. Dva dlouhé nákladní čluny plují po klidné hladině stejným směrem, stálými rychlostmi 10 km/h a 20 km/h. (Tažná síla každého motoru právě kompenzuje odporovou sílu vody.) Během míjení člunů se z pomalejšího na rychlejší překládá uhlí. Za jednu minutu přeloží dělníci 1 000 kg uhlí (obr. 9.43). Poněvadž je třeba, aby se rychlosti člunů během překládky neměnily, musí posádky změnit výkon motorů. Určete dodatečnou tažnou sílu každého z nich za předpokladu, že dělníci uhlí volně přesypávají přesně kolmo k bočnímu okraji pomalejšího člunu (rychlost, kterou kusům uhlí udělují vzhledem k pomalejšímu člunu, je zanedbatelně malá). Odporovou sílu vody považujeme za nezávislou na zátěži člunů.



Obr. 9.43 Úloha 57

58Ú. Tryskové letadlo letí rychlostí 180 $m \cdot s^{-1}$. Každou sekundu nasaje jeho motor 68 m^3 vzduchu (hmotnost 70 kg). Vzduch se spotřebuje ke spálení 2,9 kg paliva za sekundu. Produkty hoření proudí z tryskového motoru rychlostí 490 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k letadlu. Určete (a) tah tryskového motoru a (b) jeho výkon ve wattech.

ODST. 9.8 Vnější síly a změny vnitřní energie

59C. Horolezec o hmotnosti 90 kg vystupuje z tábora ve výšce 4 425 m n. m. na vrchol Mount Everestu (8 850 m n. m.). (a) Určete výslednou změnu potenciální energie soustavy horolezec + Země při tomto výstupu. (b) Kolik čokoládových tyčinek je potřeba k dodání této energie, je-li kalorická hodnota každé z nich 300 kcal? Odpověď na tuto otázku ukáže, že práce potřebná k překonání gravitační síly tvoří zcela jistě jen mizivou část energie, kterou horolezec vydá při takovém náročném výstupu.

60C. Chlapec o hmotnosti 51 kg vyšplhal za 10 s po laně délky 6,0 m. (a) Určete odpovídající změnu potenciální energie soustavy chlapec + Země a (b) průměrný výkon chlapce.

61C. Žena o hmotnosti 55 kg vyběhla po schodišti vysokém 4,5 m za 3,5 s. Určete odpovídající průměrný výkon.

62C. Sprinter o váze 670 N uběhl prvních 7,0 m závodu za 1,6 s. Startoval z klidu a pohyboval se s konstantním zrychlením. Určete jeho (a) rychlost a (b) kinetickou energii na konci tohoto časového intervalu a (c) odpovídající průměrný výkon.

63C. Luxusní parník *Queen Elizabeth 2* má dieselelektrický pohon o maximálním výkonu 92 MW. Maximální cestovní rychlost je 32,5 uzlů (1 uzel = 1,853 km/h). Jak velká je tažná síla motoru, pluje-li loď maximální rychlostí?

64C. Automobil o hmotnosti 1 600 kg jede rovnoměrně rychlostí 25,1 $m \cdot s^{-1}$. Tažná síla motoru kompenzuje třecí sílu o velikosti 703 N. Určete výkon motoru v jednotkách HP.

65C. Průměrná rychlost plavce je 0,22 $m \cdot s^{-1}$ při průměrné velikosti odporové síly prostředí 110 N. Určete jeho výkon.

66C. Energie, kterou musí vydat běžec bez ohledu na dosaženou rychlost, je asi 335 J/m. Určete průměrný výkon (a) sprintera při závodu na 100 m (čas $t = 10$ s), (b) maratonce (trať maratonu = = 42,2 km, doba = 2 h 10 min).

67C. Automobil i s cestujícími váží 16 400 N a jede rychlostí 113 km/h. Řidič začne brzdit. Určete brzdnou dráhu automobilu, je-li celková brzdná síla 8 230 N.

68C. Volejbalista trénuje výskoky. Ze vzpřímeného postoje poklesne v kolenou a sníží tak polohu těžiště o 18 cm. Poté vyskočí svisle vzhůru. Průměrná síla, kterou působí podlaha na chodidla sportovce, je asi třikrát větší než jeho váha. Určete rychlost jeho těžiště v okamžiku, kdy prochází původní polohou.

69C. Žena o hmotnosti 55 kg vyskočí z podřepu svisle vzhůru. V podřepu je její těžiště 40 cm nad úrovní podlahy. V okamžiku, kdy její chodidla ztrácejí s podlahou kontakt, je výška těžiště nad podlahou 90 cm, zatímco jeho největší výška nad podlahou činí 120 cm. (a) Jak velká průměrná síla působí na chodidla sportovkyně při odrazu? (b) Jak velká je největší rychlost jejího těžiště?

70Ú. Hokejista o hmotnosti 110 kg bruslí rychlostí 3,0 $m \cdot s^{-1}$ směrem ke hrazení a zabrzdí se o ně rukama. Během brzdění se jeho těžiště posune o 30 cm ke hrazení. (a) Určete výslednou

změnu kinetické energie jeho těžiště. (b) Jak velká je průměrná síla, kterou hokejista působí na hrazení?

71Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rozjíždí z klidu po vodorovné silnici. Za 30 s dosáhne rychlosti je 72 km/h. (a) Jaká je kinetická energie automobilu na konci 30. sekundy? (b) Jaký je jeho průměrný výkon při rozjezdu? (c) Jaký je okamžitý výkon automobilu na konci 30. sekundy za předpokladu, že zrychlení je konstantní?

72Ú. Automobil o hmotnosti 1 710 kg jede stálou rychlostí o velikosti 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tažná síla motoru, jehož výkon je 16,0 kW, kompenzuje síly tření a odporu prostředí. (a) Určete výslednici třecích a odporových sil. (b) Jaký by byl výkon motoru, kdyby automobil jel po silnici se stoupáním 8 % (tj. 8,00 m převýšení na každých 100 m měřených ve vodorovném směru) rychlostí 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? (c) Automobil sjíždí z kopce bez motoru stálou rychlostí 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete sklon vozovky v procentech.

73Ú. Lokomotiva s maximálním výkonem 1,5 MW může urychlit vlak z rychlosti 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na rychlost 25 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ za dobu 6,0 min. (a) Vypočtěte hmotnost vlaku. V uvedeném časovém intervalu zapište (b) rychlost vlaku a (c) urychlující sílu jako funkce času (měřeného v sekundách). (d) Určete vzdálenost, kterou vlak za tuto dobu urazil.

74Ú. Celková odporová síla, která působí proti pohybu automobilu, je výslednicí třecí síly, jíž působí silnice na kola automobilu a která je takřka nezávislá na rychlosti, a odporové síly vzduchu, jejíž velikost je úměrná čtverci rychlosti. Pro automobil o váze 12 000 N je velikost celkové odporové síly dána vztahem $F = 300 + 1{,}8v^2$, kde F je v newtonech a v v metrech za sekundu. Vypočtěte výkon motoru, jestliže automobil zvyšuje svou rychlost z počáteční hodnoty 80 km/h se zrychlením 0,92 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

75Ú*. Závodní automobil o hmotnosti m se rozjíždí z klidu. Jeho motor má stálý výkon P. Za jakou dobu urazí automobil dráhu d?

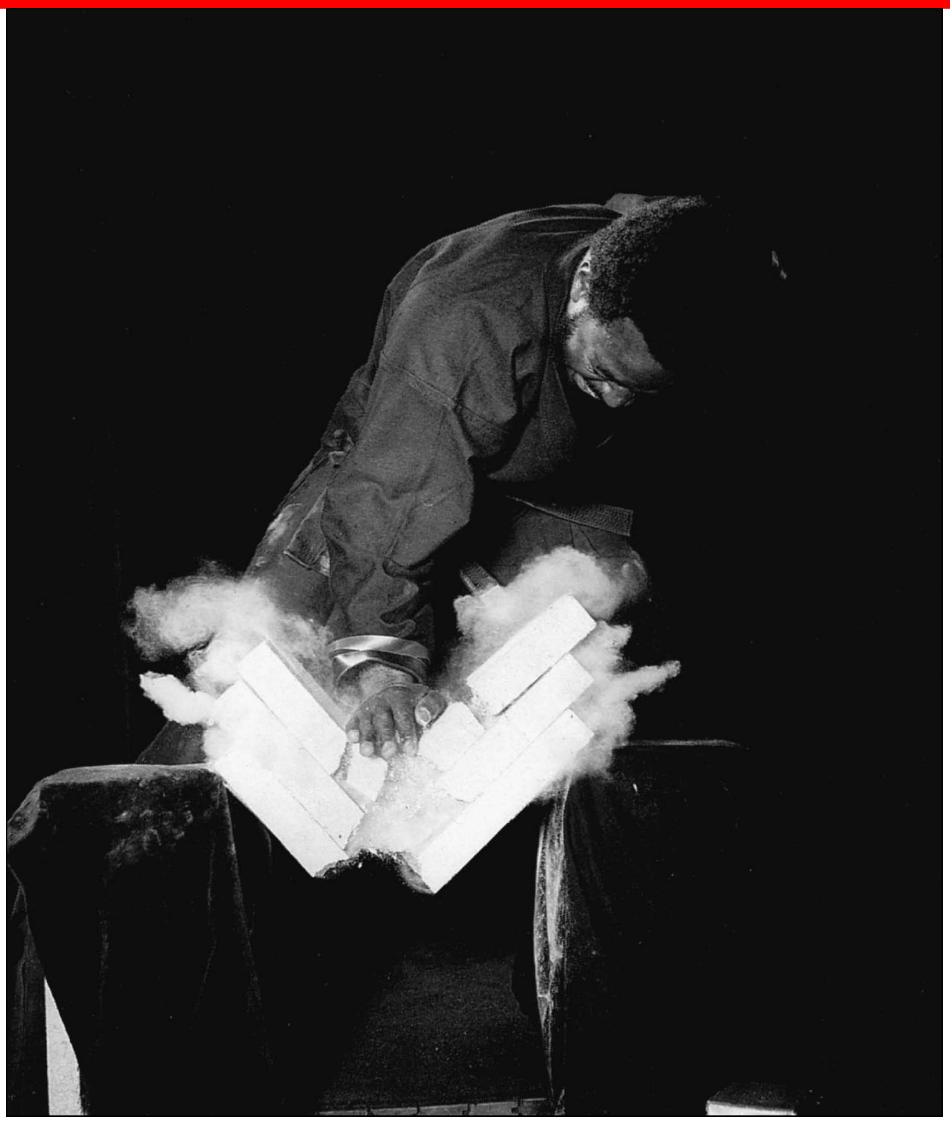
PRO POČÍTAČ

76Ú. Následující tabulka udává polohu tří částic v souřadnicové rovině (xy) a jejich rychlost v určitém okamžiku. Hmotnosti částic jsou různé a jsou v tabulce rovněž uvedeny. Určete (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy tří částic v tomto okamžiku. (c) Vypočtěte jejich celkovou hybnost.

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	SOUŘADNICE (m)	RYCHLOST ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)
1	4,00	(0, 0)	$1{,}50\boldsymbol{i} - 2{,}50\boldsymbol{j}$
2	3,00	(7,00; 3,00)	0
3	5,00	(3,00; 2,00)	$2{,}00\boldsymbol{i} - 1{,}00\boldsymbol{j}$

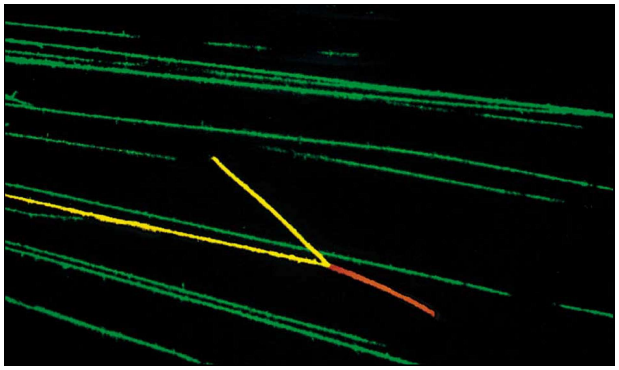
77Ú. Těleso o hmotnosti 2,00 kg je v okamžiku $t = 0$ upuštěno ze střechy vysoké budovy a volně padá podél její stěny. V okamžiku $t = 1{,}00$ s je z téhož místa na střeše upuštěno těleso o hmotnosti 3,00 kg. První těleso dopadne na zem v okamžiku $t = 5{,}00$ s. Sestrojte graf časové závislosti (a) polohy a (b) rychlosti těžiště soustavy těchto dvou těles v intervalu od $t = 0$ do $t = 6{,}00$ s. Počátek svislé osy y zvolte na střeše budovy a její kladný směr orientujte dolů.

10
Srážky

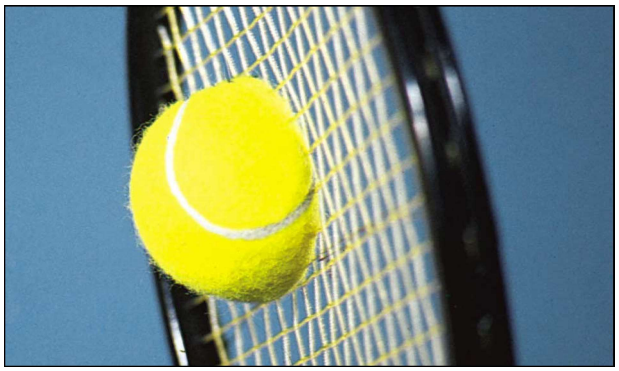


Fyzik Ronald McNair byl jedním z astronautů, kteří zahynuli při havárii raketoplánu ***Challenger****. Byl také nositelem černého pásku v karate a jediným úderem dokázal zlomit několik betonových tabulek. Při podobných ukázkách umění karate se nejčastěji používají borové desky nebo betonové dlaždice. Při úderu se prohýbají a akumulují pružnou energii do chvíle, kdy dosáhne jisté mezní hodnoty. Pak se zlomí. Je překvapivé, že energie nutná ke zlomení dlaždice je v porovnání s mezní energií dřevěné desky zhruba třetinová. Přesto je snažší zlomit desku. Čím to je?*

(*a*)



(*b*)



(*c*)

Obr. 10.1 Pojem srážky je velmi široký. (a) Meteorický kráter v Arizoně má šířku asi 1 200 metrů a je 200 metrů hluboký. (b) Alfa-částice, která se pohybuje zleva doprava (v kolorovaném obrázku je její trajektorie vyznačena žlutě) narazí do jádra dusíku, které bylo zpočátku v klidu. Po srážce se dusíkové jádro pohybuje směrem vpravo (červená trajektorie). (c) Náraz míčku do rakety při tenisovém zápasu trvá zhruba 4 ms. (Po tuto dobu je míček s raketou v kontaktu). Celková doba trvání všech srážek v průběhu jednoho setu průměrného zápasu činí pouhou sekundu.

10.1 CO JE TO SRÁŽKA?

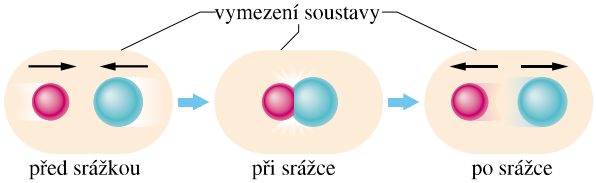
V hovorové řeči rozumíme *srážkou** událost, při níž do sebe narazí nebo o sebe udeří dvě či více různých těles. I když tuto „definici“ budeme muset později poněkud zpřesnit, je celkem výstižná a pro běžné situace, k nimž patří například srážky kulečníkových koulí, údery kladiva na hřebík nebo havárie automobilů, docela dobře použitelná.

Obr. 10.1a zachycuje následky jedné obrovské srážky, k níž došlo před 20 000 let. Ke srážkám dochází prakticky v celém myslitelném rozsahu velikostí objektů. Můžeme je sledovat od oblasti světa subatomárních částic (obr. 10.1b) až po kolize doslova „astronomických rozměrů“ u hvězd a galaxií. Srážky jsou většinou velmi krátké, takže je obtížné jejich průběh pozorovat, i když se třeba týkají objektů běžných rozměrů. Pozorování neusnadní ani skutečnost, že se tělesa při srážkách často výrazně deformují (obr. 10.1c).

V dalším textu budeme používat poněkud přesnější definici srážky:

Srážka je krátkodobý děj, při němž na sebe dvě nebo i více těles vzájemně působí poměrně značnými silami.

Uvažujeme-li o soustavě těles, mezi nimiž dojde ke srážce, je třeba umět dobře vymezit dobu *před* srážkou, dobu, po kterou srážka *probíhá*, a dobu *po* srážce (obr. 10.2). Pro ilustraci je v obrázku zakresleno ohraničení soustavy těles, která se účastní srážky. Síly vzájemného působení těles v průběhu srážky jsou samozřejmě vnitřními silami soustavy.



Obr. 10.2 Momentky zachycující soustavu těles při srážce.

Všimněme si, že nová definice srážky, na rozdíl od vstupní intuitivní charakteristiky, neobsahuje požadavek, aby tělesa byla v přímém kontaktu, tj. aby do sebe skutečně udeřila. Za srážku pak můžeme považovat třeba i situaci, kdy kosmická sonda míjí pohybující se velkou planetu a získává tak vyšší rychlost (tzv. gravitační prak). Sonda se přitom planety vůbec nedotkne. To však není pro průběh srážky podstatné. Není nutné, aby interakční síly těles při srážce souvisely výhradně s jejich přímým dotykem. Mohou to být docela dobře i síly gravitační jako v případě zmíněné kosmické sondy.

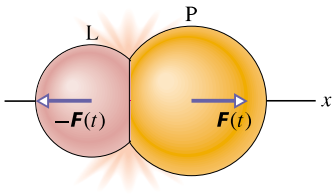
* Dříve se pro srážku užíval termín **ráz**.

Mnoho současných fyziků se intenzivně zabývá „hrou na srážky“. Jejím cílem je získat co nejvíce informací o silách působících *během* srážky na základě znalosti stavu částic *před* srážkou a *po* ní. Všechny naše dosavadní znalosti o světě subatomárních částic jsme získali ze srážkových experimentů. Základními pravidly „hry na srážky“ jsou zákony zachování hybnosti a energie.

10.2 IMPULZ SÍLY A HYBNOST

Jednoduchá srážka

Na obr. 10.3 jsou zakresleny dvě stejně velké opačně orientované síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$, jimiž na sebe působí dva různé bodové objekty při jednoduché přímé srážce.



Obr. 10.3 Srážka dvou bodových objektů L a P. Při srážce působí těleso L silou $\boldsymbol{F}(t)$ na těleso P a naopak, P působí na L silou $-\boldsymbol{F}(t)$. Síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$ představují akci a reakci. Jejich velikosti se v průběhu srážky mění, v každém okamžiku jsou si však rovny.

Vlivem vzájemného silového působení částic dojde ke změně hybnosti každé z nich. Tato změna závisí nejen na velikosti sil, ale také na době jejich působení Δt. Odpovídající vztah získáme pomocí druhého Newtonova zákona například pro těleso P v obr. 10.3, zapíšeme-li jej ve tvaru $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{10.1}$$

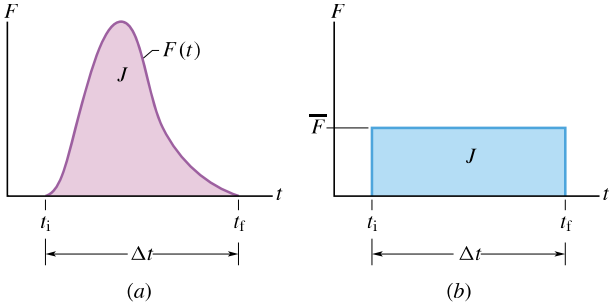
kde $\boldsymbol{F}(t)$ je časově proměnná síla. Její možný průběh je znázorněn na obr. 10.4a. Integrací rov. (10.1) v mezích t_i (okamžik bezprostředně před srážkou) a t_f (okamžik bezprostředně po srážce), určujících časový interval délky Δt, v němž srážka proběhla, dostáváme

$$\int_{\boldsymbol{p}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{p}_\mathrm{f}} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.2}$$

Integrací levé strany předchozí rovnice dostáváme změnu hybnosti $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$ tělesa P, k níž při srážce došlo. Výraz na pravé straně závisí na časovém průběhu interakčních sil během srážky a nazýváme jej **impulzem síly**. Značíme

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(impulz síly)}. \tag{10.3}$$

Připomeneme-li si interpretaci určitého integrálu z kap. 7 (bod 7.1), vidíme, že velikost impulzu síly je číselně rovna velikosti plochy pod grafem funkce $F(t)$ (obr. 10.4a).



Obr. 10.4 (a) Časová závislost velikosti proměnné síly $F(t)$, která působí na těleso P při srážce znázorněné na obr. 10.3. Obsah plochy pod grafem funkce $F(t)$ určuje velikost impulzu $\boldsymbol{J}$ této síly. (b) Výška obdélníka představuje velikost $\overline{F}$ průměrné síly v časovém intervalu Δt. Obsah obdélníka je shodný s obsahem plochy pod křivkou $F(t)$ na obr. (a), a tedy i s velikostí impulzu $\boldsymbol{J}$.

Ze vztahů (10.2) a (10.3) je zřejmé, že změna hybnosti tělesa při srážce je dána impulzem výslednice sil, které na toto těleso během srážky působí.

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(vztah mezi změnou hybnosti a impulzem síly)}. \tag{10.4}$$

Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles L a P. Vnější síly na soustavu nepůsobí. Podle zákona zachování hybnosti je tedy změna celkové hybnosti soustavy nulová. Změnu hybnosti tělesa P, vystupující ve vztahu (10.4), jsme označili symbolem $\Delta\boldsymbol{p}$. Změna hybnosti tělesa L je proto $-\Delta\boldsymbol{p}$. Vztah (10.4) můžeme také rozepsat do složek:

$$p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = \Delta p_x = J_x, \tag{10.5}$$

$$p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = \Delta p_y = J_y, \tag{10.6}$$

a

$$p_{\mathrm{f},z} - p_{\mathrm{i},z} = \Delta p_z = J_z. \tag{10.7}$$

Impulz síly i hybnost jsou vektorové veličiny a mají stejný fyzikální rozměr. Uvědomme si, že vztah (10.4) není nějakým novým fyzikálním zákonem či nezávislým tvrzením, nýbrž přímým důsledkem druhého Newtonova zákona, z něhož jsme jej odvodili. Je však velmi užitečný při řešení určitého typu fyzikálních úloh, podobně jako třeba zákon zachování mechanické energie.

Označíme-li $\overline{F}$ velikost průměrné síly určenou z grafu na obr. 10.4a, můžeme velikost impulzu síly zapsat ve tvaru

$$J = \overline{F}\,\Delta t, \tag{10.8}$$

kde Δt je doba trvání srážky. Hodnotu $\overline{F}$ najdeme jako výšku obdélníka o základně tvořené časovým intervalem od t_i do t_f (obr. 10.4b), jehož obsah je shodný s obsahem plochy pod křivkou na obr. 10.4a.

KONTROLA 1: Výsadkář, jemuž se při seskoku neotevřel padák, měl štěstí. Dopadl na hustě zasněženou pláň, a tak utrpěl jen drobná poranění. Kdyby dopadl na holou zem, byla by doba nárazu 10krát kratší a jeho zranění by mohla být i smrtelná. Jak ovlivní silná sněhová pokrývka (a) změnu hybnosti výsadkáře, (b) impulz brzdící síly a (c) její velikost?

Opakované srážky

Předpokládejme, že na těleso R pevně spojené s podlahou dopadá ve směru osy x ustálený tok částic o stejné hybnosti mv (obr. 10.5). Impulz J síly, jíž každá z dopadajících částic na těleso R působí, má stejnou velikost jako změna hybnosti částice Δp, avšak opačný směr. Je tedy $J = -\Delta p$. Předpokládejme, že za dobu Δt narazí na těleso n částic. Celkový silový impulz za tuto dobu určuje podle vztahu (10.4) celkovou změnu hybnosti tělesa, tj.

$$J = -n\Delta p. \qquad (10.9)$$

Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (10.8) a malé úpravě získáme průměrnou sílu $\overline{F}$ působící při srážce na těleso R:

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v. \qquad (10.10)$$

Získaný vztah vyjadřuje $\overline{F}$ jako funkci frekvence dopadu částic $n/\Delta t$ na těleso R a změny jejich rychlosti Δv.

Pokud se dopadající částice po nárazu zastaví, je třeba do vztahu (10.10) dosadit

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \qquad (10.11)$$

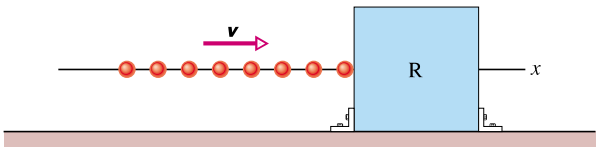
kde $v_i = v$ a $v_f = 0$ jsou rychlosti částic před srážkou a po srážce. Pokud se však částice při srážce odrazí zpět se stejně velkou rychlostí, je $v_f = -v$. Pak dostaneme

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \qquad (10.12)$$

Celková hmotnost částic, které za dobu Δt narazí do tělesa R, je $\Delta m = nm$. S ohledem na tuto skutečnost můžeme vztah (10.10) přepsat do tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \qquad (10.13)$$

Síla $\overline{F}$ je tak vyjádřena pomocí **hmotnostního toku** částic $\Delta m/\Delta t$ dopadajícího na těleso R. V závislosti na charakteru srážky můžeme do posledního vztahu dosadit za Δv buď $-v$ (podle vztahu (10.11)), nebo $-2v$ (podle vztahu (10.12)).



Obr. 10.5 Na pevné těleso R dopadají částice o stejné hybnosti. Jejich tok je ustálený. Průměrná síla $\overline{F}$ působící na těleso směřuje vpravo a její velikost závisí na hmotnostním toku dopadajících částic.

PŘÍKLAD 10.1

Baseballový míč o hmotnosti 140 g letí těsně před odpálením vodorovně rychlostí v_i o velikosti 39 m·s^{-1}. Po úderu letí míč opačným směrem stejně velkou rychlostí v_f.

(a) Určete impulz síly, která na míč při úderu působila.

ŘEŠENÍ: Impulz síly vypočteme ze známé změny hybnosti míče vztahem (10.4), upraveným pro jednorozměrný případ. Za kladný směr osy x zvolíme směr pohybu pálky. Ze vztahu (10.4) dostaneme

$$J = p_f - p_i = mv_f - mv_i =$$
$$= (0,14\,\text{kg})(39\,\text{m·s}^{-1}) - (0,14\,\text{kg})(-39\,\text{m·s}^{-1}) =$$
$$= 10,9\,\text{kg·m·s}^{-1} \doteq 11\,\text{kg·m·s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Ve shodě s naší volbou orientace souřadnicové osy x je počáteční rychlost míče (x-ová složka) záporná a výsledná rychlost kladná. Vypočtený impulz síly je kladný, vektor $\boldsymbol{J}$ má tedy, podle očekávání, stejný směr jako pohyb pálky při úderu.

(b) Srážka míče a pálky proběhla za dobu $\Delta t = 1,2$ ms. Určete průměrnou sílu, která při srážce působila na míč.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (10.8) dostaneme

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{(10,9\,\text{kg·m·s}^{-1})}{(0,001\,2\,\text{s})} =$$
$$= 9\,100\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Uvědomme si, jak je tato síla obrovská. Její velikost je přibližně rovna váze tělesa o hmotnosti jedné tuny. *Největší* síla, která na míč v jistém okamžiku v průběhu srážky působila, musí být dokonce ještě větší. Průměrná síla má směr kladné osy x. Je tedy souhlasně rovnoběžná s vektorem impulzu síly.

(c) Určete průměrné zrychlení míče.

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení určíme ze vztahu

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} = \frac{(9\,100\,\mathrm{N})}{(0,14\,\mathrm{kg})} = 6,5{\cdot}10^4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}, \quad \text{(Odpověď)}$$

tj. $a = 6\,600g$.

V dosavadních úvahách jsme předpokládali, že na tělesa nepůsobí při srážce žádné vnější síly. Tento předpoklad však při baseballové hře není splněn. Na míč totiž stále působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ (během letu i při srážce s pálkou). Velikost tíhové síly však je pouhých 1,4 N, tedy zcela zanedbatelná ve srovnání s průměrnou silou o velikosti 9 100 N, jíž na míč při úderu působí pálka. Zcela oprávněně tedy můžeme soustavu míč + pálka považovat *během srážky* za izolovanou. Chyba, které se touto idealizací dopustíme, je jen velmi malá.

PŘÍKLAD 10.2

Baseballový míč letí stejně jako v př. 10.1 vodorovně, rychlostí o velikosti $v_\mathrm{i} = 39\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nenarazí však na pálku kolmo, nýbrž se od ní odrazí pod elevačním úhlem 30° rychlostí o velikosti $v_\mathrm{f} = 45\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 10.6). Určete průměrnou sílu $\overline{\boldsymbol{F}}$, kterou pálka na míč působila, proběhla-li srážka za 1,2 ms?

ŘEŠENÍ: Z rovnic (10.5) a (10.6) určíme složky J_x a J_y impulzu síly:

$$\begin{aligned} J_x &= p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = m(v_{\mathrm{f},x} - v_{\mathrm{i},x}) = \\ &= (0,14\,\mathrm{kg})[(45\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 30^\circ) - (-39\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})] = \\ &= 10,92\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} J_y &= p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = m(v_{\mathrm{f},y} - v_{\mathrm{i},y}) = \\ &= (0,14\,\mathrm{kg})[(45\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 30^\circ) - 0] = \\ &= 3,150\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Velikost impulzu síly $\boldsymbol{J}$ je rovna

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \\ &= \sqrt{(10,92\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})^2 + (3,150\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ &= 11,37\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Z rovnice (10.8) určíme velikost průměrné síly $\overline{F}$ působící na míč při srážce:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \frac{J}{\Delta t} = \frac{(11,37\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(0,001\,2\ \mathrm{s})} = \\ &= 9\,475\ \mathrm{N} \doteq 9\,500\ \mathrm{N}. \end{aligned} \quad \text{(Odpověď)}$$

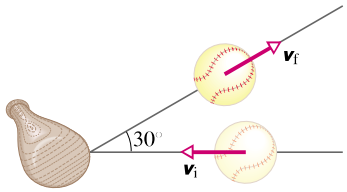
Vektor impulzu síly $\boldsymbol{J}$ směřuje šikmo vzhůru a svírá s vodorovnou rovinou úhel θ:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{J_y}{J_x} = \frac{(3,150\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(10,92\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})} = 0,288,$$

tj.

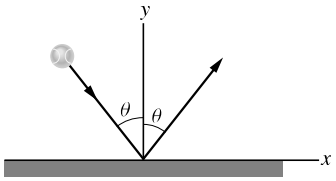
$$\theta = 16^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná síla $\overline{\boldsymbol{F}}$ má stejný směr jako impulz síly $\boldsymbol{J}$. Na rozdíl od př. 10.1 mají vektory $\overline{\boldsymbol{F}}$ a $\boldsymbol{J}$ jiný směr než rychlost míče po srážce.



Obr. 10.6 Příklad 10.2. Míč se odráží od pálky. Počáteční rychlost je vodorovná, výsledná rychlost svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°.

KONTROLA 2: Následující obrázek ukazuje pohled shora na míč, který se odráží od zdi s nezměněnou velikostí rychlosti. Změnu hybnosti míče označme $\Delta\boldsymbol{p}$. (a) Rozhodněte, zda složka (a) Δp_x, resp. (b) Δp_y je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Jaký směr má vektor $\Delta\boldsymbol{p}$?



10.3 PRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Nejjednodušším případem je přímá srážka (v některých případech zvaná také čelní nebo středová). Při ní leží počáteční rychlosti částic v téže přímce. Mají tedy směr jejich spojnice, u homogenních koulí pak směr spojnice jejich středů.

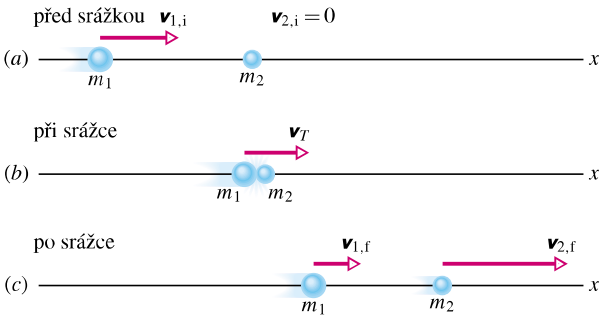
Pevný terč

Uvažujme přímou srážku dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 (obr. 10.7) a pro jednoduchost předpokládejme, že jedno z nich je před srážkou v klidu (například m_2, tj. $v_{2,\mathrm{f}} = 0$). Toto těleso budeme nazývat „terčem“. Druhé těleso, s počáteční rychlostí $v_{1,\mathrm{i}}$, bude představovat „střelu“.* Dále předpokládejme, že soustava tvořená uvažovanými dvěma tělesy je uzavřená (žádné další částice do soustavy nepřibudou, ani ji neopustí) a izolovaná (na soustavu nepůsobí

* Pokud by se terč vzhledem k laboratorní vztažné soustavě pohyboval stálou rychlostí, zvolíme pro popis srážky jinou inerciální vztažnou soustavu, v níž bude v klidu. Taková volba je vždy možná.

vnější síly). K oběma těmto přirozeným požadavkům přidejme ještě jeden, poněkud speciální: předpokládejme, že srážka nezměnila celkovou kinetickou energii soustavy. Taková srážka se nazývá **pružná** neboli **elastická**.

Při pružné srážce se obecně mění kinetická energie jednotlivých těles, která se srážky účastní. Celková kinetická energie soustavy před srážkou i po srážce je však stejná.



Obr. 10.7 Pružná srážka dvou těles. Jedno z nich (terč o hmotnosti m_2) je před srážkou v klidu. V obrázcích jsou zakresleny tyto rychlosti: (a) rychlosti obou těles před srážkou, (b) rychlost těžiště soustavy v jistém okamžiku probíhající srážky, (c) rychlosti obou těles po srážce. Velikosti vektorů odpovídají případu $m_1 = 3m_2$.

Je důležité si uvědomit, že hybnost uzavřené izolované soustavy se při srážce zachovává vždy, bez ohledu na to, je-li srážka pružná či nikoliv. Interakční síly působící při srážce jsou totiž vnitřními silami soustavy.

Při srážce těles v uzavřené izolované soustavě se hybnost každého z nich může obecně měnit. Celková hybnost soustavy je však v každém okamžiku probíhající srážky stejná, a to bez ohledu na charakter srážky.

Ze zákonů zachování hybnosti a kinetické energie dostáváme pro srážku dvou těles z obr. 10.7

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \qquad (10.14)$$

a

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2. \qquad (10.15)$$

V obou rovnicích jsme indexem (i) označili počáteční rychlosti a indexem (f) výsledné rychlosti těles. Známe-li hmotnosti těles a počáteční rychlost $v_{1,i}$ tělesa 1, zbývá vyřešit soustavu předchozích dvou rovnic a určit z ní neznámé rychlosti obou těles po srážce, tj. $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$.

Přepišme rov. (10.14) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f} \qquad (10.16)$$

a rov. (10.15) do tvaru*

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}^2. \qquad (10.17)$$

Po vydělení rov. (10.17) rov. (10.16) a dalších úpravách dostaneme

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1,i} \qquad (10.18)$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1,i}. \qquad (10.19)$$

Z rov. (10.19) je zřejmé, že hodnota $v_{2,f}$ je vždy kladná (terč o hmotnosti m_2 se po srážce pohybuje ve směru nárazu střely). Hodnota $v_{1,f}$ může být jak kladná, tak záporná (je-li $m_1 > m_2$, pohybuje se střela po srážce původním směrem, při $m_1 < m_2$ se odrazí zpět).

KONTROLA 3: Určete výslednou hybnost terče na obr. 10.7, má-li střela počáteční hybnost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a její výsledná hybnost je (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je výsledná kinetická energie terče, má-li střela před srážkou kinetickou energii 5 J a po srážce 2 J?

Věnujme se nyní několika speciálním případům:

1. *Shodné hmotnosti.* Je-li $m_1 = m_2$, redukují se rovnice (10.18) a (10.19) na tvar

$$v_{1,f} = 0 \quad \text{a} \quad v_{2,f} = v_{1,i}.$$

Při přímé srážce těles stejné hmotnosti se střela zastaví a terč získá stejnou rychlost, jakou měla střela před srážkou. Střela a terč si své rychlosti jednoduše „vymění“. Tento výsledek je platný i v případě pohyblivého terče (těleso 2 se před srážkou pohybuje).

2. *Těžký terč.* V případě těžkého terče je $m_2 \gg m_1$. Příkladem takové srážky může být třeba náraz golfového míčku do dělové koule. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou do tvaru

$$v_{1,f} \doteq -v_{1,i} \quad \text{a} \quad v_{2,f} \doteq \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1,i}. \qquad (10.20)$$

Je vidět, že střela (golfový míček) se prostě odrazí zpět opačným směrem. Velikost její rychlosti se prakticky nezmění. Terč (dělová koule) se bude pohybovat v kladném směru velmi malou rychlostí, neboť výraz $(2m_1/m_2)$ v rov. (10.20) je mnohem menší než jedna. Tyto závěry zcela jistě nejsou neočekávané.

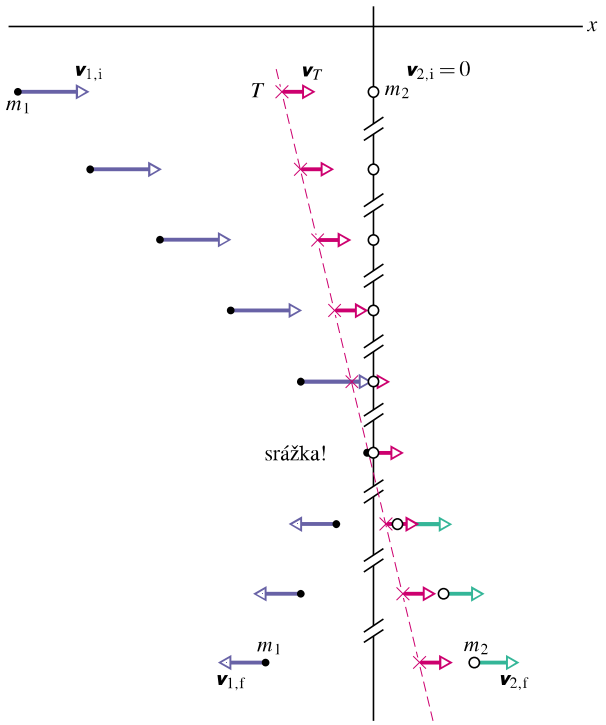
* Při těchto úpravách využíváme identity $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Řešení soustavy rovnic se tím značně zjednoduší.

3. *Těžká střela.* Nyní střílíme dělovou koulí proti golfovému míčku, tj. $m_1 \gg m_2$. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou na tvar

$$v_{1,\mathrm{f}} \doteq v_{1,\mathrm{i}} \quad \text{a} \quad v_{2,\mathrm{f}} \doteq 2v_{1,\mathrm{i}}. \tag{10.21}$$

Střela (dělová koule) se tedy pohybuje dále původním směrem a jen nepatrně se zpomalí. Terč (golfový míček) se odrazí zpět (v kladném směru) dvojnásobnou rychlostí než měla původně dělová koule.

Skutečnost, že je rychlost terče po srážce právě dvojnásobná, lze poměrně jednoduše vysvětlit: vraťme se ke vztahům (10.20), které popisují případ těžkého terče. Rychlost lehkého tělesa (střely) se změnila z hodnoty $+v$ na $-v$. Její *změna* byla tedy $2v$. Také v případě těžké střely je *změna* rychlosti lehkého tělesa (terče) rovna $2v$.



Obr. 10.8 Série obrázků znázorňujících průběh pružné srážky střely s pevným terčem. Pro hmotnosti střely (těleso 1) a terče (těleso 2) platí $m_2 = 3m_1$. V obrázcích je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou vůbec ovlivněna.

4. *Pohyb těžiště.* Pohyb těžiště soustavy dvou těles není jejich srážkou nijak ovlivněn. Tato skutečnost je důsledkem zákona zachování hybnosti a vztahu (9.26). Tento vztah

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_T, \tag{10.22}$$

vyjadřuje souvislost celkové hybnosti soustavy a rychlosti pohybu těžiště $\boldsymbol{v}_T$. Jelikož se celková hybnost $\boldsymbol{P}$ nemění, musí se zachovávat i rychlost těžiště. Těžiště se tedy pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pro případ srážky střely s pevným terčem (obr. 10.7) má těžiště soustavy rychlost (vztah (10.22))

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}}. \tag{10.23}$$

Na obr. 10.8 je posloupnost obrázků znázorňujících typický průběh pružné srážky. Je vidět, že těžiště se skutečně pohybuje konstantní rychlostí, která není srážkou nijak ovlivněna.

Pohyblivý terč

Vraťme se nyní k obecným úvahám o pružných srážkách a připusťme, že se obě tělesa před srážkou pohybují.

Obr. 10.9 Pružná srážka dvou těles

Pro soustavu těles na obr. 10.9 můžeme zapsat zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie takto:

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \tag{10.24}$$

a

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2. \tag{10.25}$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $v_{1,\mathrm{f}}$ a $v_{2,\mathrm{f}}$, kterou nyní budeme řešit. Nejprve přepíšeme rov. (10.24) do tvaru

$$m_1(v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}}) = -m_2(v_{2,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{f}}) \tag{10.26}$$

a rov. (10.25) do tvaru

$$m_1(v_{1,\mathrm{i}} - v_{1,\mathrm{f}})(v_{1,\mathrm{i}} + v_{1,\mathrm{f}}) = -m_2(v_{2,\mathrm{i}} - v_{2,\mathrm{f}})(v_{2,\mathrm{i}} + v_{2,\mathrm{f}}). \tag{10.27}$$

Rov. (10.27) vydělíme rov. (10.26) a po malých úpravách dostaneme

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,\mathrm{i}} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,\mathrm{i}}. \tag{10.29}$$

Připomeňme, že jsme indexy 1 a 2 přiřadili tělesům zcela libovolně. Záměnou indexů na obr. 10.9 a v rov. (10.28) a (10.29) získáme zcela identickou soustavu. Položíme-li

navíc $v_{2,\mathrm{i}} = 0$, přejdou rov. (10.28) a (10.29) na tvar (10.18) a (10.19), který odpovídá situaci s pevným terčem 2.

Z rov. (10.22) určíme ještě rychlost těžiště v_T soustavy těles na obr. 10.9:

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2}. \qquad (10.30)$$

Naše soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost P se proto při srážce zachovává a její těžiště se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_T.

KONTROLA 4: Počáteční hybnosti těles 1 a 2 na obr. 10.9 jsou $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-8\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je hybnost tělesa 2 po srážce, je-li výsledná hybnost tělesa 1 (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

PŘÍKLAD 10.3

Dvě kovové koule jsou zavěšeny na svislých závěsech tak, aby se právě dotýkaly (obr. 10.10). Koule 1 má hmotnost $m_1 = 30\,\mathrm{g}$, hmotnost koule 2 je $m_2 = 75\,\mathrm{g}$. Kouli 1 vychýlíme vlevo do výšky $h_1 = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ a uvolníme.

(a) Určete rychlost $v_{1,\mathrm{f}}$ koule 1 těsně po srážce s koulí 2.

ŘEŠENÍ: Označme $v_{1,\mathrm{i}}$ rychlost koule 1 těsně před srážkou. Bezprostředně po uvolnění je její kinetická energie nulová a tíhová potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1$. Těsně před srážkou je kinetická energie rovna $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2$ a potenciální energie je nulová. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 = m_1 g h_1.$$

Rychlost koule 1 těsně před srážkou je tedy

$$v_{1,\mathrm{i}} = \sqrt{2 g h_1} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}080\,\mathrm{m})} = 1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Koule 1 se sice pohybuje po oblouku, avšak v okamžiku srážky je její rychlost vodorovná. Úlohu tedy můžeme řešit podle pravidel pro jednorozměrnou srážku.

Rychlost koule 1 těsně po srážce je $v_{1,\mathrm{f}}$. Určíme ji z rov. (10.18):

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} = \frac{(0{,}030\,\mathrm{kg} - 0{,}075\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = -0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq -0{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko výsledku signalizuje, že se koule 1 pohybuje po srážce vlevo.

(b) Do jaké výšky h_1' vystoupí koule 1 po srážce?

ŘEŠENÍ: Na počátku zpětného pohybu má koule 1 kinetickou energii $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2$ a tíhová potenciální energie je nulová. Pohyb koule se obrací v nejvyšším bodě trajektorie, tj. ve výšce h_1'. Zde je její kinetická energie nulová a potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1'$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_1 g h_1' = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2,$$

tj.

$$h_1' = \frac{v_{1,\mathrm{f}}^2}{2g} = \frac{(-0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 0{,}014\,7\,\mathrm{m} \doteq 1{,}5\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je rychlost koule 2 těsně po srážce?

ŘEŠENÍ: Z rov. (10.19) dostaneme

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} = \frac{2(0{,}030\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = 0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 0{,}72\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

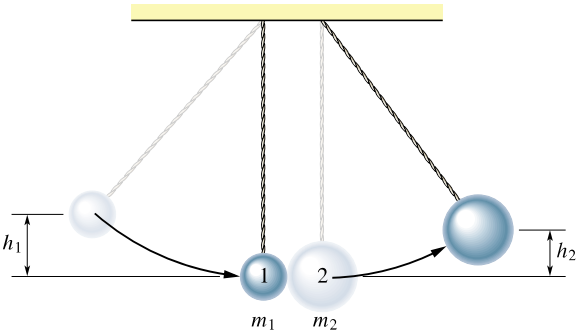
(d) Do jaké výšky h_2 vystoupí koule 2 po srážce?

ŘEŠENÍ: Koule 2 má těsně po srážce kinetickou energii $\frac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2$. V bodě obratu ve výšce h_2 má tíhová potenciální energie hodnotu $m_2 g h_2$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_2 g h_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2,$$

tj.

$$h_2 = \frac{v_{2,\mathrm{f}}^2}{2g} = \frac{(0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 0{,}026\,1\,\mathrm{m} \doteq 2{,}6\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 10.10 Příklad 10.3. Dvě kovové koule zavěšené na vláknech se v klidu právě dotýkají. Kouli 1 o hmotnosti m_1 odchýlíme vlevo do výšky h_1 a uvolníme. Po srážce vystoupí koule 2 do výšky h_2.

PŘÍKLAD 10.4

Rychlé neutrony vznikající v jaderném reaktoru je třeba nejprve zpomalit, aby se mohly efektivně účastnit řetězové reakce. Děje se tak prostřednictvím jejich srážek s jádry atomů v tzv. *moderátoru*.

(a) Určete, kolikrát se zmenší kinetická energie neutronu (hmotnost m_1) při jeho přímé srážce s jádrem atomu o hmotnosti m_2. Předpokládáme, že srážka je pružná a jádro je zpočátku v klidu.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie neutronu před srážkou a po ní je dána vztahy

$$E_{\mathrm{k,i}} = \tfrac{1}{2} m v_{1,\mathrm{i}}^2 \quad \text{a} \quad E_{\mathrm{k,f}} = \tfrac{1}{2} m v_{1,\mathrm{f}}^2.$$

Hledaný poměr označme α. Platí

$$\alpha = \frac{E_{\mathrm{k,i}} - E_{\mathrm{k,f}}}{E_{\mathrm{k,i}}} = \frac{v_{1,\mathrm{i}}^2 - v_{1,\mathrm{f}}^2}{v_{1,\mathrm{i}}^2} = 1 - \frac{v_{1,\mathrm{f}}^2}{v_{1,\mathrm{i}}^2}. \qquad (10.31)$$

Ze vztahu (10.18) dostáváme

$$\frac{v_{1,\mathrm{f}}}{v_{1,\mathrm{i}}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (10.32)$$

Dosazením rov. (10.32) do (10.31) získáme po malých úpravách výsledek:

$$\alpha = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (10.33)$$

(b) Vypočtěte hodnotu poměru α pro jádra olova, uhlíku a vodíku. Poměr hmotností jádra a neutronu ($= \frac{m_2}{m_1}$) pro olovo je 206, pro uhlík 12 a pro vodík přibližně 1.

ŘEŠENÍ: Dosazením $m_2 = k m_1$ do rov. (10.33) dostaneme pro olovo ($m_2 = 206 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(206)}{(1+206)^2} = 0{,}019, \quad \text{tj. } 1{,}9\,\%, \quad \text{(Odpověď)}$$

pro uhlík ($m_2 = 12 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(12)}{(1+12)^2} = 0{,}28, \quad \text{tj. } 28\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

a pro vodík ($m_2 = m_1$)

$$\alpha = \frac{4(1)}{(1+1)^2} = 1, \quad \text{tj. } 100\,\%. \quad \text{(Odpověď)}$$

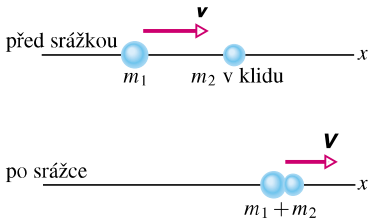
Tyto výsledky naznačují, proč je například voda podstatně lepším moderátorem neutronů než olovo.

10.4 NEPRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Srážku nazýváme **nepružnou**, jestliže se při ní nezachovává celková kinetická energie soustavy zúčastněných těles. Gumová kulička, kterou jsme upustili na tvrdou podlahu, doskočí po odrazu *téměř* do původní výšky. Její kinetická energie během srážky s podlahou nepatrně klesla. Tento malý úbytek způsobil, že po odrazu již kulička nedostoupila přesně do té výšky, ze které spadla. Kdyby byla srážka pružná, ke ztrátě kinetické energie kuličky by při ní nedošlo a kulička by vyskočila *přesně* do původní výšky. Ve skutečnosti je srážka gumové kuličky s podlahou vždy nepružná.

Golfový míček ztrácí při dopadu na zem větší část své kinetické energie a odrazí se jen do 60 % původní výšky. Odraz je tedy výrazně nepružný. Upustíme-li na zem hroudu sklenářského tmelu, přilepí se k zemi a neodrazí se vůbec. Srážku tohoto typu budeme nazývat **dokonale nepružnou**.

Na úkor úbytku kinetické energie soustavy při srážce samozřejmě vzrostou hodnoty energií některých jiných typů, např. se těleso zahřeje. Hybnost uzavřené izolované soustavy se však zachovává vždy, ať již je srážka pružná či nepružná. Hybnost i kinetická energie soustavy ovšem souvisejí s rychlostmi těles. Zákon zachování hybnosti vede proto k určitému omezení možných hodnot ztráty kinetické energie. K největší ztrátě dochází při dokonale nepružné srážce. Při ní se dokonce může stát, že soustava ztratí veškerou kinetickou energii.



Obr. 10.11 Dokonale nepružná srážka dvou těles. Před srážkou je těleso o hmotnosti m_2 v klidu. Po srážce se obě tělesa pohybují společně. Společný pohyb je znakem *dokonale* nepružné srážky. Velikosti vyznačených vektorů rychlosti odpovídají případu $m_1 = 3 m_2$.

Omezíme se zatím pouze na úvahy o dokonale nepružných srážkách. Na obr. 10.11 je znázorněna nepružná srážka dvou těles. Před srážkou bylo jedno z nich v klidu. Podle zákona zachování hybnosti je

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V, \qquad (10.34)$$

tj.

$$V = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (10.35)$$

Společnou rychlost obou objektů, které při srážce splynuly, jsme označili V. Z rov. (10.35) plyne, že tato rychlost je vždy menší než rychlost pohybujícího se tělesa před srážkou.

Obr. 10.12 dokumentuje skutečnost, že pohyb těžiště soustavy není dokonale nepružnou srážkou ovlivněn (porovnejte tento obrázek s obr. 10.8). I když při nepružné srážce dochází ke ztrátě kinetické energie *soustavy*, zůstává kinetická energie *těžiště* nedotčena. Je tedy vůbec možné, aby při nějaké dokonale nepružné srážce došlo ke ztrátě veškeré kinetické energie soustavy? Vzhledem k tomu, že kinetickou energii soustavy po takové srážce lze vyjádřit jako kinetickou energii jejího těžiště, stačí spojit vztažnou soustavu, v níž sledujeme pohyb částic, právě s těžištěm. Zákon zachování hybnosti zaručuje, že tato těžišťová soustava je inerciální. V případě srážky střely s těžkým terčem ($m_2 \gg m_1$) těžiště soustavy prakticky splývá s polohou terče. Příkladem takové situace je třeba pád hroudy tmelu na zem. Terčem je v tomto případě sama Země. Veškerá kinetická energie hroudy tak „zmizí“ ve prospěch jiných druhů energie.

Jsou-li před srážkou obě tělesa v pohybu, nahradíme vztah (10.34) rovnicí

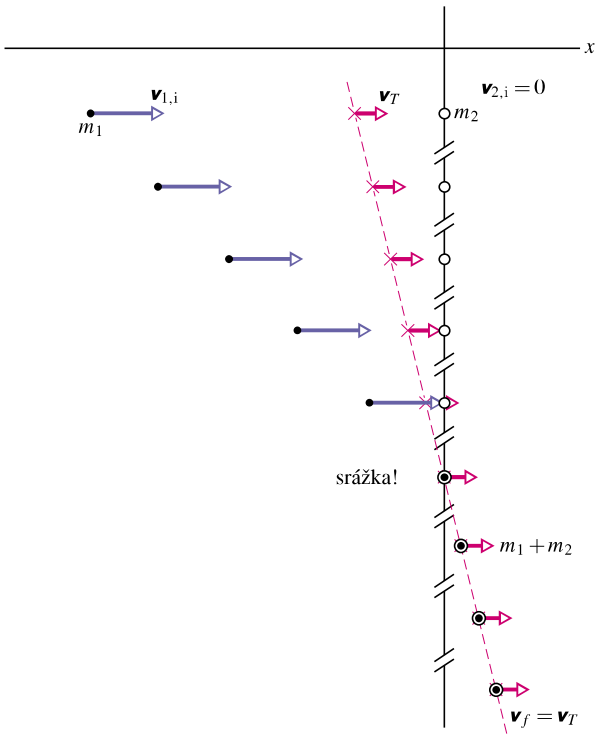
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V, \qquad (10.36)$$

kde $m_1 v_1$ a $m_2 v_2$ jsou počáteční hybnosti těles 1 a 2. Také v tomto případě je vztažná soustava spojená s těžištěm dvojice těles inerciální a výsledná kinetická energie soustavy po srážce je vzhledem k ní nulová. Příkladem může být situace na obr. 10.13, zachycujícím výsledek téměř čelní nepružné srážky dvou stejných automobilů, které jely stejnou rychlostí. Před srážkou bylo těžiště soustavy vzhledem k Zemi v klidu. Vzhledem k pozorovateli na chodníku se tedy oba automobily bezprostředně po srážce zcela zastavily.

KONTROLA 5: Určete výslednou hybnost soustavy dvou těles po dokonale nepružné přímé srážce. Počáteční hybnosti těles jsou (a) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a 0, (b) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, (c) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

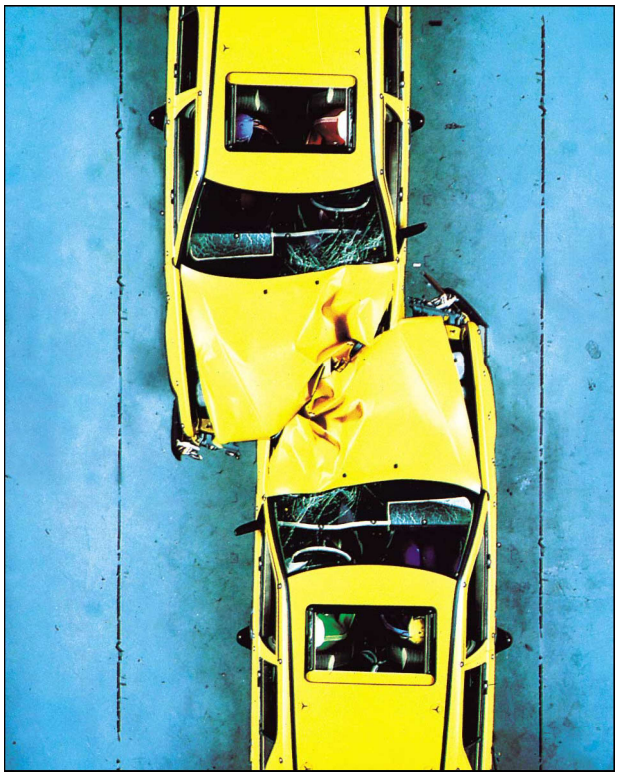
PŘÍKLAD 10.5

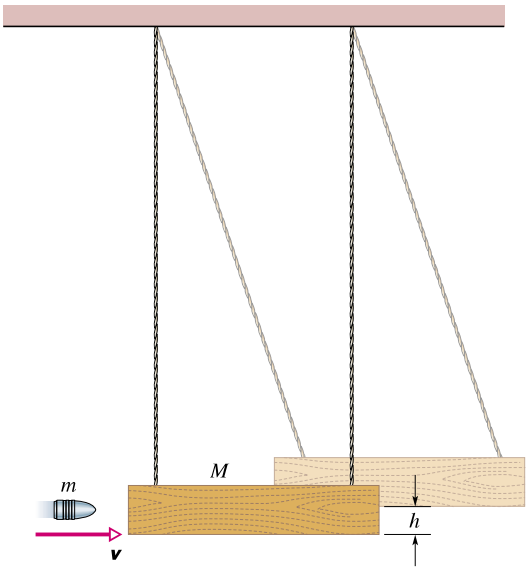
Dokud nebyla k dispozici zařízení pro elektronické měření času, užívalo se k měření rychlosti projektilů střelných zbraní tzv. *balistické kyvadlo*. Jedna z možností, jak takové kyvadlo zkonstruovat, je znázorněna na obr. 10.14. Dřevěný hranol o hmotnosti $M = 5{,}4\,\mathrm{kg}$ je zavěšen na dvou dlouhých závěsech. Kulka o hmotnosti $m = 9{,}5\,\mathrm{g}$, vystřelená z testované zbraně, hranol zasáhne a uvázne v něm. Soustava *hranol + kulka* se vychýlí z rovnovážné polohy. Největší výška výstupu těžiště soustavy je $h = 6{,}3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 10.12 Momentky zachycující průběh dokonale nepružné srážky dvou těles. Těleso 2 je zpočátku v klidu. Tělesa se při srážce spojí a pohybují se společně. V obrázku je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou nijak ovlivněna a je shodná se společnou rychlostí spojených těles. Velikosti vektorů rychlosti odpovídají případu $m_2 = 3m_1$.

Obr. 10.13 Dva automobily po dokonale nepružné, téměř čelní srážce.





Obr. 10.14 Příklad 10.5. Balistické kyvadlo k měření rychlosti střel.

(a) Jakou rychlost měla kulka těsně před srážkou s hranolem?

ŘEŠENÍ: Označme symbolem V rychlost soustavy *hranol+kulka* těsně po srážce. Podle zákona zachování hybnosti je

$$mv = (m + M)V.$$

Protože kulka uvázne v hranolu, jedná se o dokonale nepružnou srážku. Kinetická energie se při ní změní. *Po srážce* se však již mechanická energie soustavy kyvadlo+Země *zachovává*, pokud zanedbáme odpor prostředí. Kinetická energie kyvadla v rovnovážné poloze je tedy shodná s tíhovou potenciální energií soustavy v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu:

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic rychlost V, dostaneme

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh} =$$
$$= \left(\frac{5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}{0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}\right)\sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m})} =$$
$$= 630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Balistické kyvadlo můžeme chápat jako zařízení, které „převede“ velkou rychlost lehké střely na malou, a tedy mnohem lépe měřitelnou, rychlost těžkého hranolu.

(b) Určete počáteční kinetickou energii střely. Jak velkou její část představuje mechanická energie balistického kyvadla po srážce?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie kulky před srážkou je

$$E_{\mathrm{k,b}} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 =$$
$$= 1\,900\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

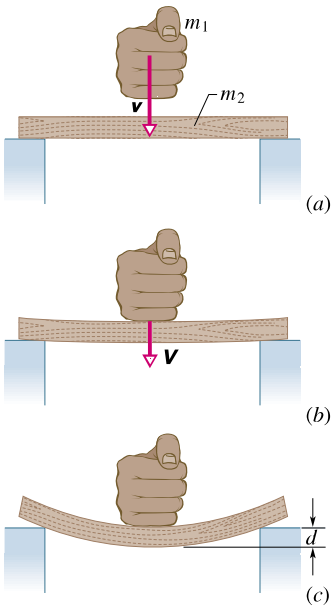
Mechanická energie soustavy kyvadlo+Země je stálá a shodná s její potenciální energií v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu

$$E = (M + m)gh =$$
$$= (5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m}) =$$
$$= 3{,}3\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce se tedy kyvadlu předá pouhý zlomek (3,3/1 900, tj. 0,2 %) počáteční kinetické energie kulky. Zbytek přispěje k zahřátí soustavy, příp. se spotřebuje k deformaci a destrukci vláken dřeva.

PŘÍKLAD 10.6

Mistr karate zlomil jediným úderem ruky (hmotnost ruky je asi $m_1 = 0{,}70\,\mathrm{kg}$) dřevěnou desku hmotnosti 0,14 kg (obr. 10.15a). Totéž provedl s betonovou dlaždicí o hmotnosti 3,2 kg. Tuhost k pro pružný ohyb desky má hodnotu $4{,}1{\cdot}10^4$ N/m a pro dlaždici $2{,}6{\cdot}10^6$ N/m. Deska praskne v okamžiku, kdy je prohnuta o $d = 16\,\mathrm{mm}$, u dlaždice stačí prohnutí o pouhý 1,1 mm (obr. 10.15c).*



Obr. 10.15 Příklad 10.6. (a) Mistr karate udeřil do ploché desky. Rychlost ruky těsně před úderem je $\boldsymbol{v}$. (b) Srážka ruky s deskou je dokonale nepružná. Po celou dobu trvání fáze ohybu mají ruka i deska společnou rychlost $\boldsymbol{V}$. (c) Deska praskne v okamžiku, kdy je její střed vychýlen o vzdálenost d.

(a) Určete pružnou energii při deformace desky a dlaždice bezprostředně před zlomením.

* Hodnoty jsou převzaty z S. R. Wilk, R. E. McNair a M. S. Feld: „The Physics of Karate“, American Joural of Physics, September 1983.

ŘEŠENÍ: Pružný průhyb nosníku je popsán Hookovým zákonem. Podle vztahu (8.11) má tedy jeho deformační energie hodnotu $E_p = \frac{1}{2}kd^2$. Pro desku pak platí

$$E_p = \tfrac{1}{2}(4{,}1{\cdot}10^4\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(0{,}016\ \mathrm{m})^2 = \\ = 5{,}248\ \mathrm{J} \doteq 5{,}2\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro dlaždici je

$$E_p = \tfrac{1}{2}(2{,}6{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(0{,}001\,1\ \mathrm{m})^2 = \\ = 1{,}573\ \mathrm{J} \doteq 1{,}6\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká musí být nejmenší rychlost ruky před úderem, aby se deska, resp. dlaždice zlomila? Srážku považujeme za dokonale nepružnou (obr. 10.15b). Dále předpokládáme, že se mechanická energie soustavy ruka + deska během pružného ohybu desky zachovává a že společná rychlost ruky i desky je bezprostředně před prasknutím desky nulová (obr. 10.15b).

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování mechanické energie při ohybu desky je zřejmé, že kinetická energie soustavy ruka + + deska na samém počátku ohybu je shodná s její elastickou energií E_p těsně před zlomením. Tato hodnota činí 5,2 J pro dřevěnou desku a 1,6 J pro betonovou dlaždici. Rychlost dopadající ruky musí být dostatečná k tomu, aby soustava ruka + deska měla po dokonale nepružné srážce potřebnou kinetickou energii E_k. Nejprve vypočteme společnou rychlost V soustavy ruka + deska na počátku ohybu. Vyjdeme z rovnosti kinetické energie a elastické energie a dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = E_p,$$

tj.

$$V = \sqrt{\frac{2E_p}{m_1 + m_2}}.$$

Dosazením hodnot $m_1 = 0{,}70\ \mathrm{kg}$ a $m_2 = 0{,}14\ \mathrm{kg}$ pro desku a 3,2 kg pro dlaždici dostaneme pro desku

$$V = \sqrt{\frac{2(5{,}248\ \mathrm{J})}{(0{,}70\ \mathrm{kg} + 0{,}14\ \mathrm{kg})}} = 3{,}534\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro dlaždici je

$$V = \sqrt{\frac{2(1{,}573\ \mathrm{J})}{(0{,}70\ \mathrm{kg} + 3{,}2\ \mathrm{kg})}} = 0{,}898\,1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Označme písmenem v rychlost ruky těsně před dopadem na desku či dlaždici. Srážka je popsána vztahem (10.35), ze kterého malou úpravou dostaneme

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V.$$

Pro desku dostáváme

$$v = \left(\frac{0{,}70\ \mathrm{kg} + 0{,}14\ \mathrm{kg}}{0{,}70\ \mathrm{kg}}\right)(3{,}534\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 4{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

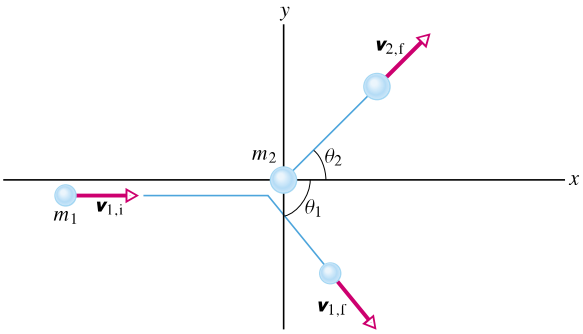
a pro dlaždici

$$v = \left(\frac{0{,}70\ \mathrm{kg} + 3{,}2\ \mathrm{kg}}{0{,}70\ \mathrm{kg}}\right)(0{,}898\,1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby se zlomila dlaždice, musí být úder ruky asi o 20 % rychlejší než u dřevěné desky. Vlivem větší hmotnosti dlaždice se na zvýšení vnitřní energie soustavy spotřebuje větší část původní kinetické energie ruky než v případě dřevěné desky.

10.5 ŠIKMÉ SRÁŽKY

Doposud jsme se zabývali velmi speciálním případem srážek, tzv. přímými srážkami. Počáteční rychlosti obou srážejících se částic při nich ležely v jedné přímce. Od tohoto požadavku nyní ustoupíme a budeme se věnovat obecnějšímu případu, srážkám **šikmým**. Při nich mohou být počáteční rychlosti obou částic zcela obecné. I nejobecnější situaci však můžeme převést na případ srážky střely s pevným terčem. Stačí, abychom vztažnou soustavu pro popis srážky spojili s kteroukoli z obou částic, která se tak stane terčem. (Pokud částice tvoří izolovanou soustavu a mají stálé hmotnosti, bude tato vztažná soustava inerciální.) Typická ukázka takové situace je znázorněna na obr. 10.16: po srážce se tělesa pohybují v různých směrech, které s původním směrem střely svírají úhly θ_1 a θ_2.



Obr. 10.16 Pružná *šikmá* srážka dvou částic, z nichž jedna je před srážkou v klidu.

Ze zákona zachování hybnosti dostaneme pro situaci na obr. 10.16 dvě skalární rovnice, pro x-ovou a y-ovou

složku celkové hybnosti soustavy:

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} \cos\theta_1 + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \cos\theta_2 \qquad (10.37)$$

(x-ová složka)

a

$$0 = -m_1 v_{1,\mathrm{f}} \sin\theta_1 + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \sin\theta_2 \qquad (10.38)$$

(y-ová složka).

Při pružné srážce se navíc zachovává i kinetická energie, tj.

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2 \qquad (10.39)$$

(kinetická energie).

Tyto tři rovnice obsahují sedm veličin: dvě hmotnosti m_1 a m_2, tři rychlosti $v_{1,\mathrm{i}}$, $v_{1,\mathrm{f}}$ a $v_{2,\mathrm{f}}$ a konečně dva úhly θ_1 a θ_2. Budeme-li znát kterékoliv čtyři z nich, určíme zbývající tři řešením soustavy rovnic (10.37) až (10.39). Velmi častá je situace, kdy jsou zadány obě hmotnosti, počáteční rychlost střely a jeden z úhlů. Výpočtem pak najdeme velikosti dvou výsledných rychlostí a zbývající úhel.

KONTROLA 6: Počáteční hybnost střely při srážce na obr. 10.16 má velikost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, x-ová složka výsledné hybnosti střely je $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a y-ová má hodnotu $-3\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) x-ovou a (b) y-ovou složku výsledné hybnosti terče.

PŘÍKLAD 10.7

Dvě částice stejných hmotností, z nichž jedna je v klidu, se pružně srazí. Ukažte, že po šikmé srážce se částice pohybují v navzájem kolmých směrech.

ŘEŠENÍ: Problém samozřejmě můžeme řešit přímo pomocí rov. (10.37), (10.38) a (10.39). Všimneme si však ještě jiného, elegantnějšího, postupu:

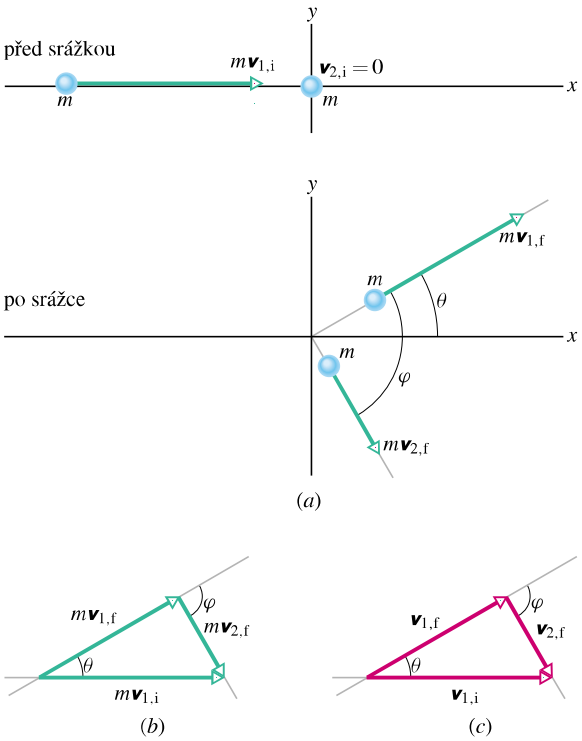
Obr. 10.17a ukazuje situaci před srážkou i po ní, s vyznačením vektorů hybností obou částic. Protože platí zákon zachování hybnosti, musí tyto tři vektory tvořit trojúhelník, zakreslený na obr. 10.17b. (Vektor $m\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{i}}$ je součtem vektorů $m\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}}$ a $m\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}$.) Hmotnosti obou částic jsou stejné, takže trojúhelník sestrojený stejným způsobem z vektorů rychlosti (obr. 10.17c) musí být podobný trojúhelníku na obr. 10.17b. Platí tedy

$$\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}} + \boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}. \qquad (10.40)$$

Navíc platí rov. (10.39), která vyplývá ze zákona zachování kinetické energie soustavy. Členy $\frac{1}{2}m$ můžeme v této rovnici vykrátit a dostaneme

$$v_{1,\mathrm{i}}^2 = v_{1,\mathrm{f}}^2 + v_{2,\mathrm{f}}^2. \qquad (10.41)$$

Poslední rovnice ovšem představuje také vztah pro délky stran trojúhelníka na obr. 10.17c. Tento trojúhelník je nutně pravoúhlý (rov. (10.41) je vlastně zápisem Pythagorovy věty). Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}}$ a $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}$ na obr. 10.17 je tedy 90°. Ověřili jsme tak hypotézu vyslovenou v zadání úlohy.



Obr. 10.17 Příklad 10.7. Názorný důkaz tvrzení, že při pružné *šikmé* srážce dvou částic stejných hmotností, z nichž jedna je před srážkou v klidu, jsou jejich výsledné rychlosti kolmé.

PŘÍKLAD 10.8

Dva krasobruslaři směřující ke společnému místu kluziště se při setkání obejmou a realizují tak dokonale nepružnou srážku. Situace před srážkou a po ní je znázorněna na obr. 10.18. Aleš (hmotnost $m_\mathrm{A} = 83\,\mathrm{kg}$) se před srážkou pohyboval východním směrem rychlostí $v_\mathrm{A} = 6{,}2\,\mathrm{km/h}$. Barbora (hmotnost $m_\mathrm{B} = 55\,\mathrm{kg}$) směřovala na sever rychlostí $v_\mathrm{B} = 7{,}8\,\mathrm{km/h}$. Počátek soustavy souřadnic jsme zvolili v místě, kde došlo ke srážce, volba souřadnicových os je zřejmá z obrázku.

(a) Jakou rychlostí $\boldsymbol{V}$ se dvojice pohybuje po srážce?

ŘEŠENÍ: Při srážce platí zákon zachování hybnosti. Jeho rozepsáním do složek dostaneme

$$m_\mathrm{A} v_\mathrm{A} = MV\cos\theta \qquad (x\text{-ová složka}) \qquad (10.42)$$

a

$$m_\mathrm{B} v_\mathrm{B} = MV\sin\theta \qquad (y\text{-ová složka}). \qquad (10.43)$$

Platí $M = m_A + m_B$. Vydělíme-li rov. (10.43) rov. (10.42), pak

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(83\,\mathrm{kg})(6{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})} = 0{,}834.$$

Odtud

$$\theta = 39{,}8^\circ \doteq 40^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

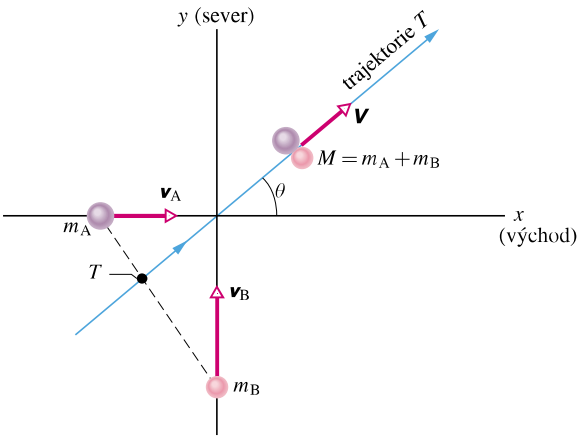
Z rov. (10.43) dostaneme

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin\theta} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(83\,\mathrm{kg} + 55\,\mathrm{kg})\sin 39{,}8^\circ} = \\ = 4{,}86\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 4{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy před srážkou a po srážce?

ŘEŠENÍ: Tuto otázku můžeme zodpovědět, aniž bychom cokoli počítali. Po srážce je rychlost těžiště stejná jako rychlost V, vypočtená v části (a), tj. 4, 9 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ na severovýchod, pod úhlem 40° vzhledem k místní rovnoběžce. Rychlost pohybu těžiště není srážkou ovlivněna.

(c) Kolikrát se při srážce zmenší kinetická energie soustavy obou krasobruslařů?



Obr. 10.18 Příklad 10.8. Dva bruslaři, Aleš (A) a Barbora (B) (v obrázku, představujícím pohled shora, jsou pro jednoduchost znázorněni kuličkami) se setkají a pevně se spojí. Realizují tak dokonale nepružnou srážku, po které se pohybují společnou rychlostí $\boldsymbol{V}$, která svírá se směrem počáteční rychlosti Aleše úhel θ. V obrázku je také vyznačen pohyb těžiště soustavy bruslařů a poloha těžiště ve výchozí situaci.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie před srážkou je

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(83\,\mathrm{kg})(6{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 + (\tfrac{1}{2})(55\,\mathrm{kg})(7{,}8\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 = \\ = 3\,270\,\mathrm{kg{\cdot}km^2{\cdot}h^{-2}}.$$

Kinetická energie po srážce je

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}(83\,\mathrm{kg} + 55\,\mathrm{kg})(4{,}86\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 = \\ = 1\,630\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2.$$

Hledaný poměr α je tedy

$$\alpha = \frac{E_{k,f} - E_{k,i}}{E_{k,i}} = \\ = \left(\frac{1\,630\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2 - 3\,270\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2}{3\,270\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})^2}\right) = \\ = -0{,}50. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce bruslaři ztratí 50 % kinetické energie.

KONTROLA 7: Jak by se změnil úhel θ v příkladu 10.8 (obr. 10.18), kdyby Barbora byla (a) rychlejší, (b) hmotnější?

RADY A NÁMĚTY

Bod 10.1: *Jsou převody jednotek vždy nutné?*

Položme si otázku, zda je za všech okolností nutné převádět hodnoty veličin do soustavy jednotek SI.

Většinou je obvyklé vyjadřovat hodnoty fyzikálních veličin v jednotkách SI: například rychlost v metrech za sekundu, hmotnost v kilogramech apod. Někdy však není tento přepočet nutný. Při výpočtu úhlu θ v příkladu 10.8a jsme si mohli všimnout, že se jednotky vykrátily. Podobně se v příkladu 10.8c vykrátily jednotky ve výrazu pro poměr α. Nebylo tedy třeba převádět kinetickou energii na jouly. Poněvadž jsme si včas uvědomili, že se jednotky při výpočtu tak jako tak vykrátí, zůstali jsme u jednotek $\mathrm{kg{\cdot}km^2{\cdot}h^{-2}}$.

10.6 JADERNÉ REAKCE A RADIOAKTIVNÍ ROZPAD

Zvláštním druhem srážek jsou **jaderné reakce**. Může se při nich měnit jak identita, tak i počet interagujících částic. Všimneme si také *radioaktivního rozpadu*, při kterém se jedna částice rozpadne na dvě jiné. Při obou těchto jevech je sice stav soustavy „před událostí“ velice odlišný od stavu „po události“, hybnost soustavy a její *celková* energie se zachovávají. Při studiu problematiky jaderných reakcí či radioaktivního rozpadu tedy můžeme používat stejných metod jako u srážek.

PŘÍKLAD 10.9

Radioaktivní jádro uranu ^{235}U se samovolně rozpadne na thorium ^{231}Th a α-částici (jádro atomu helia, označované jako α nebo $^{4}_{2}$He):

$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow \alpha + {}^{231}\mathrm{Th}.$$

Částice alfa ($m_\alpha = 4{,}00\,\mathrm{u}$) získá při rozpadu kinetickou energii $E_{\mathrm{k},\alpha} = 4{,}60\,\mathrm{MeV}$. Jaká je kinetická energie jádra ^{231}Th ($m_{\mathrm{Th}} = 231\,\mathrm{u}$)?

ŘEŠENÍ: Jádro ^{235}U bylo před rozpadem v klidu vzhledem k laboratorní vztažné soustavě. Po rozpadu odletí částice α s kinetickou energií $E_{\mathrm{k},\alpha}$ a jádro ^{231}Th se začne pohybovat opačným směrem s kinetickou energií $E_{\mathrm{k,Th}}$. Ze zákona zachování hybnosti dostaneme

$$0 = m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}} + m_\alpha v_\alpha,$$

tj.

$$m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}} = -m_\alpha v_\alpha. \qquad (10.44)$$

Obě strany rov. (10.44) umocníme na druhou:

$$m_{\mathrm{Th}}^2 v_{\mathrm{Th}}^2 = m_\alpha^2 v_\alpha^2. \qquad (10.45)$$

Užitím vztahu pro kinetickou energii $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v^2$ můžeme rov. (10.45) přepsat ve tvaru

$$m_{\mathrm{Th}} E_{\mathrm{k,Th}} = m_\alpha E_{\mathrm{k},\alpha}.$$

Je tedy

$$E_{\mathrm{k,Th}} = E_{\mathrm{k},\alpha} \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Th}}} = (4{,}60\,\mathrm{MeV}) \left(\frac{4{,}00\,\mathrm{u}}{231\,\mathrm{u}} \right) =$$
$$= 7{,}97 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{MeV} = 79{,}7\,\mathrm{keV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kinetická energie soustavy po rozpadu je součtem hodnot 4,60 MeV (α-částice) a 0,079 7 MeV (jádro thoria), tj. 4,68 MeV. Těžké jádro atomu ^{231}Th však nese pouhých 1,7 % celkové hodnoty.

PŘÍKLAD 10.10

Nejdůležitější jadernou reakcí, při níž se uvolňuje energie během slučování (fúze) jader, je tak zvaná d-d reakce. Její schéma můžeme zapsat takto:

$$\mathrm{d} + \mathrm{d} = \mathrm{t} + \mathrm{p}. \qquad (10.46)$$

Jednotlivé symboly v této rovnici označují různé izotopy vodíku. Jejich charakteristiky jsou uvedeny v následující tabulce:

SYMBOLY		JMÉNO	HMOTNOST
p	^{1}H	proton	$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,83\,\mathrm{u}$
d	^{2}H	deuteron	$m_{\mathrm{d}} = 2{,}014\,10\,\mathrm{u}$
t	^{3}H	triton	$m_{\mathrm{t}} = 3{,}016\,05\,\mathrm{u}$

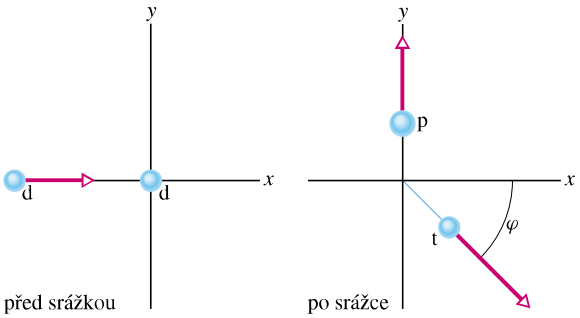
(a) Jak velká energie se uvolní v důsledku hmotnostního schodku Δm?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (8.40) je energie Q uvolněná či spotřebovaná při reakci dána vztahem $Q = -\Delta m c^2$. V našem případě je $\Delta m = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{t}} - 2m_{\mathrm{d}}$. Je tedy

$$Q = -\Delta m c^2 = (2m_{\mathrm{d}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{t}})c^2 =$$
$$= (2 \cdot 2{,}014\,10\,\mathrm{u} - 1{,}007\,83\,\mathrm{u} - 3{,}016\,05\,\mathrm{u}) \cdot$$
$$\cdot (931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) =$$
$$= (0{,}004\,32\,\mathrm{u})(931{,}5\,\mathrm{MeV/u}) =$$
$$= 4{,}02\,\mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme pro c^2 použili hodnotu 931,5 MeV/u (vztah (8.43)).

Kladná hodnota Q (jako např. v této úloze) značí, že reakce je **exotermická** a energie uvolněná díky hmotnostnímu schodku se předá vzniklým částicím v podobě energie kinetické. Tato hodnota představuje nepatrný zlomek hmotnosti výchozích částic. Činí $0{,}004\,32/(2 \cdot 2{,}014\,10) \sim 0{,}001$, tj. asi 0,1 %. Při **endotermických** reakcích je hodnota Q naopak záporná. Dochází při nich k úbytku kinetické energie interagujících částic, který přispěje ke zvýšení hmotnosti produktů reakce. Při $Q = 0$ představuje reakce *pružnou* srážku. Hmotnost ani kinetická energie soustavy se při ní nemění.



Obr. 10.19 Příklad 10.10. Letící deuteron (d) narazí do jiného deuteronu, který je v klidu. Dojde k jaderné reakci, při které vznikne proton (p) a triton (t).

(b) Uvažujme srážku dvou deuteronů, z nichž jeden má kinetickou energii $E_{\mathrm{k,d}} = 1{,}50\,\mathrm{MeV}$ a druhý je v klidu. Dojde k reakci popsané rov. (10.46). Proton vzniklý při reakci se pohybuje ve směru kolmém k počáteční rychlosti prvního deuteronu a má kinetickou energii 3,39 MeV (obr. 10.19). Určete kinetickou energii tritonu.

ŘEŠENÍ: Energie Q uvolněná při reakci díky hmotnostnímu schodku přispěje ke zvýšení kinetické energie soustavy. Platí tedy

$$Q = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k,p}} + E_{\mathrm{k,t}} - E_{\mathrm{k,d}}.$$

Hodnotu Q jsme již určili v části (a) této úlohy. Z předchozího vztahu vyjádříme kinetickou energii tritonu $E_{\mathrm{k,t}}$:

$$E_{\mathrm{k,t}} = Q + E_{\mathrm{k,d}} - E_{\mathrm{k,p}} =$$
$$= (4{,}02\,\mathrm{MeV} + 1{,}50\,\mathrm{MeV} - 3{,}39\,\mathrm{MeV}) =$$
$$= 2{,}13\,\mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký úhel svírá směr pohybu tritonu se směrem pohybu prvního deuteronu (obr. 10.19)?

ŘEŠENÍ: Při reakci popsané rov. (10.46) platí samozřejmě i zákon zachování hybnosti. Ten jsme však dosud nepoužili. Přivede nás ke dvěma skalárním rovnicím

$$m_d v_d = m_t v_t \cos\varphi \quad (x\text{-ová složka}), \tag{10.47}$$

$$0 = m_p v_p + m_t v_t \sin\varphi \quad (y\text{-ová složka}). \tag{10.48}$$

Z rov. (10.48) plyne

$$\sin\varphi = -\frac{m_p v_p}{m_t v_t}. \tag{10.49}$$

S použitím vztahu pro kinetickou energii ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$) můžeme hybnost mv vyjádřit ve tvaru $\sqrt{2mE_k}$ a přepsat rov. (10.49) takto:

$$\sin\varphi = -\sqrt{\frac{m_p E_{k,p}}{m_t E_{k,t}}} = -\sqrt{\frac{(1{,}01\,\mathrm{u})(3{,}39\,\mathrm{MeV})}{(3{,}02\,\mathrm{u})(2{,}13\,\mathrm{MeV})}} = -0{,}730,$$

$$\varphi = -46{,}9^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Srážky

Srážkou rozumíme děj, při němž na sebe dvě tělesa (příp. i více těles) působí po krátkou dobu značnými silami. Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles, která se účastní srážky. Bývají mnohem větší než síly vnější, které mohou během srážky na soustavu rovněž působit. Zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie soustavy tvořené oběma tělesy umožňují předpovědět výsledek srážky na základě porovnání těchto veličin bezprostředně před srážkou a bezprostředně po ní. Mohou také napomoci k pochopení podstaty interakčních sil, jimiž na sebe tělesa během srážky působí.

Impulz síly a hybnost

Z druhého Newtonova zákona lze odvodit **vztah mezi změnou hybnosti** částice a **impulzem** výslednice sil, které na ni působí

$$\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}, \tag{10.4}$$

kde $\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \Delta\boldsymbol{p}$ je změna hybnosti částice a $\boldsymbol{J}$ je **impulz** výslednice sil $\boldsymbol{F}(t)$

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.3}$$

Označíme-li pro případ srážky probíhající v ose x symbolem $\overline{F}$ průměrnou hodnotu síly $\boldsymbol{F}_x(t)$ v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t_i do okamžiku t_f, dostaneme vztah

$$J = \overline{F}\,\Delta t. \tag{10.8}$$

Průměrná síla působící na pevné těleso při dopadu částic o hmotnosti m a rychlosti v, jejichž tok je ustálený, je dána vztahem

$$\overline{F} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v, \tag{10.10}$$

kde zlomek $n/\Delta t$ představuje počet částic, které na těleso dopadnou za každou sekundu, a Δv je změna rychlosti každé z těchto částic při srážce. Průměrnou sílu můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\,\Delta v, \tag{10.13}$$

kde $\Delta m/\Delta t$ je hmotnostní tok dopadajících částic. Pokud se částice při srážce zastaví, je třeba dosadit do vztahů (10.10) a (10.13) hodnotu $\Delta v = -v$. Jestliže se pružně odrazí, je $\Delta v = -2v$.

Pružná přímá srážka

Při *pružné srážce* se zachovává celková kinetická energie soustavy těles účastnících se srážky. Při pružné přímé srážce dvou těles, při níž je některé z nich před srážkou v klidu (střela 1 narazí do tzv. pevného terče 2), vedou zákony zachování hybnosti a kinetické energie soustavy k následujícím vztahům pro výsledné rychlosti těles:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{10.18}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \tag{10.19}$$

Index (i) označuje hodnoty veličin před srážkou, index (f) odpovídá situaci po srážce. Jsou-li před srážkou v pohybu obě tělesa, jsou jejich rychlosti bezprostředně po srážce dány vztahy

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,i} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,i}. \tag{10.29}$$

Přímá nepružná srážka

Při *nepružné srážce* se již celková kinetická energie soustavy těles nezachovává. Zákon zachování hybnosti soustavy však platí. Pokud tělesa při srážce splynou, jedná se o **dokonale nepružnou srážku**. Tento případ odpovídá největšímu přípustnému poklesu kinetické energie soustavy (ze všech možností průběhu nepružné srážky se stejnými výchozími podmínkami). (Kinetická energie soustavy nemusí však klesnout až k nulové hodnotě.) Při přímé

dokonale nepružné srážce střely o rychlosti v s pevným terčem vyplývá vztah pro společnou rychlost V obou těles po srážce přímo ze zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V. \tag{10.34}$$

Pokud se před srážkou pohybují obě tělesa, má zákon zachování hybnosti tvar

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V. \tag{10.36}$$

Pohyb těžiště

Pohyb těžiště soustavy těles není jejich srážkou nijak ovlivněn, ať již jde o srážku pružnou, či nepružnou. V případě uzavřené izolované soustavy je rychlost jejího těžiště konstantní a platí pro ni

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2} = \\ = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}}{m_1 + m_2}. \tag{10.30}$$

Šikmé srážky

Při **šikmé** srážce se hybnost soustavy opět zachovává. Tentokrát však zákon zachování hybnosti vede ke dvěma skalárním rovnicím: pro x-ovou a y-ovou složku vektoru hybnosti. Jejich řešením můžeme získat rychlosti těles po srážce pouze za předpokladu, že je srážka dokonale nepružná. V tomto případě máme totiž k dispozici důležitý údaj o pohybovém stavu těles po srážce: tělesa se pohybují stejnou rychlostí. Snadno pak určíme i energiovou ztrátu, k níž při srážce došlo. V ostatních případech samozřejmě zákon zachování hybnosti a zákon zachování celkové energie soustavy (nikoli tedy jen kinetické) také platí. Neznáme-li však mechanismus srážky, nemůžeme o energiové bilanci předem říci nic bližšího. K vyřešení úlohy proto potřebujeme další údaje, například směr rychlosti některého z těles po srážce.

Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

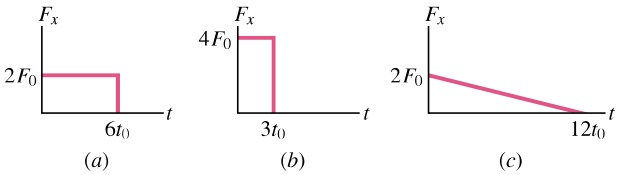
Při *jaderné reakci* nebo *radioaktivním rozpadu* jader se zachovává hybnost a *celková* energie soustavy. Proto i tyto děje řadíme do kategorie srážek. Jejich zvláštnost však spočívá v tom, že se při nich může měnit hmotnost soustavy i identita samotných částic. Změně celkové hmotnosti soustavy o hodnotu Δm odpovídá energiový ekvivalent $\Delta m c^2$. Odpovídající změna celkové energie soustavy je tedy dána vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2.$$

Je-li hodnota Q kladná, jedná se o tzv. **exotermickou** reakci. Energie Q, odpovídající hmotnostnímu schodku Δm, se projeví přírůstkem výsledné kinetické energie částic. Při záporné hodnotě Q jde o reakci **endotermickou**. Kinetická energie částic při ní klesá ve prospěch energie odpovídající zvýšení celkové hmotnosti soustavy.

OTÁZKY

1. Na obr. 10.20 jsou znázorněny tři grafy časové závislosti síly, která působila na jisté těleso při srážce. Seřaďte je sestupně podle velikosti impulzu síly.

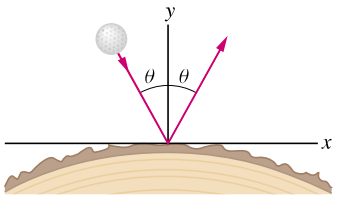


Obr. 10.20 Otázka 1

2. Obr. 10.21 ukazuje náraz golfového míčku do kmene stromu, viděný z nadhledu. Předpokládejme, že se velikost rychlosti míče při srážce nemění. Při nárazu působí kmen na míček silou $\boldsymbol{F}$, odpovídající změna hybnosti míčku je $\Delta\boldsymbol{p}$. Jak se změní následující veličiny, bude-li úhel θ větší? (Předpokládejte, že doba trvání srážky zůstane stejná.) (a) Δp_x, (b) Δp_y, (c) velikost vektoru $\Delta\boldsymbol{p}$, (d) F_x, (e) F_y a (f) velikost síly $\boldsymbol{F}$?

3. V následující tabulce jsou uvedeny hmotnosti (v kilogramech) a rychlosti (v metrech za sekundu) dvou částic z obr. 10.9. ve třech různých situacích. Ve kterých z nich je těžiště soustavy v klidu?

SITUACE	m_1	v_1	m_2	v_2
a	2	3	4	−3
b	6	2	3	−4
c	4	3	4	−3

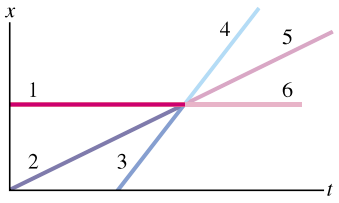


Obr. 10.21 Otázka 2

4. (a) Jak se změní výška výstupu koule 1 z př. 10.3 po odrazu, zvýší-li se hmotnost koule 2? Do jaké výšky vystoupí po odrazu (b) koule 1, resp. (c) koule 2, je-li $m_1 = m_2$?

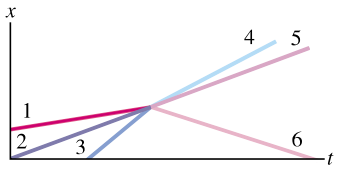
5. Dvě tělesa pohybující se podél osy x se pružně srazí. Grafy na obr. 10.22 představují časové závislosti jejich poloh a polohy

těžiště soustavy. Z grafu vyčtěte následující informace: (a) Je některé z těles před srážkou v klidu? Který z grafů přísluší poloze těžiště soustavy (b) před srážkou a (c) po srážce? (d) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, které bylo před srážkou rychlejší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa.



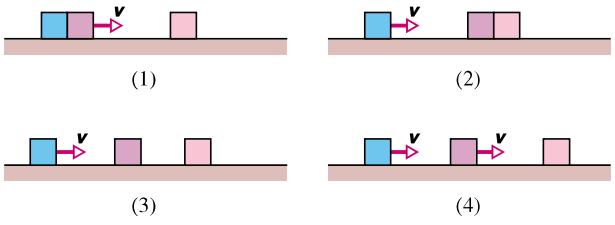
Obr. 10.22 Otázka 5

6. Na obr. 10.23 jsou grafy časové závislosti poloh dvou těles i polohy těžiště soustavy v případě přímé srážky. Zjistěte, který z nich odpovídá pohybu (a) rychlejšího tělesa před srážkou, (b) těžiště soustavy před srážkou a (c) po srážce, (d) každého z těles po srážce. (e) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, jehož rychlost před srážkou byla vyšší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa



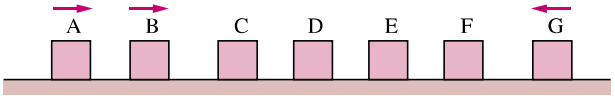
Obr. 10.23 Otázka 6

7. Na obr. 10.24 jsou čtyři různé situace při srážce tří stejných kostek, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné podložce. Při srážkách (1) a (2) jsou dvě z kostek slepeny. Rychlost $\boldsymbol{v}$, která je v obrázku vyznačena, je ve všech případech stejná. Seřaďte jednotlivé situace sestupně podle (a) velikosti celkové hybnosti soustavy po srážce, (b) velikosti výsledné rychlosti kostky, která je nejdále vpravo.



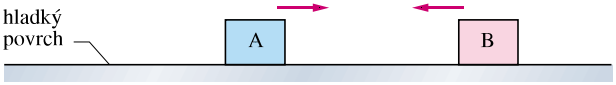
Obr. 10.24 Otázka 7

8. Obr. 10.25 zachycuje sedm kostek na dokonale hladké vodorovné podložce. Kostky A a B se zpočátku pohybují vpravo a kostka G vlevo. Velikost rychlosti každé z nich je $v = 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zbývající kostky jsou v klidu. Dojde k sérii pružných srážek. Určete vektory rychlosti všech kostek po poslední srážce.



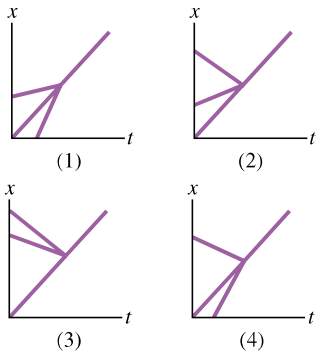
Obr. 10.25 Otázka 8

9. Kostky A a B na obr. 10.26 se pohybují po dokonale hladké podložce ve vyznačených směrech. Velikosti jejich hybností jsou $9\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ (kostka A) a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ (kostka B). (a) Určete směr pohybu těžiště soustavy. (b) Předpokládejme, že se obě kostky při srážce pevně spojí. Jakým směrem se bude pohybovat takto vzniklé těleso po srážce? (c) Experiment ukázal, že se těleso A pohybuje po srážce vlevo. Rozhodněte, zda je jeho hybnost větší, menší, nebo stejná jako hybnost tělesa B.

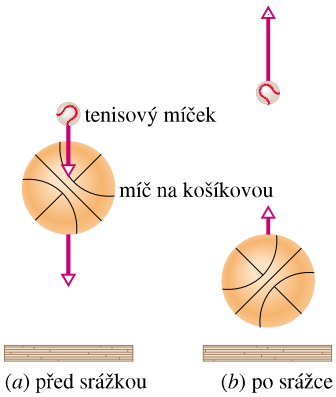


Obr. 10.26 Otázka 9

10. Na obr. 10.27 jsou čtyři grafy znázorňující časové závislosti polohy dvou těles pohybujících se podél osy x a časovou závislost polohy těžiště jejich soustavy. Tělesa se dokonale nepružně srazí. Pro případ grafu (1) zjistěte, zda se (a) obě tělesa a (b) těžiště soustavy pohybují v kladném, či záporném směru osy x. (c) Které z grafů představují fyzikálně nepřípustnou situaci?



Obr. 10.27 Otázka 10



Obr. 10.28 Otázka 12 a úloha 37

11. Těleso Q s hybností $\boldsymbol{p}_\mathrm{Q} = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ se dokonale

nepružně srazí s tělesem R, jehož hybnost je $\boldsymbol{p}_R = (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ kg·m·s^{-1}. Určete směr pohybu obou těles po srážce.

12. Vyzkoušejme si následující pokus: vezmeme postupně tenisový míček a basketbalový míč a každý z nich upustíme na tvrdou podlahu přibližně z výšky ramen. Míče se odrazí a vyskočí obecně do různých výšek. Poté uspořádáme pokus tak, že tenisový míček vypustíme za basketbalovým míčem s malým časovým odstupem, avšak přesně nad ním (obr. 10.28a). Výsledek pokusu bude zcela jiný než v předchozím případě, možná na první pohled poněkud překvapivý. (a) Rozhodněte, zda výška výstupu basketbalového míče bude ve srovnání s výsledkem prvního pokusu větší, nebo menší (obr. 10.28b). (b) Rozhodněte, zda výška, do které po odrazu vystoupí tenisový míč, převýší součet výšek výstupu obou míčů po samostatných odrazech (úloha 37).

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 10.2 Impulz síly a hybnost

1C. Hybnost automobilu o hmotnosti 1 500 kg vzrostla během 12 s o 9,0·10^3 kg·m·s^{-1}. (a) Za předpokladu, že urychlující síla je konstantní, určete její velikost. (b) Určete přírůstek rychlosti automobilu.

2C. Kulečníkové tágo udeří do stojící koule průměrnou silou o velikosti 50 N. Úder trvá 10 ms. Jakou rychlost koule získá, je-li její hmotnost 0,20 kg?

3C. Výrobce automobilů testuje odolnost nových vozů při nárazu pomocí tzv. bariérových zkoušek. Při jedné z nich narazil automobil o hmotnosti 2 300 kg do mostního pilíře rychlostí 15 m·s^{-1}a zastavil se za 0,56 s. Předpokládejme, že při nárazu působila konstantní síla. Jaká byla její velikost?

4C. Míč o hmotnosti m narazil kolmo do zdi rychlostí $\boldsymbol{v}$ a odrazil se zpět stejně velkou rychlostí. (a) Určete průměrnou sílu, kterou stěna působila na míč, trval-li náraz po dobu Δt. (b) Pro číselný výpočet použijte hodnoty $m = 140$ g, $v = 7{,}8$ m·s^{-1}a $\Delta t = 3{,}8$ ms.

5C. Nadhazovač hodil baseballový míč rychlostí 40 m·s^{-1}. Pálkař jej odehrál zpět přesně v opačném směru rychlostí 60 m·s^{-1}. Určete průměrnou sílu, jíž působila pálka na míč, trval-li úder 5,0 ms.

6C. Jako sedmnáctiletý ohromoval artista Henri LaMothe diváky skoky z výšky 12 m do vody hluboké pouhých 30 cm (obr. 10.29). Za předpokladu, že se jeho pád zastavil právě u dna vodní nádrže, vypočtěte průměrnou brzdnou sílu, která na artistu o hmotnosti 73 kg ve vodě působila.

7C. V únoru 1955 byla zaznamenána pozoruhodná událost: jistému parašutistovi se po seskoku z výšky 366 m nepodařilo otevřít padák. Naštěstí spadl do sněhu, a tak byla jeho zranění jen nepatrná. Předpokládejme, že velikost jeho rychlosti měla bezprostředně před dopadem hodnotu 56 m·s^{-1}, jeho hmotnost činila 85 kg a velikost největší brzdné síly, kterou může člověk přežít, je 1,2·10^5 N. Určete nejmenší tloušťku sněhové pokrývky, v níž tehdy let parašutisty tak šťastně skončil.

8C. Při srážce trvající 27 ms působila na ocelovou kouli o hmotnosti 0,40 kg a rychlosti 14 m·s^{-1}stálá síla o velikosti 1 200 N. Určete výslednou rychlost koule, působila-li síla přímo proti směru jejího pohybu.

Obr. 10.29 Cvičení 6

9C. Medicinbal o hmotnosti 1,2 kg dopadne kolmo na podlahu rychlostí 25 m·s^{-1}a odrazí se v opačném směru rychlostí 10 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte impulz síly, která na míč při odrazu působila. (b) Za předpokladu, že míč byl s podlahou v kontaktu 0,020 s, určete průměrnou sílu působící na míč během srážky.

10C. Hráč golfu odpálí míček rychlostí o velikosti 50 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 30°. Předpokládejme, že míč má hmotnost 46 g a je v kontaktu s golfovou holí po dobu 1,7 ms. Určete (a) impulz síly, kterou při úderu působí hůl na míček, (b) impulz síly, která působí na golfovou hůl, (c) průměrnou sílu působící na míček a (d) práci, kterou vykonala síla působící na míček.

11Ú. Automobil o hmotnosti 1 400 kg jede na sever (kladný směr osy y) rychlostí 5,3 m·s^{-1}. Po průjezdu pravoúhlou pravotočivou zatáčkou (do kladného směru osy x), který trval 4,6 s, ztratí řidič na okamžik pozornost. Vůz narazí do stromu a zastaví

se za 350 ms. Pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic zapište vektor impulzu síly, která působila na vůz (a) při zatáčení, (b) při srážce. Jaká je velikost průměrné síly působící na vůz (c) při zatáčení a (d) při srážce? (e) Jaký úhel svírá průměrná síla vypočtená v části (c) s kladným směrem osy x?

12Ú. Velikost síly, která působí na těleso o hmotnosti 10 kg, rovnoměrně vzroste za 4,0 s z nulové hodnoty na hodnotu 50 N. Jakou rychlostí se těleso pohybuje na konci tohoto časového intervalu, bylo-li zpočátku v klidu?

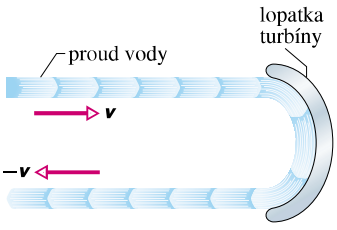
13Ú. Při střelbě z brokovnice do terče připevněného k nepohyblivé stěně dopadá na stěnu 10 broků za sekundu. Brok má hmotnost 2,0 g a do stěny narazí rychlostí 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je jeho hybnost a (b) kinetická energie? Určete velikost průměrné síly, jíž působí na zeď (c) jednotlivý brok, (d) proud broků. Předpokládáme, že srážka každého broku se zdí trvá 0,6 ms. Proč se hodnoty získané v částech (c) a (d) tak výrazně liší?

14Ú. Při střelbě ze samopalu používaného při natáčení filmů vyletují kulky o hmotnosti 50,0 g rychlostí 1 000 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Herec dokáže na samopal působit silou o velikosti nejvýše 180 N. Kolik ran za minutu může vypálit, aby samopal ještě udržel?

15Ú. Filmového Supermana nelze zastřelit. Všechny střely se totiž od jeho hrudi odrazí (obr. 10.30). Předpokládejme, že zločinec vystřelí na Supermana 100 ran za minutu. Každá kulka má hmotnost 3 g a letí rychlostí 500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Od Supermana se odráží zpět stejně velkou rychlostí. Jakou průměrnou silou působí tok kulek na Supermanovu hruď?

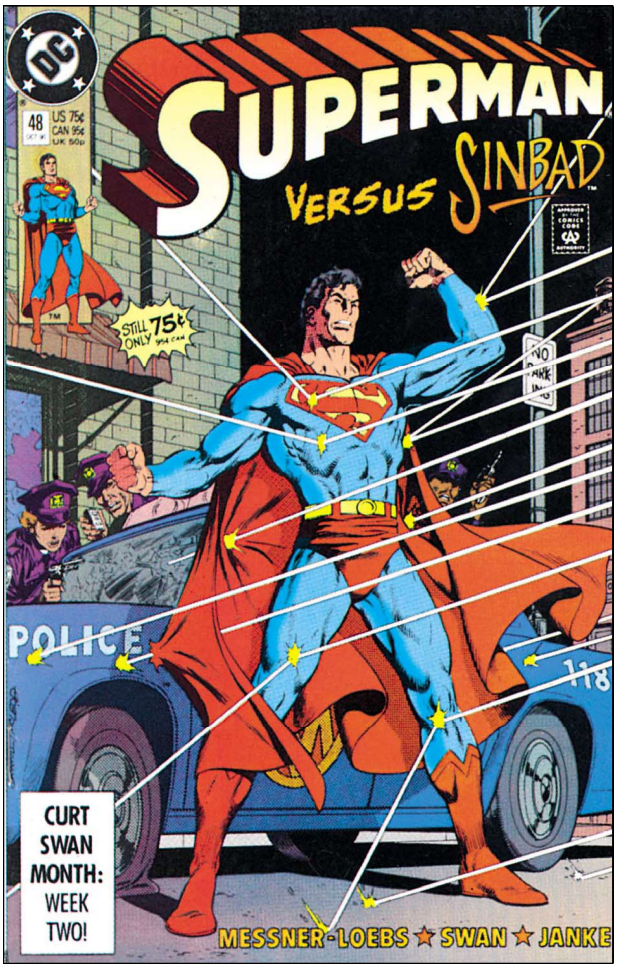
16Ú. Při mohutné bouři dopadají na zem kroupy o průměru 1,0 cm rychlostí 25 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Lze odhadnout, že v krychlovém metru vzduchu je asi 120 krup. (a) Jakou hmotnost má jedna kroupa (hustota 0,92 $\mathrm{g/cm^3}$)? (b) Jakou průměrnou silou působí krupobití na vodorovný terén o obsahu 10 m × 20 m? Předpokládáme, že se kroupy po dopadu neodrážejí.

17Ú. Voda proudí kolem nepohyblivé turbínové lopatky ve tvaru misky podle obr. 10.31. Počáteční rychlost vodního proudu je $\boldsymbol{v}$ a výsledná $-\boldsymbol{v}$ (obr. 10.31). Hmotnostní průtok vody je μ kg/min. Jakou silou působí voda na lopatku?



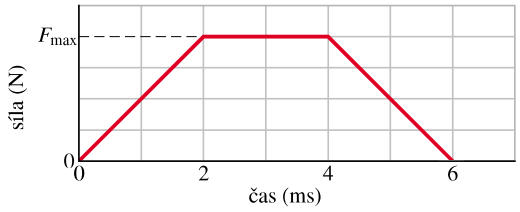
Obr. 10.31 Úloha 17

18Ú. Voda proudí z hadice přímo proti zdi. Určete průměrnou sílu, kterou působí vodní proud na zeď, vytéká-li z hadice každou sekundu 300 $\mathrm{cm^3}$ vody rychlostí 5,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Předpokládáme, že voda se od zdi neodráží. Jeden krychlový centimetr vody má hmotnost 1,0 g.



Obr. 10.30 Úloha 15

19Ú. Na obr. 10.32 je přibližný průběh časové závislosti síly, která působila na tenisový míček o hmotnosti 58 g při jeho nárazu do zdi. Míček dopadl na zeď kolmo rychlostí 34 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a odrazil se přesně opačným směrem se stejně velkou rychlostí. Určete největší hodnotu velikosti síly F_{max}, která při této srážce na míček působila.

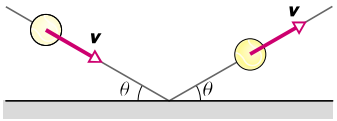


Obr. 10.32 Úloha 19

20Ú. Míček o hmotnosti 150 g narazí na stěnu rychlostí 5,2 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a odrazí se v opačném směru. Jeho kinetická energie se při odrazu zmenší na polovinu. (a) Vypočtěte rychlost míčku bezprostředně po odrazu. (b) Určete velikost impulzu síly, kterou

působil míček na stěnu. (c) Určete velikost průměrné síly, kterou působil míček na stěnu, trvala-li srážka 7,6 ms.

21Ú. Na obr. 10.33 je míček, který narazil do podlahy rychlostí o velikosti 6,0 $m \cdot s^{-1}$ pod úhlem $\theta = 30°$. Po odrazu měl míček stejně velkou rychlost, která svírala s podlahou úhel 30°. Srážka trvala 10 ms. (a) Vypočtěte impulz síly, která při srážce působila na míček. (b) Jakou průměrnou silou působil míček na podlahu?



Obr. 10.33 Úloha 21

22Ú. Automaticky řízená kosmická sonda o hmotnosti 2 500 kg letí stálou rychlostí o velikosti 300 $m \cdot s^{-1}$. V jistém okamžiku se zažehnou raketové motory, které mají tah 3 000 N. Zážeh trvá 65,0 s. (a) Určete změnu hybnosti sondy, směřuje-li tahová síla motorů vpřed, vzad nebo kolmo k okamžitému směru pohybu. (b) Pro každý z těchto případů určete odpovídající změnu kinetické energie sondy. Předpokládáme, že hmotnost paliva spotřebovaného při tomto krátkém zážehu je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti sondy.

23Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$. Vlivem síly, která na těleso po jistou dobu působí ve směru jeho pohybu, se jeho rychlost mění. Výslednou rychlost označme $\boldsymbol{u}$ a odpovídající impulz působící síly $\boldsymbol{J}$. Ukažte, že práce vykonaná touto silou za uvedenou dobu je dána vztahem $W = \frac{1}{2}J(u + v)$.

24Ú. Po řízeném výbuchu nálože ve speciálních spojovacích šroubech se kosmická loď rozdělí na dvě části o hmotnostech 1 200 kg a 1 800 kg. Obě části na sebe tedy po jistou dobu silově působí. Odpovídající velikost impulzu každé z interakčních sil je 300 N·s. Jakou vzájemnou rychlostí se od sebe oddělené části vzdalují?

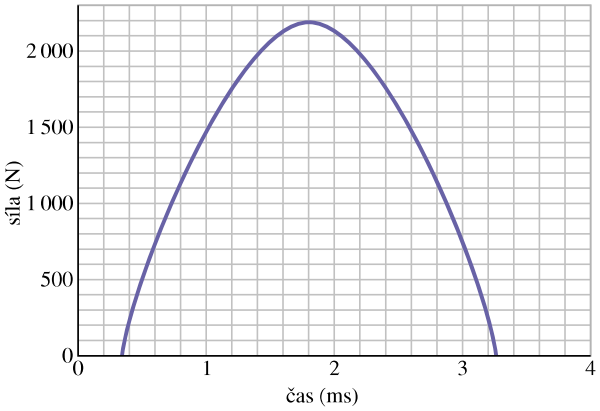
25Ú. Na obr. 10.34 je graf časové závislosti síly, která působila při odpálení kriketového míčku o hmotnosti 0,5 kg. Před úderem byl míček v klidu. Jakou měl míček rychlost bezprostředně poté, co velikost síly klesla k nulové hodnotě?

26Ú. Fotbalista odkopne míč o hmotnosti 0,45 kg, který leží na zemi. Noha fotbalisty je s míčem v kontaktu po dobu $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ s a časová závislost síly působící na míč má tvar

$$F(t) = [(6{,}0 \cdot 10^{6})t - (2{,}0 \cdot 10^{9})t^{2}]\,\mathrm{N}$$

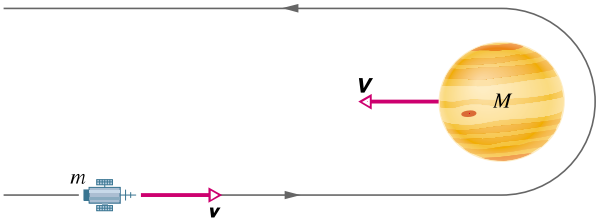
pro $0 \leqq t \leqq 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ s. Čas t je měřen v sekundách. Určete velikosti následujících vektorů: (a) impulz síly, která působila na míč, (b) průměrnou a (c) maximální sílu, kterou při výkopu působila na míč noha fotbalisty, (d) rychlost míče těsně po výkopu.

27Ú. Kosmická loď *Voyager 2* (hmotnost m a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke Slunci) se přibližuje k planetě Jupiter (hmotnost M a rychlost $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke Slunci), jak ukazuje obr. 10.35. Loď



Obr. 10.34 Úloha 25

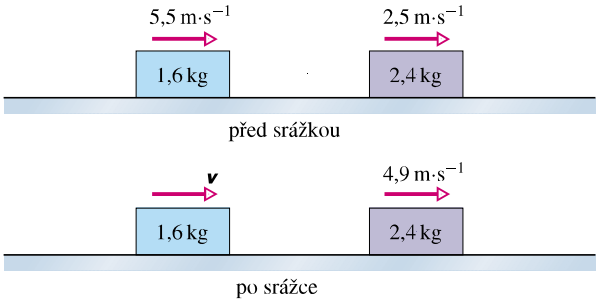
obletí planetu a vrací se zpět v protisměru (gravitační prak). Určete výslednou rychlost lodi vzhledem ke Slunci. Předpokládáme, že $v = 12\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ a $V = 13\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ (oběžná rychlost Jupitera). Hmotnost Jupitera je mnohem větší než hmotnost kosmické lodi, $M \gg m$.



Obr. 10.35 Úloha 27

ODST. 10.3 Pružné přímé srážky

28C. Kostky na obr. 10.36 kloužou po dokonale hladké podložce. (a) Určete rychlost levé kostky po srážce. (b) Je srážka pružná? (c) Předpokládejme nyní, že rychlost pravé kostky před srážkou má opačný směr než na prvním obrázku. Je možné, aby v takovém případě měla rychlost $\boldsymbol{v}$ levé kostky směr vyznačený na druhém obrázku, znázorňujícím situaci po srážce?



Obr. 10.36 Cvičení 28

29C. Do mouchy vznášející se stále nad tímtéž místem zemského povrchu narazí rozzuřený slon rychlostí 2,1 $m \cdot s^{-1}$. Jakou

rychlostí se moucha odrazí, je-li srážka pružná? V tomto případě je střela (slon) mnohem těžší než terč (moucha).

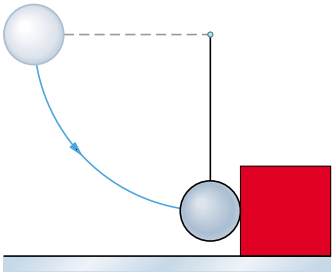
30C. Elektron se srazí s atomem vodíku, který byl zpočátku v klidu. Srážka je přímá a pružná. Kolik procent původní kinetické energie elektronu získá atom? Atom vodíku má 1840krát větší hmotnost než elektron.

31C. Vozíček o hmotnosti 340 g se pohybuje na vzduchové lavici (pohyb bez tření) rychlostí 1,2 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pružně narazí do druhého vozíčku, který je zpočátku v klidu. Po srážce se první vozíček pohybuje původním směrem rychlostí 0,66 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Určete hmotnost druhého vozíčku a (b) jeho rychlost po srážce. (c) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy dvou vozíčků?

32C. Částice α (hmotnost 4 u) se srazí s jádrem atomu zlata (hmotnost 197 u), které bylo před srážkou v klidu. Srážka je přímá a pružná. Určete ztrátu kinetické energie α-částice v procentech.

33C. Střela o hmotnosti 2 kg narazí do klidného terče a po pružné srážce se pohybuje v původním směru čtvrtinovou rychlostí. (a) Určete hmotnost terče. (b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy, má-li počáteční rychlost střely velikost 4,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

34Ú. Ocelová koule o hmotnosti 0,500 kg je upevněna na závěsu délky 70,0 cm. Kouli vychýlíme tak, aby byl napjatý závěs vodorovný, a uvolníme (obr. 10.37). V nejnižším bodě své dráhy narazí koule na ocelový hranol o hmotnosti 2,5 kg, spočívající na dokonale hladké vodorovné podložce. Srážka je pružná. Určete (a) rychlost koule i (b) rychlost hranolu těsně po srážce.



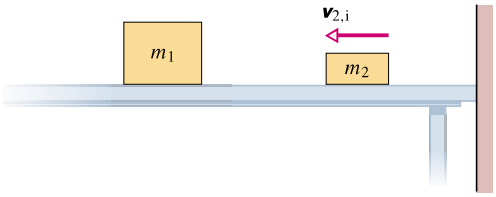
Obr. 10.37 Úloha 34

35Ú. Proud částic dopadá na misku digitální váhy z výšky 3,5 m. Srážky částic s miskou jsou pružné a každá částice se odrazí zpět se stejně velkou rychlostí. Zjistěte, jaký údaj váha ukazuje, má-li každá částice hmotnost 110 g a dopadne-li na misku za každou sekundu 42 částic. Předpokládáme, že po odrazu již částice zpět na misku nedopadají.

36Ú. Dvě titanové koule se pohybují proti sobě stejně velkými rychlostmi a srazí se. Srážka je přímá a pružná. Po srážce se jedna z koulí, jejíž hmotnost je 300 g, zastaví. (a) Jaká je hmotnost druhé koule? (b) Určete rychlost těžiště soustavy, měla-li velikost rychlosti koulí před srážkou hodnotu 2,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

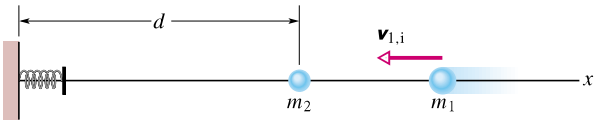
37Ú. Míček o hmotnosti m umístíme těsně nad větší míč o hmotnosti M (obr. 10.28a). Oba míče současně volně pustíme z výšky h. (Předpokládáme, že jejich poloměry jsou mnohem menší než výška h.) Velký míč se nejprve odrazí od podlahy a potom narazí do míčku. Obě srážky jsou pružné. (a) Při jakém poměru m/M se velký míč M po druhé srážce zastaví? (Řešení přibližně vyhovuje dvojici míčů z otázky 12.) (b) Do jaké výšky pak vystoupí menší míč?

38Ú. Kvádr o hmotnosti m_1 leží v klidu na dlouhém, dokonale hladkém stole, jehož jeden konec je zapřen o stěnu. Druhý kvádr o hmotnosti m_2 umístíme mezi kvádr m_1 a stěnu a udělíme mu rychlost $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{i}}$ směrem k m_1 (obr. 10.38). Nejprve nastane srážka obou kvádrů a pak narazí kvádr m_2 do stěny. Obě srážky jsou pružné. Při jaké hodnotě poměru m_2/m_1 budou výsledné rychlosti obou kvádrů stejné? Stěnu považujeme za těžký terč (hmotnost kvádru je ve srovnání s její hmotností zanedbatelná).



Obr. 10.38 Úloha 38

39Ú. Na vzduchové lavici stojí vozíček (terč) o hmotnosti $m_2 = 350$ g ve vzdálenosti $d = 53$ cm od konce lavice. Druhý vozíček (střela) o hmotnosti $m_1 = 590$ g narazí do terče rychlostí $v_{1,\mathrm{i}} = -75\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ (obr. 10.39). Terč se dá do pohybu a odrazí se od krátké pružiny uchycené na konci lavice. Dožene střelu a narazí do ní. Všechny srážky jsou pružné. Určete, v jaké vzdálenosti od konce lavice dojde k druhé srážce terče se střelou.



Obr. 10.39 Úloha 39

ODST. 10.4 Nepružné přímé srážky

40C. Současná představa o vzniku kráteru v Arizoně (obr. 10.1a) je taková, že byl způsoben dopadem meteoritu asi před 20 000 lety. Hmotnost meteoritu se odhaduje na $5\cdot10^{10}$ kg a jeho rychlost před dopadem na 7 200 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete rychlost, kterou by Země za těchto podmínek získala při přímé srážce.

41C. Krabice o hmotnosti 6 kg klouže po ledě rychlostí 9,0 m/s. Balík o hmotnosti 12 kg padá volným pádem a spadne přímo do krabice. Určete výslednou rychlost krabice s balíkem.

42C. Kulka o hmotnosti 5,20 g letí vodorovně rychlostí 672 m/s. Narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 700 g, který spočívá na dokonale hladké podlaze. Po průletu kvádrem se velikost rychlosti kulky zmenší na hodnotu 428 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete (a) rychlost kvádru po srážce a (b) rychlost těžiště soustavy.

43C. Tělesa A a B o stejných hmotnostech 2,0 kg se pohybují rychlostmi $\boldsymbol{v}_\mathrm{A} = 15\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v}_\mathrm{B} = -10\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a srazí se. Rychlost tělesa A po srážce je $\boldsymbol{v}'_\mathrm{A} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j}$. Všechny rychlosti

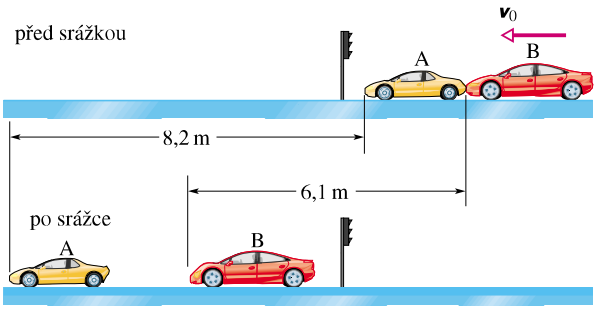
jsou zadány v metrech za sekundu. (a) Jakou rychlost má po srážce těleso B? (b) Určete změnu kinetické energie soustavy, k níž při srážce došlo.

44C. Kulka o hmotnosti 10 g narazí do balistického kyvadla o hmotnosti 2 kg a uvázne v něm. Kyvadlo vystoupí do výšky 12 cm. Vypočtěte počáteční rychlost kulky.

45C. Kulka o hmotnosti 4,5 g je vystřelena vodorovně a narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 2,4 kg, který leží na vodorovné podložce. Koeficient dynamického tření mezi kvádrem a podložkou je 0,20. Kulka v kvádru uvázne a ten se zastaví ve vzdálenosti 1,8 m od své původní polohy. (a) Jakou rychlostí se kvádr pohybuje v okamžiku, kdy se kulka vzhledem k němu zastaví? (b) Jaká je počáteční rychlost kulky?

46C. Dvě kostky o hmotnostech 5,0 kg a 10 kg se pohybují stejným směrem rychlostmi 3,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a 2,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dojde ke srážce, po níž hmotnější kostka pokračuje v pohybu v původním směru, avšak rychlostí 2,5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jakou rychlostí se těsně po srážce pohybuje méně hmotná kostka? (b) Zjistěte, k jaké energiové ztrátě při srážce došlo. (c) Rozhodněte, jak by se změnila odpověď na otázku (b), kdyby se hmotnější kostka pohybovala po srážce rychlostí 4,0 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, a (d) výsledek zdůvodněte.

47Ú. Dva automobily A a B přijíždějí ke křižovatce a snaží se na zledovatělé silnici zabrzdit. Oba se dostanou do smyku se zablokovanými koly. Hmotnosti vozů jsou 1 100 kg (A) a 1 400 kg (B). Koeficient dynamického tření mezi zablokovanými koly a silnicí je v obou případech 0,13. Vozu A se těsně před křižovatkou podaří zastavit. Vůz B, který jede za ním, však již zabrzdit nestačí a dojde k nárazu. Automobil A znovu zastaví ve vzdálenosti 8,2 m od místa srážky, vůz B urazí ještě 6,1 m. (obr. 10.40). (a) Určete rychlosti automobilů bezprostředně po srážce. (b) Pomocí zákona zachování hybnosti zjistěte rychlost, kterou vůz B narazil do A. Je možné mít v tomto případě pochybnost o platnosti zákona zachování hybnosti? Zdůvodněte.

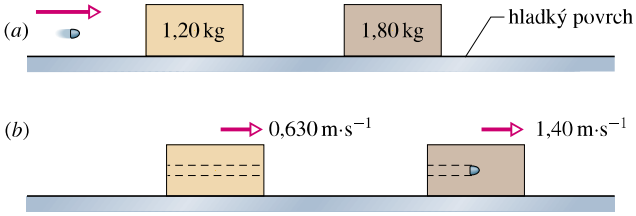


Obr. 10.40 Úloha 47

48Ú. Závaží o hmotnosti 3 000 kg dopadne z výšky 6,0 m na pilot o hmotnosti 500 kg a zarazí jej 3,0 cm do skály. Srážka je dokonale nepružná. Určete průměrnou velikost odporové síly, kterou na pilot působí skála po dobu, než se jeho pohyb zcela zastaví.

49Ú. Na dokonale hladké vodorovné podložce leží dvě kostky o hmotnostech m a $2m$. Jsou umístěny těsně vedle konců stlačené vodorovné pružiny a přidržovány zarážkami, aby se pružina nemohla uvolnit. Potenciální energie stlačené pružiny je 60 J. V určitém okamžiku zarážky odstraníme. Určete kinetickou energii každé z kostek v okamžiku, kdy ztratí kontakt s pružinou (pružina je v té chvíli v nenapjatém stavu).

50Ú. Na dokonale hladké vodorovné podlaze leží dvě kostky o hmotnostech 1,20 kg a 1,80 kg. Kulka o hmotnosti 3,50 g je vystřelena ve vodorovném směru a zasáhne první kostku. Proletí jí a teprve ve druhé kostce uvázne (obr. 10.41). První kostka se po průletu střely pohybuje rychlostí o velikosti 0,630 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, velikost výsledné rychlosti druhé kostky je 1,40 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (obr. 10.41b). Určete (a) rychlost, kterou kulka vylétla z první kostky a (b) počáteční rychlost kulky. Zanedbejte změnu hmotnosti první kostky způsobenou průletem střely.

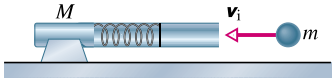


Obr. 10.41 Úloha 50

51Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje v kosmickém prostoru stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Najednou vybuchne a rozpadne se na dvě části, z nichž jedna má třikrát větší hmotnost než druhá. Po rozpadu zůstane lehčí úlomek v klidu. Zjistěte, k jak velkému přírůstku kinetické energie soustavy došlo na úkor energie uvolněné při výbuchu. (Soustava je tvořena nejprve tělesem a po jeho rozpadu oběma úlomky.)

52Ú. Na váhu položíme krabici a vynulujeme ukazatel. Poté začneme do krabice sypat kuličky, z nichž každá má hmotnost m. Kuličky padají z výšky h s frekvencí R kuliček za sekundu. Zjistěte, jaký údaj (v kilogramech) ukáže váha po uplynutí doby t, lze-li každý dopad kuličky do krabice považovat za dokonale nepružnou srážku. Pro číselné řešení použijte hodnoty $R = 100\ \mathrm{s^{-1}}$, $h = 7{,}60$ m, $m = 4{,}50$ g a $t = 10{,}0$ s.

53Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 35 tun se srazí se stojícím služebním vozem. Při srážce se vagony pevně spojí. Ztráta kinetické energie soustavy, k níž při této srážce dojde (ve prospěch zahřátí, energie zvukového vlnění atd.), činí 27 %. Určete hmotnost služebního vozu.

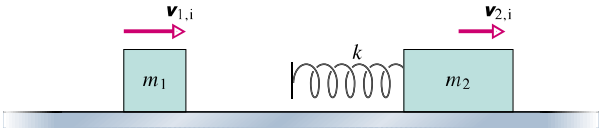


Obr. 10.42 Úloha 54

54Ú. Kulička o hmotnosti m vletí do hlavně pružinové pistole s hmotností M, která spočívá na dokonale hladké vodorovné podložce (obr. 10.42). Kulička náhle uvázne v hlavni ve chvíli, kdy je stlačení pružiny největší. Třecí síly působící proti pohybu kuličky v hlavni jsou zanedbatelné. (a) Určete rychlost pistole v okamžiku, kdy se kulička vzhledem k hlavni zastaví. (b) Jakou

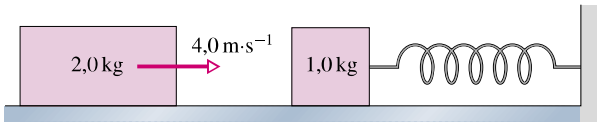
část původní kinetické energie kuličky představuje potenciální energie stlačené pružiny?

55Ú. Dva hranoly o hmotnostech $m_1 = 2{,}0\,\text{kg}$ a $m_2 = 5{,}0\,\text{kg}$ se pohybují v téže přímce po dokonale hladké vodorovné desce rychlostmi o velikostech $v_{1,\text{i}} = 10\,\text{m·s}^{-1}$ a $v_{2,\text{i}} = 3{,}0\,\text{m·s}^{-1}$. K hranolu m_2 je upevněna velmi lehká pružina o tuhosti $k = 1\,120\,\text{N/m}$ (obr. 10.43), do níž hranol m_1 narazí. Určete největší stlačení pružiny při této srážce. (*Tip*: V okamžiku největšího stlačení pružiny se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí.)



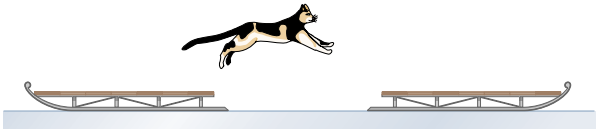
Obr. 10.43 Úloha 55

56Ú. Kostka o hmotnosti 1,0 kg leží na dokonale hladké podložce a je nenapjatou pružinou ($k = 200\,\text{N/m}$) spojena se stěnou (obr. 10.44). Hranol o hmotnosti 2,0 kg do ní narazí rychlostí $4{,}0\,\text{m·s}^{-1}$ rovnoběžně s pružinou a pevně se s ní spojí. Určete stlačení pružiny v okamžiku, kdy je společná rychlost těles nulová.



Obr. 10.44 Úloha 56

57Ú. Dvoje stejné sáně o hmotnostech 22,7 kg stojí těsně za sebou podle obr. 10.45. Kočka o hmotnosti 3,63 kg, která na jedněch sáních seděla, přeskočí najednou na druhé sáně a hned zase zpět. Při obou skocích má rychlost kočky vzhledem k zemi velikost $3{,}05\,\text{m·s}^{-1}$. Určete výsledné rychlosti sání.



Obr. 10.45 Úloha 57

58Ú. Automobil o hmotnosti 1 200 kg má nárazník konstruován tak, aby čelní náraz do zdi rychlostí 5,00 km/h byl ještě bezpečný. Vůz jede rychlostí 70 km/h a zezadu narazí do druhého automobilu, který jede rychlostí 60 km/h stejným směrem a má hmotnost 900 kg. Rychlost druhého vozu po srážce je 70 km/h. (a) Jaká je rychlost prvního automobilu bezprostředně po nárazu? (b) Určete poměr ztráty kinetické energie soustavy dvou automobilů při popsané srážce a kinetické energie, při níž je náraz prvního automobilu do zdi ještě bezpečný.

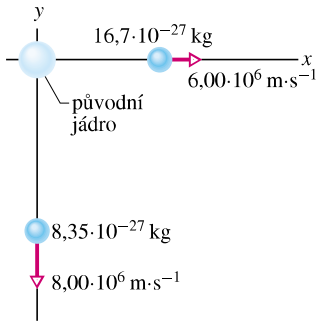
59Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 32 tun jede rychlostí 1,5 m/s. Narazí do jiného vagonu, který má hmotnost 24 tun a jede stejným směrem rychlostí $0{,}9\,\text{m·s}^{-1}$. Oba vozy se při srážce spojí. Určete (a) společnou rychlost vozů po srážce a (b) změnu celkové kinetické energie soustavy. (c) Jaké by byly výsledné rychlosti vozů, kdyby srážka byla pružná?

ODST. 10.5 Šikmé srážky

60C. Částice α se srazí s jádrem atomu kyslíku, které bylo před srážkou v klidu. Její výsledná rychlost svírá s původním směrem jejího pohybu úhel 64,0°. Kyslíkové jádro se po srážce pohybuje rychlostí o velikosti $1{,}20\cdot10^{5}\,\text{m·s}^{-1}$, která svírá s původním směrem pohybu α-částice úhel −51,0°. Určete (a) výslednou a (b) počáteční rychlost α-částice. (Hmotnost α-částice je 4,0 u a hmotnost kyslíkového jádra 16 u.)

61C. Proton (střela) letí rychlostí $500\,\text{m·s}^{-1}$ a pružně se srazí s jiným protonem (terč), který byl zpočátku v klidu. Střela se od původního směru svého pohybu odchýlí o 60°. Určete (a) směr pohybu terče a (b) velikost rychlosti terče i střely po srážce.

62C. Atomové jádro, které je v klidu, se náhle rozpadne na tři části. Dvě z nich jsou zachyceny detekčním zařízením, které je schopno určit jejich rychlosti a hmotnosti (obr. 10.46). (a) Určete hybnost třetí částice, jejíž hmotnost je $11{,}7\cdot10^{-27}\,\text{kg}$, a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (b) Jaká je celková kinetická energie částic po rozpadu?



Obr. 10.46 Cvičení 62

63C. Bílá kulečníková koule narazí do červené, která je zpočátku v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost $3{,}50\,\text{m·s}^{-1}$ a svírá s původním směrem pohybu úhel 22,0°. Červená koule odletí rychlostí o velikosti $2{,}00\,\text{m·s}^{-1}$. Určete (a) směr rychlosti červené koule po srážce a (b) počáteční rychlost bílé koule. (c) Je srážka pružná?

64C. Dva automobily A a B se blíží ke stejnému místu v navzájem kolmých směrech. Při srážce se do sebe zaklíní. Vůz A (hmotnost 1 200 kg) se před srážkou pohyboval rychlostí 64 km/h a vůz B (hmotnost 1 600 kg) rychlostí 96 km/h. Určete velikost a směr společné rychlosti obou vraků po srážce.

65C. Kulečníková koule narazí rychlostí $\boldsymbol{V}$ do těsně uspořádané skupiny patnácti stojících koulí. Dojde k sérii srážek koulí mezi sebou i s obrubou stolu. Shodou okolností má velikost rychlosti všech šestnácti koulí v jistém okamžiku stejnou hodnotu v. Všechny srážky považujeme za pružné a zanedbáváme vliv rotačního pohybu koulí. Vyjádřete v pomocí V.

66Ú. Těleso o hmotnosti 20,0 kg se pohybuje v kladném směru osy x rychlostí $200\,\text{m·s}^{-1}$. Najednou vybuchne a roztrhne se

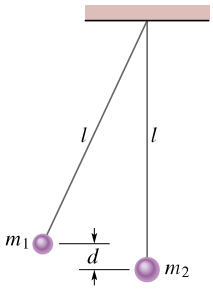
na tři části. První z nich má hmotnost 10,0 kg a odletí rychlostí 100 m·s^{-1}v kladném směru osy y. Druhý úlomek (hmotnost 4,00 kg) se vrací zpět podél záporné osy x rychlostí o velikosti 500 m·s^{-1}. (a) Určete rychlost (směr a velikost) třetího úlomku, který má hmotnost 6,00 kg. (b) Určete celkovou kinetickou energii všech úlomků po srážce. (Vliv tíhové síly zanedbejte.)

67Ú. Míč B narazí rychlostí $\boldsymbol{v}$ do míče A, který byl v klidu. Hmotnosti míčů jsou různé. Po srážce se míč B pohybuje poloviční rychlostí kolmo k původnímu směru svého pohybu. (a) Určete směr pohybu míče A po srážce. (b) Je možné zjistit ze zadaných údajů i velikost rychlosti míče A? Odpověď zdůvodněte.

68Ú. Neutron se při pružné srážce s klidným deuteronem odchýlí o 90° od původního směru svého pohybu. Ukažte, že neutron ztratil při srážce dvě třetiny své kinetické energie, kterou naopak deuteron získal. (Hmotnost neutronu je 1,0 u a hmotnost deuteronu 2,0 u.)

69Ú. Dvě stejně rychlá tělesa o stejných hmotnostech se při srážce pevně spojí (dokonale nepružná srážka). Velikost rychlosti vzniklého objektu je ve srovnání s počáteční rychlostí každého z obou těles poloviční. Určete úhel mezi vektory počátečních rychlostí těles.

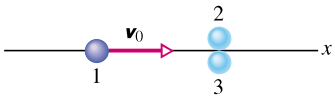
70Ú. Obr. 10.47 znázorňuje výchozí situaci před srážkou dvou kyvadel o délce l. Po uvolnění narazí kyvadlo m_1 do kyvadla m_2. Srážka je dokonale nepružná. Odpor prostředí a hmotnosti závěsů považujeme za zanedbatelné. Do jaké výšky vystoupí těžiště soustavy spojených kyvadel?



Obr. 10.47 Úloha 70

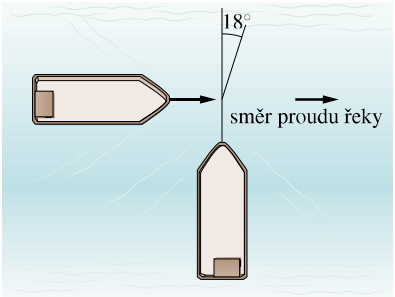
71Ú. Kulečníková koule narazí rychlostí 2,2 m·s^{-1}do jiné koule, která byla v klidu. Po srážce se jedna z koulí pohybuje rychlostí o velikosti 1,1 m·s^{-1}ve směru, který svírá s původním směrem pohybu střely úhel 60°. (a) Určete rychlost druhé koule (velikost a směr). (b) Připouštějí zadané hodnoty možnost nepružné srážky?

72Ú. Koule 1 (střela) narazí počáteční rychlostí 10 m·s^{-1}do dvojice stejných koulí, které jsou v klidu a dotýkají se. Spojnice jejich těžišť je kolmá na směr letící koule (obr. 10.48). Střela míří přesně do místa dotyku dvojice terčů. Určete rychlosti všech tří koulí po srážce. Třecí síly zanedbejte. (*Tip*: Při zanedbatelném tření mají impulzy sil, jimiž na sebe koule působí při srážce, směr spojnice jejich středů.)



Obr. 10.48 Úloha 72

73Ú. Nákladní loď o hmotnosti 1,50·10^5 kg pluje v husté mlze po proudu řeky rychlostí o velikosti 6,2 m·s^{-1}. Náhle narazí do boku druhé lodi, která přeplouvá řeku napříč (obr. 10.49). Druhá loď má hmotnost 2,78·10^5 kg a pluje rychlostí 4,3 m·s^{-1}. Těsně po srážce se kurs druhé lodi odchýlí o 18° od původního směru a velikost její rychlosti vzroste na 5,1 m·s^{-1}. Rychlost toku řeky je zanedbatelná. (a) Určete rychlost první lodi (velikost a směr) po srážce a (b) úbytek celkové kinetické energie soustavy.



Obr. 10.49 Úloha 73

ODST. 10.6 Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

74C. Hmotnosti všech částic v jaderné reakci

$$\mathrm{p} + {}^{19}\mathrm{F} \rightarrow \alpha + {}^{16}\mathrm{O}$$

jsou známy velmi přesně:

$$m_\mathrm{p} = 1{,}007\,825\ \mathrm{u}, \qquad m_\alpha = 4{,}002\,603\ \mathrm{u},$$
$$m_\mathrm{F} = 18{,}998\,405\ \mathrm{u}, \qquad m_\mathrm{O} = 15{,}994\,915\ \mathrm{u}.$$

Vypočtěte energii Q, která se při reakci uvolnila.

75C. Elementární částice Σ^- (sigma minus) se samovolně rozpadne podle schématu

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \mathrm{n}.$$

Hmotnosti částic jsou

$$m_\Sigma = 2\,340{,}5 m_\mathrm{e}, \quad m_\pi = 273{,}2 m_\mathrm{e}, \quad m_\mathrm{n} = 1\,838{,}65 m_\mathrm{e},$$

kde $m_\mathrm{e} = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg je hmotnost elektronu. (a) Určete celkovou kinetickou energii částic po rozpadu. (b) Porovnejte hybnosti obou produktů rozpadu (π^- a n). (c) Která z částic získá větší část celkové kinetické energie?

76Ú⋆. Částice α s kinetickou energií 7,70 MeV narazí do jádra atomu $^{14}_{7}$N, které je v klidu. Vznikne jádro $^{17}_{8}$O a proton. Proton vyletí kolmo k počáteční rychlosti α-částice a má kinetickou energii 4,44 MeV. Hmotnosti jednotlivých částic jsou: α-částice — 4,002 60 u; $^{14}_{7}$N — 14,003 07 u; proton — 1,007 825 u a $^{17}_{8}$O — 16,999 14 u. (a) Určete kinetickou energii kyslíkového jádra a (b) energii Q uvolněnou při reakci.

77Ú⋆. α rozpad rádia (Ra) na radon (Rn) probíhá podle rovnice

$$^{226}\mathrm{Ra} \rightarrow \alpha + {}^{222}\mathrm{Rn}.$$

Hmotnosti jednotlivých částic jsou: $^{226}_{88}$Ra — 226,025 4 u; α-částice — 4,002 6 u; $^{222}_{86}$Rn — 222,017 5 u. (a) Určete energii Q uvolněnou při reakci. (b) Jakou hodnotu Q bychom získali, kdybychom při výpočtech zaokrouhlili hmotnosti částic na tři platná místa? Určete kinetickou energii (c) α-částice a (d) jádra radonu. (Pro výpočet částí (c) a (d) je možné použít zaokrouhlených hodnot. Zdůvodněte.)

PRO POČÍTAČ

78Ú. Model rakety má hmotnost 6,00 kg a letí vodorovně směrem k jihu rychlostí 20,0 m·s^{-1}. Při výbuchu se náhle rozpadne na dvě části. Rychlost prvního úlomku (hmotnost 2,00 kg) je rovna

$$\boldsymbol{v}_1 = (-12{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} - (15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{k},$$

kde jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ směřují po řadě k východu, k severu a svisle vzhůru. (a) Určete hybnost druhého úlomku a zapište ji pomocí jednotkových vektorů. (b) Jakou kinetickou energii má druhý úlomek? (c) Určete přírůstek kinetické energie soustavy při výbuchu.

11
Rotace

Sledovali jste někdy zápas v judu? Pak jste si jistě všimli, že vítězství v tomto sportu není jen záležitostí fyzické zdatnosti sportovce. Judista, který je obeznámen se základními zákony fyziky nebo jich dokáže alespoň intuitivně využívat, může totiž bez velkých problémů porazit většího a silnějšího protivníka. Např. judista při chvatu ***o goši*** *svého soupeře nadzdvihne, otočí kolem svého boku a položí ho na žíněnku. Zdálo by se, že tento chvat vyžaduje značnou sílu, a nemusel by se vůbec podařit. Opravdu může fyzika pomoci i v tomto případě? A jak?*

11.1 POSUVNÝ A OTÁČIVÝ POHYB

Jízdu krasobruslařky vnímáme samozřejmě především jako esteticky dokonale působivý celek. Přesto však v ní můžeme rozpoznat dva základní typy pohybu. Na obr. 11.1a zachytil fotograf krasobruslařku v situaci, kdy klouže po přímce takřka rovnoměrně. Takový pohyb je jedním ze speciálních případů tzv. **posuvného** (**translačního**) pohybu, zkráceně **posuvu** neboli **translace**. Obr. 11.1b naopak ukazuje bruslařku při piruetě, při níž se otáčí kolem svislé osy určitou úhlovou rychlostí. Koná tak **otáčivý** (**rotační**) pohyb, krátce nazývaný **otáčení** neboli **rotace**. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat právě otáčivým pohybem.

Obr. 11.1 Krasobruslařka Kristi Yamaguchiová (a) při čisté translaci, (b) při čisté rotaci kolem pevné osy.

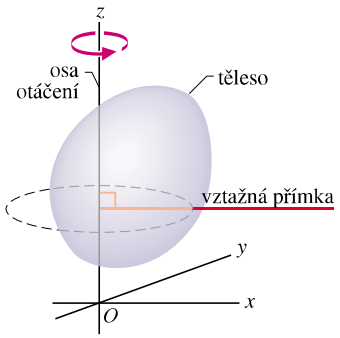
(a)

(b)

Dosud jsme se převážně zabývali pohybem posuvným, často dokonce pouze přímočarým. K typickým případům otáčivého pohybu patří otáčení kol a převodových kol, pohyb částí motorů, hodinových ručiček, rotorů tryskových motorů, vrtulí vrtulníků. Rotují také tornáda, planety, hvězdy a galaxie.

11.2 VELIČINY CHARAKTERIZUJÍCÍ OTÁČIVÝ POHYB

V této kapitole se budeme zabývat rotací *tuhého* tělesa kolem *pevné* osy.* První z těchto požadavků znamená omezení výběru objektů, jejichž otáčivý pohyb budeme popisovat. Nebudeme se tedy zabývat například rotací Slunce, které si lze nejspíš představit jako plynovou kouli. Slunce modelu tuhého tělesa rozhodně nevyhovuje. Pomocí druhého omezení vyloučíme z našich úvah například valivé pohyby, neboť při nich těleso rotuje kolem osy pohyblivé v prostoru (kolo automobilu), ale také třeba pohyb závaží odstředivého regulátoru (může se vzdalovat od osy otáčení).



Obr. 11.2 Tuhé těleso obecného tvaru se otáčí kolem souřadnicové osy z. Poloha *vztažné přímky* vzhledem k tělesu je libovolná až na to, že je přímka kolmá k ose otáčení. Je spojena s tělesem a rotuje spolu s ním.

Na obr. 11.2 je tuhé těleso obecného tvaru, které se *otáčí kolem pevné osy*, zvané **osa otáčení** neboli **osa rotace**. Každý bod tělesa opisuje kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení. V daném časovém intervalu opíší všechny body *stejný úhel*. (Naproti tomu se při posuvném pohybu pohybují všechny body tělesa po trajektoriích stejného tvaru, například po přímkách, a v daném časovém intervalu urazí *tutéž vzdálenost*. V dalším výkladu budeme posuvný a otáčivý pohyb často srovnávat.)

Zabývejme se nyní veličinami, které charakterizují rotační pohyb obdobně, jako veličiny poloha, posunutí, rych-

* Její poloha se nemění ani vůči tělesu, ani vůči okolí.

lost a zrychlení popisují translaci. Půjde o tzv. *úhlové* veličiny (*úhlovou polohu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení*). Místo slovního spojení „úhlové posunutí“ užijeme termínu *otočení*.

Úhlová poloha

Všimněme si, že v obr. 11.2 je vyznačena **vztažná přímka**, kolmá k ose otáčení a pevně spojená s tělesem. Otáčí se tedy spolu s ním a umožňuje tak snadno popsat jeho pohyb pomocí **úhlové polohy**. Úhlovou polohou budeme rozumět úhel, který vztažná přímka svírá s pevně zvoleným směrem ležícím v rovině kolmé k ose otáčení. Na obr. 11.3 je úhlová poloha θ měřena vzhledem ke kladnému směru osy x. Pro úhel θ platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(v radiánech)}. \tag{11.1}$$

Symbolem s jsme označili délku oblouku kružnice, který je ohraničen kladnou osou x a vztažnou přímkou, r je poloměr této kružnice.

Hodnoty takto definovaného úhlu vyjadřujeme obvykle v tzv. **obloukové míře**, tj. v **radiánech** (rad). Hodnoty zadané ve stupních nebo pomocí počtu otáček snadno přepočteme. Všimněme si, že úhel v obloukové míře je určen poměrem délek a je tedy bezrozměrovou veličinou.

Obvod kružnice o poloměru r je $2\pi r$, takže jedna otáčka odpovídá změně úhlové polohy o 2π radiánů:

$$1\ \text{ot} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,\text{rad} \tag{11.2}$$

a odtud

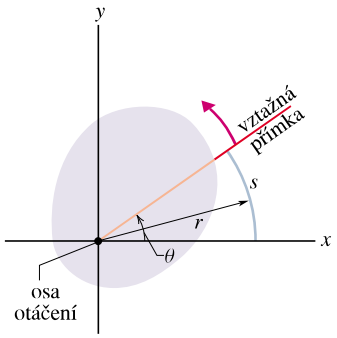
$$1\ \text{rad} = 57{,}3^\circ = 0{,}159\ \text{ot}. \tag{11.3}$$

Na rozdíl od dohody zavedené v geometrii *nebude* v našem případě úhel $\theta = 0$ ekvivalentní hodnotám 2π, 4π atd. Po ukončené otáčce vztažné přímky se tedy hodnota její úhlové polohy *nevynuluje*. Po ukončení první otáčky nabývá úhlová poloha hodnoty 2π rad, po druhé otáčce je 4π rad atd.

Úplnou informaci o posuvném pohybu tělesa například podél osy x lze získat na základě znalosti funkce $x(t)$ popisující časovou závislost polohy některého jeho bodu, zvoleného zcela libovolně. Podobně jsou všechny myslitelné údaje o otáčivém pohybu tělesa kolem pevné osy obsaženy v časové závislosti $\theta(t)$ úhlové polohy vztažné přímky.

Otočení

Dejme tomu, že se úhlová poloha vztažné přímky tělesa na obr. 11.3, rotujícího kolem pevné osy, změní v určitém



Obr. 11.3 Řez rotujícího tuhého tělesa z obr. 11.2 zobrazený v nadhledu. Osa otáčení je nyní kolmá k rovině nákresu a směřuje ke čtenáři. Rovina řezu je kolmá k ose otáčení, splývá tedy s nákresnou. Vztažná přímka svírá s osou x úhel θ.

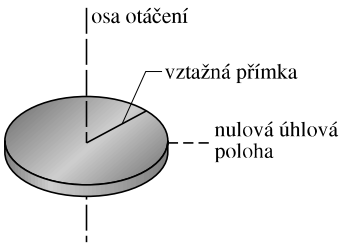
časovém intervalu z hodnoty θ_1 na hodnotu θ_2 (obr. 11.4). **Otočením** tělesa v tomto časovém intervalu rozumíme veličinu $\Delta\theta$, definovanou vztahem

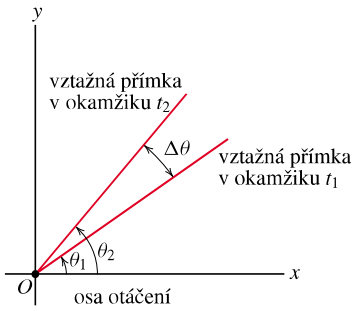
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

Tato definice otočení se vztahuje nejen na tuhé těleso jako celek, ale i *na každou jeho částici*.

Koná-li těleso posuvný pohyb, například podél osy x, může být jeho posunutí Δx jak kladné, tak záporné. Znaménko závisí na tom, zda se těleso pohybuje ve směru rostoucí či klesající souřadnice x. Také otočení $\Delta\theta$ rotujícího tělesa může nabývat kladných i záporných hodnot. Jeho znaménko je kladné, otáčí-li se těleso ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček). Při otáčení tělesa ve směru klesajících hodnot úhlové polohy (po směru otáčení hodinových ručiček) je naopak otočení záporné (obr. 11.3 a 11.4).

KONTROLA 1: Kotouč na obrázku se může otáčet kolem své osy jako kolotoč. Rozhodněte, které z následujících dvojic počáteční a výsledné úhlové polohy odpovídají zápornému otočení: (a) −3 rad, +5 rad, (b) −3 rad, −7 rad, (c) 7 rad, −3 rad.





Obr. 11.4 Vztažná přímka tuhého tělesa znázorněného na obrázku 11.2 a 11.3 má v okamžiku t_1 úhlovou polohu θ_1 a v okamžiku t_2 úhlovou polohu θ_2. Rozdíl $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ představuje otočení tělesa v časovém intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$. (Těleso není v obrázku zakresleno.)

Úhlová rychlost

V souhlasu s obr. 11.4 označme úhlovou polohu rotujícího tělesa v okamžiku t_1 jako θ_1 a v okamžiku t_2 jako θ_2. **Průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v časovém intervalu Δt od t_1 do t_2 definujeme vztahem

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (11.5)$$

kde $\Delta\theta$ je otočení tělesa v časovém intervalu Δt.

(Okamžitá) úhlová rychlost ω, se kterou budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrné úhlové rychlosti, vyjádřené vztahem (11.5), při poklesu veličiny Δt k nulové hodnotě, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.6)$$

Známe-li časovou závislost úhlové polohy $\theta(t)$, můžeme úhlovou rychlost ω snadno určit jejím derivováním.

Rov. (11.5) a (11.6) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale také pro *každou jeho částici*. Jako jednotku úhlové rychlosti používáme nejčastěji radián za sekundu (rad/s), někdy i počet otáček za sekundu (ot/s).

Pohybuje-li se částice podél osy x, je její rychlost v_x kladná, nebo záporná podle toho, zda se pohyb děje ve směru rostoucí, nebo klesající souřadnice x. Také úhlová rychlost může mít kladné, nebo záporné znaménko. V prvním případě se těleso otáčí ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček), v druhém případě ve směru klesajícího úhlu θ (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Předchozí definici ještě upřesníme: úhlovou rychlost rotujícího tělesa definujeme jako vektor $\boldsymbol{\omega}$ rovnoběžný s osou otáčení, jehož složka měřená podél této osy je dána vztahem (11.6). Velikost vektoru úhlové rychlosti značíme obvykle rovněž symbolem ω. Se slovním spojením „úhlová rychlost“ se tedy můžeme setkat dokonce v trojím významu. Může představovat vektor, jeho složku do osy rotace či jeho velikost. Nemusíme však mít obavu, že bychom tyto možnosti nedokázali v textu dobře rozpoznat. Věta „Úhlová rychlost mění směr“ zcela jistě vypovídá o úhlové rychlosti jako o vektoru a věta „Úhlová rychlost činí 50 otáček za sekundu“ se nepochybně týká její velikosti.

Úhlové zrychlení

V případech, kdy úhlová rychlost rotujícího tělesa není konstantní, má těleso nenulové úhlové zrychlení. Dejme tomu, že úhlová rychlost tělesa v okamžiku t_1 je ω_1 a v okamžiku t_2 má hodnotu ω_2. **Průměrné úhlové zrychlení** tělesa v časovém intervalu od t_1 do t_2 pak definujeme vztahem

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (11.7)$$

kde $\Delta\omega$ je změna úhlové rychlosti v daném časovém intervalu délky Δt. **(Okamžité) úhlové zrychlení** ε, se kterým budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrného úhlového zrychlení při poklesu hodnoty Δt k nule. Platí tedy

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.8)$$

Rov. (11.7) a (11.8) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale i pro *každou jeho částici*. Nejužívanější jednotkou úhlového zrychlení je radián za sekundu na druhou (rad/s^2), případně počet otáček za sekundu na druhou (ot/s^2).

Podobně jako u úhlové rychlosti můžeme i zde zavést vektor úhlového zrychlení: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. Jeho směr je dán osou a směrem otáčení. Situace je tedy obdobná jako u jednorozměrných vektorů v kap. 2.

PŘÍKLAD 11.1

Časová závislost úhlové polohy vztažné přímky rotujícího kola je dána vztahem

$$\theta = t^3 - 27t + 4,$$

kde t je v sekundách a θ v radiánech.

(a) Určete $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost $\omega(t)$ najdeme jako derivaci funkce $\theta(t)$ podle času:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = 3t^2 - 27. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Dalším derivováním získáme úhlové zrychlení $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(3t^2 - 27)}{\mathrm{d}t} = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Zjistěte, zda se v některém okamžiku úhlová rychlost anuluje. Ve kterém?

ŘEŠENÍ: Požadavek $\omega(t) = 0$ vede k rovnici

$$0 = 3t^2 - 27,$$

jejíž řešení má tvar

$$t = \pm 3. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Okamžitá úhlová rychlost kola je nulová v okamžicích $t = 3$ s a $t = -3$ s (3 sekundy před začátkem měření).

(c) Popište pohyb kola pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Všimněme si podrobněji časových závislostí $\theta(t)$, $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

V okamžiku $t = 0$ (začátek měření) má vztažná přímka úhlovou polohu $\theta = 4$ rad, kolo se otáčí úhlovou rychlostí -27 rad/s (tedy *ve směru* otáčení hodinových ručiček) a jeho úhlové zrychlení je nulové.

V intervalu $0 < t < 3$ s se kolo otáčí stále ve směru otáčení hodinových ručiček. Jeho úhlové zrychlení je kladné, a proto velikost jeho úhlové rychlosti klesá (otáčení se zvolňuje). Ověřte toto tvrzení například pro okamžik $t = 2$ s.

V okamžiku $t = 3$ s je úhlová rychlost kola nulová ($\omega = 0$) a kolo je v krajní úhlové poloze (vztažná přímka má v tomto okamžiku úhlovou polohu $\theta = -50$ rad).

Pro $t > 3$ s úhlové zrychlení kola roste. Zvyšuje se i jeho úhlová rychlost, která je nyní kladná. Vzhledem k tomu, že veličiny ω a ε mají stejné (kladné) znaménko, roste i velikost úhlové rychlosti, a to poměrně rychle.

PŘÍKLAD 11.2

Dětská káča se otáčí s úhlovým zrychlením

$$\varepsilon = 5t^3 - 4t.$$

Všechny veličiny jsou vyjádřeny v odpovídajících jednotkách SI (rad, s). V čase $t = 0$ má káča úhlovou rychlost 5 rad/s a její vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta = 2$ rad.

(a) Najděte časovou závislost úhlové rychlosti káči $\omega(t)$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.8) dostaneme vztah

$$\mathrm{d}\omega = \varepsilon\,\mathrm{d}t$$

a jeho integrací získáme funkci

$$\omega = \int \varepsilon\,\mathrm{d}t = \int (5t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Pro výpočet integrační konstanty C použijeme podmínku $\omega(t = 0) = 5$ rad/s, jejímž dosazením do poslední rovnice dostáváme

$$5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 0 - 0 + C.$$

Je tedy $C = 5$ rad/s a

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte časovou závislost úhlové polohy káči $\theta(t)$.

ŘEŠENÍ: Rov. (11.6) přepíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

a integrací dostaneme hledanou časovou závislost $\theta(t)$:

$$\theta = \int \omega\,\mathrm{d}t = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' =$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Konstantu C' jsme určili z podmínky $\theta(t = 0) = 2$ rad.

11.3 JSOU ÚHLOVÉ VELIČINY VEKTOROVÉ?

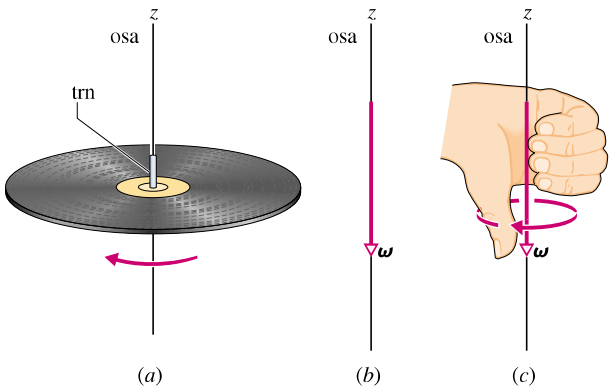
Poloha, rychlost a zrychlení částice jsou typické vektorové veličiny. Vzpomeňme si však, že při popisu přímočarého pohybu částice jsme vektorovou algebru v plném rozsahu nepotřebovali. Dva možné směry pohybu částice jsme totiž dokázali rozlišit pouze znaménkem. Polohový vektor, rychlost i zrychlení byly zadány vždy jediným číselným údajem, představujícím složku vektoru měřenou podél přímky — trajektorie částice.

V podobné situaci se ocitáme při popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso se může otáčet v některém ze dvou možných směrů, které opět odlišíme znaménky: ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), nebo záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček). Znamená to, že můžeme otočení, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení pokládat za vektorové veličiny? Odpověď na tuto otázku je pro případ úhlové rychlosti a úhlového zrychlení kladná. Otočení však vektorovou veličinou *není*. K podrobnějšímu rozboru této skutečnosti se vrátíme v závěru článku.

Uvažujme úhlovou rychlost. Na obr. 11.5a je znázorněna gramofonová deska, která se otáčí kolem pevného trnu stálou úhlovou rychlostí $\omega = 33\frac{1}{3}$ ot/min. Rovněž směr otáčení je stálý a při pohledu shora se děje ve směru otáčení

hodinových ručiček. Úhlovou rychlost tedy můžeme definovat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení (obr. 11.5). Délku tohoto vektoru znázorníme v nějakém vhodném měřítku, např. 1 cm bude odpovídat 10 ot/min.

Směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$ definujeme pomocí **pravidla pravé ruky** podle obr. 11.5. Přiložíme pravou dlaň k rotující desce tak, aby prsty směřovaly ve směru otáčení. Natažený palec pak ukazuje směr vektoru úhlové rychlosti. Kdyby se deska otáčela opačným směrem, byl by směr vektoru úhlové rychlosti, určený pravidlem pravé ruky, opačný.



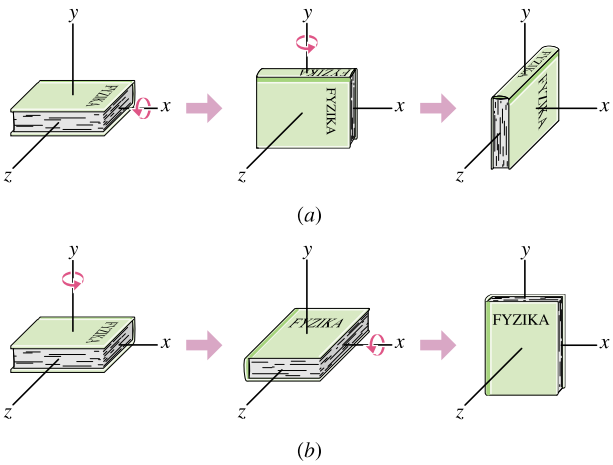
Obr. 11.5 (a) Gramofonová deska se otáčí kolem svislé osy (trnu). (b) Úhlovou rychlost rotující desky lze chápat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení a směřující dolů. (c) Směr vektoru úhlové rychlosti stanovíme pomocí pravidla pravé ruky. Prsty pravé ruky ukazují směr otáčení, palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$.

Na vektorovou povahu úhlových veličin si zřejmě budeme chvíli zvykat. Intuitivně totiž cítíme, že by vektor měl udávat směr pohybu nějakého objektu. V případě úhlových veličin by však byla taková představa nesprávná. Tuhé těleso se otáčí *kolem* směru vektoru. Při rotačním pohybu určuje vektor směr osy otáčení, nikoli směr pohybu. I takový vektor však charakterizuje pohybový stav objektu. Samozřejmě i pro něj platí pravidla vektorové algebry, shrnutá v kap. 3. Předchozí úvahy se týkají jak úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, tak úhlového zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Poněvadž se v této kapitole zabýváme pouze otáčením tělesa kolem pevné osy, nemusíme za každou cenu pracovat s úhlovými veličinami jako s vektory. Úhlovou rychlost i úhlové zrychlení můžeme totiž v každém okamžiku zadat pouze číselnými údaji ω a ε, směr vektoru je určen znaménkem příslušné číselné hodnoty. Při řešení složitějších úloh je však vektorový zápis vhodnější.

Vraťme se nyní k možnosti popsat i otočení jako vektorovou veličinu. Pokud nejde o otočení velmi malé, není takový popis možný. Otočení *není* vektorovou veličinou. Jak jsme na to přišli? Každému otočení přece můžeme přiřadit velikost i směr, podobně jako v případě úhlové rychlosti tělesa na obr. 11.5. Možnost přisoudit veličině směr a velikost však ještě nezaručuje, že jde o veličinu vektorovou. Matematik by řekl, že je tím splněna pouze podmínka nutná, ne však postačující. Abychom totiž mohli nějakou veličinu prohlásit za vektorovou, musela by vyhovovat pravidlům vektorové algebry. Podle jednoho z nich je například součet vektorů nezávislý na pořadí sčítání. Snadno však zjistíme, že otočení tomuto pravidlu nevyhovuje.

Abychom se o tom přesvědčili, položme na stůl knihu podle obr. 11.6a. Otočme ji dvakrát po sobě o úhel 90°, *nejdříve* kolem vodorovné osy x, *potom* kolem svislé osy y. K určení kladného směru otočení použijeme pravidlo pravé ruky (obr. 11.5).



Obr. 11.6 (a) Knihu otočíme dvakrát o 90°, nejdříve kolem vodorovné osy x, potom kolem svislé osy y. (b) Táž otočení provedeme v opačném pořadí. (Výchozí poloha knihy je v případech (a) i (b) stejná.) Pokud by otočení bylo vektorovou veličinou, neovlivnilo by pořadí otočení výslednou polohu knihy. Z obrázku je však zřejmé, že výsledná poloha knihy na pořadí provedených otočení závisí. Otočení není vektorová veličina, přestože jí můžeme přiřadit velikost a směr.

Vraťme nyní knihu do původní polohy a proveďme tato dvě otočení v opačném pořadí (obr. 11.6b), tedy *nejprve* kolem osy y a teprve potom kolem osy x. Jak je vidět z obrázku, výsledná polohy knihy se v obou případech liší.

Táž dvojice operací vede k různým výsledkům, jsou-li operace provedeny v různém pořadí. Skládání otočení není komutativní a otočení tedy nemůže být vektorovou veličinou. Jednoduchým pokusem však snadno ukážeme, že odlišnost výsledných poloh knihy je nepatrná, jsou-li provedená otočení mnohem menší než 90°. Infinitezimálně (neomezeně) malé otočení (například $\mathrm{d}\theta$ v rov. (11.6)) již může být pokládáno za vektorovou veličinu.

Tabulka 11.1 **Posuvný pohyb s konstantním zrychlením a otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením**

ROVNICE ČÍSLO	POSUVNÝ POHYB	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA		OTÁČIVÝ POHYB	ROVNICE ČÍSLO
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	x	θ	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	(11.9)
(2.15)	$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x	ω	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	(11.10)
(2.16)	$v_x^2 = v_0^2 + 2a_x x$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$	(11.11)
(2.17)	$x = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x	ε	$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(11.12)
(2.18)	$x = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}	ω_0	$\theta = \omega t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	(11.13)

11.4 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ OTÁČIVÝ POHYB

Důležitým zvláštním případem posuvného pohybu po přímce je rovnoměrně zrychlený pohyb (například volný pád). Tab. 2.1 obsahuje souhrn rovnic, které se takového případu týkají.

Pohyb *s konstantním úhlovým zrychlením* je zase významným speciálním případem pohybu otáčivého a vztahy mezi veličinami, které jej popisují, se rovnicím v tab. 2.1 velmi podobají, jak je zřejmé z tab. 11.1. Snadno je můžeme získat z odpovídajících vztahů pro posuvný pohyb. Stačí, abychom v nich nahradili polohu, rychlost a zrychlení příslušnými úhlovými veličinami. Oba soubory rovnic, tj. (2.11), (2.15) až (2.18) a (11.9) až (11.13), shrnuje pro porovnání tab. 11.1. Pro jednoduchost jsme v nich položili $x_0 = 0$ a $\theta_0 = 0$. Při takových *počátečních podmínkách* je posunutí $\Delta x = x - x_0$ dáno přímo souřadnicí x a otočení $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ úhlovou polohou θ.

KONTROLA 2: Časová závislost úhlové polohy rotujícího tělesa $\theta(t)$ může být vyjádřena některým z následujících vztahů: (a) $\theta(t) = 3t - 4$, (b) $\theta(t) = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta(t) = 2/t^2 - 4/t$ a (d) $\theta(t) = 5t^2 - 3$. Pro který z nich lze použít tab. 11.1?

PŘÍKLAD 11.3

Mlýnské kolo na obr. 11.7 se otáčí s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0{,}35\,\text{rad/s}^2$. Roztáčí se z klidové polohy (tj. $\omega_0 = 0$), v níž je jeho vztažná přímka vodorovná ($\theta_0 = 0$).

(a) Určete otočení vztažné přímky v okamžiku $t = 18\,\text{s}$.

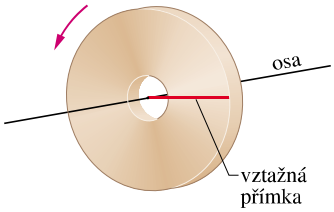
ŘEŠENÍ: Z rov. (11.10) v tab. 11.1 ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) dostaneme

$$\theta = 0(18\,\text{s}) + \tfrac{1}{2}(0{,}35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})(18\,\text{s})^2 =$$
$$= 56{,}7\,\text{rad} \doteq 57\,\text{rad} \doteq 3\,200^\circ \doteq 9{,}0\,\text{ot}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je v tomto okamžiku úhlová rychlost kola?

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.9) v tab. 11.1 ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) vyjde

$$\omega = 0 + (0{,}35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})(18\,\text{s}) =$$
$$= 6{,}3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 360^\circ/\,\text{s} = 1{,}0\,\text{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.7 Příklady 11.3 a 11.4. Vztažná přímka mlýnského kola je v okamžiku $t = 0$ vodorovná.

PŘÍKLAD 11.4

Předpokládejme, že počáteční úhlová rychlost mlýnského kola z př. 11.3 je nyní $\omega_0 = -4{,}6\,\text{rad/s}$. Kolo se točí opět s úhlovým zrychlením ($\varepsilon = 0{,}35\,\text{rad/s}^2$). Znaménka veličin ω_0 a ε jsou opačná, otáčivý pohyb kola je tedy zpomalený.

(a) Určete okamžik, kdy bude úhlová rychlost kola nulová.

ŘEŠENÍ: Vyřešíme rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) pro neznámou t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (-4{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}{(0{,}35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})} = 13\,\text{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete okamžik, kdy úhlová poloha kola odpovídá pěti otáčkám v kladném směru. (V tomto okamžiku má otočení vztažné přímky hodnotu $\theta = 5\,\text{ot}$.)

ŘEŠENÍ: Na počátku pohybu se kolo otáčí v záporném směru (ve směru otáčení hodinových ručiček) úhlovou rychlostí $\omega_0 = -4{,}6\,\text{rad/s}$. Jeho úhlové zrychlení je ovšem kladné (proti směru otáčení hodinových ručiček). Opačná znaménka počáteční úhlové rychlosti a úhlového zrychlení znamenají, že velikost úhlové rychlosti kola klesá. V určité chvíli se kolo na okamžik zastaví a začne se roztáčet v kladném směru. Poté, co se vztažná přímka vrátila do své počáteční úhlové polohy

$\theta = 0$, musí kolo vykonat ještě dalších pět otáček, aby jeho úhlová poloha měla předepsanou hodnotu. Popis pohybu kola se nám může zdát poměrně složitý. Všechny jeho fáze jsou však „již obsaženy“ v rov. (11.10):

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

Po vyjádření úhlu θ v radiánech ($\theta = 5\,\text{ot} = 10\pi\,\text{rad}$) a dosazení číselných údajů dostaneme

$$10\pi\,\text{rad} = (-4{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})t^2.$$

Je-li čas t vyjádřen v sekundách, je získaná rovnice rozměrově správná. V dalším výpočtu jednotky pro jednoduchost vynecháme. Kvadratickou rovnici pro neznámou t přepíšeme do tvaru

$$t^2 - 26{,}3t - 180 = 0 \qquad (11.14)$$

a vyřešíme ji. Řešením úlohy je její kladný kořen

$$t = 32\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

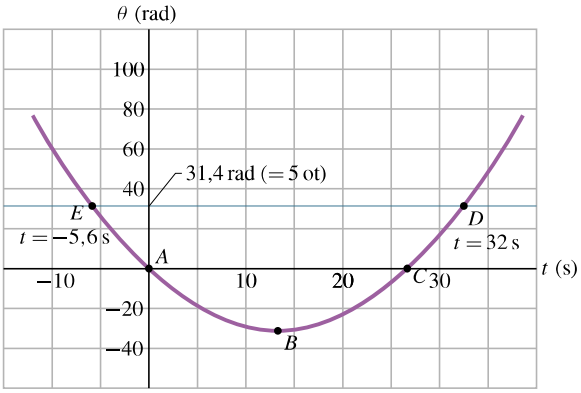
Bod 11.1: *Neočekávané výsledky*

Při posuzování fyzikálního významu kořenů kvadratické rovnice bychom neměli postupovat unáhleně. I kořen, který se nám na první pohled jeví jako nepřípustný, může mít dobrý fyzikální smysl. Právě tak je tomu i v př. 11.4.

Rov. (11.14) má kořeny $t = 32\,\text{s}$ a $t = -5{,}6\,\text{s}$. První z nich (kladný) jsme prohlásili za řešení úlohy a druhý zavrhli jako fyzikálně nevýznamný. Rozhodli jsme správně? Nikoliv! Záporná hodnota časové proměnné v tomto případě jednoduše udává jistý konkrétní okamžik předtím, než jsme začali pohyb kola sledovat, tj. než jsme stiskli vynulované stopky.

Obr. 11.8 znázorňuje časový průběh úhlové polohy θ vztažné přímky mlýnského kola (př. 11.4) pro kladné i záporné hodnoty časové proměnné. Představuje grafické vyjádření rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) pro číselné hodnoty $\omega_0 = -4{,}6\,\text{rad/s}$ a $\varepsilon = +0{,}35\,\text{rad/s}^2$. Bod A odpovídá okamžiku $t = 0$, jemuž jsme přisoudili nulovou hodnotu úhlové polohy vztažné přímky. Od této chvíle se kolo točí v záporném směru až do okamžiku $t = 13\,\text{s}$, kdy jeho úhlová rychlost dosáhne nulové hodnoty (v grafu bod B). Směr otáčení se změní v opačný a vztažná přímka projde úhlovou polohou $\theta = 0$ v okamžiku, jemuž v grafu odpovídá bod C. Pak se kolo ještě pětkrát otočí ($\theta = 31{,}4\,\text{rad}$, $t = 32\,\text{s}$, bod D v grafu). Časový údaj $t = 32\,\text{s}$ jsme v př. 11.4 přijali jako správné řešení úlohy.

Všimněme si však, že vztažná přímka měla úhlovou polohu $\theta = 5\,\text{ot}$ také v okamžiku $t = -5{,}6\,\text{s}$, tj. před „oficiálně stanoveným“ začátkem měření veličin charakterizujících pohyb kola. Fyzikální význam tohoto kořene kvadratické rovnice (11.14), reprezentovaného bodem E na obrázku, není tedy o nic menší než význam kořene odpovídajícího bodu D. Kromě posouzení právoplatnosti záporného kořene rov. (11.14) jsme předchozími úvahami také podrobněji popsali časový průběh otáčení kola.



Obr. 11.8 Graf časové závislosti úhlové polohy $\theta(t)$ mlýnského kola podle př. 11.4. V grafu je znázorněna situace i pro záporné hodnoty časové proměnné (před okamžikem $t = 0$). Dva kořeny rov. (11.14) odpovídají bodům D a E.

PŘÍKLAD 11.5

Při zkoumání pohybu rotoru vrtulníku se zjistilo, že se jeho úhlová rychlost změnila během doby 1,50 min z 320 ot/min na 225 ot/min.

(a) Určete průměrné úhlové zrychlení rotoru v uvedeném intervalu.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.7) plyne

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{(225\,\text{ot/min}) - (320\,\text{ot/min})}{(1{,}50\,\text{min})} = \\ = -63{,}3\,\text{ot/min}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že se otáčení rotoru zpožďuje rovnoměrně, takže je okamžité úhlové zrychlení v každém okamžiku shodné s průměrným. Jak dlouho potrvá, než se rotor zastaví, je-li jeho počáteční úhlová rychlost 320 ot/min?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) řešíme vzhledem k neznámé t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\text{ot/min})}{(-63{,}3\,\text{ot/min}^2)} = \\ = 5{,}1\,\text{min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Kolik otáček vykoná rotor vrtulníku v úloze (b)?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.11) ($\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$) nyní řešíme vzhledem k neznámé θ:

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\text{ot/min})^2}{2(-63{,}3\,\text{ot/min}^2)} = \\ = 809\,\text{ot}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

11.5 KORESPONDENCE OBVODOVÝCH A ÚHLOVÝCH VELIČIN

Připomeňme si čl. 4.7, kde jsme studovali rovnoměrný pohyb částice po kružnici. Částice se pohybovala *obvodovou rychlostí* $\boldsymbol{v}$ se stálou velikostí v. Takový pohyb však můžeme chápat i jako rotaci částice kolem pevné osy, vedené středem kružnice kolmo k její rovině. Otáčí-li se kolem pevné osy tuhé těleso (například kolotoč), pohybuje se každá jeho částice po své vlastní kruhové trajektorii. Osa otáčení tělesa je spojnicí středů všech těchto kružnic. Protože je těleso tuhé, trvá jeden oběh všech jeho částic stejnou dobu. Částice tedy mají stejnou úhlovou rychlost ω.

Čím je však částice vzdálenější od osy otáčení, tím větší je obvod její trajektorie a tedy i její obvodová rychlost. Tuto skutečnost si snadno uvědomíme třeba při jízdě na kolotoči. Úhlová rychlost otáčení ω je nezávislá na vzdálenosti sedačky, na níž se vezeme, od osy kolotoče. Obvodová rychlost $\boldsymbol{v}$ (a nepříjemné pocity dané její změnou) je však tím větší, čím je sedačka od osy vzdálenější.

Často je třeba mít k dispozici vztahy mezi obvodovými veličinami, tj. délkou oblouku s, obvodovou rychlostí v a obvodovým zrychlením a jednotlivých částic rotujícího tuhého tělesa a úhlovými veličinami θ, ω a ε, charakterizujícími otáčivý pohyb tělesa jako celku. Vztah obvodových a úhlových veličin je pro každou částici určen její *vzdáleností* r od osy otáčení, tj. poloměrem její kruhové trajektorie.

Poloha

Sledujme pohyb vybrané částice rotujícího tuhého tělesa. Při otočení vztažné přímky o úhel θ urazí částice po oblouku své kruhové trajektorie dráhu s podle rov. (11.1)

$$s = \theta r \quad (\theta \text{ je v rad}). \tag{11.15}$$

Získáváme první vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami. Úhel θ je třeba měřit v radiánech, neboť rov. (11.15) představuje současně definici úhlové míry.

Rychlost

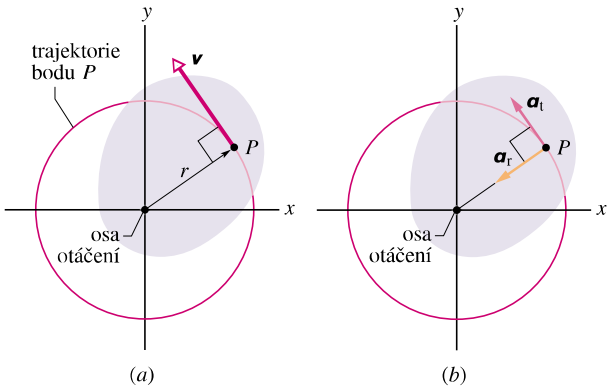
Derivujme rov. (11.15) podle času (při konstantní hodnotě r). Pak

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r \quad (\theta \text{ je v rad}).$$

Veličina $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ představuje obvodovou rychlost uvažované částice a $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ je úhlová rychlost ω rotujícího tělesa. Je tedy

$$v = \omega r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.16}$$

Úhlovou rychlost ω je opět nutné vyjádřit pomocí obloukové míry, tj. v jednotkách rad/s. Jak již víme, mají všechny částice tělesa stejnou úhlovou rychlost. Z rov. (11.16) pak snadno poznáme, že částice, které obíhají ve větší vzdálenosti r od osy otáčení, mají větší obvodovou rychlost v. Obr. 11.9a znázorňuje známou skutečnost, že vektor rychlosti částice je v každém okamžiku tečný k její kruhové trajektorii.



Obr. 11.9 Řez tuhým tělesem znázorněným na obr. 11.2 rovinou kolmou k ose otáčení. Každá částice tělesa (např. P) se pohybuje po kruhové trajektorii, jejíž střed leží na ose otáčení. (a) Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice je tečný k její kruhové trajektorii. (b) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ libovolné částice je součtem dvou průmětů, tečného ($\boldsymbol{a}_t$) a normálového ($\boldsymbol{a}_r$).

Při otáčení tělesa stálou úhlovou rychlostí je podle rov. (11.16) časově neproměnná i obvodová rychlost každé jeho částice. Každá částice tělesa tedy koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Doba oběhu T je pro všechny částice stejná a samozřejmě shodná s trváním jedné otáčky celého tělesa. Je vyjádřena vztahem (4.23)

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \tag{11.17}$$

z něhož je patrné, že je podílem délky kruhové trajektorie částice ($2\pi r$) a její obvodové rychlosti (v). Po dosazení v z rov. (11.16) a malé úpravě dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.18}$$

Tento výsledek je samozřejmě ekvivalentní s rov. (11.17). Vyjadřuje však společnou dobu oběhu všech částic pomocí veličin charakterizujících otáčivý pohyb tělesa jako celku, tj. jako podíl úhlu otočení tělesa (2π rad) během jedné otáčky a jeho úhlové rychlosti (ω).

Obvodové zrychlení

Derivací rov. (11.16) podle času (r je opět konstantní) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r. \qquad (11.19)$$

V tuto chvíli je na místě jistá obezřetnost: veličina $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ na levé straně rov. (11.19) je časovou derivací obvodové rychlosti částice. Udává tedy časovou změnu *velikosti* vektoru její rychlosti a charakterizuje tak *nerovnoměrnost* jejího pohybu. Vraťme se na okamžik k čl. 6.4, který se zabýval výhradně *rovnoměrným* pohybem po kružnici. Vzpomeňme si, že zrychlení částice směřovalo v tomto případě neustále do středu její kruhové trajektorie, takže jeho tečný průmět (*tečné zrychlení*) byl nulový. Zdá se tedy, že tečné zrychlení nutně souvisí se změnou obvodové rychlosti a při nerovnoměrném pohybu již pochopitelně nebude nulové. Skutečně, výraz $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ představuje *tečnou složku* a_t vektoru zrychlení částice. Platí pro ni

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r \quad (\varepsilon \text{ je v rad/s}^2), \qquad (11.20)$$

kde $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$.

(Při pohybu po kružnici nazýváme někdy tečnou složku zrychlení částice též obvodovým zrychlením.)

Celkové zrychlení částice je součtem jeho dvou průmětů, **tečného zrychlení** $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ a **normálového (radiálního) zrychlení** $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$. Při pohybu po kružnici směřuje normálové zrychlení do jejího středu a vystihuje změnu směru vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Jeho velikost, tzv. **normálová složka** zrychlení, se řídí známým vztahem $a_\mathrm{r} = v^2/r$ (rov. (4.22)). Dosazením v z rov. (11.16) dostaneme pro a_r vztah

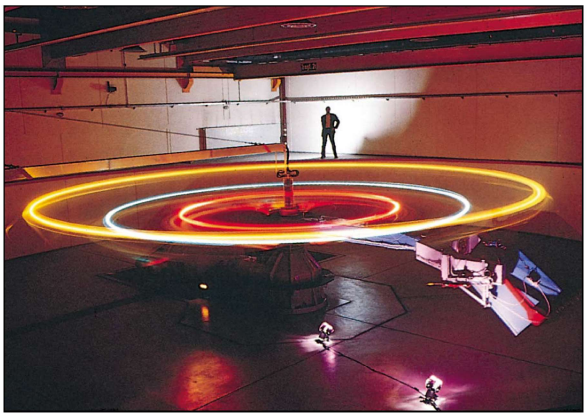
$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \qquad (11.21)$$

Předchozí úvahy názorně shrnuje obr. 11.9b: zrychlení každé částice rotujícího tuhého tělesa je součtem svých dvou průmětů, tečného a normálového zrychlení. Tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ má směr vektoru rychlosti a normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ směřuje do středu kruhové trajektorie. Normálová složka zrychlení je dána vztahem (11.21), a je tedy vždy nenulová (pokud těleso rotuje, je $\omega \neq 0$). Tečná složka a_t se řídí vztahem (11.20)) a je nenulová v případě, že je otáčivý pohyb tělesa nerovnoměrný, tj. jeho úhlové zrychlení je nenulové.

KONTROLA 3: Moucha se veze na okraji kolotoče, jehož úhlová rychlost je konstantní. Rozhodněte, zda je (a) normálová, resp. (b) tečná složka zrychlení mouchy nenulová. (c), (d) Zodpovězte předchozí otázky pro případ, že úhlová rychlost kolotoče klesá.

PŘÍKLAD 11.6

Na obr. 11.10 je vyfotografována centrifuga určená pro výcvik astronautů. Poloměr r kruhové trajektorie trénujícího astronauta je 15 m.



Obr. 11.10 Příklad 11.6. Centrifuga pro výcvik astronautů v německém Kolíně. Při tréninku si astronauti zvykají na velká zrychlení, jimž jsou vystaveni při startu rakety.

(a) Předpokládejme, že se centrifuga otáčí rovnoměrně. Jaká musí být její úhlová rychlost, má-li si astronaut zvykat na zrychlení $11g$?

ŘEŠENÍ: Protože je úhlová rychlost centrifugy stálá, je její úhlové zrychlení ε ($= \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$) nulové. Podle rov. (11.20) je nulová i tečná složka zrychlení astronauta. Celkové zrychlení je tedy dáno pouze zrychlením normálovým. Užitím rov. (11.21) ($a_\mathrm{r} = \omega^2 r$) a požadavku $a_\mathrm{r} = 11g$ dostaneme

$$\omega = \sqrt{\frac{a_\mathrm{r}}{r}} = \sqrt{\frac{11(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(15\ \mathrm{m})}} = \\ = 2{,}68\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} \doteq 26\ \mathrm{ot/min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete tečné zrychlení pohybu astronauta za předpokladu, že úhlová rychlost centrifugy rovnoměrně vzroste během 120 s z počáteční nulové hodnoty na hodnotu vypočtenou v úkolu (a).

ŘEŠENÍ: Poněvadž je úhlové zrychlení centrifugy podle předpokladu stálé, můžeme pro jeho výpočet použít rovnici (11.9). Dostaneme

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{(2{,}68\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} - 0)}{(120\ \mathrm{s})} = 0{,}022\,3\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}.$$

Tečnou složku zrychlení astronauta pak již snadno určíme pomocí rov. (11.20):

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r = (0{,}022\,3\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}})(15\ \mathrm{m}) = \\ = 0{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota normálové složky zrychlení astronauta je značná ($a_r = 11g$). Tečná složka při rozjezdu centrifugy je v porovnání s ní mnohonásobně nižší ($a_t = 0{,}034g$).

RADY A NÁMĚTY

Bod 11.2: *Jednotky úhlových veličin*

Definice úhlové polohy ve tvaru (11.1) ($\theta = s/r$) nás zavazuje k používání obloukové míry (radiány) ve všech vztazích mezi úhlovými a obvodovými veličinami. Otočení tedy musíme vyjadřovat vždy v radiánech, úhlové rychlosti v jednotkách rad/s nebo rad/min a úhlová zrychlení v jednotkách rad/s^2 nebo rad/min^2. Ve vztazích (11.15), (11.16), (11.18), (11.20) a (11.21) jsme tuto skutečnost explicitně zdůraznili. Tímto pravidlem se však nemusíme řídit ve vztazích obsahujících *výhradně* úhlové veličiny (vztahy v pravé části tab. 11.1). Můžeme v nich pracovat s libovolnými úhlovými jednotkami, tj. kromě radiánů také se stupni nebo počty otáček, pokud je užíváme konzistentně, tj. „nemícháme je".

Ve vztazích vyžadujících použití obloukové míry není třeba vypisovat jednotku „radián" (rad) během celého výpočtu. Stačí ji uvést až ve výsledku. Takového zjednodušení zápisu jsme použili v př. 11.6.

11.6 KINETICKÁ ENERGIE TĚLESA PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Rychle rotující kotoučová pila má určitě značnou kinetickou energii a jistě je možné ji určit. Ale jak? Známý vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ platí totiž pro částici. Pro výpočet kinetické energie rotujícího tělesa však není přímo použitelný už proto, že nevíme, kterou veličinu bychom měli dosazovat za v.

Považujme kotoučovou pilu (a obecně každé rotující tuhé těleso) za soustavu částic pohybujících se různými rychlostmi. Kinetickou energii takového tělesa pak celkem přirozeně definujeme jako součet kinetických energií jednotlivých částic, tj.

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots = \\ = \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2. \qquad (11.22)$$

Hmotnost i-té částice jsme označili symbolem m_i a velikost její rychlosti v_i. Součet zahrnuje všechny částice tělesa.

Získaný vztah je ovšem pro praktický výpočet kinetické energie tělesa poněkud nepohodlný. Částice se totiž pohybují různými rychlostmi $\boldsymbol{v}_i$. Uvědomíme-li si však, že rov. (11.16) umožňuje vyjádřit velikost rychlosti každé částice pomocí její vzdálenosti od osy otáčení a úhlové rychlosti, která charakterizuje otáčivý pohyb tělesa jako celku, můžeme se tohoto „nepohodlí" snadno zbavit. Užitím rov. (11.16) dostaneme

$$E_k = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2. \qquad (11.23)$$

Hodnota ω je stejná pro všechny částice.

Veličina v závorce po poslední úpravě rov. (11.23) závisí na rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose otáčení. Nazýváme ji **momentem setrvačnosti** tělesa vzhledem k dané ose otáčení a značíme ji I. Všimněme si, že pro případ tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevně zvolené osy, je moment setrvačnosti konstantní. Tato jeho vlastnost je velmi podstatná a usnadňuje všechny další úvahy. Volbu osy otáčení je ovšem nutno při výpočtu momentu setrvačnosti jasně zadat, neboť jeho hodnota na ní výrazně závisí.

Pomocí momentu setrvačnosti

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (11.24)$$

získáme z rov. (11.23) pro E_k velmi jednoduchý výraz

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \qquad (11.25)$$

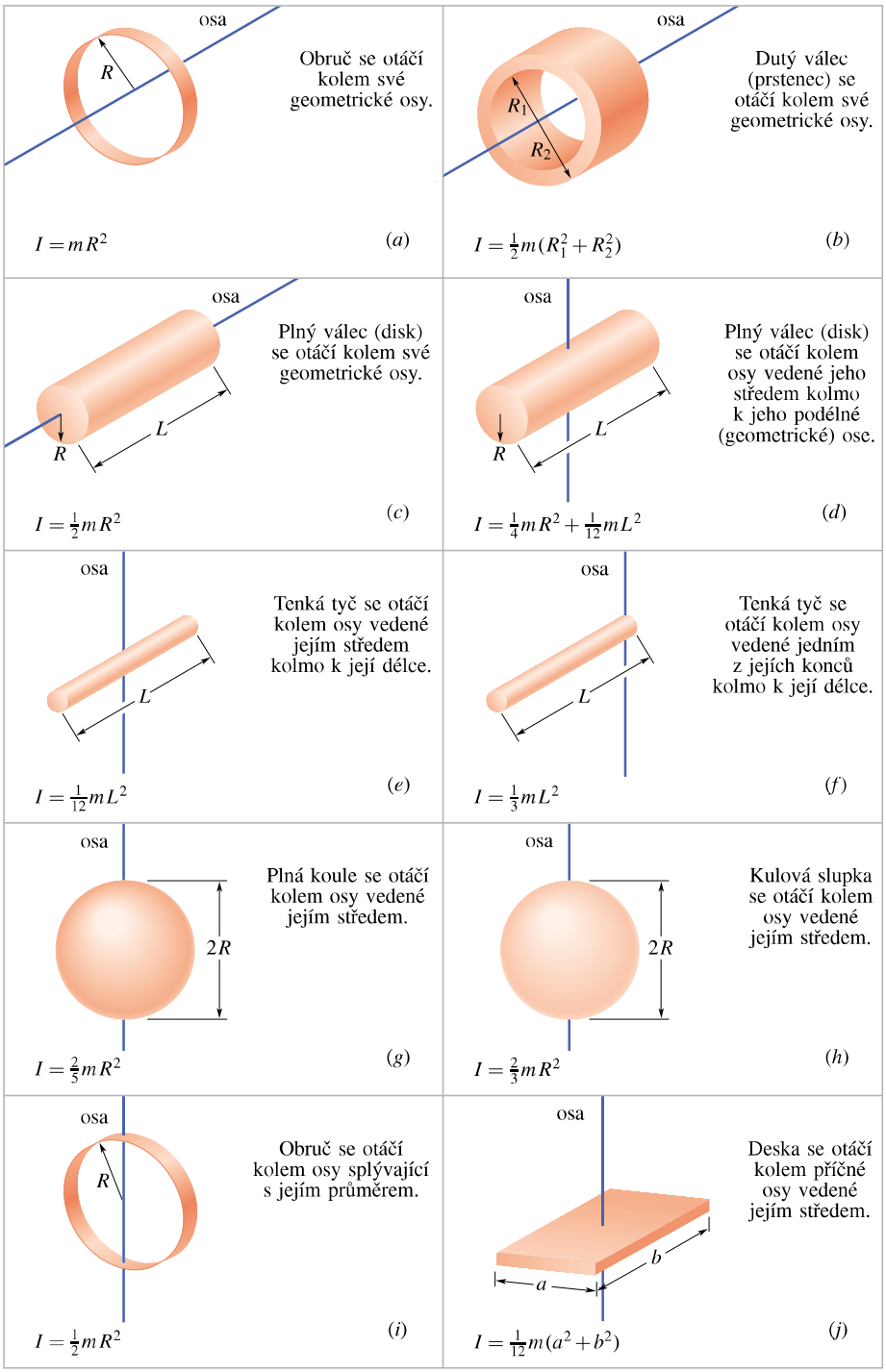
Při jeho odvození jsme použili vztah $v = \omega r$. Úhlovou rychlost ω v rov. (11.25) musíme proto zadávat v obloukové míře.

Všimněme si podobnosti rov. (11.25) pro kinetickou energii otáčejícího se tuhého tělesa se vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv_T^2$, který vyjadřuje jeho kinetickou energii při posuvném pohybu. V obou vztazích se vyskytuje faktor $\frac{1}{2}$. Hmotnost m ve vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu představuje „míru setrvačnosti" tělesa. V případě otáčení se ve výrazu pro E_k objevuje moment setrvačnosti I, který tak lze chápat jako „míru setrvačnosti" tělesa při jeho otáčení. V obou vztazích vystupuje druhá mocnina příslušné rychlosti (rychlosti posuvného, resp. úhlové rychlosti otáčivého pohybu). Oba výrazy vyjadřují stejný typ energie, energii kinetickou. Liší se pouze způsobem zápisu podle typu pohybu tělesa.

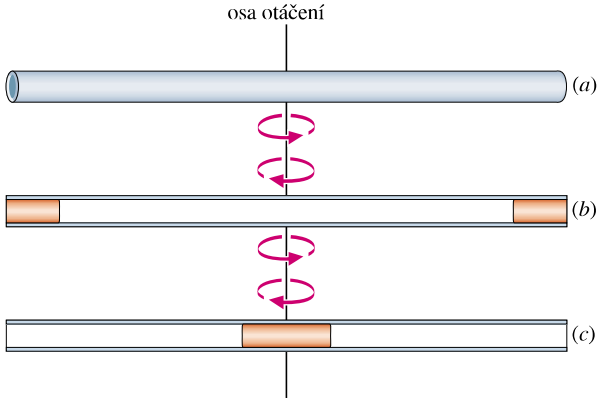
Všimli jsme si již, že moment setrvačnosti tuhého tělesa závisí nejen na jeho hmotnosti, ale i jejím rozložení vzhledem k ose otáčení. Obr. 11.11 názorně ukazuje, jak můžeme rozdíly momentu setrvačnosti pocítit takřka „na vlastní kůži". Na obr. 11.11a jsou dvě duté tyče, které na pohled vypadají úplně stejně. Jejich vnější rozměry i hmotnosti jsou shodné a obě tyče jsou v rovnováze, jsou-li podepřeny uprostřed. Žádný rozdíl nezpozorujeme ani tehdy, uchopíme-li je postupně do ruky a uvedeme do posuvného pohybu.

Zcela odlišné pocity však zaznamenáme, zkusíme-li tyče rychle roztáčet. S jednou z nich to půjde velmi snadno, druhá se „bude bránit". Obr. 11.11b, c odhalují podstatu

Tabulka 11.2 Momenty setrvačnosti některých homogenních těles

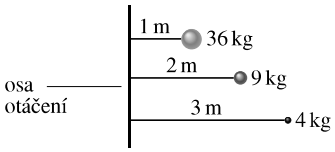


tohoto rozdílu. „Poslušná“ tyč má uvnitř dvě závaží, která jsou umístěna blízko jejího středu, zatímco druhá tyč má stejná závaží připevněna na koncích. Hmotnosti tyčí jsou sice stejné, ale jejich hmota je *jinak rozložena* vzhledem k vyznačené ose otáčení. Proto jsou výrazně odlišné i hodnoty jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



Obr. 11.11 (a) Vnější vzhled tyčí, jejichž vnitřek je znázorněn na obrázcích (b) a (c), je totožný. Tyče se budou jevit stejné do chvíle, kdy se pokusíme je roztočit kolem osy procházející jejich středem. Tyč (c) se roztáčí snadno, tyč (b) „odolává“. I když mají obě tyče stejnou hmotnost, jsou jejich momenty setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení výrazně odlišné vlivem různého rozložení jejich hmoty. Moment setrvačnosti tyče (b) je podstatně větší než moment setrvačnosti tyče (c).

KONTROLA 4: Částice na obrázku obíhají kolem svislé osy v daných vzdálenostech. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



11.7 VÝPOČET MOMENTU SETRVAČNOSTI

Je-li tuhé těleso složeno z jednotlivých částic, lze jeho moment setrvačnosti snadno určit pomocí součtu (11.24). Je-li však hmota tělesa rozložena spojitě, je třeba nahradit tento součet integrálem. Moment setrvačnosti je pak definován jako

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m. \qquad (11.26)$$

V úlohách této kapitoly se budeme zabývat výpočty I pro oba typy těles. Obecně lze říci, že moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané ose otáčení závisí (1) na jeho tvaru, (2) na vzdálenosti jeho těžiště od osy otáčení a (3) na jeho orientaci vzhledem k ose otáčení.

Tab. 11.2 shrnuje vztahy pro výpočet momentu setrvačnosti některých běžných homogenních těles vzhledem k různým osám otáčení. Všimněme si, jak rozložení hmoty vzhledem k ose otáčení ovlivní hodnotu I. Tak například u tyče na obrázku (f) je větší část hmoty dále od osy otáčení než u stejně dlouhé tyče na obrázku (e). Tyče mají stejnou hmotnost i délku, jejich momenty setrvačnosti jsou však rozdílné vlivem odlišné volby osy otáčení. Moment setrvačnosti tyče v situaci (f) je větší než v případě (e).

Steinerova věta

Známe-li moment setrvačnosti I_T tělesa vzhledem k jisté ose jdoucí jeho těžištěm, můžeme snadno vypočítat jeho moment setrvačnosti vzhledem ke každé další ose téhož směru. Vztah mezi oběma momenty setrvačnosti se nazývá **Steinerova věta**. Platí

$$I = I_T + mh^2, \qquad (11.27)$$

kde m je hmotnost tělesa a h je vzdálenost uvažovaných rovnoběžných os. Slovně lze předchozí vztah vyjádřit takto:

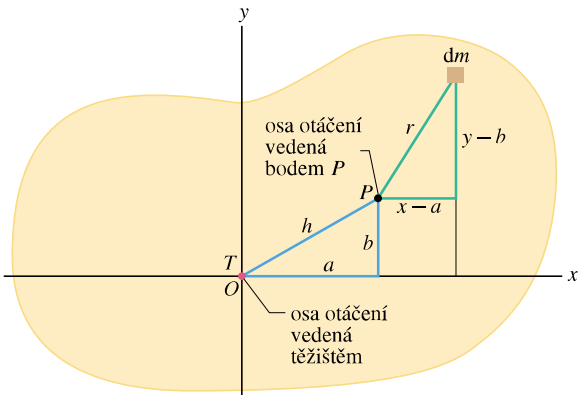
Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o, kde h je vzdálenost os o, o'.

Důkaz Steinerovy věty

Uvažujme těleso obecného tvaru, které se může otáčet kolem obecně zvolené pevné osy. Těžiště tělesa označme T a umístěme v něm počátek soustavy souřadnic ($O = T$). Řez tělesa rovinou kolmou k ose otáčení a procházející těžištěm tělesa je znázorněn obr. 11.12. Průsečík osy otáčení s rovinou řezu označme P a jeho souřadnice a a b.

Uvažujme objemový element tělesa v bodě o souřadnicích x a y a označme jeho hmotnost $\mathrm{d}m$. Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P můžeme vyjádřit pomocí rov. (11.26) takto:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] \, \mathrm{d}m.$$



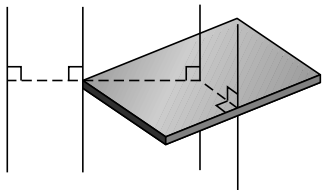
Obr. 11.12 Řez tuhým tělesem s těžištěm T v počátku O soustavy souřadnic. Steinerova věta (11.27) umožňuje vyjádřit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P jako součet momentu setrvačnosti vzhledem k ose téhož směru, procházející však těžištěm T, a výrazu mh^2, kde h je vzdálenost obou os. Osy jsou kolmé k rovině nákresu.

Tento integrál lze přepsat ve tvaru

$$I = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m - 2a \int x\,\mathrm{d}m$$
$$-2b \int y\,\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2)\,\mathrm{d}m. \qquad (11.28)$$

Uvědomíme-li si definiční vztah pro polohu těžiště tělesa (rov. (9.9)), ihned vidíme, že druhý a třetí integrál v rov. (11.28) představují, až na násobení konstantou, x-ovou a y-ovou souřadnici těžiště. Jsou tedy nulové. Součet $x^2 + y^2$ můžeme označit jako R^2, kde symbolem R rozumíme vzdálenost elementu $\mathrm{d}m$ od bodu O. Je zřejmé, že první integrál má význam momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm, I_T. Poslední člen v rov. (11.28) má hodnotu je mh^2 (obr. 11.12), kde m je hmotnost tělesa. Získali jsme rov. (11.27), představující matematický zápis Steinerovy věty.

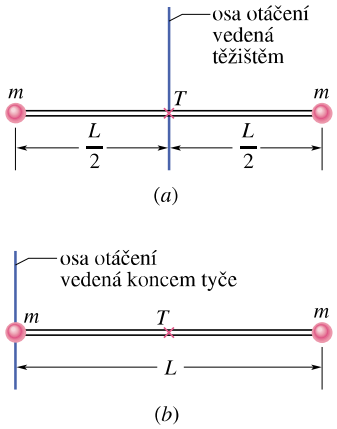
KONTROLA 5: Těleso na obrázku (například kniha) se může otáčet kolem čtyř různých os. Všechny jsou kolmé k vodorovné základně tělesa. Seřaďte je sestupně podle odpovídajících hodnot momentu setrvačnosti tělesa.



(1) (2) (3) (4)

PŘÍKLAD 11.7

Tuhé těleso na obr. 11.13 je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí délky L, jejíž hmotnost je zanedbatelná.



Obr. 11.13 Příklad 11.7. Tuhé těleso je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí zanedbatelné hmotnosti.

(a) Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím středem (obr. 11.13a).

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.24) plyne

$$I = \sum m_i r_i^2 = m(\tfrac{1}{2}L)^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené koncem tyče rovnoběžně s osou zadanou v úloze (a) (obr. 11.13b).

ŘEŠENÍ: Úlohu řešíme pomocí Steinerovy věty (11.27). Moment setrvačnosti I_T jsme určili v části (a). Víme, že vzdálenost h obou rovnoběžných os je polovinou délky tyče. Z rov. (11.27) tedy dostáváme

$$I = I_T + mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 =$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek můžeme snadno ověřit přímým výpočtem podle rov. (11.24):

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(0)^2 + (m)(L)^2 =$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.8

Na obr. 11.14 je znázorněna tenká homogenní tyč o hmotnosti m a délce L.

(a) Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím hmotným středem.

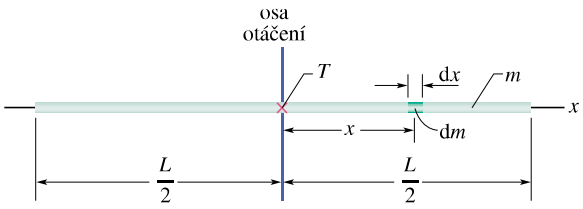
ŘEŠENÍ: Zvolme osu x rovnoběžně s tyčí tak, aby její počátek ležel v těžišti tyče. Označme $\mathrm{d}x$ element délky tyče, umístěný v bodě o souřadnici x. Hmotnost úseku tyče jednotkové délky, tzv. lineární hustota, je m/L, element $\mathrm{d}x$ má hmotnost

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x.$$

Podle rov. (11.26) je pak

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{m}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] =$$
$$= \tfrac{1}{12}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek se shoduje s údajem v tab. 11.2e.



Obr. 11.14 Příklad 11.8. Homogenní tyč délky L a hmotnosti m.

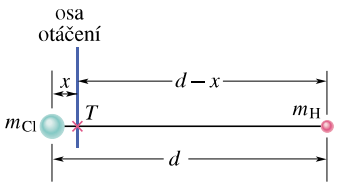
(b) Určete moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím koncovým bodem.

ŘEŠENÍ: Použijeme výsledek části (a) a Steinerovu větu (11.27). Dostaneme, ve shodě s tab. 11.2f,

$$I = I_T + mh^2 =$$
$$= \tfrac{1}{12}mL^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.9

Molekula chlorovodíku se skládá z atomu vodíku o hmotnosti $m_\mathrm{H} = 1{,}01\,\mathrm{u}$ a atomu chloru o hmotnosti $m_\mathrm{Cl} = 35{,}0\,\mathrm{u}$. Vzdálenost středů atomů je $d = 1{,}27\cdot10^{-10}\,\mathrm{m} = 127\,\mathrm{pm}$ (obr. 11.15). Vypočtěte polohu těžiště molekuly chlorovodíku vzhledem k ose vedené jejím těžištěm kolmo ke spojnici atomů.



Obr. 11.15 Příklad 11.9. Schematicky znázorněná molekula chlorovodíku. Osa otáčení prochází jejím těžištěm a je kolmá je spojnici atomů.

ŘEŠENÍ: Označme x vzdálenost atomu chloru od těžiště molekuly. Z obr. 11.15 a rov. (9.3) dostáváme

$$0 = \frac{-m_\mathrm{Cl}x + m_\mathrm{H}(d-x)}{m_\mathrm{Cl} + m_\mathrm{H}},$$

tj.

$$m_\mathrm{Cl}x = m_\mathrm{H}(d-x).$$

Odtud

$$x = d\,\frac{m_\mathrm{H}}{m_\mathrm{Cl} + m_\mathrm{H}}. \qquad (11.29)$$

Moment setrvačnosti molekuly vzhledem k ose jdoucí jejím těžištěm je (viz rov. (11.24))

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_\mathrm{H}(d-x)^2 + m_\mathrm{Cl}x^2.$$

Dosazením za x ze vztahu (11.29) a po úpravě dostaneme

$$I = d^2\frac{m_\mathrm{H}m_\mathrm{Cl}}{m_\mathrm{H}+m_\mathrm{Cl}} = (127\,\mathrm{pm})^2\frac{(1{,}01\,\mathrm{u})(35{,}0\,\mathrm{u})}{(1{,}01\,\mathrm{u}+35{,}0\,\mathrm{u})} =$$
$$= 15{,}800\,\mathrm{u\cdot pm^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Použité jednotky jsou pro vyjádření momentu setrvačnosti molekul přiměřené. Ještě vhodnější je délková jednotka angström ($1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$), pomocí níž bude $I = 1{,}58\,\mathrm{u\cdot Å^2}$.

PŘÍKLAD 11.10

Pomocí moderní techniky je možné zkonstruovat setrvačník, který může sloužit jako pohon automobilu. Setrvačník se nejprve roztočí motorem tak, aby kinetická energie jeho otáčivého pohybu byla dostatečná. Takto „uložená“ energie je pak postupně předávána automobilu prostřednictvím převodové soustavy. Představme si takový setrvačník jako plný válec o hmotnosti $m = 75\,\mathrm{kg}$ a poloměru $R = 25\,\mathrm{cm}$. Zjistěte, jak velká energie je v něm „uložena“, je-li roztočen na úhlovou rychlost 85 000 ot/min.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti válcového setrvačníku vyjádříme podle tab. 11.2c:

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(75\,\mathrm{kg})(0{,}25\,\mathrm{m})^2 = 2{,}34\,\mathrm{kg\cdot m^2}.$$

Úhlová rychlost setrvačníku je

$$\omega = (85\,000\,\mathrm{ot/min})(2\pi\,\mathrm{rad/ot})(1\,\mathrm{min}/60\,\mathrm{s}) =$$
$$= 8\,900\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

Z rov. (11.25) získáme jeho kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}34\,\mathrm{kg\cdot m^2})(8\,900\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2 =$$
$$= 9{,}3\cdot10^7\,\mathrm{J} = 26\,\mathrm{kW\cdot h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Účinnost takového pohonu nebude samozřejmě stoprocentní. Vezmeme-li však v úvahu její rozumný odhad, zjistíme,

že setrvačník by dokázal dopravit automobil do vzdálenosti 320 km.

11.8 MOMENT SÍLY

Přemýšleli jste někdy nad tím, proč je klika umístěna na protilehlé straně závěsu dveří? K otevření těžkých dveří je potřeba značné síly. Samotná síla by ovšem k otevření dveří nemusela stačit, kdybychom nevhodně zvolili její směr nebo působiště. Kdyby síla působila v některém bodě poblíž závěsu dveří nebo kdyby nebyla ke dveřím kolmá, musela by být větší než v případě, že by její směr a působiště byly vybrány optimálně.

Na obr. 11.16a vidíme řez tělesem, které se může volně otáčet kolem pevné osy kolmé k rovině nákresu. Na těleso působí v bodě P síla $\boldsymbol{F}$. Rovina řezu je vedena bodem P, její průsečík s osou otáčení je označen O. Polohový vektor bodu P vzhledem k O označíme $\boldsymbol{r}$. Vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ svírají úhel φ. Pro jednoduchost se omezíme pouze na síly ležící v některé z rovin kolmých k ose otáčení. Průmět každé takové síly do směru osy otáčení je nulový. Ve shodě s tímto předpokladem leží tedy síla $\boldsymbol{F}$ v rovině obrázku.

Abychom zjistili otáčivý účinek síly $\boldsymbol{F}$, rozložíme ji do dvou průmětů podle obr. 11.16b. První z nich určuje takzvanou *radiální složku* F_r síly $\boldsymbol{F}$. Je rovnoběžný s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ a nemá vliv na otáčivý pohyb tělesa. Působí totiž podél spojnice bodů P a O. (Jistě si snadno představíme, nebo i vyzkoušíme, co se stane, budeme-li tahat za kliku ve směru ležícím v rovině dveří. Pravděpodobně dveřmi příliš nepohneme.) Druhý průmět síly $\boldsymbol{F}$, kolmý k vektoru $\boldsymbol{r}$, definuje její *tečnou složku* $F_t = F \sin\varphi$. Právě ona *způsobí* otočení dveří. (Můžeme si vyzkoušet, že silou namířenou kolmo k rovině dveří jimi celkem snadno otočíme.)

„Schopnost“ síly $\boldsymbol{F}$ otáčet tělesem závisí však nejen na velikosti její tečné složky F_t, ale také na vzdálenosti jejího působiště od bodu O. Veličina, která bere v úvahu oba tyto vlivy, se nazývá **moment síly** $\boldsymbol{M}$ vzhledem k ose otáčení. Jeho velikost definujeme vztahem

$$M = (r)(F \sin\varphi). \tag{11.30}$$

Existují dva ekvivalentní způsoby vyjádření momentu síly:

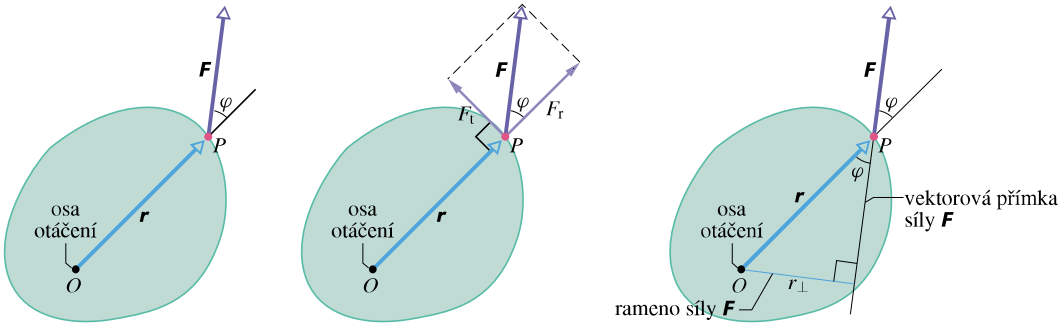
$$M = (r)(F \sin\varphi) = r F_t \tag{11.31}$$

nebo

$$M = (r \sin\varphi)(F) = r_\perp F, \tag{11.32}$$

$r_\perp$ je kolmá vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$. Je to přímka, v níž vektor síly leží (obr. 11.16c). Veličinu $r_\perp$ nazýváme **rameno síly** $\boldsymbol{F}$. Z obr. 11.16b je zřejmé, že r (tedy velikost vektoru $\boldsymbol{r}$) je současně ramenem tečného průmětu $\boldsymbol{F}_t$ síly $\boldsymbol{F}$.*

* Uvědomme si dobře souvislost definice momentu síly *vzhledem k ose otáčení* s konstrukcí na obr. 11.16. Bod O je průsečíkem roviny řezu vedené působištěm P síly $\boldsymbol{F}$ kolmo k ose otáčení. Dejme tomu, že na těleso působí ještě jiná síla $\boldsymbol{F}'$, jejíž působiště P' však *neleží* v rovině vedené kolmo k ose otáčení bodem P. Abychom určili její moment vzhledem k ose, musíme opět najít průsečík osy s příslušnou rovinou řezu. Dostaneme tak bod O'. Taková konstrukce má ovšem smysl jen tehdy, je-li osa otáčení pevná. Také definice momentu síly vzhledem k ose otáčení je na tento předpoklad vázána. V obecných situacích je nutné definovat moment síly obecněji a vztahovat jej nikoli k pevné přímce (ose), nýbrž k pevnému bodu. Nakonec si ještě povšimněme, že v případě otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, na které působí síly ležící výhradně v rovinách kolmých k ose otáčení, jsou vektorové přímky těchto sil kolmé k ose a v obecném případě jsou s ní mimoběžné. Ramenem každé ze sil vzhledem k ose otáčení je pak vzdálenost dvou mimoběžek, vektorové přímky dotyčné síly a osy otáčení.



(a) (b) (c)

Obr. 11.16 (a) Síla $\boldsymbol{F}$ působí na tuhé těleso v bodě P. Těleso se může otáčet kolem osy vedené bodem O kolmo k rovině obrázku. (b) Moment této síly vzhledem k této ose má velikost $(r)(F \sin\varphi)$, kterou lze také vyjádřit ve tvaru $r F_t$, kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$. (c) Jiný možný zápis velikosti momentu síly $\boldsymbol{F}$ má tvar $r_\perp F$, kde $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení.

Kroucení se též nazývá **torze** (z latiny). Přibližně lze říci, že moment síly vyjadřuje kroutivý (torzní) účinek síly.

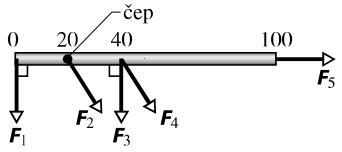
Shrňme nyní dosavadní poznatky. Působíme-li na těleso, třeba na šroubovák nebo klíč, určitou silou ve snaze tělesem *otočit*, musí být moment této síly vzhledem k ose otáčení nenulový. Někdy říkáme, že na těleso *působíme určitým momentem*. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je N·m.* Moment M považujeme za kladný, roztáčí-li těleso proti směru otáčení hodinových ručiček, tj. ve směru rostoucí úhlové polohy θ. (Taková situace je znázorněna na obr. 11.16.) Roztáčí-li se těleso ve směru otáčení hodinových ručiček, přisuzujeme momentu síly záporné znaménko.

Definici momentu síly rov. (11.30) lze zapsat i ve vektorovém tvaru, konkrétně pomocí *vektorového součinu*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (11.33)$$

Moment síly je tedy vektorovou veličinou. Jeho směr je podle definice (11.33) kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Jeho velikost je dána vztahy (11.30), (11.31) a (11.32) a orientaci určuje pravidlo pravé ruky. Vztah (11.33) budeme používat v kap. 12.

KONTROLA 6: Na obrázku je v nadhledu znázorněn tyčový metr, který se může otáčet kolem čepu umístěného u značky 20 (20 cm). Všechny síly vyznačené v obrázku jsou vodorovné a mají stejnou velikost. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu vzhledem k ose otáčení.



11.9 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

Obr. 11.17 znázorňuje jednoduchý případ otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče délky r, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Síla $\boldsymbol{F}$ uvádí částici do pohybu po kružnici kolem osy otáčení. Zrychlení částice je dáno druhým Newtonovým zákonem:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T},$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tahová síla tyče, která pro jednoduchost není v obrázku vyznačena. (Její moment vzhledem k ose otáčení je nulový). Pro tečnou složku zrychlení částice tedy platí

$$ma_t = F_t.$$

Moment síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici lze podle rov. (11.31) vyjádřit jako

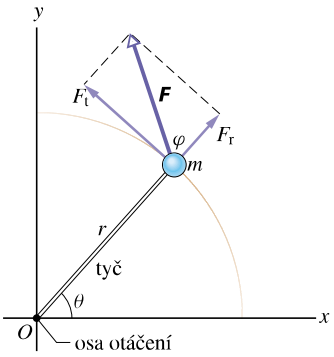
$$M = F_t r = ma_t r$$

a pomocí rov. (11.20) ($a_t = \varepsilon r$) přepsat do tvaru

$$M = m(\varepsilon r)r = (mr^2)\varepsilon. \qquad (11.34)$$

Výraz mr^2 představuje moment setrvačnosti částice vzhledem k ose otáčení (rov. (11.24)). Rov. (11.34) lze tedy zapsat velmi jednoduše:

$$I\varepsilon = M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}). \qquad (11.35)$$



Obr. 11.17 Jednoduché tuhé těleso se skládá z částice o hmotnosti m připevněné na tyči o délce r a zanedbatelné hmotnosti. Působením síly $\boldsymbol{F}$ se těleso roztáčí kolem osy vedené bodem O.

Působí-li na těleso více sil, je třeba vztah (11.35) zobecnit:

$$I\varepsilon = \sum M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}), \qquad (11.36)$$

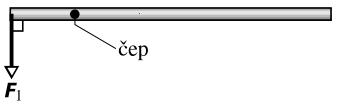
kde $\sum M$ je součet momentů všech sil působících na částici (**výsledný silový moment**). Rov. (11.36) je analogická druhému Newtonovu zákonu při použití úhlových veličin.

Vztah (11.35) a jeho obecnější verzi (11.36) jsme odvodili pro zcela speciální případ tělesa — jedinou částici obíhající kolem pevné osy. Zamysleme se nad tím, zda jej dokážeme zobecnit pro libovolné tuhé těleso, které se otáčí kolem pevné osy. Takové zobecnění je skutečně možné. Tuhé těleso není vlastně nic jiného než soustava částic,

* N·m je také jednotka práce. Moment síly a práce jsou ovšem zcela rozdílné veličiny, které nesmíme zaměňovat. Práce se často vyjadřuje také v joulech (1 J = 1 N·m), zatímco pro moment síly jednotku J nepoužíváme nikdy.

které obíhají kolem osy otáčení se stejným úhlovým zrychlením ε. Levá strana rov. (11.35) a (11.36) je tedy pro tuhé těleso vyjádřena stejně jako pro částici, s tím rozdílem, že symbolem I je třeba rozumět moment setrvačnosti *tělesa* vzhledem k ose otáčení. Jistý problém vzniká při interpretaci pravé strany těchto vztahů. Na každou částici tělesa mohou totiž určitými silami působit jak okolní objekty, tak i jeho ostatní částice. Uvědomíme-li si však, že pro síly vzájemného působení částic uvnitř tělesa platí třetí Newtonův zákon, a předpokládáme-li celkem přirozeně, že interakční síly mají pro každou dvojici částic směr jejich spojnice, zjistíme, že výsledný moment sil působících uvnitř tělesa je nulový. Zkušenost tento závěr potvrzuje: žádné těleso se ještě neroztočilo vlivem vnitřních sil, tj. samo od sebe. Předchozí úvahu můžeme uzavřít konstatováním, že platnost rov. (11.36) je mnohem obecnější než pro případ jednotlivé částice. Platí pro libovolné tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy, jestliže I je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a $\sum M$ je výsledný moment *vnějších sil* působících na těleso, vztažený k této ose. Takto zobecněný vztah (11.36) představuje pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy. Nazýváme ho **věta o momentu hybnosti** (soustavy částic) nebo také **druhá impulzová věta**.

KONTROLA 7: Na obrázku je v nadhledu zobrazen tyčový metr, který se může otáčet kolem vyznačeného čepu, umístěného vlevo od středu tyče. Na tyč působí dvě vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ je však v obrázku zakreslena. Síla $\boldsymbol{F}_2$ je k tyči kolmá a působí na její pravý konec. Předpokládejte, že se tyč neotáčí a určete (a) orientaci síly $\boldsymbol{F}_2$. (b) Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}_2$ větší, stejně velká, nebo menší než síla $\boldsymbol{F}_1$.

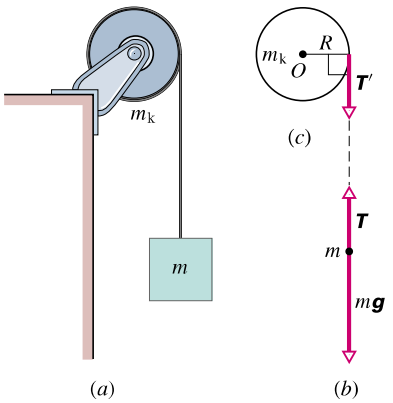


PŘÍKLAD 11.11

Obr. 11.18a znázorňuje homogenní kotouč o hmotnosti $m_k = 2{,}5\,\text{kg}$ a poloměru $R = 20\,\text{cm}$, který je připevněn na pevnou vodorovnou osu. Závaží o hmotnosti $m = 1{,}2\,\text{kg}$ visí na vlákně zanedbatelné hmotnosti navinutém na obvodu kotouče. Závaží padá svisle dolů a kotouč se roztáčí. Vypočtěte zrychlení závaží, úhlové zrychlení kotouče a tahovou sílu vlákna. Předpokládáme, že vlákno po obvodu kotouče neklouže a zanedbáváme tření v ose.

ŘEŠENÍ: Na obr. 11.18b jsou znázorněny síly působící na závaží.

Závaží se urychluje směrem dolů, takže velikost tíhové síly mg je větší než velikost tahové síly vlákna T. Podle



Obr. 11.18 Příklady 11.11 a 11.13. (a) Padající závaží roztáčí kotouč. (b) Silový diagram závaží. (c) Silový diagram kotouče.

druhého Newtonova pohybového zákona je

$$ma = T - mg. \tag{11.37}$$

Na obr. 11.18c jsou znázorněny síly působící na kotouč. Vlivem momentu síly $\boldsymbol{T}'$ se kotouč roztáčí po směru otáčení hodinových ručiček. Tento moment je tedy záporný a je roven $-T'R$. Ze vztahu (c) v tab. 11.2 víme, že moment setrvačnosti kotouče je $I = \frac{1}{2}m_k R^2$. Na kotouč působí také tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ a svislá síla $\boldsymbol{N}$, kterou na kotouč působí pevná osa. Vektorové přímky obou těchto sil procházejí osou otáčení kotouče a jejich momenty vzhledem k ní jsou proto nulové. Použitím druhé impulzové věty ve tvaru $I\varepsilon = M$ dostaneme

$$\tfrac{1}{2}m_k R^2\varepsilon = -T'R.$$

Protože vlákno po obvodu kotouče neprokluzuje, je zrychlení a závaží shodné s tečným zrychlením a_t bodu na obvodu kotouče. Použitím rov. (11.20) ($\varepsilon = a/R$) můžeme poslední vztah zjednodušit do tvaru

$$-\tfrac{1}{2}m_k a = T'. \tag{11.38}$$

Z rov. (11.37) a (11.38) a s uvážením, že $T' = T$ (velikosti sil $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou stejné), nakonec dostaneme

$$a = -g\frac{2m}{m_k + 2m} = -(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})\frac{2(1{,}2\,\text{kg})}{(2{,}5\,\text{kg}) + 2(1{,}2\,\text{kg})} =$$
$$= -4{,}8\,\text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

K určení velikosti síly T použijeme rov. (11.38):

$$T = -\tfrac{1}{2}m_k a = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\,\text{kg})(-4{,}8\,\text{m·s}^{-2}) =$$
$$= 6{,}0\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

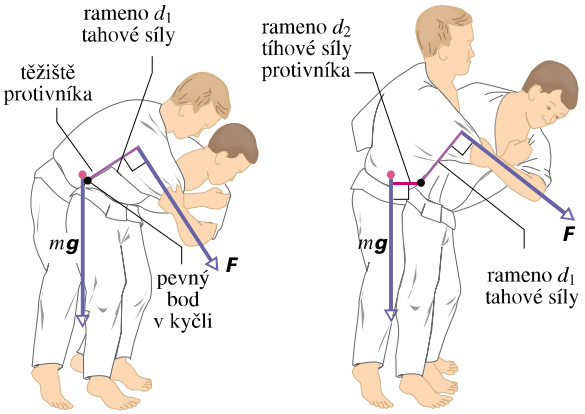
Podle očekávání je zrychlení padajícího závaží menší než g a tahová síla vlákna (6,0 N) je menší než tíhová síla působící na závaží ($mg = 11{,}8$ N). Všimněme si, že zrychlení tělesa a tahová síla vlákna nezávisí na poloměru kotouče, pouze na jeho hmotnosti. Pro kontrolu ještě dosaďme $m_k = 0$ (kotouč zanedbatelné hmotnosti). Dostáváme $a = -g$ a $T = 0$. Ani tento výsledek není nečekaný: závaží padá volným pádem a táhne s sebou nenapjaté vlákno.

Z rov. (11.20) vypočteme ještě úhlové zrychlení kotouče

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{(-4{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}20\ \mathrm{m})} = -24\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.12

Zápasník v judu se chystá položit svého osmdesátikilového soka na žíněnku. Uchopí jej za oděv na rameni a snaží se jej otočit kolem svého těla. Při tom na něj působí silou $\boldsymbol{F}$. Osou otáčení je spojnice ramenního a kyčelního kloubu zápasníka. Rameno působící síly vzhledem k této ose má v běžných situacích velikost $d_1 = 30$ cm. Předpokládejme, že zápasník udělí soupeři úhlové zrychlení $-6{,}0$ rad/s^2, roztáčí jej tedy ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 11.19). Moment setrvačnosti soupeře vzhledem k ose otáčení je zhruba 15 kg·m^2.



Obr. 11.19 Příklad 11.12. (a) Správně a (b) nesprávně provedený chvat v judu.

(a) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}$ potřebné k tomuto chvatu za předpokladu, že judista těsně před jeho provedením ohne soupeře tak, aby posunul jeho těžiště nad svůj kyčelní kloub (obr. 11.19a).

ŘEŠENÍ: Leží-li těžiště soupeře na ose rotace vedené kyčelním kloubem judisty, je moment tíhové síly působící na soupeře vzhledem k ose otáčení nulový. Jediným nenulovým momentem, který má vliv na pohyb soupeře, je moment síly $\boldsymbol{F}$. Tento moment je záporný. Pomocí rov. (11.31) a (11.35) jej zapíšeme ve tvaru

$$M = -d_1 F = I\varepsilon,$$

odkud

$$F = \frac{-I\varepsilon}{d_1} = \frac{-(15\ \mathrm{kg\cdot m^2})(-6{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}})}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = 300\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že soupeř zůstane vzpřímen, takže rameno tíhové síly vzhledem k ose otáčení má velikost $d_2 = 0{,}12$ m. Jak velká musí být síla $\boldsymbol{F}$ nyní?

ŘEŠENÍ: V této situaci je moment tíhové síly působící na soupeře nenulový. Jeho směr je kladný, tedy opačný než směr momentu síly $\boldsymbol{F}$. Z rov. (11.31) a (11.36) dostáváme

$$\sum M = -d_1 F + d_2 mg = I\varepsilon,$$

a tedy

$$F = -\frac{I\varepsilon}{d_1} + \frac{d_2 mg}{d_1}.$$

V části (a) této úlohy jsme již zjistili, že první člen na pravé straně poslední rovnice činí 300 N. Dosazením této hodnoty i dalších číselných údajů do získaného vztahu pro F nakonec dostáváme

$$F = (300\ \mathrm{N}) + \frac{(0{,}12\ \mathrm{m})(80\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = 613{,}6\ \mathrm{N} \doteq 610\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledků (a) a (b) vidíme, jak důležitá je příprava zápasníka na provedení chvatu. Pokud se mu totiž nepodaří uskutečnit přípravnou fázi tak, jak je popsáno v části (a), tj. ohnout soupeře a podsunout svou kyčel pod jeho těžiště, potřebuje k provedení chvatu mnohem větší sílu. Dobrý judista toto pravidlo zná a používá. (Rozbor fyzikální problematiky juda a aikido mohou zájemci najít v červnovém čísle časopisu Scientific American z r. 1980.)

11.10 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Připomeňme si znovu situaci na obr. 11.17: síla $\boldsymbol{F}$ roztáčí tuhé těleso tvořené jedinou částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Pokus je uspořádán tak, že se mění pouze kinetická energie tělesa. Můžeme proto použít vztah mezi prací a změnou kinetické energie podle rov. (7.4)

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W. \qquad (11.39)$$

Použitím vztahu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a (11.16) ($v = \omega r$) můžeme přepsat rov. (11.39) do tvaru

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \qquad (11.40)$$

Moment setrvačnosti částice je $I = mr^2$ (rov. (11.24)). Jeho dosazením do rov. (11.40) dostaneme

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \qquad (11.41)$$

Vidíme, že v jednoduché situaci znázorněné na na obr. 11.17 je změna kinetické energie spojené s otáčivým pohybem tělesa dána prací síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.41) pro otáčivý pohyb je tedy obdobou vztahu mezi prací a změnou kinetické energie, získaného již dříve pro pohyb posuvný. Odvodili jsme ji sice pro případ jediné částice, platí však pro libovolné tuhé těleso rotující kolem pevné osy.

Pro situaci na obr. 11.17 se nyní pokusíme vyjádřit práci W pomocí momentu síly $\boldsymbol{F}$. Při elementárním otočení tělesa o úhel $\mathrm{d}\theta$ se částice posune podél své kruhové trajektorie o vzdálenost $\mathrm{d}s$. Práci síly $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí vyjádříme pomocí rov. (7.11):

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = F_t\,\mathrm{d}s = F_t r\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.42)$$

(Připomeňme, že F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$.) Součin $F_t r$ představuje podle rov. (11.31) moment M síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.42) tak získává tvar

$$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.43)$$

Práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při celkovém otočení tělesa z úhlové polohy θ_i do polohy θ_f je pak dána integrálem

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.44)$$

Tento vztah je „rotační“ obdobou rov. (7.27)

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,\mathrm{d}x.$$

Odvodili jsme jej opět pro jedinou částici, platí však pro libovolné tuhé těleso, podobně jako vztah mezi prací a kinetickou energií.

Z rov. (11.43) můžeme zjistit, jaký je výkon síly působící na těleso při rotačním pohybu:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \qquad (11.45)$$

Tento výsledek, získaný pro otáčivý pohyb, je obdobou vztahu $P = Fv$ (rov. (7.49)), platného pro pohyb posuvný.

Tab. 11.3 shrnuje základní vztahy, které jsme v této kapitole získali pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy a pro porovnání uvádí i odpovídající rovnice pro pohyb posuvný.

PŘÍKLAD 11.13

(a) O jaký úhel se otočí kotouč na obr. 11.18 za 2,5 s, rozbíhá-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Dosazením $\omega_0 = 0$ do rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) a použitím hodnoty ε, kterou jsme získali v př. 11.11, vyjde

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s})^2 = \\ = -75\,\mathrm{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je úhlová rychlost kotouče v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost vypočteme z rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$). Dosadíme hodnotu úhlového zrychlení ε, vypočtenou v př. 11.11 a nulovou hodnotu počáteční úhlové rychlosti ($\omega_0 = 0$). Dostáváme

$$\omega = 0 + (-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s}) = \\ = -60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak velkou kinetickou energii má kotouč v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

Tabulka 11.3 **Posuvný a otáčivý pohyb**

POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
poloha	x	úhlová poloha	θ
rychlost	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	úhlová rychlost	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
zrychlení	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I
věta o hybnosti	$ma = F$	věta o momentu hybnosti	$I\varepsilon = M$
práce	$W = \int F\mathrm{d}x$	práce	$W = \int M\mathrm{d}\theta$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
výkon	$P = Fv$	výkon	$P = M\omega$
vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$	vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$

ŘEŠENÍ: Kinetická energie rotujícího kotouče je dána vztahem (11.25), tj. $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho geometrické ose, která je v našem případě i osou otáčení, má hodnotu $I = \frac{1}{2} mR^2$. Úhlovou rychlost ω v okamžiku $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ jsme zjistili v části (b). Dosadíme číselné údaje:

$$E_k = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} mR^2)\omega^2 = \\ = \tfrac{1}{4}(2{,}5\,\mathrm{kg})(0{,}20\,\mathrm{m})^2(-60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2 = \\ = 90\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jiný způsob výpočtu kinetické energie nabízí vztah mezi prací a změnou kinetické energie. Určíme práci W, kterou vykoná tahová síla vlákna, které roztáčí kotouč. Ostatní síly působící na kotouč, tj. tíhová síla a tlaková síla v jeho ose, práci nekonají, jejich momenty vzhledem k ose otáčení jsou nulové. Při výpočtu práce tahové síly vyjdeme z rov. (11.44) a využijeme skutečnosti, že velikost tahové síly T i její moment M vzhledem k ose otáčení jsou konstantní. Dostáváme

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,\mathrm{d}\theta = M\int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathrm{d}\theta = M(\theta_f - \theta_i).$$

Pro moment tahové síly T platí $M = -TR$. Dosadíme hodnoty $T = -6{,}0\,\mathrm{N}$ (př. 11.11) a $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Rozdíl $\theta_f - \theta_i$ představuje úhlové otočení kotouče od počátku pohybu do okamžiku $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$. Jeho hodnotu jsme již určili v části (a). S uvážením všech předchozích skutečností můžeme psát

$$W = M(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) = \\ = -(6{,}0\,\mathrm{N})(0{,}20\,\mathrm{m})(-75\,\mathrm{rad}) = \\ = 90\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože se kotouč roztáčí z klidu, je jeho počáteční kinetická energie $E_{k,i}$ nulová. V souladu s rov. (11.41) pak vypočtená práce určuje přímo kinetickou energii kotouče E_k v daném okamžiku.

PŘÍKLAD 11.14

Tuhá konstrukce, znázorněná na obr. 11.20, je sestavena z tuhého prstence o hmotnosti m a poloměru $R = 0{,}15\,\mathrm{m}$ a dvou tenkých tyčí, z nichž každá má hmotnost m a délku $L = 2{,}0R$. Může se otáčet kolem vodorovné osy, která leží v rovině prstence a prochází jeho středem.

(a) Vyjádřete moment setrvačnosti konstrukce pomocí m a R.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (i) v tab. 11.2 má prstenec vzhledem k zadané ose moment setrvačnosti $I_{\mathrm{prstenec}} = \frac{1}{2} mR^2$.

Moment setrvačnosti tyče A vypočteme pomocí Steinerovy věty (11.27). Její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejím středem rovnoběžně s osou otáčení najdeme v tab. 11.2e, $I_{T,A} = mL^2/12$. Podle Steinerovy věty platí

$$I_A = I_{T,A} + mh_{T,A}^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = \\ = 4{,}33mR^2.$$

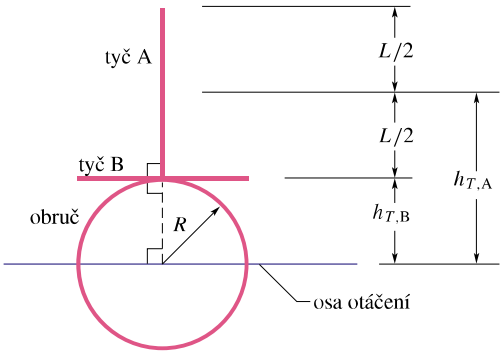
V předchozím výpočtu jsme již vzali v úvahu vztah $L = 2{,}0R$ a symbolem $h_{T,A} = R + \frac{1}{2}L$ jsme označili vzdálenost těžiště tyče A od osy otáčení.

Steinerovy věty použijeme i při výpočtu momentu setrvačnosti tyče B. Vůči své podélné ose má tyč nulový moment setrvačnosti, tj. $I_{T,B} = 0$. Její moment setrvačnosti vůči zadané ose otáčení je tedy

$$I_B = I_{T,B} + mh_{T,B}^2 = 0 + mR^2 = mR^2,$$

kde $h_{T,B} = R$ je vzdálenost tyče B od osy otáčení. Moment setrvačnosti I celé konstrukce vzhledem k zadané ose otáčení je součtem momentů setrvačnosti jejích jednotlivých částí, tj.

$$I = I_{\mathrm{prstenec}} + I_A + I_B = \tfrac{1}{2} mR^2 + 4{,}33mR^2 + mR^2 = \\ = 5{,}83mR^2 \doteq 5{,}8mR^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.20 Příklad 11.14. Tuhá konstrukce tvořená prstencem a dvěma tyčemi se může otáčet kolem vodorovné osy.

(b) Předpokládejme, že konstrukce je ve výchozí klidové poloze znázorněné na obr. 11.20. Tato poloha není stabilní. Po uvolnění se tedy konstrukce začne roztáčet vlivem nenulového momentu tíhové síly. Určete její úhlovou rychlost ω v okamžiku, kdy prochází dolní rovnovážnou polohou.

ŘEŠENÍ: Ve výchozí poloze leží těžiště konstrukce ve vzdálenosti y_T nad osou otáčení. Podle rov. (9.5) je

$$y_T = \frac{m(0) + mR + m(R + \frac{1}{2}L)}{3m} = R.$$

Po uvolnění se konstrukce začne otáčet kolem zadané pevné osy a její těžiště klesá. V okamžiku, kdy konstrukce dosáhne rovnovážné polohy, je její těžiště *pod* osou otáčení, opět ve

vzdálenosti y_T. Jeho posunutí je tedy $\Delta y_T = -2R$. Odpovídající pokles tíhové potenciální energie soustavy konstrukce + Země je kompenzován přírůstkem kinetické energie otáčivého pohybu konstrukce. Změnu potenciální energie ΔE_p vypočteme jako součin velikosti tíhové síly působící na konstrukci ($3mg$, celková hmotnost konstrukce je $3m$) a svislé složky posunutí jejího těžiště Δy_T:

$$\Delta E_p = 3mg\Delta y_T = 3mg(-2R) = -6mgR.$$

Odpovídající změna kinetické energie je podle rov. (11.25)

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Ze zákona zachování mechanické energie, zapsaného ve tvaru

$$E_k + E_p = 0,$$

dostaneme

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - 6mgR = 0.$$

Dosadíme $I = 5{,}83mR^2$ a vyjádříme ze získané rovnice úhlovou rychlost ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5{,}83R}} = \sqrt{\frac{12(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{5{,}83(0{,}15\ \mathrm{m})}} = 12\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$ (Odpověď)

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Úhlová poloha

Pro usnadnění popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy (tzv. **osy otáčení**) zavádíme **vztažnou přímku** kolmou k ose otáčení, kterou pevně spojíme s otáčejícím se tělesem. Měříme **úhlovou polohu** θ této přímky vzhledem ke zvolenému směru. Je-li veličina θ vyjádřena v radiánech, platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\theta \text{ je v rad}), \tag{11.1}$$

kde s je délka oblouku kruhové trajektorie s poloměrem r a středovým úhlem θ. Jednotka 1 rad souvisí s úhlovými jednotkami 1° a 1 otáčka (1 ot) vztahem

$$1\ \mathrm{ot} = 360^\circ = 2\pi\ \mathrm{rad}. \tag{11.2}$$

Otočení

Změna úhlové polohy otáčejícího se tělesa z výchozí hodnoty θ_1 na výslednou hodnotu θ_2 určuje jeho **otočení**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

Hodnota $\Delta\theta$ je kladná, otáčí-li se těleso v kladném směru, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček, záporná je v opačném případě.

Úhlová rychlost

Podíl otočení tělesa $\Delta\theta$ a délky Δt časového intervalu, během něhož k tomuto otočení došlo, představuje **průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v daném intervalu

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{11.5}$$

Okamžitá úhlová rychlost tělesa je definována vztahem

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{11.6}$$

Veličiny $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ a $\boldsymbol{\omega}$ definují vektory rovnoběžné s osou otáčení, jejichž orientace je dána **pravidlem pravé ruky**, znázorněným na obr. 11.5. Vzhledem k tomu, že jejich směr je pevně zadán (směr osy otáčení), stačí k jejich vyjádření jen číselná hodnota udávající jejich velikost, opatřená kladným, resp. záporným znaménkem, otáčí-li se těleso ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), či záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Úhlové zrychlení

Podíl změny úhlové rychlosti tělesa z hodnoty $\boldsymbol{\omega}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{\omega}_2$ a délky $\Delta t = t_2 - t_1$ časového intervalu, v němž tato změna proběhla, definuje **průměrné úhlové zrychlení** tělesa $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ v daném intervalu:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}. \tag{11.7}$$

Okamžité úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ tělesa je definováno vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{11.8}$$

Veličiny $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ jsou vektorové.

Vztahy pro otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením

Otáčení s konstantním úhlovým zrychlením ($\boldsymbol{\varepsilon}$ = konst) je důležitým speciálním případem otáčivého pohybu. Je popsáno následujícími rovnicemi, které shrnuje také tab. 11.1:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{11.9}$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2, \tag{11.10}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta, \tag{11.11}$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \tag{11.12}$$

$$\theta = \omega t - \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{11.13}$$

Vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami

Každá částice tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevné osy, se pohybuje po kružnici, jejíž poloměr je roven vzdálenosti částice od osy otáčení. Při otočení tělesa o úhel θ opíše částice kruhový oblouk o délce

$$s = \theta r, \tag{11.15}$$

kde θ je v rad.

Vektor rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je tečný k její kruhové trajektorii. Jeho velikost (tzv. obvodová rychlost) je

$$v = \omega r, \tag{11.16}$$

kde ω je úhlová rychlost tělesa vyjádřená v rad/s.

Vektor zrychlení částice $\boldsymbol{a}$ je určen *tečnou* a *normálovou* složkou, které odpovídají jeho rozkladu do tečného a normálového směru k trajektorii. Tečnou složku lze zapsat ve tvaru

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r, \tag{11.20}$$

kde ε je úhlové zrychlení tělesa vyjádřené v rad/s^2. Normálová složka je dána vztahem

$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.21}$$

Pohybuje-li se částice po své kruhové trajektorii rovnoměrně, je její pohyb periodický s periodou

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.17, 11.18}$$

Kinetická energie otáčivého pohybu a moment setrvačnosti

Tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}), \tag{11.25}$$

kde I je **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose otáčení. Pro soustavu částic (těleso s diskrétním rozložením hmoty) je definován vztahem

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{11.24}$$

a pro těleso se spojitě rozloženou hmotou vztahem

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m. \tag{11.26}$$

Symboly r_i, resp. r v těchto vztazích představují vzdálenost i-té částice, resp. elementu tělesa od osy otáčení.

Steinerova věta

Steinerova věta popisuje souvislost mezi momentem setrvačnosti I tělesa vzhledem k libovolné ose otáčení a momentem setrvačnosti I_T téhož tělesa vzhledem k rovnoběžné ose vedené jeho těžištěm:

$$I = I_T + mh^2, \tag{11.27}$$

kde h je vzdálenost obou os.

Moment síly

Moment síly charakterizuje rotační účinek síly $\boldsymbol{F}$, která působí na těleso při jeho otáčení kolem pevné osy. (Předpokládáme, že směr síly $\boldsymbol{F}$ leží v rovině kolmé k ose otáčení.) Označíme-li polohový vektor působiště síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení symbolem $\boldsymbol{r}$, můžeme moment $\boldsymbol{M}$ této síly vzhledem k uvedené ose vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{11.33}$$

(Počátečním bodem vektoru $\boldsymbol{r}$ je průsečík osy otáčení s rovinou k ní kolmou a vedenou působištěm síly $\boldsymbol{F}$.) Moment síly je vektor. Pro jeho velikost platí

$$M = r F_\mathrm{t} = r_\perp F = r F \sin\varphi, \tag{11.30, 11.31, 11.32}$$

kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$, φ je úhel vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Symbol $r_\perp$ označuje **rameno síly** $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení, definované jako vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$ od této osy. Rameno síly F_t je označeno r.

Ve zjednodušených situacích, jež v této kapitole uvažujeme, má moment síly vždy směr osy otáčení. Proto jej stačí zadávat číselným údajem představujícím jeho velikost opatřenou vhodným znaménkem. Moment síly M je kladný, je-li podle pravidla pravé ruky orientován v kladném směru, v opačném případě je záporný. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je newton-metr (N·m).

Věta o momentu hybnosti

Věta o momentu hybnosti, představující pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb, má tvar

$$I\varepsilon = \sum M, \tag{11.36}$$

kde $\sum M$ je výsledný moment všech sil působících na částici nebo tuhé těleso, vztažený k ose otáčení, I je moment setrvačnosti částice nebo tuhého tělesa vzhledem k této ose a ε je úhlové zrychlení otáčivého pohybu částice nebo tuhého tělesa kolem této osy.

Práce a kinetická energie otáčivého pohybu

Vztahy pro výpočet práce a výkonu při otáčivém pohybu jsou podobné odpovídajícím vztahům pro pohyb posuvný:

$$W = \int_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}} M \,\mathrm{d}\theta \tag{11.44}$$

a

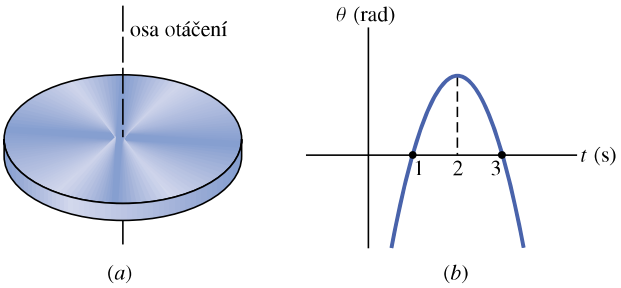
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{11.45}$$

Vztah mezi prací a změnou kinetické energie má pro otáčivý pohyb tvar

$$\Delta E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} I \omega_\mathrm{f}^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_\mathrm{i}^2 = W. \tag{11.41}$$

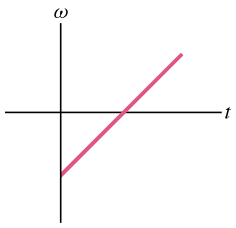
OTÁZKY

1. Na obr. 11.21b je zakreslen graf časové závislosti úhlové polohy otáčejícího se kotouče, znázorněného na obr. 11.21a. Rozhodněte, zda v okamžicích (a) $t = 1$ s, (b) $t = 2$ s a (c) $t = 3$ s je úhlová rychlost kotouče kladná, záporná, nebo nulová. (d) Je jeho úhlové zrychlení kladné, nebo záporné?



Obr. 11.21 Otázka 1

2. Obr. 11.22 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti kotouče na obr. 11.21a. Jaký je (a) počáteční a (b) výsledný směr otáčení kotouče? (c) Je úhlová rychlost kotouče v některém okamžiku nulová? Ve kterém? (d) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče kladné, nebo záporné. (e) Je konstantní, nebo proměnné?



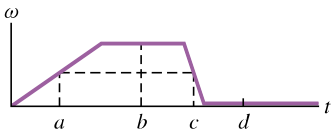
Obr. 11.22 Otázka 2

3. V okamžiku $t = 0$ má kotouč na obr. 11.21a úhlovou polohu $\theta_0 = -2$ rad. V následující tabulce jsou uvedena znaménka počáteční úhlové rychlosti kotouče a jeho stálého úhlového zrychlení ve čtyřech různých situacích: (1) +, +; (2) +, −; (3) −, + a (4) −, −. Rozhodněte, ve kterém z uvedených čtyř případů (a) se kotouč na okamžik zastaví, (b) v některém okamžiku zcela jistě projde úhlovou polohou $\theta = 0$, (c) nikdy neprojde úhlovou polohou $\theta = 0$.

4. Následující dvojice hodnot představují počáteční a výslednou úhlovou rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a ve čtyřech různých situacích: (a) 2 rad/s, 3 rad/s; (b) −2 rad/s, 3 rad/s; (c) −2 rad/s, −3 rad/s; (d) 2 rad/s, −3 rad/s. Velikost úhlového zrychlení má ve všech případech stejnou hodnotu a je stálé. Seřaďte situace sestupně podle velikosti otočení kotouče.

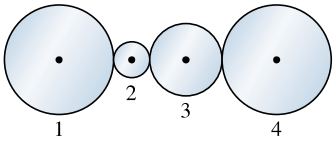
5. Rozhodněte, pro kterou z následujících funkcí, vyjadřujících možnou časovou závislost úhlové rychlosti otáčejícího se tělesa, platí rovnice shrnuté v tab. 11.1: (a) $\omega = 3$; (b) $\omega = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $\omega = 3t - 4$; (d) $\omega = 5t^2 - 3$.

6. Obr. 11.23 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti otáčejícího se kotouče z obr. 11.21a. Zvolte libovolnou částici na jeho obvodu a seřaďte vyznačené okamžiky a, b, c a d podle velikosti (a) tečné složky jejího zrychlení (obvodového zrychlení), (b) normálové složky jejího zrychlení.



Obr. 11.23 Otázka 6

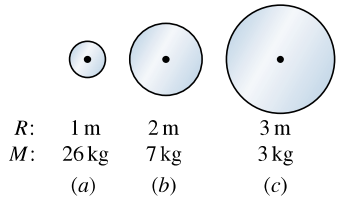
7. Obr. 11.24 znázorňuje převodovku se čtyřmi koly, která se otáčejí bez prokluzu. Poloměry kol 1, 2, 3 a 4 jsou po řadě $3R$, R, $2R$ a $3R$. Kolo 2 je poháněno motorem. Seřaďte kola sestupně (a) podle obvodových rychlostí částic a (b) podle velikosti jejich úhlových rychlostí.



Obr. 11.24 Otázka 7

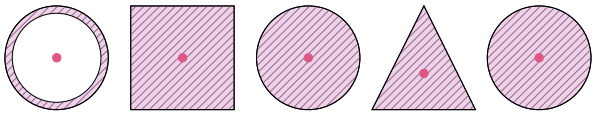
8. Kruhové kotouče A a B mají stejnou hmotnost a tloušťku. Hustota kotouče A je však větší než hustota kotouče B. Rozhodněte, zda je moment setrvačnosti kotouče A vzhledem k jeho ose symetrie (a) ležící v rovině kotouče, (b) kolmé k rovině kotouče větší, menší, nebo stejný jako moment setrvačnosti kotouče B.

9. Na obr. 11.25 jsou znázorněny tři homogenní kotouče se zadanými hmotnostmi a poloměry. Seřaďte je sestupně podle hodnot momentu setrvačnosti vzhledem k ose symetrie kolmé k rovině kotouče.



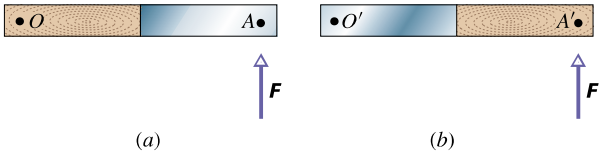
Obr. 11.25 Otázka 9

10. Na obr. 11.26 jsou zakresleny půdorysné průměty pěti těles o stejné hmotnosti. Měřítko nákresu je pro všechna tělesa stejné a také jejich výška je shodná. Tělesa však mohou být dutá a není jisté, zda jsou vyrobena z materiálu stejné tloušťky. Dokážete rozhodnout, které z nich má (a) největší, (b) nejmenší moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené těžištěm kolmo k půdorysnému průmětu?



Obr. 11.26 Otázka 10

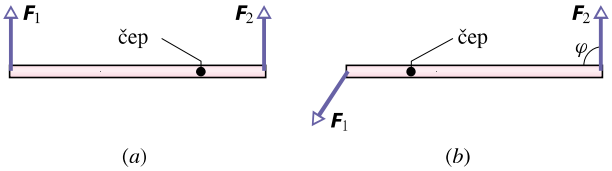
11. Na obr. 11.27a je metrová tyč vyrobená napůl ze dřeva a napůl z oceli. Tyč se může otáčet kolem čepu umístěného v bodě O na konci dřevěné části. V bodě A na konci ocelové části působí síla $\boldsymbol{F}$. Situace na obr. 11.27b je opačná: tyč se otáčí kolem bodu O' na konci ocelové části a síla $\boldsymbol{F}$ působí v bodě A' na konci dřevěné části. Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení tyče na obr. 11.27a větší, menší, nebo stejné jako zrychlení tyče na obr. 11.27b.



Obr. 11.27 Otázka 11

12. Obr. 11.28a znázorňuje vodorovnou tyč (nadhled), která se může otáčet kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k nákresu. Na tyč působí dvě síly, avšak tyč je v klidu. Z nějakých důvodů je potřeba úhel mezi tyčí a silou $\boldsymbol{F}_2$ změnit. Jak je nutné upravit velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, aby tyč zůstala v klidu?

13. Na obr. 11.28b je v nadhledu znázorněna vodorovná tyč, která se otáčí kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k rovině nákresu. Na opačných koncích působí na tyč vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Síla $\boldsymbol{F}_2$ svírá s tyčí úhel φ. Seřaďte následující hodnoty úhlu φ podle velikosti odpovídajícího úhlového zrychlení tyče: 90°, 70° a 110°.



Obr. 11.28 Otázky 12 a 13

14. Úhlová rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a se mění vlivem síly, působící na obvodu kotouče. Následující dvojice údajů představují hodnoty počáteční a výsledné úhlové rychlosti kotouče ve čtyřech různých situacích: (a) −2 rad/s, 5 rad/s, (b) 2 rad/s, 5 rad/s, (c) −2 rad/s, −5 rad/s, (d) 2 rad/s, −5 rad/s. Seřaďte tyto případy podle práce, kterou síla vykonala.

15. Připažte, přiložte dlaně ke stehnům a zpevněte zápěstí. Proveďte postupně tyto cviky: (1) Předpažte. (2) Z předpažení upažte a zápěstí udržujte zpevněné. (3) Nakonec připažte. Všimněte si, že vaše dlaň je otevřena směrem dopředu. Opakujte cviky (1) až (3) v pozměněném pořadí (2), (1), (3). Vysvětlete, proč nyní dlaň *nesměřuje* dopředu.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 11.2 Veličiny charakterizující otáčivý pohyb

1C. (a) Určete středový úhel oblouku o délce 1,80 m a poloměru 1,20 m. Výsledek vyjádřete v radiánech. (b) Vyjádřete tento úhel také ve stupních. (c) Úhel mezi dvěma poloměry kružnice je 0,620 rad. Určete délku oblouku, který je těmito poloměry vymezen, víte-li, že obvod celé kružnice je 2,40 m.

2C. Úhlová poloha setrvačníku závisí na čase vztahem $\theta = at + bt^3 - ct^4$, kde a, b, c jsou konstanty. Vyjádřete (a) úhlovou rychlost a (b) úhlové zrychlení setrvačníku jako funkce času.

3C. Určete velikost úhlové rychlosti (a) sekundové, (b) minutové a (c) hodinové ručičky hodin. Získané hodnoty vyjádřete v jednotkách rad/s.

4C. Slunce je od středu naší Galaxie vzdáleno asi $2{,}3\cdot10^4$ světelných let a obíhá kolem něj po kružnici obvodovou rychlostí 250 km/s. (a) Jak dlouho trvá Slunci jeden takový oběh? (b) Kolik oběhů již Slunce vykonalo za dobu své existence, tj. za asi $4{,}5\cdot10^9$ let?

5C. Úhlová poloha θ bodu na obvodu rotujícího kotouče závisí na čase t vztahem $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, kde t je v sekundách a θ v radiánech. (a) Vypočtěte úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 2{,}0$ s a $t = 4{,}0$ s. (b) Určete jeho průměrné úhlové zrychlení v časovém intervalu od $t = 2{,}0$ s do $t = 4{,}0$ s a (c) okamžité úhlové zrychlení na počátku a na konci tohoto intervalu.

6C. Časová závislost úhlové polohy bodu rotujícího kola je popsána funkcí $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Jaká je (a) úhlová poloha tohoto bodu v okamžiku $t = 0$? (b) Určete úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 0$ a (c) $t = 4{,}0$ s. (d) Vypočtěte jeho úhlové zrychlení v okamžiku $t = 2{,}0$ s. (e) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče stálé.

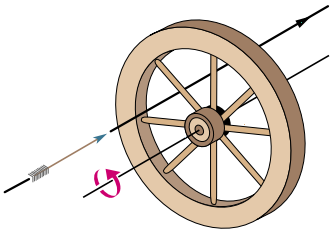
7Ú. Kolo se otáčí s úhlovým zrychlením ε, jehož časová závislost je popsána funkcí $\varepsilon = 4at^3 - 3bt^2$ (a, b jsou konstanty). Počáteční úhlová rychlost kola je ω_0. Najděte časovou závislost (a) úhlové rychlosti a (b) otočení kola.

8Ú. Dobrý hráč baseballu může hodit míč rychlostí 53 km/h. Míč přitom rotuje úhlovou rychlostí 1 800 ot/min. Kolik otáček během letu vykoná, je-li cíl vzdálen 20 m? (Pro jednoduchost předpokládáme, že let míče je přímočarý.)

9Ú. Při skoku z desetimetrové věže provedl skokan před dopadem na vodní hladinu 2,5 otáčky. Předpokládejte, že svislá složka jeho počáteční rychlosti byla nulová, a vypočtěte úhlovou rychlost jeho otáčivého pohybu.

10Ú. Kolo s osmi loukotěmi na obr. 11.29 má poloměr 30 cm. Je upevněno na pevné ose a otáčí se úhlovou rychlostí 2,5 ot/s. Hoši

střílejí z luku ve směru osy kola a snaží se, aby šíp volně prolétl mezerou. Délka šípu je 20 cm. Předpokládáme, že šíp i loukotě kola jsou zanedbatelně tenké. (a) Určete nejmenší možnou rychlost šípu. (b) Zjistěte, zda je rozhodující, do kterého místa mezi osou kola a jeho obvodem šíp míří. V kladném případě určete, kam je třeba mířit.



Obr. 11.29 Úloha 10

ODST. 11.4 Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb

11C. Údaj na otáčkoměru automobilového motoru (ot/min) rovnoměrně vzrostl během 12 s z 1 200 ot/min na 3 000 ot/min. (a) Určete úhlové zrychlení motoru v ot/min^2. (b) Určete celkový počet otáček motoru v daném časovém intervalu.

12C. Talíř gramofonu se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min a zastaví se za 30 s od okamžiku vypnutí motorku. (a) Určete jeho úhlové zrychlení v ot/min^2 za předpokladu, že jeho úhlová rychlost klesá rovnoměrně. (b) Kolik otáček talíř během brzdění vykoná?

13C. Kotouč, který se zpočátku otáčel úhlovou rychlostí 120 rad/s, se začal zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením o velikosti 4,0 rad/s^2. (a) Jak dlouho trvalo, než se kotouč zastavil? (b) O jaký úhel se za tuto dobu otočil?

14C. Na obvodu kladky o průměru 8,0 cm je navinuto lano délky 5,6 m. Kladka se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 1,5 rad/s^2. (a) Jaké musí být otočení kladky, aby se celé lano rozvinulo? (b) Jak dlouho to bude trvat?

15C. Těžký setrvačník otáčející se kolem osy symetrie vedené jeho středem se začne zpomalovat vlivem tření v ložiscích. Na konci první minuty činí jeho úhlová rychlost 90 % původní hodnoty 250 ot/min. Předpokládáme, že třecí síla je stálá. Určete úhlovou rychlost setrvačníku na konci druhé minuty.

16C. Setrvačník motoru rotuje úhlovou rychlostí 25,0 rad/s. Po vypnutí motoru se začne zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením a zastaví se po uplynutí 20,0 s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení setrvačníku v rad/s^2, (b) jeho otočení (v rad) od okamžiku vypnutí motoru, (c) celkový počet otáček od okamžiku vypnutí motoru.

17C. Kotouč, který se může otáčet kolem své osy, se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením. Za dobu 5,0 s se otočí o 25 rad. Určete jeho (a) úhlové zrychlení, (b) průměrnou úhlovou rychlost, (c) okamžitou úhlovou rychlost na konci páté sekundy, (d) otočení v intervalu od konce páté do konce desáté sekundy.

18Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením a v okamžiku $t = 2{,}0$ s má úhlovou rychlost 5,0 rad/s. Pohyb kola se dále urychluje až do okamžiku $t = 20$ s, kdy dojde k vypnutí pohonu. Určete otočení kola v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 40$ s.

19Ú. V okamžiku $t = 0$ se kolo začne roztáčet z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 2,00 rad/s^2. V časovém intervalu délky $\Delta t = 3{,}00$ s, měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$, se kolo otočilo o 90,0 rad. (a) Určete okamžik t a (b) odpovídající okamžitou úhlovou rychlost kola.

20Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 3,0 rad/s^2. V časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ délky $\Delta t = 4{,}0$ s se otočilo o úhel 120 rad. Určete okamžik t.

21Ú. Rotující setrvačník se rovnoměrně zpomaluje. Od okamžiku $t = 0$, kdy je jeho úhlová rychlost 1,5 rad/s, do okamžiku zastavení vykoná 40 otáček. Určete (a) dobu brzdění a (b) úhlové zrychlení setrvačníku. (c) Za jakou dobu vykonal setrvačník prvních 20 otáček?

22Ú. V okamžiku $t = 0$ má setrvačník úhlovou rychlost 4,7 rad/s, jeho úhlové zrychlení je $-0{,}25$ rad/s^2 a jeho vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta_0 = 0$. (a) Určete krajní úhlovou polohu $\theta_{\max}$ (v kladném směru) vztažné přímky setrvačníku. Zjistěte, v kterém okamžiku má úhlová poloha vztažné přímky hodnotu (b) $\theta = \frac{1}{2}\theta_{\max}$ a (c) $\theta = -10{,}5$ rad. (Připouštíme kladné i záporné hodnoty časové proměnné t.) (d) Nakreslete graf funkce $\theta(t)$ a vyznačte na něm hodnoty vypočtené v částech (a) až (c).

23Ú. Kotouč se roztáčí kolem své osy se stálým úhlovým zrychlením. Jeho počáteční úhlová rychlost je nulová. V jistém okamžiku t_1 je jeho úhlová rychlost $\omega_1 = 10$ ot/s. Po dalších 60 otáčkách je jeho úhlová rychlost $\omega_2 = 15$ ot/s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kotouče, (b) dobu $\Delta t = t_2 - t_1$, potřebnou k vykonání zmíněných šedesáti otáček, (c) dobu t_1 potřebnou k získání úhlové rychlosti 10 ot/s a (d) počet otáček kotouče za dobu t_1.

24Ú. Kolo se roztáčí s konstantním úhlovým zrychlením. V určitém okamžiku stiskneme stopky a začneme měřit čas ($t = 0$). Během prvních 15 s od počátku měření vykoná kolo 90 otáček. Jeho úhlová rychlost na konci tohoto intervalu je 10 ot/s. (a) Určete úhlovou rychlost kola v okamžiku, kdy započalo měření. (b) Jaká doba uplynula od okamžiku, kdy se kolo začalo roztáčet z klidu, do začátku měření?

ODST. 11.5 Korespondence obvodových a úhlových veličin

25C. Určete zrychlení $\boldsymbol{a}$ (tečnou i normálovou složku) bodu na obvodu gramofonové desky o průměru 30 cm, která se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min.

26C. Gramofonová deska se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. (a) Vyjádřete její úhlovou rychlost v rad/s. Určete obvodovou rychlost bodu desky v místě přenosové jehly (b) na počátku a (c) na konci nahrávky. Vzdálenost jehly od osy talíře gramofonu na začátku, resp. na konci nahrávky je asi 150 mm, resp. 74 mm.

27C. Jaká je úhlová rychlost automobilu, který projíždí kruhovou zatáčku o poloměru 110 m rychlostí 50 km/h?

28C. Setrvačník o průměru 1,20 m vykoná 200 ot/min. (a) Vyjádřete jeho úhlovou rychlost v rad/s. (b) Určete rychlost bodu na jeho obvodu. (c) Při jaké (konstantní) hodnotě úhlového zrychlení (v rad/min^2) by se jeho úhlová rychlost zvýšila na 1 000 ot/min během 60 s? (d) Kolik otáček by setrvačník za tuto dobu vykonal?

29C. Úhlová rychlost bodu na obvodu brusného kotouče o průměru 0,75 m se změnila z 12 m/s na 25 m/s za dobu 6,2 s. Určete průměrné úhlové zrychlení kotouče v tomto časovém intervalu.

30C. Dráha Země kolem Slunce je přibližně kruhová. Určete (a) úhlovou rychlost, (b) rychlost a (c) zrychlení Země vzhledem ke Slunci.

31C. Dne 30. června 1908 v 7 h 14 min ráno došlo na střední Sibiři, v místě o souřadnicích 61° sev. šířky a 102° vých. délky k obrovskému výbuchu, při němž bylo možné pozorovat oslnivý záblesk. Podle náhodného svědka této *tunguzské záhady* „pokryl záblesk obrovskou část oblohy“. Jednalo se pravděpodobně o dopad *kamenného asteroidu* o velikosti asi 140 m. (a) Vezměte v úvahu pouze otáčení Země a vypočtěte, o jakou dobu později by musel asteroid vybuchnout, aby se výbuch odehrál nad Helsinkami, jejichž zeměpisná délka je 25° východně. (Takový výbuch by město úplně zničil.) (b) Kdyby se jednalo o *kovový asteroid*, mohl by dopadnout až na povrch Země. O jakou dobu později by musel asteroid přiletět, aby dopadl do Atlantického oceánu v místě se zeměpisnou délkou 20° západně? (Vzniklá vlna tsunami by v takovém případě vyhladila pobřežní osídlení na obou stranách Atlantiku.)

32C. Astronaut je testován na centrifuze. Centrifuga má poloměr 10 m a během roztáčení je časová závislost její úhlové polohy popsána funkcí $\theta(t) = 0{,}30t^2$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) obvodovou rychlost, (c) velikost tečné složky zrychlení a (d) velikost normálové složky zrychlení astronauta v okamžiku $t = 5{,}0$ s.

33C. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) normálovou složku zrychlení a (c) tečnou složku zrychlení vesmírné lodi letící obvodovou rychlostí 29 000 km/h po kruhové dráze o poloměru 3 200 km.

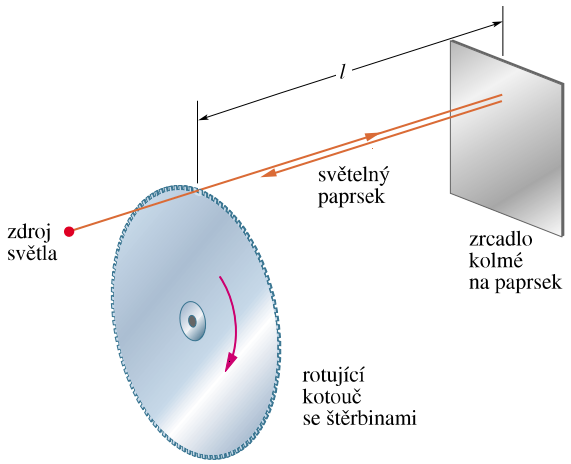
34C. Mince o hmotnosti M leží ve vzdálenosti R od středu talíře gramofonu. Koeficient statického tření mezi mincí a talířem je f_s. Úhlová rychlost talíře se pomalu zvětšuje na hodnotu ω_0, kdy mince z talíře sklouzne. (a) Vyjádřete ω_0 pomocí M, R, g a f_s. (b) Nakreslete přibližně trajektorii mince po jejím sklouznutí z talíře.

35Ú. Setrvačník parního stroje se otáčí konstantní úhlovou rychlostí 150 ot/min. Po uzavření přívodu páry se pohyb setrvačníku začne vlivem tření a odporu prostředí rovnoměrně zpomalovat a za 2,2 h se setrvačník zastaví. (a) Určete úhlové zrychlení setrvačníku v ot/min^2. (b) Kolik otáček ještě vykoná od okamžiku uzavření přívodu páry? V jistém okamžiku se setrvačník otáčí úhlovou rychlostí 75 ot/min. (c) Určete okamžitou hodnotu tečné složky zrychlení částice setrvačníku, která obíhá ve vzdálenosti 50 cm od jeho osy a (d) velikost okamžitého zrychlení této částice.

36Ú. Setrvačník gyroskopu o poloměru 2,83 cm se roztáčí z klidu s úhlovým zrychlením 14,2 rad/s^2 až do okamžiku, kdy dosáhne úhlové rychlosti 2 760 ot/min. (a) Určete tečnou složku zrychlení bodu na obvodu setrvačníku. (b) Jaká je hodnota normálové složky zrychlení v okamžiku, kdy setrvačník dosáhne největší úhlové rychlosti? (c) Jakou dráhu urazí bod na obvodu během roztáčení setrvačníku?

37Ú. Vrtule letadla se otáčí s úhlovou rychlostí 2 000 ot/min, letadlo letí rychlostí 480 km/h vzhledem k zemi. Zjistěte, jakou rychlostí se pohybuje bod na špičce listu vrtule o poloměru 1,5 m (a) vzhledem k letadlu, (b) vzhledem k zemi. Rychlost letadla je rovnoběžná s osou otáčení vrtule.

38Ú. Jedna ze starších metod měření rychlosti světla používala rovnoměrně rotující ozubené kolo (obr. 11.30). Světelný paprsek prošel mezerou mezi zuby kola, odrazil se od zrcadla a dopadl zpět na rotující kolo tak, aby právě prošel následující mezerou. Ozubené kolo o poloměru 5,0 cm mělo na obvodu 500 zubů. Pomocí zrcadla umístěného ve vzdálenosti $l = 500$ m byla naměřena hodnota rychlosti světla $3{,}0\cdot10^5$ km/s. (a) Jaká byla úhlová rychlost kola? (b) Vypočtěte velikost rychlosti bodu na jeho obvodu.



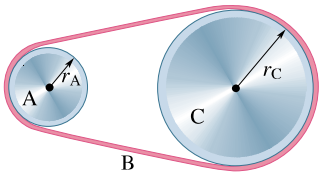
Obr. 11.30 Úloha 38

39Ú. Automobil se rozjíždí z klidu po kruhové dráze o poloměru 30,0 m. Jeho tečné zrychlení má stálou velikost 0,500 m/s^2. (a) Určete zrychlení automobilu v okamžiku $t = 15{,}0$ s po rozjezdu. (b) Jaký úhel svírá v tomto okamžiku vektor zrychlení automobilu s vektorem jeho rychlosti?

40Ú. Poloha bodu na zemském povrchu je určena zeměpisnou šířkou 40°. Určete úhlovou rychlost oběhu tohoto bodu kolem zemské osy. (b) Určete jeho obvodovou rychlost. (c) Řešte úlohy (a) a (b) pro bod na rovníku.

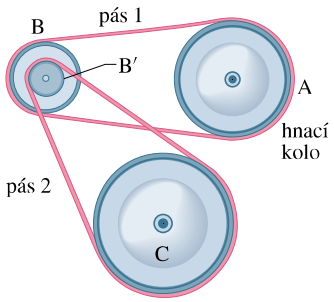
41Ú. Poloměry kol A a C na obr. 11.31 jsou $r_A = 10$ cm a $r_C = 25$ cm. Kola jsou spřažena pásem B, který po nich neklouže. Úhlová rychlost kola A se rovnoměrně zvětšuje z počáteční nulové hodnoty s úhlovým zrychlením 1,6 rad/s^2. Zjistěte,

v kterém okamžiku bude mít kolo C úhlovou rychlost 100 ot/min. (*Tip*: Jestliže pás neklouže, jsou obvodové rychlosti bodů na obvodech kol shodné.)



Obr. 11.31 Úloha 41

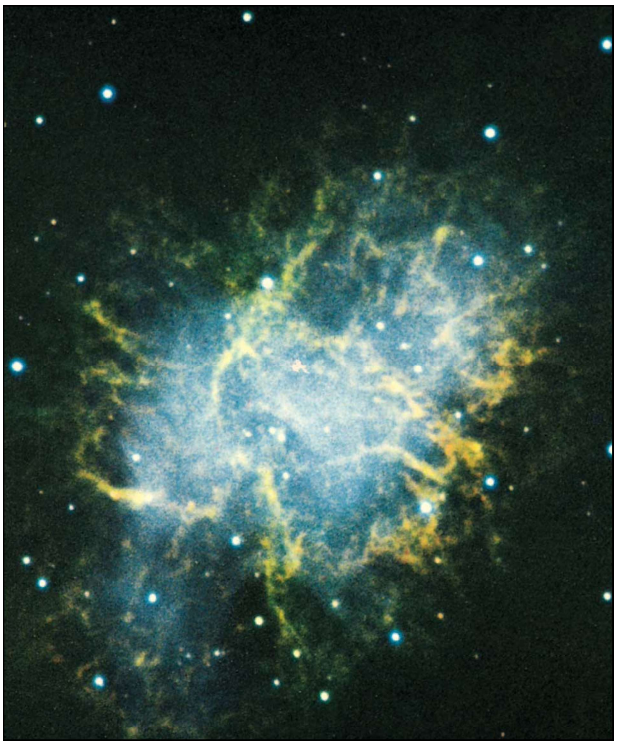
42Ú. Na obr. 11.32 jsou znázorněna čtyři kola spojená dvěma pásy. Hnací kolo A má poloměr 15 cm a otáčí se úhlovou rychlostí 10 rad/s. Kolo B o poloměru 10 cm je s kolem A spojeno pásem 1. Kola B′ a B mají společnou osu. Kolo C o poloměru 25 cm je s kolem B′ o poloměru 5 cm spojeno pásem 2. Vypočtěte (a) rychlost bodu na pásu 1, (b) úhlovou rychlost kola B, (c) úhlovou rychlost kola B′, (d) rychlost bodu na pásu 2, (e) úhlovou rychlost kola C. (Použijte návod k úloze 41.)



Obr. 11.32 Úloha 42

43Ú. Talíř gramofonu se otáčí s úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. Ve vzdálenosti 6,0 cm od jeho osy leží malé tělísko. (a) Vypočtěte zrychlení tělíska za předpokladu, že je vzhledem k talíři v klidu (talíř nepodkluzuje). (b) Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu statického tření mezi talířem a tělískem. (c) Předpokládejme, že se talíř rovnoměrně urychloval po dobu 0,25 s, než získal zadanou úhlovou rychlost. Určete nejmenší možnou hodnotu koeficientu statického tření mezi tělískem a talířem, při níž ještě tělísko z talíře během urychlování nesklouzne.

44Ú. **Pulzar** je neutronová hvězda, která se velmi rychle otáčí a vysílá při tom pulzy radiových vln přesně synchronizované se svým otáčivým pohybem. Během jedné otáčky vyšle jeden pulz. Periodu otáčivého pohybu hvězdy je tedy možné snadno zjistit měřením doby mezi dvěma pulzy. Měřením se zjistilo, že perioda otáčení pulzaru v centrální oblasti Krabí mlhoviny (obr. 11.33) je v současné době $T = 0{,}033$ s a pomalu narůstá o $1{,}26\cdot10^{-5}$ s za jeden rok. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení pulzaru v rad/s^2. (b) Za kolik let se pulzar zastaví? (c) Pulzar vznikl výbuchem supernovy v roce 1054 n. l. Jaká byla perioda jeho rotace v době vzniku? (Při řešení úlohy předpokládáme, že úhlové zrychlení pulzaru je konstantní.)



Obr. 11.33 Úloha 44. Krabí mlhovina vznikla výbuchem hvězdy, který byl pozorován v roce 1054 n. l. Na obrázku jsou patrny plynné zbytky výbuchu. Kromě nich tehdy vznikla i rotující neutronová hvězda, jejíž poloměr je pouhých 30 km.

ODST. 11.6 Kinetická energie tělesa při otáčivém pohybu

45C. Vypočtěte moment setrvačnosti kola, které se otáčí úhlovou rychlostí 602 ot/min a má kinetickou energii 24 400 J.

46Ú. Celková hmotnost molekuly kyslíku O_2 je $5{,}30\cdot10^{-26}$ kg. Její moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé ke spojnici atomů a vedené jejím středem je $1{,}94\cdot10^{-46}$ kg·m^2. Předpokládejme, že molekula plynného kyslíku má rychlost 500 m/s a kinetická energie jejího otáčivého pohybu je rovna dvěma třetinám kinetické energie pohybu posuvného. Určete úhlovou rychlost molekuly.

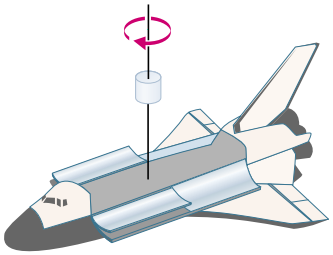
ODST. 11.7 Výpočet momentu setrvačnosti

47C. Vypočtěte hodnoty kinetické energie dvou homogenních plných válců, které rotují kolem svých os symetrie. Válce mají stejnou hmotnost 1,25 kg a otáčejí se se stejnou úhlovou rychlostí 235 rad/s. První z nich má poloměr 0,25 m a druhý 0,75 m.

48C. Molekula má moment setrvačnosti 14 000 u·pm^2 a otáčí se s úhlovou rychlostí $4{,}3\cdot10^{12}$ rad/s. (a) Vyjádřete moment setrvačnosti molekuly v kg·m^2. (b) Vypočtěte kinetickou energii jejího rotačního pohybu a vyjádřete ji v elektronvoltech.

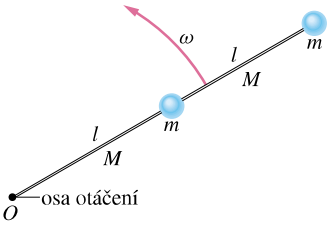
49C. Družice o hmotnosti 1 210 kg má tvar plného válce o průměru 1,21 m a délce 1,75 m. Před vypuštěním z nákladového

prostoru raketoplánu byla družice roztočena úhlovou rychlostí 1,52 ot/s kolem osy válce (obr. 11.34). Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem.



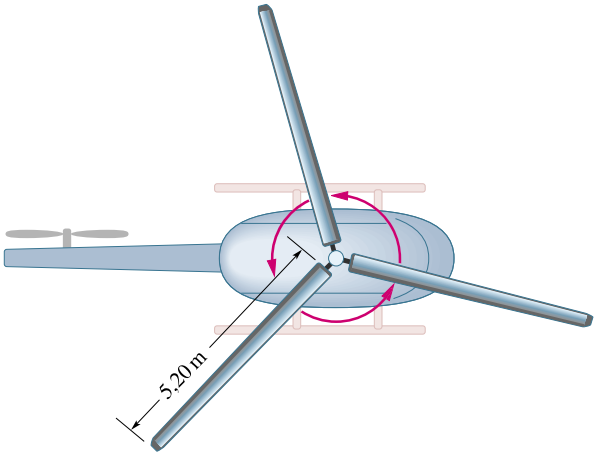
Obr. 11.34 Cvičení 49

50C. Dvě částice se stejnými hmotnostmi m jsou spolu spojeny a připevněny k ose otáčení O dvěma tenkými tyčemi o délkách l a hmotnostech M (obr. 11.35). Soustava se otáčí úhlovou rychlostí ω. Odvoďte výraz pro (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose O a (b) kinetickou energii jejího otáčivého pohybu vzhledem k této ose.



Obr. 11.35 Cvičení 50

51C. Každý z trojice listů rotoru vrtulníku na obr. 11.36 má délku 5,20 m a hmotnost 240 kg. Rotor se otáčí úhlovou rychlostí 350 ot/min. (a) Jaký je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení? (List lze pokládat za tenkou tyč.) (b) Jaká je kinetická energie otáčivého pohybu rotoru?



Obr. 11.36 Cvičení 51 a úloha 85

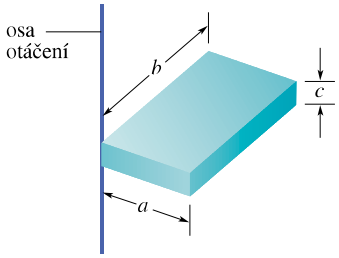
52C. Za předpokladu, že je Země homogenní koule, vypočtěte (a) její moment setrvačnosti a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem. (c) Představme si, že by bylo možné tuto energii nějak využít. Jak dlouho by Země mohla dodávat výkon 1,0 kW každému člověku na planetě? (Počet lidí na Zemi je asi $6{,}4\cdot10^9$.)

53C. Vypočtěte moment setrvačnosti tyčového metru o hmotnosti 0,56 kg vzhledem k ose vedené značkou 20 cm kolmo k tyči. (Tyč lze pokládat za velmi tenkou.)

54Ú. Ukažte, že osa rotace, vůči níž má tuhé těleso nejmenší možnou hodnotu momentu setrvačnosti, musí procházet jeho těžištěm.

55Ú. Odvoďte výraz pro moment setrvačnosti prstence o hmotnosti m a poloměru R, uvedený v tab. 11.2a.

56Ú. Na obr. 11.37 je homogenní tuhý kvádr o hmotnosti m a rozměrech a, b a c. Vypočtěte jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose splývající s jeho hranou.



Obr. 11.37 Úloha 56

57Ú. Následující trojice údajů představují hmotnost a souřadnice každé ze čtyř částic v rovině xy: 50 g, $x = 2{,}0$ cm, $y = 2{,}0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4{,}0$ cm; 25 g, $x = -3{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm; 30 g, $x = -2{,}0$ cm, $y = 4{,}0$ cm. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy částic (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y, (c) vzhledem k ose z. Momenty setrvačnosti označte I_x, I_y a I_z. (d) Vyjádřete I_z pomocí I_x a I_y.

58Ú. (a) Ukažte, že moment setrvačnosti plného válce o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k jeho rotační ose symetrie je roven momentu setrvačnosti tenkého prstence o hmotnosti m a poloměru $R/\sqrt{2}$ vzhledem k jeho rotační ose symetrie. (b) Ukažte, že moment setrvačnosti libovolného tělesa o hmotnosti m vzhledem k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti *ekvivalentního prstence* o stejné hmotnosti vzhledem k jeho rotační ose symetrie, má-li prstenec poloměr

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Poloměr ekvivalentního prstence se nazývá *gyrační poloměr* tělesa.

59Ú. Některé dodávkové automobily jsou poháněny setrvačníkem. Setrvačník má tvar plného homogenního válce o hmotnosti 500 kg a poloměru 1,0 m. Elektrickým motorem se setrvačník roztočí na úhlovou rychlost 200π rad/s. (a) Jak velká kinetická

energie je „uložena“ v roztočeném setrvačníku? (b) Průměrný příkon takového automobilu je 8,0 kW. Jak dlouho může automobil jezdit, než se setrvačník zastaví?

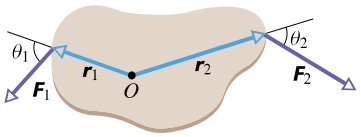
ODST. 11.8 Moment síly

60C. Délka ramene pedálu jízdního kola je 0,152 m. Chodidlo tlačí na pedál svislou silou o velikosti 111 N. Určete velikost momentu této síly vzhledem k ložisku, svírá-li rameno pedálu se svislým směrem úhel (a) 30°, (b) 90° a (c) 180°.

61C. Míč o hmotnosti 0,75 kg je připevněn k jednomu konci tyče o délce 1,25 m a zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec tyče se může otáčet kolem vodorovného čepu. Určete velikost momentu tíhové síly vzhledem k čepu při vychýlení takto vzniklého kyvadla z rovnovážné polohy o úhel 30°.

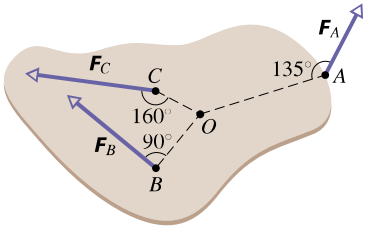
62C. Cyklista o hmotnosti 70 kg tlačí pedál celou svou vahou v okamžiku, kdy se pedál pohybuje směrem dolů. Pedál opisuje kruhovou dráhu o poloměru 0,40 m. Vypočtěte maximální velikost momentu tlakové síly, kterou cyklista na pedál působí.

63Ú. Na těleso na obr. 11.38, které se může otáčet kolem bodu O, působí dvě síly. (a) Odvoďte výraz pro velikost výsledného momentu těchto sil vzhledem k bodu O a (b) vyčíslete jej pro hodnoty $r_1 = 1{,}30\,\text{m}$, $r_2 = 2{,}15\,\text{m}$, $F_1 = 4{,}20\,\text{N}$, $F_2 = 4{,}90\,\text{N}$, $\theta_1 = 75{,}0°$ a $\theta_2 = 60{,}0°$.



Obr. 11.38 Úloha 63

64Ú. Těleso na obr. 11.39 se může otáčet kolem bodu O. Působí na ně tři síly, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Síla $\boldsymbol{F}_A$ má velikost $F_A = 10\,\text{N}$ a působí v bodě A, který leží ve vzdálenosti 8,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_B$ má velikost $F_B = 16\,\text{N}$ a působí v bodě B vzdáleném 4,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_C$ má velikost $F_C = 19\,\text{N}$ a působí v bodě C, jehož vzdálenost od bodu O je 3,0 m. Vypočtěte celkový moment všech těchto sil vzhledem k bodu O.



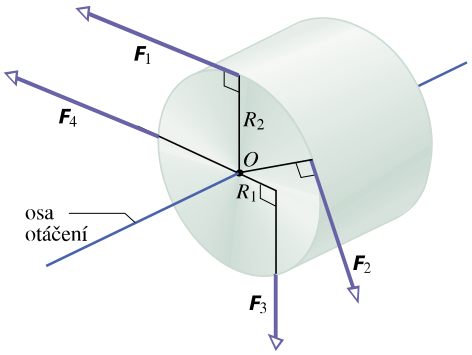
Obr. 11.39 Úloha 64

ODST. 11.9 Věta o momentu hybnosti

65C. Moment síly, která roztáčí kolo, má velikost 32 N·m. Úhlové zrychlení kola je 25,0 rad/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola.

66C. Při výskoku z prkna zvětší skokan do vody svou úhlovou rychlost z počáteční nulové hodnoty na hodnotu 6,20 rad/s. Výskok trvá 220 ms. Moment setrvačnosti skokana je 12,0 kg·m^2. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení při výskoku a (b) výsledný moment vnějších sil, které na skokana při výskoku působily.

67C. Válec o hmotnosti 2,0 kg se může otáčet kolem osy vedené bodem O (obr. 11.40). Na válec působí síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jejich velikosti jsou $F_1 = 6{,}0\,\text{N}$, $F_2 = 4{,}0\,\text{N}$, $F_3 = 2{,}0\,\text{N}$ a $F_4 = 5{,}0\,\text{N}$ a jejich působiště leží ve vzdálenostech $R_1 = 5{,}0\,\text{cm}$ a $R_2 = 12\,\text{cm}$ od osy otáčení. Vypočtěte velikost úhlového zrychlení válce a určete jeho směr. (Směr působících sil *vzhledem k válci* se během jeho pohybu nemění.)



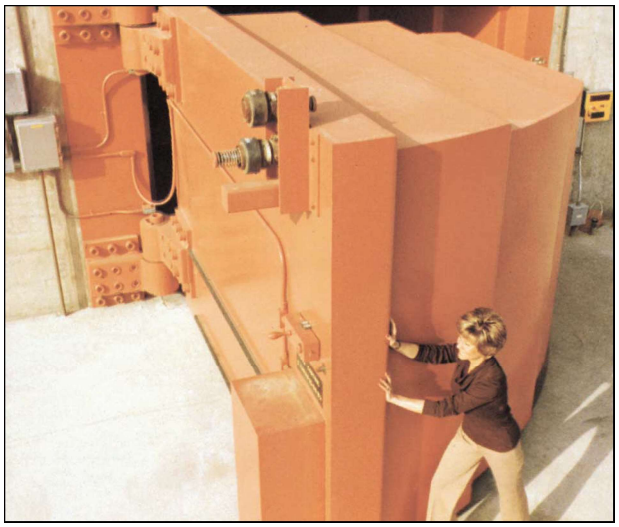
Obr. 11.40 Cvičení 67

68C. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti 1,30 kg, která je připevněna k jednomu konci tyče o délce 0,780 m a zanedbatelné hmotnosti. Otáčí se úhlovou rychlostí 5 010 ot/min kolem svislé osy vedené druhým koncem tyče. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. (b) Na částici působí proti směru jejího pohybu odporová síla prostředí o velikosti $2{,}30\cdot10^{-2}$ N. Jaký musí být moment další síly, kterou musíme na těleso působit, aby jeho otáčivý pohyb byl rovnoměrný?

69C. Tenká kulová slupka má poloměr 1,90 m. Moment síly, která na ni působí, má velikost 960 N·m. Slupka se otáčí kolem osy vedené jejím středem s úhlovým zrychlením 6,20 rad/s^2. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti a (b) hmotnost slupky.

70Ú. Na obr. 11.41 vidíme masivní stínicí dveře pokusného neutronového reaktoru v Lawrence Livermore Laboratory. (Jsou to nejtěžší zavěšené dveře na světě.) Hmotnost dveří je 44 000 kg a jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejich závěsy je $8{,}7\cdot10^4$ kg·m^2. Šířka přední stěny dveří je 2,4 m. Jak velkou stálou silou kolmou k přední stěně dveří je třeba působit u jejich vnějšího okraje, abychom jimi dokázali za 30 s otočit o 90°? (Dveře jsou zpočátku v klidu, vliv třecích sil pokládáme za zanedbatelný.)

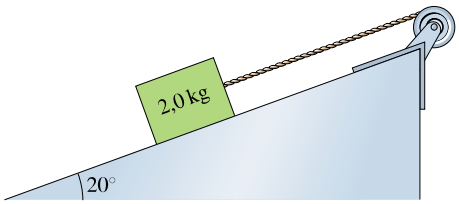
71Ú. Na kladku o poloměru 10 cm působí v bodě na jejím obvodu tečná síla, jejíž velikost je časově proměnná a je popsána funkcí $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$ (F je newtonech a t v sekundách). Moment setrvačnosti kladky vzhledem k její ose je



Obr. 11.41 Úloha 70

$1{,}0{\cdot}10^{-3}$ kg·m^2. Kladka je zpočátku v klidu. Vypočtěte (a) její úhlové zrychlení a (b) úhlovou rychlost v okamžiku $t = 3{,}0$ s.

72Ú. Kolo o poloměru 0,20 m se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Po obvodu kola je navinuto vlákno zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec vlákna je připevněn k tělesu o hmotnosti 2,0 kg, které může klouzat bez tření po nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 11.42). Těleso klesá po nakloněné rovině se zrychlením 2,0 m/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k jeho ose otáčení.

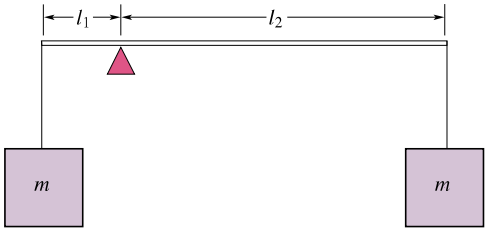


Obr. 11.42 Úloha 72

73Ú. Dvě homogenní plné koule mají stejnou hmotnost 1,65 kg s poloměry 0,226 m a 0,854 m. (a) Pro každou z nich vypočtěte moment síly, která kouli roztočí za 15,5 s z klidu na úhlovou rychlost 317 rad/s. Koule se může otáčet kolem osy vedené jejím středem. (b) Pro každou kouli zjistěte, jak velká tečná síla musí působit v bodě na rovníku, aby její moment vzhledem k ose otáčení měl požadovanou velikost.

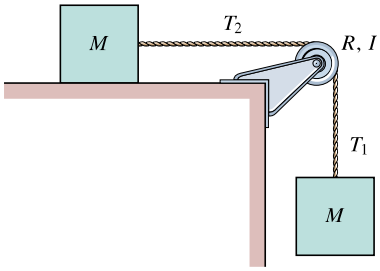
74Ú. Tělíska použitá v Atwoodově padostroji na obr. 5.23 mají hmotnosti 500 g a 460 g. Kladka o poloměru 5,00 cm se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Po uvolnění soustavy pokleslo těžší těleso o 75,0 cm za dobu 5,00 s (vlákno v kladce neprokluzuje). (a) Určete zrychlení těles a tahovou sílu vlákna působící na (b) těžší a (c) lehčí těleso. (d) Vypočtěte úhlové zrychlení kladky a (e) její moment setrvačnosti.

75Ú. Na obr. 11.43 jsou znázorněna dvě tělesa o stejných hmotnostech m, zavěšená na koncích tuhé tyče o délce $l_1 + l_2$, kde $l_1 = 20$ cm a $l_2 = 80$ cm. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Tyč je podepřena břitem podle obrázku. Držíme ji nejprve ve vodorovné poloze a pak uvolníme. Vypočtěte zrychlení těles bezprostředně po uvolnění.



Obr. 11.43 Úloha 75

76Ú. Dvě stejná tělesa o hmotnosti M jsou spojena vláknem zanedbatelné hmotnosti, které je vedeno přes kladku o poloměru R a momentu setrvačnosti I (obr. 11.44). Vlákno v kladce neprokluzuje, kladka se může otáčet bez tření. Předem nevíme, zda lze tření mezi tělesem a vodorovnou podložkou zanedbat. Po uvolnění soustavy se tělesa pohybovala se zrychlením o stálé velikosti. Za dobu t se kladka otočila o úhel θ. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kladky, (b) zrychlení těles, (c) tahovou sílu v horní a dolní části vlákna. Výsledky vyjádřete pomocí veličin M, I, R θ, g a t.



Obr. 11.44 Úloha 76

ODST. 11.10 Práce a kinetická energie při otáčivém pohybu

77C. (a) Pro soustavu na obr. 11.18 jsou zadány tyto hodnoty: $R = 12$ cm, $M = 400$ g a $m = 50$ g. Určete rychlost tělesa v okamžiku, kdy pokleslo z počáteční klidové polohy o 50 cm. Úlohu řešte pomocí zákona zachování mechanické energie. (b) Zopakujte výpočet pro $R = 5{,}0$ cm.

78C. Kliková hřídel v automobilovém motoru přenáší při úhlové rychlosti 1 800 ot/min výkon 100 HP = 74,6 kW. Určete odpovídající silový moment.

79C. Tenký prstenec o hmotnosti 32,0 kg a poloměru 1,20 m má v jistém okamžiku $t = 0$ úhlovou rychlostí 280 ot/min. Během dalších 15,0 s se prstenec zastaví. (a) Vypočtěte práci brzdných sil a (b) odpovídající výkon.

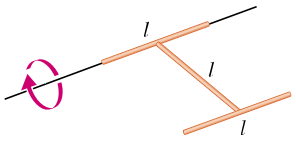
80C. Tenká tyč o délce l a hmotnosti m je na jednom konci volně zavěšena. Po vychýlení kmitá kolem rovnovážné polohy jako kyvadlo, rovnovážnou polohou prochází úhlovou rychlostí ω. (a) Vypočtěte kinetickou energii tyče při průchodu rovnovážnou

polohou. (b) Určete výšku těžiště kyvadla v bodě obratu nad jeho rovnovážnou polohou. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

81Ú. Představme si, že bychom měli za jeden den roztočit Zemi z klidu na její současnou úhlovou rychlost. Vypočtěte (a) potřebný moment působící síly, (b) dodanou energii, (c) průměrný výkon síly při tomto hypotetickém ději.

82Ú. Tyčový metr je spodním koncem opřen o podlahu a jeho horní konec přidržujeme. V jistém okamžiku horní konec uvolníme a tyčový metr padá. Vypočtěte rychlost jeho volného konce v okamžiku dopadu na podlahu za předpokladu, že spodní konec během pádu nepodklouzl. (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie a považujte tyč za velmi tenkou.)

83Ú. Tuhé těleso se skládá ze tří stejných tenkých tyčí o délce l spojených do tvaru písmene H (obr. 11.45). Těleso se může otáčet kolem vodorovné osy, která prochází jednou nožkou písmene H. Těleso uvolníme v poloze, kdy je rovina písmene H vodorovná. Vypočtěte jeho úhlovou rychlost v okamžiku, kdy je rovina písmene H svislá.

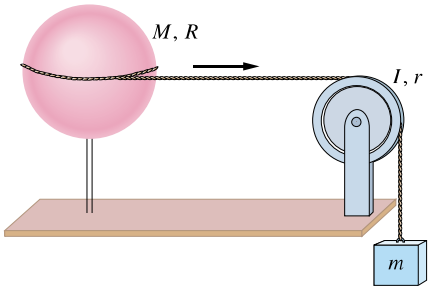


Obr. 11.45 Úloha 83

84Ú. Homogenní válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 20 kg se může volně otáčet kolem vodorovné osy, rovnoběžné s jeho rotační osou symetrie. Vzdálenost obou os je 5,0 cm. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti válce vzhledem k zadané ose otáčení. (b) Válec uvolníme z klidové polohy, v níž byly osa otáčení a osa symetrie válce ve stejné výšce. Jaká je úhlová rychlost válce v okamžiku, kdy prochází rovnovážnou polohou? (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie.)

85Ú. Homogenní list vrtulníkového rotoru na obr. 11.36 má délku 7,80 m a hmotnost 110 kg. (a) Jakou silou působí list na svorník, jímž je připevněn k ose rotoru, otáčí-li se úhlovou rychlostí 320 ot/min? (*Tip*: Při řešení této úlohy lze list nahradit částicí umístěnou v jeho těžišti. Přemýšlejte proč.) (b) Vypočtěte moment síly, kterou musí působit motor vrtulníku na rotor, aby získal úhlovou rychlost 320 ot/min za dobu 6,7 s při roztáčení z klidu. Zanedbejte odpor vzduchu. (V tomto případě již nelze nahradit rotorový list částicí umístěnou do jeho těžiště. Proč? List nahraďte tenkou homogenní tyčí.) (c) Jakou práci vykonal motor při roztočení rotoru vrtulníku z klidu na výslednou úhlovou rychlost?

86Ú. Homogenní kulová slupka o hmotnosti M a poloměru R se otáčí bez tření kolem svislé osy (obr. 11.46). Vlákno zanedbatelné hmotnosti je navinuto podél jejího rovníku, je vedeno přes kladku s momentem setrvačnosti I a na jeho druhém konci je připevněno malé tělísko o hmotnosti m. Tření v ose kladky zanedbáme a předpokládáme, že vlákno po povrchu kulové slupky neklouže. V určitém okamžiku soustavu uvolníme. Určete rychlost padajícího tělíska v okamžiku, kdy urazilo dráhu h. Použijte zákon zachování mechanické energie.

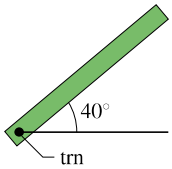


Obr. 11.46 Úloha 86

87Ú. Vysoký komín válcového tvaru padá tak, že se otáčí kolem svého konce uchyceného u země. Nahraďte komín tenkou tyčí o délce h a vyjádřete (a) normálovou a (b) tečnou složku zrychlení částice na vrcholu komína jako funkci úhlu θ, který komín svírá se svislým směrem. (c) Určete hodnotu θ, pro kterou má zrychlení této částice velikost g.

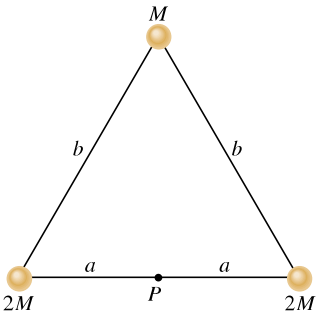
88Ú. Na obou koncích tenké ocelové tyče o délce 1,20 m a hmotnosti 6,40 kg jsou upevněny malé míčky o hmotnostech 1,06 kg. Tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. V jistém okamžiku měla tyč úhlovou rychlost 39,0 ot/s. Za dalších 32,0 s se vlivem třecích sil zastavila. Předpokládejme, že moment třecích sil je konstantní. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení tyče, (b) moment třecích sil, (c) celkovou ztrátu mechanické energie vlivem sil tření a (d) počet otáček, které tyč vykonala od začátku měření do okamžiku zastavení. (e) Předpokládejme nyní, že moment třecích sil není konstantní. Kterou z veličin (a), (b), (c), nebo (d) je přesto možné vypočítat bez dodatečné informace? Uveďte její hodnotu.

89Ú. Homogenní tyč o hmotnosti 1,5 kg má délku 2,0 m (obrázek 11.47) a může se otáčet bez tření kolem vodorovného čepu umístěného na jednom jejím konci. Tyč uvedeme do výchozí klidové polohy, v níž svírá s vodorovným směrem úhel 40°, a uvolníme. (a) Určete úhlové zrychlení tyče v okamžiku jejího uvolnění. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené čepem je 2,0 kg·m^2. (b) Pomocí zákona zachování mechanické energie určete úhlovou rychlost tyče v okamžiku, kdy prochází vodorovnou polohou.



Obr. 11.47 Úloha 89

90Ú. Tuhé těleso na obr. 11.48 se skládá ze tří částic spojených tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Těleso se otáčí kolem osy vedené bodem P kolmo k rovině obrázku. Pro hodnoty $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm a $b = 50$ cm vypočtěte práci nutnou k roztočení tělesa z klidu na úhlovou rychlost 5,0 rad/s.



Obr. 11.48 Úloha 90

91Ú*. Automobil je vybaven setrvačníkem pro akumulaci energie ve tvaru homogenního kotouče o průměru 1,1 m. Setrvačník je spojen převody s koly automobilu tak, že jeho úhlová rychlost je 240 ot/s při rychlosti automobilu 80 km/h. Celková hmotnost automobilu je 800 kg, setrvačník váží 200 N. Automobil je zpočátku v klidu a začne sjíždět bez motoru po svahu délky 1 500 m a úhlem sklonu 5°. Třecí síly a moment setrvačnosti kol automobilu zanedbejte a vypočtěte (a) rychlost automobilu, (b) úhlové zrychlení setrvačníku a (c) výkon dodávaný setrvačníku na konci svahu.

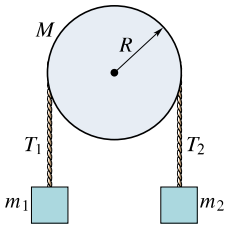
PRO POČÍTAČ

92Ú. Dva kotouče se mohou nezávisle na sobě otáčet kolem rovnoběžných os. První kotouč má poloměr 7,0 cm a moment setrvačnosti 1,5 kg·m^2, poloměr druhého je 15 cm a moment setrvačnosti 3,5 kg·m^2. První kotouč je v klidu a druhý roztočíme úhlovou rychlostí 175 rad/s. Osy kotoučů pak posuneme tak, aby se jejich obvody dotkly. Kotouče na sebe působí normálovými silami o velikostech 150 N, koeficient dynamického tření mezi kotouči je 0,25. (a) Vytvořte tabulku obsahující časové závislosti úhlových rychlostí kotoučů v časovém intervalu 80 s měřeném od okamžiku jejich dotyku. Hodnoty tabelujte s krokem 2 s. Sestrojte grafy těchto závislostí a graf časové závislosti celkové kinetické energie kotoučů. Zachovává se celková kinetická energie? (b) Jaký vliv na pohyb kotoučů má třecí síla? Výpočty zopakujte pro koeficient dynamického tření 0,50. Závisí doba potřebná k ustavení výsledné (rovnovážné) úhlové rychlosti kotoučů na koeficientu dynamického tření? Závisí výsledná úhlová rychlost kotoučů a jejich celková výsledná kinetická energie na koeficientu dynamického tření?

93Ú. V následující tabulce jsou uvedeny souřadnice pěti částic ležících v rovině xy. Částice jsou pevně spojeny a tvoří tuhé těleso. Vypočtěte moment setrvačnosti tohoto tělesa (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y a (c) vzhledem k ose z. (d) Najděte polohu těžiště tělesa.

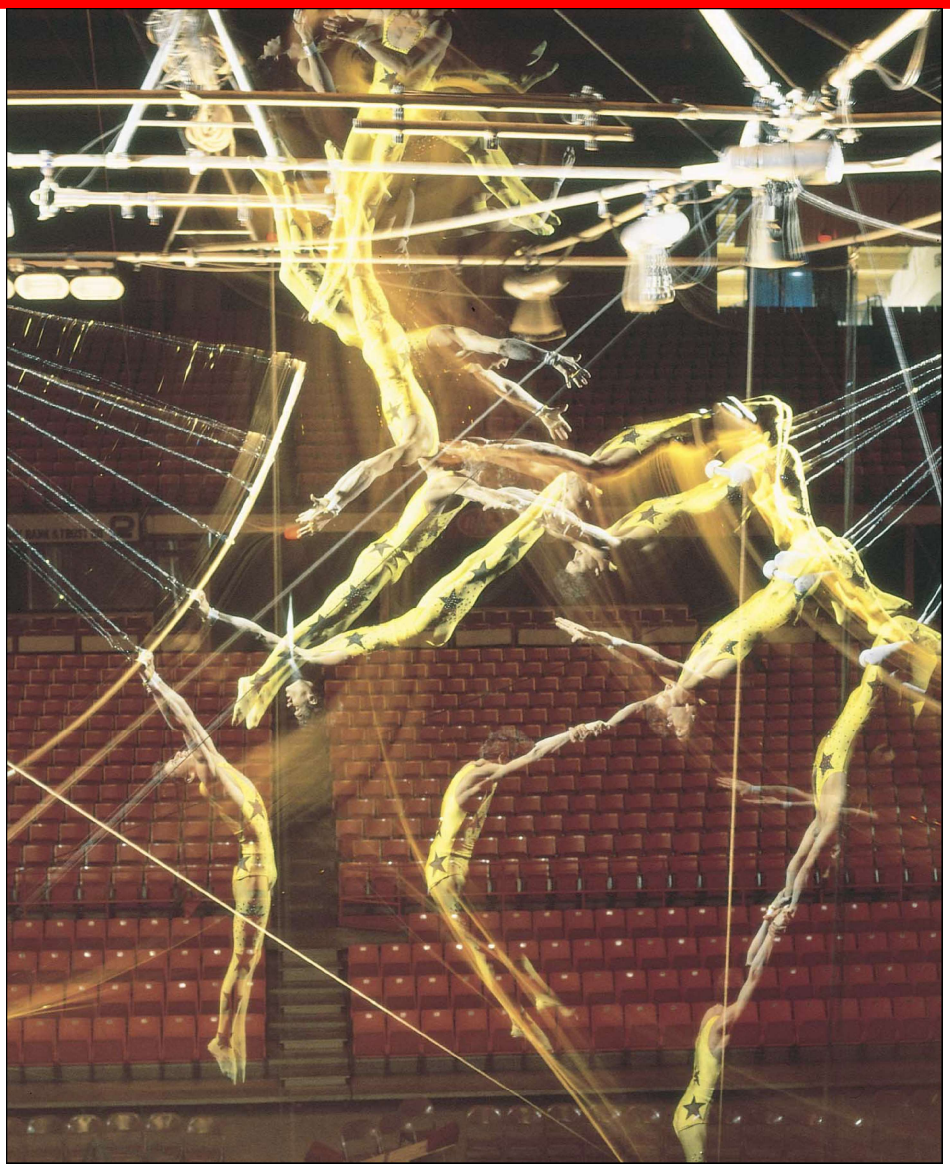
TĚLESO	1	2	3	4	5
Hmotnost (g)	500	400	300	600	450
x (cm)	15	−13	17	−4,0	−5,0
y (cm)	20	13	−6,0	−7,0	9,0

94Ú. Na obr. 11.49 jsou znázorněna dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 400$ g a $m_2 = 600$ g. Tělesa jsou spojená vláknem zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes homogenní kladku o hmotnosti $M = 500$ g a poloměru $R = 12{,}0$ cm. Kladka se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Vlákno po obvodu kladky neklouže. Soustavu uvolníme z klidové polohy. Vypočtěte (a) velikost zrychlení těles, (b) tahovou sílu T_1 v levé části vlákna a (c) tahovou sílu T_2 v pravé části vlákna.

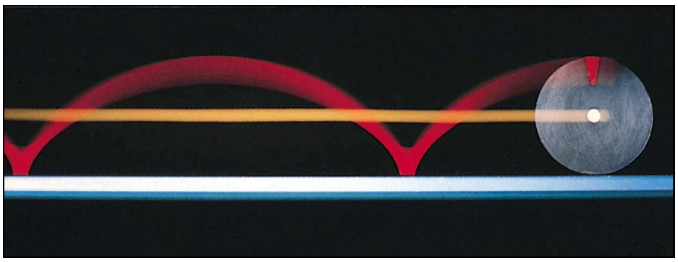


Obr. 11.49 Úloha 94

12
Valení, moment síly a moment hybnosti



K nejobtížnějším varietním číslům patří bezesporu vícenásobná salta. Trojité salto se poprvé povedlo již v roce 1897 jednomu z tehdy populárních vzdušných akrobatů při skoku z visuté hrazdy, na ***čtyřnásobné*** *si však milovníci těchto atrakcí museli počkat ještě dalších 85 let, do roku 1982. Migueli Vazquesovi se tehdy podařilo provést během letu celé čtyři otáčky, než ho zachytil jeho bratr Juan. Oba artisté byli v té chvíli svým výkonem téměř zaskočeni. Proč je vícenásobné salto tak obtížné? Může k jeho zvládnutí nějak napomoci znalost fyzikálních zákonů?*



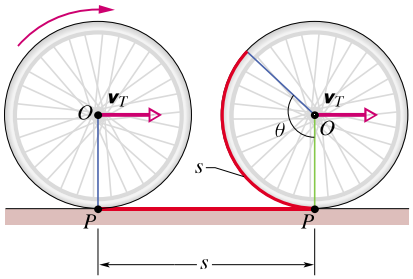
Obr. 12.1 Fotografie valícího se kotouče získaná při dlouhé expoziční době. Na kotouči jsou připevněny dva bodové zdroje světla, jeden v jeho středu a jeden na obvodu. Světélko umístěné na obvodu opisuje křivku zvanou *cykloida*.

12.1 VALENÍ

Všimněme si pohybu jednotlivých částí kola při jízdě cyklisty po přímé silnici. Středy obou kol se pohybují vpřed, jejich pohyb je posuvný. Trajektorie bodů na obvodu kol jsou však mnohem složitější (obr. 12.1). Ukážeme si, že pohyb valícího se kola lze chápat buď jako složení posuvného a otáčivého pohybu, nebo jako čistě otáčivý pohyb kolem vhodně zvolené osy.

Valení jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu

Pozorujme bicyklové kolo, které se odvaluje stálou rychlostí po přímé dráze a neprokluzuje. Předpokládejme, že hmotnost kola je rozložena symetricky, takže jeho těžiště splývá s jeho geometrickým středem O. Bod O se pohybuje vpřed stálou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ podle obr. 12.2. Bod P, v němž se kolo dotýká silnice, je v každém okamžiku přesně pod bodem O. Pohybuje se tedy po silnici stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ jako těžiště kola.



Obr. 12.2 Těžiště O valícího se kola se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ a za dobu t urazí dráhu s. Kolo se přitom pootočí o úhel θ. Bod dotyku P kola se zemí urazí za tuto dobu rovněž dráhu s.

Za dobu t urazí body O a P dráhu s. Z pohledu cyklisty se při tom kolo otočí kolem svého středu o úhel θ. Také délka oblouku části pneumatiky, která během doby t přišla do styku se silnicí, je s. Tuto dráhu urazil z pohledu cyklisty bod na pneumatice, který se dotýkal silnice na počátku měření. Vztah mezi délkou oblouku s a otočením θ je velmi jednoduchý. Platí totiž rov. (11.15):

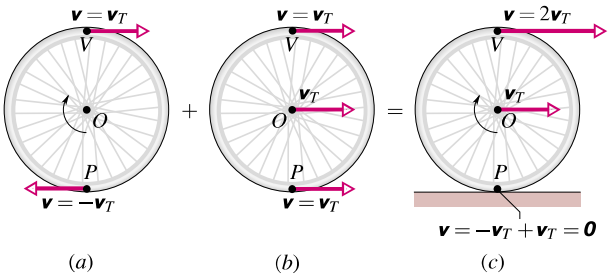
$$s = R\theta, \tag{12.1}$$

kde R je poloměr kola. Rychlost středu kola $\boldsymbol{v}_T$ má velikost $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, úhlová rychlost kola ω vzhledem k ose vedené jeho středem je $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Derivováním rov. (12.1) podle času dostaneme

$$v_T = \omega R. \tag{12.2}$$

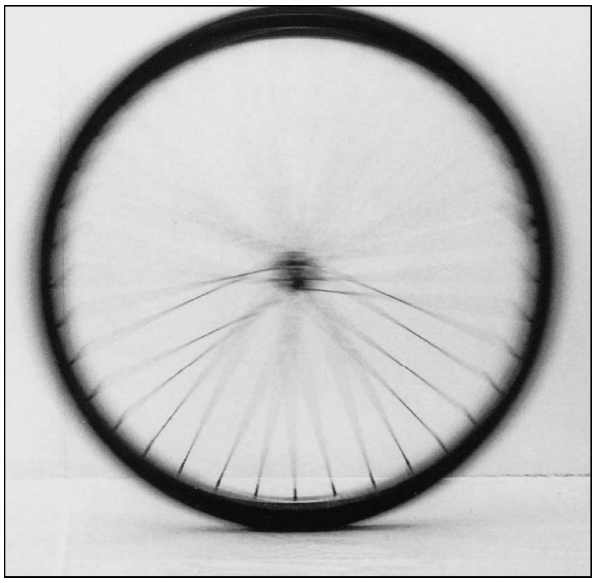
Uvědomme si, že rov. (12.2) platí pouze v případě, že se kolo valí *bez prokluzování*.

Obr. 12.3 nás přesvědčí, že valení kola můžeme chápat jako složení posuvného a otáčivého pohybu. Obr. 12.3a znázorňuje pouze otáčení kola, tj. jeho pohyb z pohledu cyklisty, který vidí osu otáčení jako nepohyblivou. (Otáčivý pohyb kolem pevné osy jsme podrobně probrali v kap. 11.) Každý bod kola rotuje kolem této osy úhlovou rychlostí ω. Libovolný bod na jeho vnějším obvodu má obvodovou rychlost v_T, danou vztahem (12.2). Obr. 12.3b zachycuje pouze posuvný pohyb kola, který bychom pozorovali, kdyby se kolo vůbec neotáčelo. Každý jeho bod by se v takovém případě pohyboval doprava rychlostí $\boldsymbol{v}_T$.



Obr. 12.3 Valení kola jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu. (a) Otáčení kola: všechny body kola obíhají se stejnou úhlovou rychlostí ω. Body na jeho vnějším obvodu mají stejnou obvodovou rychlost $v = v_T$. V obrázku jsou vyznačeny vektory rychlosti $\boldsymbol{v}$ nejvýše a nejníže položeného bodu kola V, resp. P. (b) Posuv kola: všechny body se pohybují doprava se stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$, shodnou s rychlostí středu O. (c) Valivý pohyb kola je složením pohybů (a) a (b).

Složením pohybů na obr. 12.3a, b vznikne výsledný valivý pohyb, který vidíme na obr. 12.3c. Všimněme si, že body v bezprostřední blízkosti bodu P jsou téměř v klidu, zatímco body u vrcholu V se pohybují rychleji než kterákoli jiná část kola, rychlostí blízkou $2v_T$. Fotografie



Obr. 12.4 Fotografie valícího se bicyklového kola. Obraz kovových paprsků v dolní části fotografie je podstatně ostřejší než nahoře. Pohyb paprsků v horní části kola je tedy rychlejší, ve shodě s obr. 12.3c.

valícího se bicyklového kola na obr. 12.4 to dokumentuje velmi přesvědčivě. Obraz drátů u vrcholu kola je zcela rozmazán, zatímco dráty ve spodní části jsou zachyceny poměrně ostře.

Valení libovolného tělesa kruhového průřezu lze tedy rozložit na „čisté“ otáčení a „čistý“ posuv, přesně podle obr. 12.3a, b.

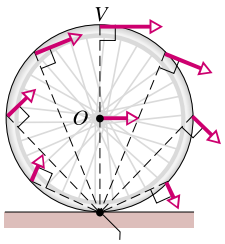
Valení jako otáčivý pohyb

Jiný způsob pohledu na valivý pohyb nabízí obr. 12.5. Můžeme jej totiž interpretovat také jako „čisté“ otáčení kolem *okamžité* osy, která je kolmá k rovině kola a právě prochází bodem jeho dotyku se silnicí (bod P na obr. 12.5). Okamžité rychlosti jednotlivých bodů valícího se kola jsou v obr. 12.5 vyznačeny šipkami.

Otázka: Jakou úhlovou rychlost přisoudí kolu pozorovatel v klidu, posuzuje-li jeho pohyb jako otáčení kolem této nové osy?

Odpověď: Úhlová rychlost otáčivého pohybu kola vzhledem ke klidnému pozorovateli je stejná jako vzhledem k cyklistovi, který pozoruje „čistou“ rotaci kola kolem osy vedené jeho středem.

Abychom se o správnosti odpovědi na předchozí otázku přesvědčili, vypočtěme rychlost bodu V na vrcholu kola ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Vzdálenost vrcholu V od osy vedené bodem P na obr. 12.5 je rovna průměru kola $2R$. Bod V se tedy podle rov. (12.2)



Obr. 12.5 Valivý pohyb může být chápán jako otáčení s úhlovou rychlostí ω kolem osy, která v každém okamžiku prochází bodem P. Šipky znázorňují vektory okamžité rychlosti vybraných bodů na obvodu kola. Lze je získat sečtením odpovídajících rychlostí posuvného a otáčivého pohybu podle obr. 12.3.

pohybuje rychlostí o velikosti

$$v_{\text{vrchol}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_T,$$

přesně v souhlasu s obr. 12.3c. Podobně můžeme určit rychlosti bodů O a P a ověřit tak správnost obr. 12.3c.

KONTROLA 1: Zadní kolo klaunova jízdního kola má dvakrát větší poloměr než kolo přední. (a) Rozhodněte, zda je rychlost bodu na vrcholu zadního kola větší, menší, nebo stejná jako rychlost odpovídajícího bodu předního kola. (b) Rozhodněte, zda je úhlová rychlost zadního kola větší, menší, nebo stejná jako úhlová rychlost předního kola.

Obruč na obrázku se valí bez prokluzování. Kdo jde rychleji? Pes nebo poník?

Kinetická energie

Pokusme se nyní vypočítat kinetickou energii valícího se kola vzhledem k vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Chápeme-li valení jako otáčení kolem osy vedené bodem P na obr. 12.5, dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{12.3}$$

kde ω je úhlová rychlost kola a I_P jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené bodem P. Podle Steinerovy věty (11.27) je

$$I_P = I_T + mR^2, \tag{12.4}$$

kde m je hmotnost kola a I_T jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Dosazením z rovnice (12.4) do (12.3) dostáváme

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \omega^2.$$

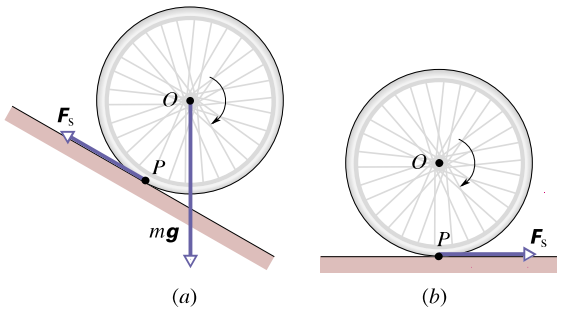
Pomocí vztahu $v_T = \omega R$ (rov. (12.2)) získáme nakonec výsledný vztah pro E_k ve tvaru

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_T^2. \tag{12.5}$$

První z členů na pravé straně této rovnice představuje kinetickou energii otáčivého pohybu kola kolem osy vedené jeho těžištěm (obr. 12.3a), druhý člen odpovídá pohybu posuvnému (obr. 12.3b).

Valení a třecí síly

Jakou roli vlastně hrají při valivém pohybu třecí síly? Představme si, že se kolo valí po vodorovné podložce stálou rychlostí, právě tak, jak ukazuje obr. 12.2. Mohli bychom je do takového pohybu vůbec uvést, kdyby byla podložka dokonale hladká? Pokud bychom je roztočili kolem jeho osy na úhlovou rychlost ω a udělili mu ještě vodorovnou rychlost o velikosti $v_T = \omega R$, mohlo by se to podařit. Vzhledem k přesně „nastavenému“ vztahu mezi úhlovou rychlostí kola a rychlostí jeho posuvného pohybu by kolo v bodě P samozřejmě neprokluzovalo, nesmýkalo by se po podložce. Popsaným způsobem však můžeme uvést kolo do valivého pohybu bez klouzání i v případě, že podložka *nebude* dokonale hladká. Kolo se po ní nebude smýkat ani v tomto případě. Zanedbáme-li tzv. valivý odpor podložky proti jeho pohybu, způsobený mírnými deformacemi obou objektů, snadno si uvědomíme, že jedinou silou, kterou by podložka *mohla* na kolo působit, je vodorovná síla statického tření. Posuvný pohyb kola je však podle předpokladu rovnoměrný a žádnou další vodorovnou silou na kolo nepůsobíme. Statická třecí síla je proto nulová. Jiná situace nastane, pokusíme-li se změnit postupnou (v_T) nebo úhlovou (ω) rychlost kola. V takovém případě musíme na kolo působit určitou vodorovnou silou a připustit, že se kolo může v bodě P smýknout po podložce. Podložka bude na kolo působit v bodě P třecí silou. Pokud ke smyku kola ještě nedojde, bude tato síla $\boldsymbol{F}_s$ mít povahu *statického* tření a bude směřovat *„proti snaze“* kola podklouznout. V případě smyku již půjde o tření *dynamické* a třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ bude namířena proti směru *skutečného* skluzu.



Obr. 12.6 (a) Kolo se valí bez klouzání po nakloněné rovině. V bodě P na ně působí síla statického tření $\boldsymbol{F}_s$ proti „snaze“ kola sklouznout, tj. proti směru, ve kterém by kolo v bodě P uklouzlo, kdyby byla podložka dokonale hladká. (b) Kolo se valí vodorovně s narůstající úhlovou rychlostí. Bod P má v tomto případě snahu uklouznout směrem dozadu (představte si automobil, který se prudce rozjíždí na zledovatělém parkovišti). Síla statického tření $\boldsymbol{F}_s$ působí na kolo v bodě P opět *proti* jeho možnému skluzu. Pokud by se již kolo na obrázcích (a) a (b) smýkalo, působila by na ně podložka v bodě P silou dynamického tření $\boldsymbol{F}_d$.

Na obr. 12.6a se kolo valí po nakloněné rovině. V jeho těžišti na ně působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, jejíž rameno vzhledem k ose otáčení vedené těžištěm je nulové. Je tedy nulový i odpovídající silový moment. Tíhová síla nepřispívá k roztáčení kola, pouze se snaží kolo smýkat dolů po nakloněné rovině. V bodě P působí na kolo ještě třecí síla směřující proti jeho „tendenci ke skluzu“, tj. vzhůru podél nakloněné roviny. Její rameno vzhledem k ose otáčení kola je *nenulové* a má velikost poloměru kola. Moment třecí síly roztáčí kolo vzhledem k ose vedené jeho středem.

Na obr. 12.6b se kolo valí po vodorovné rovině s narůstající úhlovou rychlostí ω. Při tom se jeho spodní část snaží podklouznout doleva. (Abychom si tuto skutečnost lépe uvědomili, můžeme si představit automobil, jehož řidič se snaží o prudký rozjezd na zledovatělém parkovišti.) Třecí síla, jíž působí podložka na kolo v bodě P, směřuje opět proti očekávanému směru skluzu. Z hlediska soustavy cyklista+jízdní kolo je silou vnější a určuje zrychlení jejího těžiště.

PŘÍKLAD 12.1

Tuhý homogenní válcový kotouč o hmotnosti $m = 1{,}4\,\text{kg}$ a poloměru $R = 8{,}5\,\text{cm}$ se valí po vodorovném stole rychlostí $v = 15\,\text{cm/s}$.

(a) Vypočtěte rychlost bodu na jeho vrcholu.

ŘEŠENÍ: „Rychlostí valícího se tělesa“, v našem příkladu kotouče, rozumíme vždy rychlost jeho těžiště. Z obr. 12.3c je zřejmé, že rychlost bodu na vrcholu kotouče je v porovnání s rychlostí jeho těžiště dvojnásobná, tj.

$$v_{\text{vrchol}} = 2v_T = 2(15\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}) = 30\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete úhlovou rychlost kotouče ω.

ŘEŠENÍ: Z rov. (12.2) dostaneme

$$\omega = \frac{v_T}{R} = \frac{(15\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})}{(8{,}5\,\text{cm})} = \\ = 1{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}28\,\text{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek je nezávislý na volbě polohy osy otáčení: můžeme ji vést bodem P podle obr. 12.5 stejně dobře jako těžištěm kotouče.

(c) Vypočtěte kinetickou energii kotouče.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahů $I_T = \frac{1}{2}mR^2$, $v_T = \omega R$ a rovnice (12.5) dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mR^2)(v_T/R)^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \tfrac{3}{4}mv_T^2 = \\ = \tfrac{3}{4}(1{,}4\,\text{kg})(0{,}15\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = \\ = 0{,}024\,\text{J} = 24\,\text{mJ}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká část celkové kinetické energie kotouče souvisí s jeho posuvným pohybem a jaká část přísluší otáčivému pohybu kolem osy vedené jeho těžištěm?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie posuvného pohybu odpovídá druhému členu v rov. (12.5), tj. $\frac{1}{2}mv_T^2$, a podle výsledku části (c) tedy představuje

$$\frac{\frac{1}{2}mv_T^2}{\frac{3}{4}mv_T^2} = \frac{2}{3} \doteq 67\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

celkové kinetické energie. Zbývajících 33 % odpovídá pohybu otáčivému.

Příspěvek posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa závisí na jeho momentu setrvačnosti. V tab. 12.1 jsou shrnuty momenty setrvačnosti tří těles, prstence, válcového kotouče a koule, vzhledem k ose největší symetrie. Prstenec má svou hmotnost rozloženou ze všech těles nejdále od této osy. Poměrně velká část kinetické energie valícího se prstence proto připadá na otáčivý pohyb. Koule, jejíž hmotnost je rozložena blízko osy otáčení, má moment setrvačnosti nejmenší. Příspěvek její rotace k celkové kinetické energii valivého pohybu je tedy malý.

Moment setrvačnosti obecného rotačně symetrického tělesa je možné zapsat jako β-násobek momentu setrvačnosti prstence stejné hmotnosti, jehož poloměr R je shodným s poloměrem největšího řezu tělesa rovinou kolmou k ose symetrie. Je-li těleso homogenní, lze pomocí parametru β vyjádřit zvlášť příspěvky posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa. Odpovídající vztahy pro prstenec, válec a kouli jsou uvedeny v posledním řádku tab. 12.1. Pro prstenec, válec a kouli nabývá parametr β hodnot 1, $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{5}$.

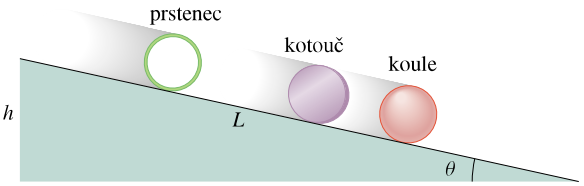
Tabulka 12.1 **Podíl kinetické energie translačního a rotačního pohybu na celkové kinetické energii valivého pohybu těles**

TĚLESO	MOMENT SETRVAČNOSTI I_T	PŘÍSP. K CELK. ENERGII TRANSLACE	PŘÍSP. K CELK. ENERGII ROTACE
Prstenec	$1mR^2$	50 %	50 %
Válec, válc. kotouč	$\frac{1}{2}mR^2$	67 %	33 %
Koule	$\frac{2}{5}mR^2$	71 %	29 %
Obecné těleso[a]	βmR^2	$100\frac{1}{1+\beta}$ %	$100\frac{\beta}{1+\beta}$ %

[a] Hodnotu β určíme jako $\beta = I_T/(mR^2)$.

PŘÍKLAD 12.2

Homogenní kuželková koule o poloměru $R = 11\,\text{cm}$ a hmotnosti $m = 7{,}2\,\text{kg}$ se valí dolů po nakloněné rovině o délce $L = 2{,}1\,\text{m}$ a úhlu sklonu $\theta = 34°$ (obr. 12.7). Jakou rychlostí se bude koule pohybovat na konci nakloněné roviny?



Obr. 12.7 Příklady 12.2 a 12.3. Prstenec, kotouč a koule se valí dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ. Přestože tělesa uvolníme ve stejném místě a stejném okamžiku, dorazí na konec nakloněné roviny v různém pořadí.

ŘEŠENÍ: Uvažujme pohyb koule od okamžiku jejího uvolnění v nejvyšším bodě nakloněné roviny až do chvíle, kdy dorazí k jejímu konci. Těžiště koule pokleslo během tohoto pohybu o svislou vzdálenost $h = L\sin\theta$. Tíhová potenciální energie soustavy koule + Země se tak snížila o hodnotu $mgL\sin\theta$. O stejnou hodnotu však vzrostla kinetická energie

koule. Podle rov. (12.5) platí

$$mgL\sin\theta = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2. \qquad (12.6)$$

Podle vztahu (g) v tab. 11.2 platí pro plnou kouli $I_T = \frac{2}{5}mR^2$. Úhlovou rychlost ω můžeme nahradit výrazem v_T/R. Dosazením do rov. (12.6) dostáváme

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(mR^2)\left(\frac{v_T}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Z této rovnice vyjádříme v_T:

$$v_T = \sqrt{\tfrac{10}{7}gL\sin\theta} = \\ = \sqrt{\tfrac{10}{7}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}1\ \mathrm{m})\sin 34^\circ} = \\ = 4{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru koule.

PŘÍKLAD 12.3

Úvahy v př. 12.2 nyní zobecníme. Homogenní prstenec, kotouč a koule o stejné hmotnosti m a stejném poloměru R jsou současně uvolněny v nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce $L = 2{,}5$ m a úhlu sklonu $\theta = 12^\circ$ (obr. 12.7).

(a) Které z těles dorazí na konec nakloněné roviny nejdříve?

ŘEŠENÍ: Odpověď snadno najdeme v tab. 12.1. U koule je poměrný příspěvek posuvného pohybu k celkové kinetické energii ze všech tří těles největší (71 %). Koule tedy závod vyhraje. Jako druhý skončí kotouč a poslední bude prstenec.

(b) Určete rychlost každého z těles na konci nakloněné roviny.

ŘEŠENÍ: Těžiště každého z těles poklesne během „závodu“ o tutéž svislou vzdálenost h. Stejně jako při volném pádu klesne potenciální energie soustavy těleso + Země o hodnotu mgh. O stejnou hodnotu vzroste kinetická energie tělesa. Na konci nakloněné roviny mají tedy všechna tělesa stejnou kinetickou energii. Pouze část této energie, závislá na rozložení hmotnosti tělesa, však připadá na posuvný pohyb.

V rov. (12.5) položíme $\omega = v_T/R$ a dostaneme

$$mgh = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}I_T(v_T^2/R^2) + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(I_T/R^2)v_T^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2. \qquad (12.7)$$

Po dosazení $h = L\sin\theta$ vyřešíme získanou rovnici vzhledem k neznámé v_T:

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}}. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (12.8)$$

Řešení je vyjádřeno pomocí momentu setrvačnosti tělesa I_T.

Všimněme si, že rychlost tělesa nezávisí ani na jeho hmotnosti ani na poloměru, ale pouze na rozložení hmoty kolem osy jeho rotační symetrie. Tato skutečnost je z výsledku (12.8) patrná na první pohled. Moment setrvačnosti tělesa I_T v něm totiž vystupuje pouze v podílu I_T/mR^2. Dětská hrací kulička i kuželková koule budou mít na konci nakloněné roviny stejnou rychlost. Z nakloněné roviny se tedy skutálí za stejnou dobu. Koule v tomto závodě porazí kotouč libovolné hmotnosti a poloměru. Prstenec o libovolné hmotnosti i poloměru je naopak za všech okolností odsouzen k porážce.

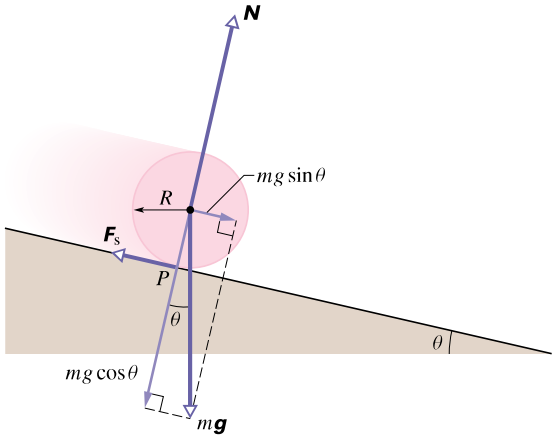
Pro prstenec (viz tab. 12.1) je $I_T/mR^2 = 1$. Jeho rychlost na konci „závodní dráhy“ je podle rov. (12.8)

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}} = \\ = \sqrt{\frac{2(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}5\ \mathrm{m})\sin 12^\circ}{1+1}} = \\ = 2{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Podobně získáme $v_T = 2{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pro kotouč ($I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$) a $2{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pro kouli ($I_T/mR^2 = \frac{2}{5}$). Tyto výsledky potvrzují náš odhad pořadí těles v části (a).

PŘÍKLAD 12.4

Uvažujme opět těleso o hmotnosti m a kruhovém průřezu o poloměru R, které se valí po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ (obr. 12.8). Při rozboru jeho pohybu se však nyní opřeme pouze o věty o hybnosti a o momentu hybnosti soustavy. Výsledek pak porovnáme s řešením př. 12.3, kde jsme použili zákon zachování mechanické energie.



Obr. 12.8 Příklad 12.4. Homogenní těleso kruhového průřezu o poloměru R se valí dolů po nakloněné rovině. Země na ně působí tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$, podložka pak normálovou silou $\boldsymbol{N}$ a třecí silou $\boldsymbol{F}_s$. Třecí síla směřuje vzhůru podél nakloněné roviny. Působiště síly $\boldsymbol{N}$ jsme pro přehlednost přesunuli podél její vektorové přímky do středu tělesa.

(a) Vypočtěte zrychlení valícího se tělesa.

ŘEŠENÍ: Na obr. 12.8 jsou znázorněny síly, kterými na těleso působí okolní objekty: tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, normálová síla $\boldsymbol{N}$ a statická třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$. Působištěm tíhové síly je těžiště tělesa. Je-li hmotnost tělesa rozložena symetricky vzhledem k ose o jeho geometrické rotační symetrie, splývá těžiště se středem geometrickým. Normálová síla a síla tření působí na nepatrnou plošku v okolí bodu P, kde se těleso dotýká nakloněné roviny. Momenty všech sil vztahujeme k ose o. Momenty tíhové a normálové síly vzhledem k této ose jsou ovšem nulové, a nepřispívají proto k urychlování otáčivého pohybu. Roztáčení tělesa ve směru chodu hodinových ručiček je způsobeno výhradně silou tření, jejíž moment je záporný. Rameno třecí síly vzhledem k ose o má délku R.

Pro posuvný pohyb tělesa platí věta o hybnosti ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$). V soustavě souřadnic, jejíž osa x směřuje vzhůru podél nakloněné roviny, má zápis x-ové složky této vektorové rovnice tvar

$$ma_x = \sum F_x = F_\mathrm{s} - mg\sin\theta. \qquad (12.9)$$

Rovnice obsahuje dvě neznámé, F_s a a_x. Potřebujeme pro ně další rovnici. Získáme ji z věty o momentu hybnosti ($I\varepsilon = \sum M$) vztažené k ose o, v níž použijeme vztah $\varepsilon = a_x/R$ (rov. (11.20)):

$$\sum M = -F_\mathrm{s}R = I_T\varepsilon = \frac{I_T a_x}{R}. \qquad (12.10)$$

Z rov. (12.10) dostaneme výraz pro sílu tření

$$F_\mathrm{s} = -\frac{I_T a_x}{R^2}. \qquad (12.11)$$

Znaménko minus znamená, že vektor třecí síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ má opačný směr než vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$. Dosazením z rov. (12.11) do (12.9) a řešením vzhledem k neznámé veličině a_x nakonec dostáváme

$$a_x = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.12)$$

(Větu o momentu hybnosti $I\varepsilon = \sum M$ jsme v kap. 11 odvodili pro otáčivý pohyb tělesa kolem osy, která je v klidu vzhledem ke vhodně zvolené inerciální vztažné soustavě. Poměrně elementárním výpočtem však lze ukázat, že její platnost zůstane zachována i pro případ, že osa otáčení je nepohyblivá ve vztažné soustavě spojené s těžištěm tělesa, jejíž pohyb vzhledem k soustavám inerciálním je pouze posuvný. Uvědomme si, že tato speciální *těžišťová* vztažná soustava může být i neinerciální.)

Při řešení úlohy bychom mohli vztáhnout větu o momentu hybnosti i k ose o_P vedené bodem P, v němž se těleso *dotýká* nakloněné roviny. Moment třecí síly vzhledem k této ose je nulový. V roli výsledného momentu sil $\sum M$ vystupuje nyní moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, jejíž rameno vzhledem k ose o_P má hodnotu $R\sin\theta$. Dostáváme tedy

$$\sum M = -mg(R\sin\theta) = I_P\varepsilon = \frac{I_P a_x}{R}, \qquad (12.13)$$

kde I_P je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o_P, vedené bodem P. Vypočteme jej pomocí Steinerovy věty

$$I_P = I_T + mR^2. \qquad (12.14)$$

Dosadíme za I_P z rov. (12.14) do (12.13) a vyjádříme neznámou a_x, dostaneme opět výsledek (12.12).

(b) Vypočtěte velikost třecí síly F_s.

ŘEŠENÍ: Dosazením z rov. (12.12) do (12.11) dostaneme

$$F_\mathrm{s} = mg\,\frac{\sin\theta}{1 + mR^2/I_T}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.15)$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že síla tření je menší než průmět tíhové síly do směru nakloněné roviny, jehož velikost je $mg\sin\theta$. Těleso se proto valí dolů zrychleně.

Například pro plný kotouč je podle tab. 12.1 $I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$. Pro zrychlení a velikost třecí síly pak z rov. (12.12) a (12.15) dostáváme

$$a_x = -\frac{2}{3}g\sin\theta \qquad \text{a} \qquad F_\mathrm{s} = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

(c) Určete rychlost tělesa na konci nakloněné roviny o délce L.

ŘEŠENÍ: Těleso se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. Platí tedy

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0). \qquad (12.16)$$

Položíme-li $x - x_0 = -L$ a $v_0 = 0$ a dosadíme-li za a_x výsledek (12.12), získáme rov. (12.8), přesně ve shodě s výpočtem pomocí zákona zachování mechanické energie.

KONTROLA 2: Stejné kotouče A a B se valí po vodorovné podlaze stejnou rychlostí. Kotouč A najede na nakloněnou rovinu a valí se po ní bez prokluzu vzhůru až do bodu obratu, který leží nad úrovní podlahy ve výšce h. Kotouč B stoupá po stejné nakloněné rovině, která je však dokonale hladká. Rozhodněte, zda je výška bodu obratu kotouče B nad úrovní podlahy větší, menší, či stejná jako h.

12.2 JOJO

Oblíbená hračka zvaná **jojo**, to je fyzikální laboratoř, která se vejde do kapsy. Nevěříte? Ukážeme si, co všechno lze pomocí pohybu joja demonstrovat. Představme si, že se jojo odvaluje podél vlákna dolů a urazí vzdálenost h. Potenciální energie soustavy jojo + Země při tom poklesne o hodnotu mgh, o kterou naopak vzroste energie kinetická. Tato změna přispěje ke zvýšení kinetické energie posuvného ($\frac{1}{2}mv_T^2$) i otáčivého ($\frac{1}{2}I_T\omega^2$) pohybu joja. Při zpětném pohybu hračky je naopak pokles kinetické energie kompenzován vzrůstem energie potenciální.

V modernějším provedení není vlákno joja pevně přivázáno k osičce, ale vytváří kolem ní volnou smyčku. Jakmile tělísko joja „narazí“ na dolní konec vlákna, začne vlákno působit na osičku svislou silou směřující vzhůru. Tato síla zastaví pokles tělíska, které pak spočívá ve smyčce vlákna a otáčí se kolem své osy. Jeho celková kinetická energie bude v tuto chvíli dána pouze kinetickou energií otáčivého pohybu. Takové „spící“ jojo můžeme opět „probudit“ zatáhnutím za vlákno. Vlákno se třením zachytí za osičku a jojo po něm začne „šplhat“ nahoru. Kinetickou energii otáčivého pohybu tělíska v nejnižší poloze (tedy ve spícím stavu) lze výrazně zvýšit, nebude-li se jojo roztáčet z klidu, ale udělíme-li mu určitou počáteční rychlost v_T (směrem dolů) a určitou počáteční úhlovou rychlost ω.

Zabývejme se nyní podrobněji pohybem hračky na základě impulzových vět. Na obr. 12.9a vidíme idealizované jojo se zanedbatelnou tloušťkou vlákna. Obr. 12.9b představuje příslušný silový diagram, v němž je vyznačena pouze osička. Odvodíme vztah pro zrychlení $\boldsymbol{a}$ tělíska. Pro posuvný pohyb použijeme větu o hybnosti ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$). V soustavě souřadnic s osou x namířenou svisle vzhůru dostaneme

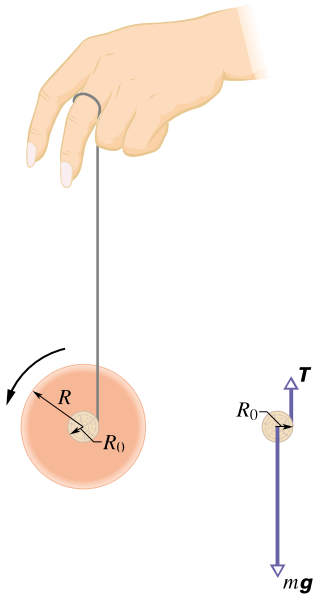
$$ma_x = \sum F_x = T - mg. \qquad (12.17)$$

Symbolem m jsme označili hmotnost tělíska a T představuje velikost tahové síly vlákna.

Pro rotační pohyb máme k dispozici větu o momentu hybnosti ($I\varepsilon = \sum M$), kterou vztáhneme k ose vedené těžištěm joja:

$$I\varepsilon = \sum M = TR_0, \qquad (12.18)$$

kde R_0 je poloměr osičky a I moment setrvačnosti joja vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ směřuje dolů (složka a_x je tedy *záporná*). Síly působící na jojo jsou, včetně správné orientace, zakresleny v obr. 12.9b. Moment tíhové síly vzhledem k ose vedené těžištěm tělíska je nulový, moment síly tahové je orientován proti směru otáčení hodinových ručiček. Úhlové zrychlení ε směřuje tedy rovněž proti směru otáčení hodinových ručiček (je *kladné*).



(a) (b)

Obr. 12.9 (a) Jojo. Vlákno zanedbatelného průměru je navinuto na osičce o poloměru R_0. (b) Silový diagram tělíska při pádu. Ve skutečnosti nelze průměr vlákna zcela zanedbat, a tak je třeba počítat s efektivní změnou poloměru osičky, v závislosti na okamžité délce navinutého vlákna.

Veličiny a a ε jsou proto spjaty vztahem $a_x = -\varepsilon R_0$. Dosazením $\varepsilon = -a_x/R_0$) do rov. (12.18) dostáváme

$$TR_0 = -\frac{Ia_x}{R_0}.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme T a dosadíme do rov. (12.17). Nakonec získáme zrychlení tělíska ve tvaru

$$a_x = -g\,\frac{1}{1 + I/mR_0^2}. \qquad (12.19)$$

Ideální jojo se tedy odvaluje podél vlákna dolů s konstantním zrychlením. Požadujeme-li, aby zrychlení bylo malé, potřebujeme lehké tělísko s velkým momentem setrvačnosti a malým poloměrem osičky.

PŘÍKLAD 12.5

Jojo je vyrobeno ze dvou mosazných kotoučů o tloušťce $b = 8{,}5\,\text{mm}$ a poloměru $R = 3{,}5\,\text{cm}$, spojených krátkou osičkou o poloměru $R_0 = 3{,}2\,\text{mm}$.

(a) Vypočtěte moment setrvačnosti joja vzhledem k jeho rotační ose symetrie. Při výpočtu zanedbejte moment setrvačnosti osičky. Hustota mosazi je $\varrho = 8\,400\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho ose symetrie je $\frac{1}{2}mR^2$. S dvojicí souosých kotoučů můžeme

pracovat jako s jediným diskem. Jeho celková hmotnost m, vypočtená pomocí jeho objemu V a hustoty ϱ materiálu, je

$$m = V\varrho = 2\pi R^2 b\varrho = \\ = 2\pi(0{,}035\,\mathrm{m})^2(0{,}008\,5\,\mathrm{m})(8\,400\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}) = \\ = 0{,}550\,\mathrm{kg}.$$

Jeho moment setrvačnosti je pak

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}035\,\mathrm{m})^2 = \\ = 3{,}4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Vlákno navinuté na osičce má délku $l = 1{,}1\,\mathrm{m}$. Jeho tloušťka je zanedbatelná. Zjistěte, s jakým zrychlením se jojo odvaluje dolů podél vlákna.

ŘEŠENÍ: Podle rov. (12.19) je

$$a_x = -g\,\frac{1}{1 + I/mR_0^2} = \\ = -\frac{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{1 + \dfrac{(3{,}4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2})}{(0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}003\,2\,\mathrm{m})^2}} = \\ = -0{,}16\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor zrychlení směřuje dolů a je nezávislý na tom, zda jojo právě klesá či stoupá.

Všimněme si, že v rov. (12.19) vystupuje parametr $\beta = I/mR_0^2$, definovaný v tab. 12.1. V našem příkladu má tento parametr ($\beta = 60$) hodnotu mnohem větší než pro tělesa uvedená v citované tabulce. Zrychlení joja je proto velmi malé. Odpovídá například valení prstence po nakloněné rovině s úhlem sklonu pouhých 1,9°!

(c) Jak velkou tahovou silou působí na tělísko joja jeho vlákno?

ŘEŠENÍ: Tahovou sílu snadno vypočteme z rov. (12.17). Stačí dosadit za a_x výraz (12.19). Po malé úpravě dostaneme pro T vztah

$$T = \frac{mg}{1 + mR_0^2/I}. \qquad (12.20)$$

Tahová síla vlákna je tedy menší než síla tíhová. Pro číselné údaje uvedené v zadání úlohy dostaneme

$$T = \frac{(0{,}550\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{1 + (0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}003\,2\,\mathrm{m})^2/(3{,}4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2})} = \\ = 5{,}3\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

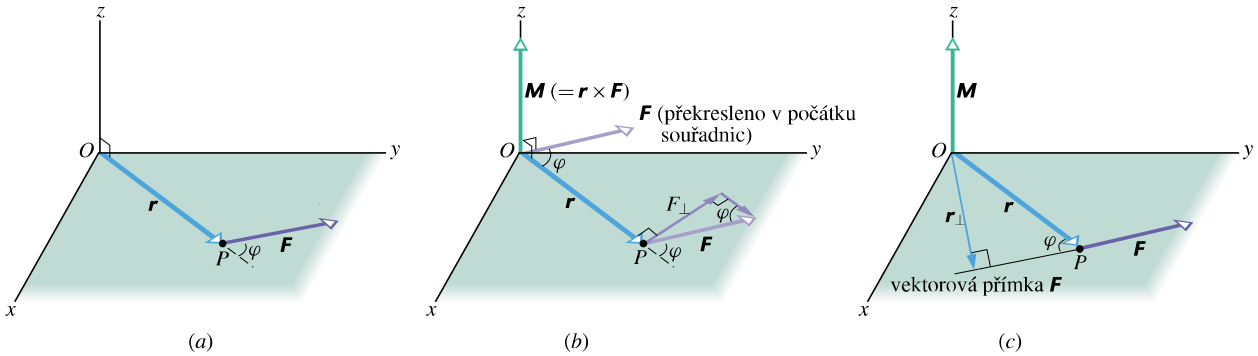
Z výsledku je patrné, že ani tahová síla vlákna nezávisí na okamžitém směru pohybu joja.

12.3 JEŠTĚ JEDNOU MOMENT SÍLY

V kap. 11 jsme definovali moment síly vzhledem k ose otáčení tuhého tělesa. Tato definice nebyla zcela obecná. Uvažovali jsme totiž výhradně o otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, kdy se jednotlivé částice tělesa pohybují po kružnicích se středy na ose otáčení, ležících v rovinách k této ose kolmých. Další omezení, které umožňovalo definovat moment síly *vzhledem k ose*, spočívalo v předpokladu, že vektorové přímky sil působících na těleso jsou kolmé k ose otáčení.

Definici momentu síly však dokážeme zobecnit tak, aby byla použitelná i pro takové případy pohybu tělesa, kdy tvar trajektorií jednotlivých částic není takto omezen. Moment síly budeme nyní vztahovat k pevnému *bodu*.

Obr. 12.10a znázorňuje silové působení na částici P v okamžiku, kdy je v souřadnicové rovině xy. Polohový vektor částice je $\boldsymbol{r}$. Na částici působí jediná síla $\boldsymbol{F}$, která leží



Obr. 12.10 Definice momentu síly. (a) Síla $\boldsymbol{F}$, působící na částici v bodě P, leží v souřadnicové rovině xy. (b) Moment této síly vzhledem k bodu O je $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Podle pravidel pro vektorový součin je tento vektor kolmý k rovině xy a má směr kladné osy z. Jeho velikost lze vyjádřit vztahem $rF_\perp$ (obr. b) nebo $r_\perp F$ (obr. c).

v daném okamžiku rovněž v rovině xy. Momentem této síly $\boldsymbol{M}$ vzhledem k pevnému bodu O rozumíme vektorovou veličinu definovanou vztahem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (12.21)$$

K výpočtu vektorového součinu můžeme samozřejmě použít pravidel shrnutých v odst. 3.7. Abychom určili směr vektoru $\boldsymbol{M}$, posuneme vektor $\boldsymbol{F}$ tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem O. (Velikost ani směr vektoru při tomto posunutí nesmíme pochopitelně měnit.) Počáteční body vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ jsou teď totožné (obr. 12.10b). Nyní již použijeme pravidlo pravé ruky pro vektorový součin (obr. 3.20a): Prsty pravé ruky směřují od vektoru $\boldsymbol{r}$ (první činitel ve vektorovém součinu) k vektoru $\boldsymbol{F}$ (druhý činitel). Natažený palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{M}$. Vektor $\boldsymbol{M}$ na obr. 12.10b je rovnoběžný s kladným směrem osy z.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{M}$ platí obecný vztah (3.20) ($c = ab\sin\varphi$), tj.

$$M = rF\sin\varphi, \qquad (12.22)$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Z obr. 12.10b, c je zřejmé, že vztah (12.22) je možné zapsat ještě dvěma dalšími ekvivalentními způsoby:

$$M = rF_\perp, \qquad (12.23)$$

kde $F_\perp = F\sin\varphi$ je složka vektoru $\boldsymbol{F}$ do směru kolmého k $\boldsymbol{r}$,

$$M = r_\perp F, \qquad (12.24)$$

kde $r_\perp = r\sin\varphi$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O (vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$).

PŘÍKLAD 12.6

Na částici P na obr. 12.11a působí tři síly o stejné velikosti 2,0 N. Částice je právě v souřadnicové rovině xz a její polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je zadán svou velikostí $r = 3{,}0$ m a úhlem $\theta = 30°$. Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ mají směr souřadnicových os x, y a z. Vypočtěte jejich momenty vzhledem k počátku O soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Obr. 12.11b, c představují pohled na rovinu xz. Aby bylo možné snadněji vyznačit úhly, které svírají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$, jsou síly překresleny tak, aby jejich počáteční body splynuly s bodem O. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_3$ a vektorem $\boldsymbol{r}$ je 90°. Pomocí rov. (12.22) vypočteme velikosti jednotlivých momentů sil:

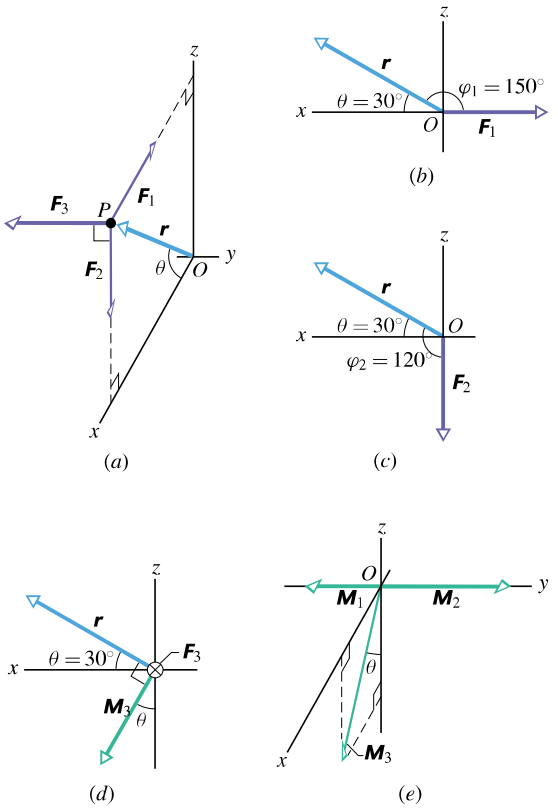
$$M_1 = rF_1\sin\varphi_1 = (3{,}0\,\text{m})(2{,}0\,\text{N})\sin 150° = 3{,}0\,\text{N·m},$$

$$M_2 = rF_2\sin\varphi_2 = (3{,}0\,\text{m})(2{,}0\,\text{N})\sin 120° = 5{,}2\,\text{N·m}$$

a

$$M_3 = rF_3\sin\varphi_3 = (3{,}0\,\text{m})(2{,}0\,\text{N})\sin 90° = 6{,}0\,\text{N·m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jejich směry určíme pomocí pravidla pravé ruky: pravou ruku položíme na obrázek tak, aby její prsty směřovaly od vektoru $\boldsymbol{r}$ k vektoru $\boldsymbol{F}$ a dlaň obepínala *menší* z obou možných úhlů. Na obr. 12.11d jsme sílu $\boldsymbol{F}_3$ znázornili křížkem v kroužku ⊗. Tento symbol vyjadřuje skutečnost, že síla $\boldsymbol{F}_3$ směřuje *do obrázku*. (Symbol ⊗ připomíná pohled na šíp zezadu). Kdyby síla $\boldsymbol{F}_3$ směřovala *z obrázku* k pozorovateli, označili bychom ji symbolem ⊙ (pohled na šíp zepředu). Pomocí pravidla pravé ruky určíme směr vektoru $\boldsymbol{M}_3$. Všechny momenty sil jsou vyznačeny v obr. 12.11e.



Obr. 12.11 Příklad 12.6. (a) Na částici P působí tři síly rovnoběžné se souřadnicovými osami. Úhel φ_1 mezi polohovým vektorem částice a silou $\boldsymbol{F}_1$ je vyznačen v obrázku (b), úhel φ_2, který svírá s polohovým vektorem částice síla $\boldsymbol{F}_2$, je zadán v obr. (c). (Zadání úhlů je potřebné pro výpočet momentů sil.) (d) Moment třetí síly $\boldsymbol{M}_3$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}_3$. Síla $\boldsymbol{F}_3$ je kolmá k rovině nákresu a míří do obrázku). (e) Momenty sil působících na částici P, vztažené k bodu O.

RADY A NÁMĚTY

Bod 12.1: *Vektorové součiny a momenty sil*

Rov. (12.21) představuje první praktické použití vektorového součinu. Vraťte se k odst. 3.7, kde jsou shrnuta pravidla pro výpočet vektorového součinu, a osvěžte si je. Citovaný odstavec obsahuje i výčet chyb, kterých bychom se při určování směru vektorového součinu mohli dopustit (bod 3.5).

Nezapomeňme, že moment síly je třeba vztahovat *k danému bodu*, který musí být předem pevně zvolen. V opačném případě nemá výpočet momentu síly smysl. Změníme-li vztažný bod, může se změnit jak velikost, tak i směr momentu síly. V př. 12.6 jsme počítali momenty tří sil vzhledem k počátku O soustavy souřadnic. Pokud bychom momenty těchto sil vztáhli přímo k bodu P, byly by nulové.

KONTROLA 3: Polohový vektor částice $\boldsymbol{r}$ je rovnoběžný s kladným směrem osy z. Určete směr jediné síly působící na částici, víte-li, že její moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic je (a) nulový, (b) míří proti směru osy x, (c) míří proti směru osy y.

12.4 MOMENT HYBNOSTI

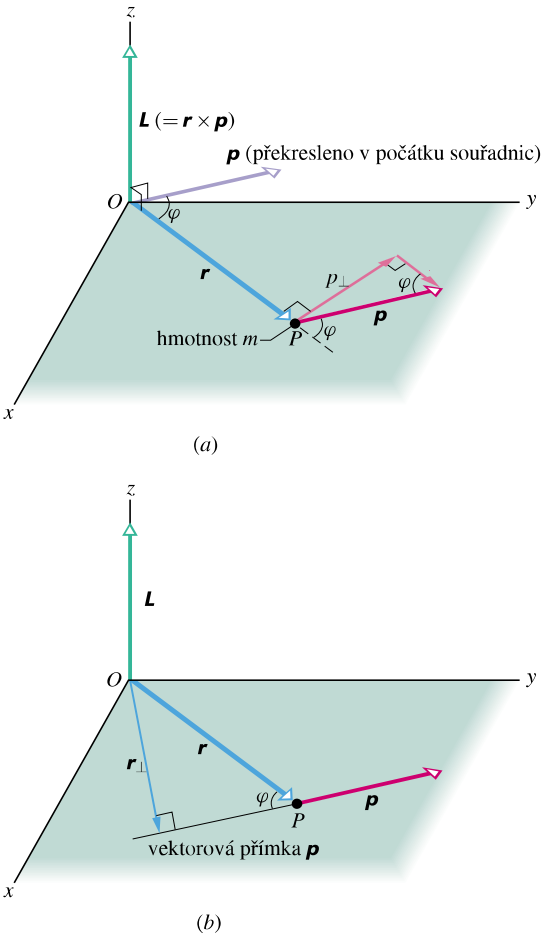
Celá řada veličin popisujících posuvný pohyb tělesa má své „partnerské protějšky“ vztahující se k pohybu otáčivému. Také hybnost má jako svůj protějšek veličinu, která má pro popis otáčivého pohybu analogický význam jako hybnost pro popis pohybu posuvného. Je jí **moment hybnosti**. Na obr. 12.12 je znázorněna částice P o hybnosti $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Částice je v daném okamžiku v souřadnicové rovině xy a její hybnost je s touto rovinou rovnoběžná. Její moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k počátku O je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}), \qquad (12.25)$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor částice vzhledem k bodu O.

Porovnáme-li vztahy (12.21) a (12.25), zjistíme, že vztah hybnosti a jejího momentu je stejný jako vztah síly a momentu síly. Jednotkou momentu hybnosti v soustavě SI je $\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$, tj. J·s.

Směr vektoru momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ určíme podle obrázku 12.12. Vektor $\boldsymbol{p}$ posuneme tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem O. Použijeme pravidlo pravé ruky: prsty směřují od $\boldsymbol{r}$ k $\boldsymbol{p}$, napjatý palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{L}$, v tomto případě je rovnoběžný s kladnou osou z. Takto určený směr odpovídá otáčení polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ kolem osy z proti směru otáčení hodinových ručiček. Kdyby



Obr. 12.12 Definice momentu hybnosti. Hybnost $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ částice P o hmotnosti m leží v rovině xy. Moment hybnosti částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic O je $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Podle pravidla pravé ruky je to vektor rovnoběžný s kladným směrem osy z. (a) Velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ lze vyjádřit vztahem $L = rp_\perp = rmv_\perp$, neboli (b) $L = r_\perp p = r_\perp mv$.

vektor $\boldsymbol{L}$ směřoval proti směru osy z, otáčel by se polohový vektor $\boldsymbol{r}$ kolem ní ve směru chodu hodinových ručiček.

Velikost vektoru $\boldsymbol{L}$ určíme pomocí obecného vztahu (3.20). Platí

$$L = rmv \sin\varphi, \qquad (12.26)$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$. Situaci lze jednoduše zakreslit a vyznačit i úhel φ, jestliže počáteční body vektorů splývají. Z obr. 12.12a, b je vidět, že pro velikost momentu hybnosti (12.26) lze použít i jiného zápisu:

$$L = rp_\perp = rmv_\perp, \qquad (12.27)$$

kde $p_\perp$ je složka vektoru $\boldsymbol{p}$ ve směru kolmém k $\boldsymbol{r}$ a $p_\perp = mv_\perp$. Další ekvivalentní vyjádření velikosti momentu

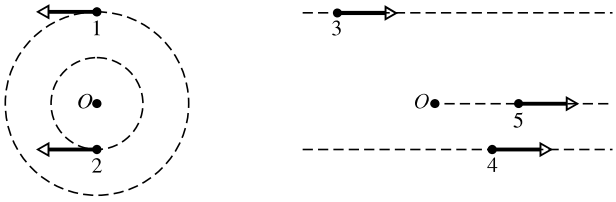
hybnosti má tvar

$$L = r_\perp p = r_\perp m v, \qquad (12.28)$$

kde $r_\perp$ je vzdálenost bodu O od vektorové přímky vektoru $\boldsymbol{p}$.

Podobně jako u momentu síly má výpočet momentu hybnosti smysl pouze v případě, že je zadán pevný vztažný bod. Uvědomme si také, že kdyby částice na obr. 12.12 neležela v rovině xy nebo kdyby vektor její hybnosti nebyl s touto rovinou rovnoběžný, nebyl by moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ rovnoběžný s osou z. Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je vždy kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$.

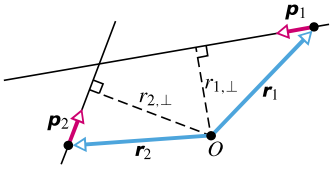
KONTROLA 4: Částice 1 a 2 na obrázku (a) obíhají kolem bodu O v opačných směrech po kružnicích s poloměry 2 m a 4 m. Částice 3 a 4 na obrázku (b) se pohybují ve stejném směru, po přímkách, jejichž vzdálenosti od bodu O jsou rovněž 2 m a 4 m. Částice 5 se pohybuje po přímce procházející bodem O. Všechny částice mají stejnou hmotnost i stejnou velikost rychlosti. Jejich pohyb je ve všech případech rovnoměrný. (a) Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentů hybnosti vzhledem k bodu O. (b) Rozhodněte, pro které z nich má moment hybnosti vzhledem k bodu O souhlasný směr se směrem otáčení hodinových ručiček.



(a) (b)

PŘÍKLAD 12.7

Na obr. 12.13 je pohled shora na dvě částice pohybující se s konstantními hybnostmi po vodorovných přímkových drahách. Částice 1, jejíž hybnost má velikost $p_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, je právě v místě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a mine bod O ve vzdálenosti 2,0 m. Velikost hybnosti částice 2 je v daném okamžiku $p_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Částice mine bod O ve vzdálenosti 4,0 m. Vypočtěte výsledný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ této dvoučásticové soustavy vzhledem k bodu O.



Obr. 12.13 Příklad 12.7. Dvě částice míjejí bod O.

ŘEŠENÍ: Nejprve vypočtěme momenty hybnosti $\boldsymbol{L}_1$ a $\boldsymbol{L}_2$ jednotlivých částic. Pro výpočet velikosti vektoru $\boldsymbol{L}_1$ zvolíme rov. (12.28), do níž dosadíme $r_{1,\perp} = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a $p_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$:

$$L_1 = r_{1,\perp} p_1 = (2{,}0\,\mathrm{m})(5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}) = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Směr vektoru $\boldsymbol{L}_1$ je zřejmý z rov. (12.25) a pravidla pravé ruky pro vektorový součin. Vektorový součin $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1$ je kolmý k rovině obrázku a směřuje k pozorovateli. Tento směr označíme za kladný v souladu se směrem otáčení vektoru $\boldsymbol{r}_1$ proti směru chodu hodinových ručiček.

Podobně získáme velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_2$ částice 2:

$$L_2 = r_{2,\perp} p_2 = (4{,}0\,\mathrm{m})(2{,}0\,\mathrm{kg\,m{\cdot}s^{-1}}) = 8{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Vektorový součin $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2$ je opět kolmý rovině obrázku, tentokrát však směřuje od pozorovatele. Tento směr je záporný, neboť odpovídá otáčení vektoru $\boldsymbol{r}_2$ ve směru hodinových ručiček.

Výsledný moment hybnosti soustavy má tedy velikost

$$L = L_1 + L_2 = (+10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}) + (-8{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}) = +2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladné znaménko získané hodnoty odpovídá skutečnosti, že vektor výsledného momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$, kolmý k rovině obrázku, směřuje k pozorovateli.

12.5 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

V předchozích úvahách jsme se podrobně zabývali veličinami popisujícími posuvný a otáčivý pohyb a zjistili jsme, že všechny důležité charakteristiky posuvného pohybu mají své protějšky, které odpovídají popisu pohybu otáčivého. Můžeme proto celkem přirozeně očekávat, že pro časovou změnu momentu hybnosti částice $\boldsymbol{L}$ a výsledný moment $\boldsymbol{M}$ všech sil, které na ni působí, bude platit nějaká obdoba druhého Newtonova zákona. Druhý Newtonův zákon, zapsaný pro naši částici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}, \qquad (12.29)$$

vyjadřuje souvislost časové změny její hybnosti a výslednice těchto sil. Tušíme, že hledaný „protějšek“ druhého Newtonova zákona bude mít obdobný tvar:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}. \qquad (12.30)$$

Tento vztah představuje analogii druhého Newtonova zákona v úhlových veličinách. Slovy jej lze vyjádřit takto:

Časová změna momentu hybnosti částice je rovna vektorovému součtu momentů všech sil na ni působících.

Rov. (12.30) má smysl pouze tehdy, jsou-li silové momenty obsažené v součtu $\boldsymbol{M}$ a moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vztaženy k témuž bodu.

Odvození věty o momentu hybnosti

Základem výpočtu je definiční vztah (12.25) pro moment hybnosti. Platí

$$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}),$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor částice a $\boldsymbol{v}$ je její rychlost. Derivováním* obou stran rovnice podle času dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v}\right). \qquad (12.31)$$

Ve výrazu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ poznáváme zrychlení částice $\boldsymbol{a}$, zatímco $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ je její rychlost $\boldsymbol{v}$. Rov. (12.31) lze tedy upravit do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}).$$

Poněvadž je $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (vektor $\boldsymbol{v}$ svírá sám se sebou nulový úhel), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}.$$

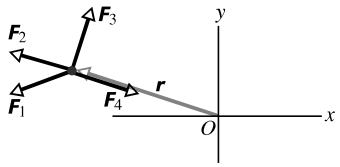
Vzhledem k platnosti druhého Newtonova zákona ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) můžeme výraz $m\boldsymbol{a}$ nahradit vektorovým součtem sil působících na částici. Nakonec je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \left(\sum \boldsymbol{F}\right) = \sum (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}). \qquad (12.32)$$

Podle rov. (12.21) představuje výraz $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O. Poslední úpravou rov. (12.32) tak dostáváme požadovanou „úhlovou“ analogii druhého Newtonova zákona

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}.$$

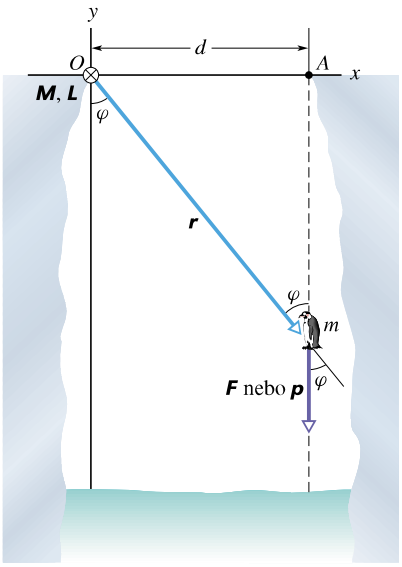
KONTROLA 5: Na obrázku je znázorněna částice, jejíž poloha je v daném okamžiku určena vektorem $\boldsymbol{r}$. Na částici působí síla, která může mít některý ze čtyř vyznačených směrů, ležících v rovině xy. Síla udílí částici zrychlení $\boldsymbol{a}$. (a) Seřaďte možné směry podle odpovídající velikosti časové derivace momentu hybnosti částice $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ vzhledem k bodu O. (b) Rozhodněte, pro které z nich je tato derivace (vektorová veličina) nesouhlasně rovnoběžná s osou z.



* Při derivování vektorového součinu nesmíme zaměnit pořadí vektorů v součinu.

PŘÍKLAD 12.8

Tučňák o hmotnosti m stál na okraji jámy v místě A a spadl dolů. Vodorovná vzdálenost bodu A od počátku O soustavy souřadnic je d (obr. 12.14).



Obr. 12.14 Příklad 12.8. Tučňák o hmotnosti m volně padá z bodu A na okraji jámy. Moment tíhové síly $\boldsymbol{M}$ i moment hybnosti tučňáka vztažené k bodu O jsou kolmé k rovině obrázku a směřují do nákresny.

(a) Vyjádřete moment hybnosti padajícího tučňáka vzhledem k bodu O v obecném okamžiku během jeho pádu.

ŘEŠENÍ: Moment hybnosti jako vektor vyjádříme pomocí rov. (12.25)) ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$). Jeho velikost je dána vztahem (12.26), tj.

$$L = rmv \sin\varphi.$$

Veličiny r a φ se během pádu tučňáka samozřejmě mění, výraz $r \sin\varphi$ však má v každém okamžiku stálou hodnotu d. Pro rychlost pádu platí $v = gt$. Pro velikost momentu hybnosti L tak dostáváme

$$L = mgtd. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.33)$$

Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, vyznačených v obr. 12.14, a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu. Zvolme souřadnicovou osu z tak, aby byla orientována nesouhlasně s tímto směrem. V obrázku pak vyznačíme vektor $\boldsymbol{L}$ křížkem v kroužku $\otimes$, umístěným v počátku soustavy souřadnic. S časem se mění pouze velikost vektoru $\boldsymbol{L}$, jeho směr a orientace se zachovávají.

(b) Vypočtěte moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, působící na tučňáka, vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Moment síly je dán vztahem (12.21) ($\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$), jeho velikost určíme pomocí rov. (12.22). Platí

$$M = r F \sin\varphi,$$

kde $F = mg$ a $r \sin\varphi = d$. Dostáváme tedy

$$M = mgd = \text{konst.} \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.34)$$

Vidíme, že velikost momentu síly je součinem velikosti síly mg a jejího ramene d vzhledem k bodu O. Vektor $\boldsymbol{M}$ je kolmý k rovině tvořené vektory $\boldsymbol{r}$ a $m\boldsymbol{g}$ a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu (obr. 12.14). Je tedy souhlasně rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{L}$. Vztah (12.34) lze získat také derivováním vztahu (12.33) podle času a dosazením získaného výsledku do rov. (12.30).

Všimněme si, že vektory $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{L}$ podstatným způsobem závisí na volbě vztažného bodu O. Kdyby tučňák padal z bodu O, platilo by $d = 0$ a moment síly i moment hybnosti by byly nulové.

12.6 MOMENT HYBNOSTI SOUSTAVY ČÁSTIC

Při diskusích o otáčivém pohybu jsme se prozatím omezili pouze na pohyb tuhého tělesa. Nyní rozšíříme naše úvahy na případ obecné soustavy částic a jejich pohyb budeme popisovat vzhledem k pevně zvolenému vztažnému bodu, počátku soustavy souřadnic. „Soustava částic“ je již dostatečně obecným modelem fyzikálního objektu a jako zvláštní případ zahrnuje i tuhé těleso. Celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy je definován jako vektorový součet momentů hybnosti $\boldsymbol{L}_i$ jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 + \ldots + \boldsymbol{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i, \qquad (12.35)$$

kde index $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ probíhá jednotlivé částice.

Momenty hybnosti jednotlivých částic se mohou s časem měnit buď vlivem jejich vzájemného působení, nebo vlivem sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí. Časovou změnu momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ vypočteme jako derivaci výrazu na pravé straně rov. (12.35):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t}. \qquad (12.36)$$

Podle rov. (12.30) je derivace momentu hybnosti i-té částice dána vektorovým součtem momentů sil, které na ni působí, tj. $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i/\mathrm{d}t = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$. Symbolem $\boldsymbol{r}_i$ jsme označili polohový vektor i-té částice a $\boldsymbol{F}_i$ výslednici všech sil, kterými na ni působí její okolí, tvořené jednak ostatními částicemi soustavy, jednak objekty, které náleží do okolí soustavy jako celku. Pravá strana rov. (12.36) je tedy vektorovým součtem momentů *všech sil*, působících na jednotlivé částice soustavy.

Zaměřme se nyní na výpočet tohoto součtu. Momenty sil působících na částice soustavy můžeme rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří momenty sil *vnitřních*, tj. momenty sil vzájemného působení částic. Druhá skupina obsahuje momenty *vnějších* sil. Vnějšími silami působí na částice soustavy její okolí, tj. objekty, které do ní nejsou zahrnuty. Všimněme si nejprve momentů vnitřních sil. Vyberme libovolnou dvojici částic soustavy. Síly, popisující vzájemné působení částic této dvojice, představují akci a reakci. Podle třetího Newtonova zákona jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Jejich celkový příspěvek do *výslednice sil* je tedy samozřejmě nulový. Jak je tomu však s jejich momenty? Působí-li tyto síly ve směru spojnice interagujících částic, tj. jsou-li centrální, pak mají společnou vektorovou přímku, a tedy i společné rameno vzhledem k vztažnému bodu. Jejich momenty jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Mají nulový součet a jejich „společný“ příspěvek k součtu všech momentů na pravé straně rov. (12.36) je proto rovněž nulový. Časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy je dána výhradně momenty *vnějších* sil působících na částice soustavy:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} \quad \text{(pro soustavu částic)}. \qquad (12.37)$$

Rov. (12.37) je matematickým zápisem **věty o momentu hybnosti** (soustavy částic) neboli **druhé impulzové věty** pro soustavu částic. Slovy ji můžeme vyjádřit velmi jednoduše: Časová změna *momentu hybnosti* soustavy částic je dána vektorovým součtem momentů *vnějších sil* působících na částice této soustavy.

Všimněme si její fyzikální interpretace: rov. (12.30), platná pro jednotlivou částici, vyplývá přímo z druhého Newtonova zákona, a má analogický tvar v úhlových veličinách. Věta o momentu hybnosti, která je důsledkem

druhého a třetího Newtonova zákona a předpokladu vnitřních centrálních sil, je analogií rov. (12.30) pro soustavu částic. Můžeme ji interpretovat jako pohybovou rovnici pro případ rotačního pohybu soustavy, a tedy jako „protějšek“ věty o hybnosti (kap. 11), popisující dynamiku pohybu translačního.

Připomeňme, že rov. (12.37) platí za předpokladu, že jsou momenty sil i moment hybnosti soustavy vztaženy k *témuž bodu*, pevnému v jisté inerciální vztažné soustavě. Jedinou výjimkou z požadavku inerciálnosti je *těžišťová* vztažná soustava, v níž je zápis věty o momentu hybnosti stejný jako v kterékoliv soustavě inerciální. Těžišťová soustava* je speciálním případem obecně neinerciální vztažné soustavy. Jejím počátkem je těžiště soustavy částic, resp. tělesa a směr jejích os je pevný vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě. (Těžišťová soustava je tedy spjata s *translačním pohybem* tělesa, rotační pohyb však spolu s ním nevykonává.)

12.7 MOMENT HYBNOSTI TUHÉHO TĚLESA VZHLEDEM K PEVNÉ OSE

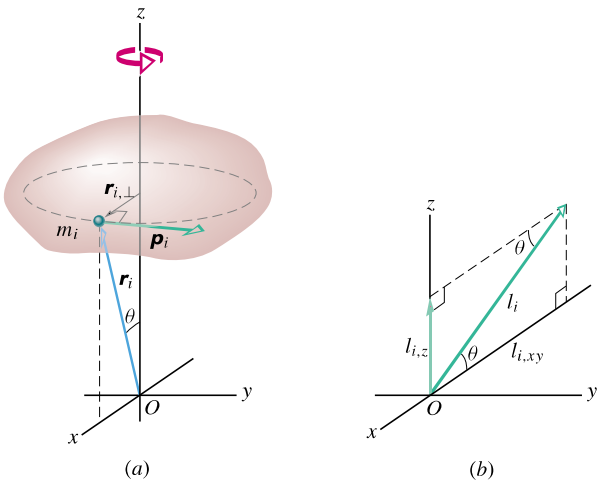
Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy je sice speciálním, avšak v praktických úlohách velmi častým, případem pohybu obecné soustavy částic. Jistě má smysl položit si otázku, zda i věta o momentu hybnosti bude mít v tomto případě speciální tvar. Očekáváme pochopitelně, že se její zápis výrazně zjednoduší, neboť při rotaci tuhého tělesa kolem pevné osy obíhají všechny jeho částice po kružnicích stejnou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. To nám umožní vyjádřit pomocí veličiny $\boldsymbol{\omega}$ moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. Tuhé těleso na obr. 12.15, složené z částic o hmotnostech m_i, se otáčí kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$.

Moment hybnosti tělesa je, jak již víme, součtem momentů hybnosti jeho jednotlivých částic. Na obr. 12.15 je znázorněna jedna z nich, které jsme přisoudili index i a hmotnost m_i. Při otáčení tělesa obíhá tato částice po kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení (v obrázku osa z) a jejíž rovina je k této ose kolmá. Poloha částice je vzhledem k počátku O soustavy souřadnic určena vektorem $\boldsymbol{r}_i$. Poloměr její kruhové trajektorie $r_{i,\perp}$ je roven její vzdálenosti od osy z, která se s časem nemění.

Podle rov. (12.26) má moment hybnosti i-té částice vzhledem k bodu O velikost

$$L_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(m_i v_i),$$

kde p_i a v_i představují velikost hybnosti a rychlosti částice. Úhel mezi vektory $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{p}_i$ je 90°. Moment hybnosti částice $\boldsymbol{L}_i$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{p}_i$. Podle obr. 12.15b jej můžeme vyjádřit jako součet jeho průmětu do osy otáčení (osa z) a průmětu do roviny kolmé k ose otáčení (rovina xy). Platí $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_{i,z} + \boldsymbol{L}_{i,xy}$. Stejným způsobem lze rozložit momenty hybnosti všech částic tělesa, a tedy i celkový moment hybnosti soustavy:



Obr. 12.15 (a) Tuhé těleso se otáčí kolem osy z úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Jedna z jeho částic hmotnosti m_i opisuje kolem osy z kružnici o poloměru $r_{i,\perp}$. Její hybnost je $\boldsymbol{p}_i$ a polohový vektor vzhledem k počátku soustavy souřadnic O je označen jako $\boldsymbol{r}_i$. Obrázek zachycuje polohu částice v okamžiku, kdy je vektor $\boldsymbol{r}_{i,\perp}$ rovnoběžný s osou x. (b) Moment hybnosti i-té částice vzhledem k bodu O je označen symbolem $\boldsymbol{L}_i$, jeho průmět do osy z je $\boldsymbol{L}_{i,z}$.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z + \boldsymbol{L}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_{i,z} + \boldsymbol{L}_{i,xy}).$$

Momentem hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení nazveme průmět celkového momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ do této osy. V našem případě, kdy je osou otáčení osa z, je tento průmět určen z-ovou složkou celkového momentu hybnosti soustavy, tj.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} L_i \sin\theta_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i \sin\theta_i)(m_i v_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} r_{i,\perp} m_i v_i .$$

Vzhledem k platnosti vztahu $v_i = \omega r_{i,\perp}$, můžeme psát

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_{i,\perp} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\omega r_{i,\perp}) r_{i,\perp} = \\ = \omega \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_{i,\perp}^2 \right). \qquad (12.38)$$

* Setkali jsme se s ní už v př. 9.10.

Při úpravě posledního výrazu jsme využili skutečnosti, že úhlová rychlost ω všech částic tuhého tělesa je stejná a vytkli jsme ji před součet.

Ve výrazu $\sum m_i r_{i,\perp}^2$ v rov. (12.38) poznáváme moment setrvačnosti tělesa vzhledem k pevné ose (rov. (11.24)). Rov. (12.38) můžeme tedy upravit do tvaru

$$L_z = I\omega, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{L}_z = I\boldsymbol{\omega} \qquad \text{(moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose).} \tag{12.39}$$

Moment hybnosti v rov. (12.39) se vztahuje *k ose otáčení tuhého tělesa*. Budeme-li mít tuto skutečnost stále na paměti, můžeme index z i vynechat. Symbol L pak ovšem nesmíme zaměnit s velikostí momentu hybnosti vztaženého k *pevnému bodu* O. Moment setrvačnosti I je samozřejmě rovněž vztažen k ose otáčení.

Promítneme-li do osy otáčení i výsledný moment vnějších sil působících na naše těleso, dostaneme odpovídající průmět rov. (12.37), vyjadřující větu o momentu hybnosti:

$$I\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_z, \quad \text{tj.} \quad I\omega = M_z.$$

Tento vztah se často nazývá **věta o momentu hybnosti** (**druhá impulzová věta**) pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy.

Jeho mimořádně jednoduchý tvar nás snad ani příliš nepřekvapuje. Je však možné zapsat tak prostým způsobem i průmět pohybové rovnice do roviny kolmé k ose otáčení? Abychom na tuto otázku odpověděli co nejpřesněji, pokusme se vyjádřit odpovídající průmět momentu hybnosti tělesa. Platí

$$\boldsymbol{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_{i,z}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i,\perp}) \times \boldsymbol{p}_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{v}_i).$$

Průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose rotace, tj. vektory $\boldsymbol{L}_{i,xy} = m_i \boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{v}_i$, mají velikosti $m_i r_i v_i |\cos\theta_i \sin\theta_i| = m_i r_i^2 \omega |\cos\theta_i \sin\theta_i|$. Jejich směry jsou však různé. Abychom je mohli sečíst, musíme je ještě rozložit do směrů os x a y. Označíme-li symbolem φ_i úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}_{\perp,i}$ se směrem osy x, dostaneme:

$$L_x = -\sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 |\cos\theta_i \sin\theta_i| \cos\varphi_i\right)\omega = I_x \omega,$$

$$L_y = -\sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 |\cos\theta_i \sin\theta_i| \sin\varphi_i\right)\omega = I_y \omega.$$

Všimněme si, že hodnoty $\sin\varphi_i, \cos\varphi_i, \sin\theta_i, \cos\theta_i$ v předchozích součtech vyjadřujících veličiny I_x a I_y mohou být jak kladné, tak záporné. Při vhodném rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose otáčení se tedy může stát, že se veličiny I_x a I_y anulují. Veličiny I_x a I_y, v nichž je informace o symetrii či nesymetrii rozložení hmotnosti obsažena, se nazývají **deviační momenty** tělesa vzhledem k ose otáčení. Jsou-li nenulové, pak setrvačník rotující kolem upevněné osy silně namáhá svá ložiska (kolo „hází“ a „vymílá“ ložisko). Vyvažování kol automobilu olůvky má tedy za cíl vynulovat I_x a I_y.

Je-li hmotnost tělesa vzhledem k ose otáčení vhodně rozložena, průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose otáčení se vyruší. Hovoříme pak o tzv. symetrickém rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose rotace. (Jednoduchým příkladem je těleso tvořené dvěma stejně hmotnými částicemi umístěnými souměrně vzhledem k ose otáčení, nebo těleso složené ze dvou částic různé hmotnosti, umístěných na protilehlých stranách osy rotace ve vzdálenostech, jejichž poměr je převrácenou hodnotou poměru hmotností částic.) V takovém případě je průmět momentu hybnosti tělesa do roviny kolmé k ose otáčení nulový. Moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení splývá s celkovým momentem hybnosti a platí $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Tabulka 12.2 **Posuvný a otáčivý pohyb, pokračování tab. 11.3**

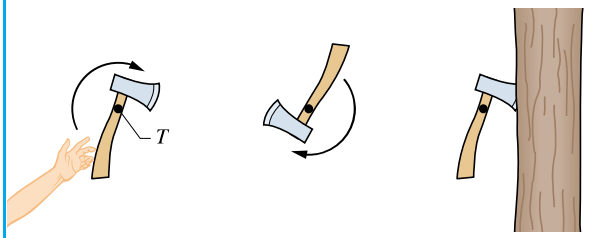
POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i$	moment hybnosti[a]	$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_T$	moment hybnosti[b]	$L = I\omega$
věta o hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$	věta o momentu hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$
zákon zachování[c]	$\boldsymbol{P} = \text{konst.}$	zákon zachování[c]	$\boldsymbol{L} = \text{konst.}$

[a] Pro soustavu částic i tuhé těleso jako její speciální případ.
[b] Pro tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy. L je složka momentu hybnosti ve směru této osy.
[c] Pro izolovanou soustavu.

Tab. 12.2 je pokračováním soupisu veličin a vztahů, které představují analogii při popisu posuvného a otáčivého pohybu (tab. 11.3).

PŘÍKLAD 12.9

Správný dřevorubec ví, jak má vyhodit sekeru, aby během letu vykonala celý počet otáček kolem svého těžiště a zasekla se do kmene stromu (obr. 12.16). Předpokládejme, že vodorovná složka počáteční rychlosti sekery má hodnotu $v_x = 20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, její dolet je $d = 5{,}90\ \mathrm{m}$ a sekera vykonala přesně jednu otáčku. Moment setrvačnosti I sekery vzhledem k ose vedené jejím těžištěm je $1{,}95{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$.



Obr. 12.16 Příklad 12.9. Dřevorubec hodil sekeru tak, aby se během letu otáčela kolem osy vedené jejím těžištěm (parabolický tvar trajektorie těžiště není na obrázku vyznačen).

(a) Vypočtěte velikost momentu hybnosti letící sekery vzhledem k jejímu těžišti.

ŘEŠENÍ: Sekera se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω vzhledem k ose vedené jejím těžištěm. Její moment hybnosti určíme podle rov. (12.39) ($L = I\omega$). Nejprve však vypočteme úhlovou rychlost. Podle rov. (11.5) je úhlová rychlost ω určena otočením $\Delta\theta$ v časovém intervalu Δt_1 takto:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_1}.$$

Nahradíme-li Δt_1 výrazem d/v_x a dosadíme-li za $\Delta\theta$ hodnotu $1{,}00\ \mathrm{ot} = 2\pi\ \mathrm{rad}$, dostaneme

$$\omega = \frac{v_x\,\Delta\theta}{d} = \frac{(20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(2\pi\ \mathrm{rad})}{(5{,}90\ \mathrm{m})} = 21{,}3\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro získanou hodnotu ω a zadaný moment setrvačnosti I dostaneme z rov. (12.39) výsledek:

$$L = I\omega = (1{,}95{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2})(21{,}3\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}) = 4{,}15{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Uvedení sekery do pohybu trvá dřevorubci $\Delta t_2 = 0{,}150\ \mathrm{s}$. Určete průměrnou velikost momentu síly, jíž působí dřevorubec na sekeru, vzhledem k jejímu těžišti.

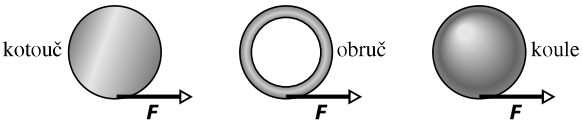
ŘEŠENÍ: Souvislost změny momentu hybnosti sekery ΔL s průměrnou hodnotou $\overline{M}$ výsledného momentu sil, které ji během časového intervalu Δt_2 uvedou do pohybu, je dána vztahem (12.37).

$$\overline{M} = \frac{\Delta L}{\Delta t_2} = \frac{L_\mathrm{f} - L_\mathrm{i}}{\Delta t_2}.$$

Počáteční moment hybnosti sekery je nulový, tj. $L_\mathrm{i} = 0$, výsledný moment hybnosti je $L_\mathrm{f} = -4{,}15{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$. Výsledná hodnota je záporná. Sekera na obr. 12.16 se totiž otáčí ve směru chodu hodinových ručiček. Dosazením těchto hodnot a zadané doby Δt_2 do poslední rovnice dostaneme

$$\overline{M} = \frac{(-4{,}15{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}})}{(0{,}150\ \mathrm{s})} = -0{,}277\ \mathrm{N{\cdot}m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Tři tělesa znázorněná na obrázku (kotouč, obruč a plná koule) jsou tažena vlákny navinutými na jejich obvodu. Tažná síla $\boldsymbol{F}$ je ve všech případech stejná a působí po stejnou dobu t. Každé z těles se roztáčí z klidu kolem pevné osy vedené jeho středem. Hmotnosti i poloměry těles jsou shodné. Seřaďte tělesa (a) podle jejich momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení a (b) podle jejich úhlových rychlostí v okamžiku t.



12.8 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

Prozatím jsme dokázali vyslovit dva důležité zákony zachování platné při pohybu těles: zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti. Nyní se setkáme s dalším podobným zákonem, zákonem zachování momentu hybnosti. Jestliže je studovaná soustava částic izolovaná nebo je-li výsledný moment vnějších sil, které na ni působí, nulový, je podle rov. (12.37) (druhá impulzová věta) $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = 0$, tj.

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.} \qquad (12.40)$$

Tento výsledek, nazývaný **zákon zachování momentu hybnosti**, lze také přepsat ve tvaru

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{L}_\mathrm{f}, \qquad (12.41)$$

kde indexy (i), resp. (f) označují moment hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}$ v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Rovnice (12.40) a (12.41) lze vyjádřit takto:

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ se zachovává bez ohledu na případné změny probíhající uvnitř soustavy, pokud je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový.

Rov. (12.40) a (12.41) jsou vektorové. Každá z nich je tedy ekvivalentní trojici skalárních rovnic, vyjadřujících zachování tří nezávislých kartézských složek momentu hybnosti soustavy. Mohou nastat případy, kdy se některá ze složek momentu hybnosti soustavy zachovává i při nenulovém momentu sil:

Je-li některá ze složek výsledného momentu vnějších sil působících na soustavu nulová, zachovává se odpovídající složka momentu hybnosti soustavy, a to bez ohledu na změny, které uvnitř soustavy probíhají.

Použijme tento zákon pro případ izolovaného tělesa na obr. 12.15, které se otáčí kolem osy z. Předpokládejme, že těleso bylo zpočátku tuhé, později se však rozložení jeho hmotnosti vzhledem k ose otáčení změnilo. Změnil se tím i jeho moment setrvačnosti vzhledem k této ose. Podle rov. (12.40) a (12.41) se však nezměnil moment hybnosti tělesa. Dosazením z rov. (12.39) pro moment hybnosti tělesa při rotaci kolem pevné osy do rov. (12.41) dostaneme zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$I_\mathrm{i}\omega_\mathrm{i} = I_\mathrm{f}\omega_\mathrm{f}. \qquad (12.42)$$

Indexy (i) a (f) jsme označili hodnoty momentu setrvačnosti I a úhlové rychlosti ω na počátku měření a po změně rozložení hmoty.

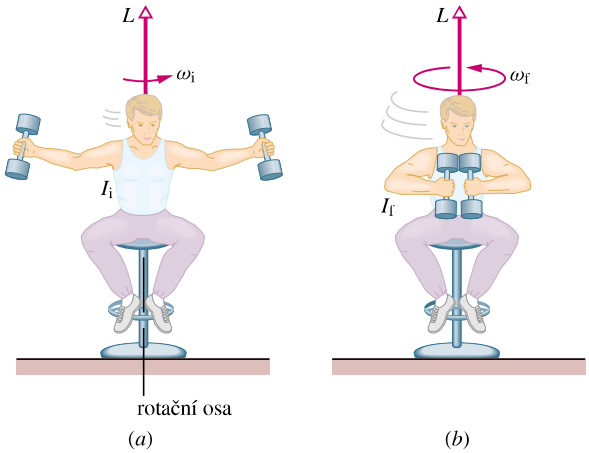
Podobně jako předchozí zákony zachování (energie a hybnosti) jsou rov. (12.40) a (12.41) platné i mimo rámec newtonovské (klasické) mechaniky. Platí totiž i pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla (které se řídí relativistickou mechanikou) a dokonce pro částice subatomární, při jejichž popisu se neobejdeme bez kvantové mechaniky. Až dosud nebyl objeven žádný jev, který by platnost zákona zachování momentu hybnosti narušil.

V dalším textu se budeme věnovat rozboru čtyř typických situací, v nichž lze tento zákon uplatnit.

1. *Experimentátor na otočné stoličce.* Experimentátor na obr. 12.17 sedí na stoličce, která se pomalu otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω_i. V upažených rukou drží dvě činky. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy stolička + člověk je rovnoběžný s osou otáčení a směřuje vzhůru.

Náhle člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy z hodnoty I_i na hodnotu I_f. Hmota soustavy je nyní rozložena blíže k ose otáčení. Úhlová rychlost otáčení se naopak zvýší z hodnoty ω_i na ω_f. Upažením docílí experimentátor opětovného zpomalení otáčivého pohybu.

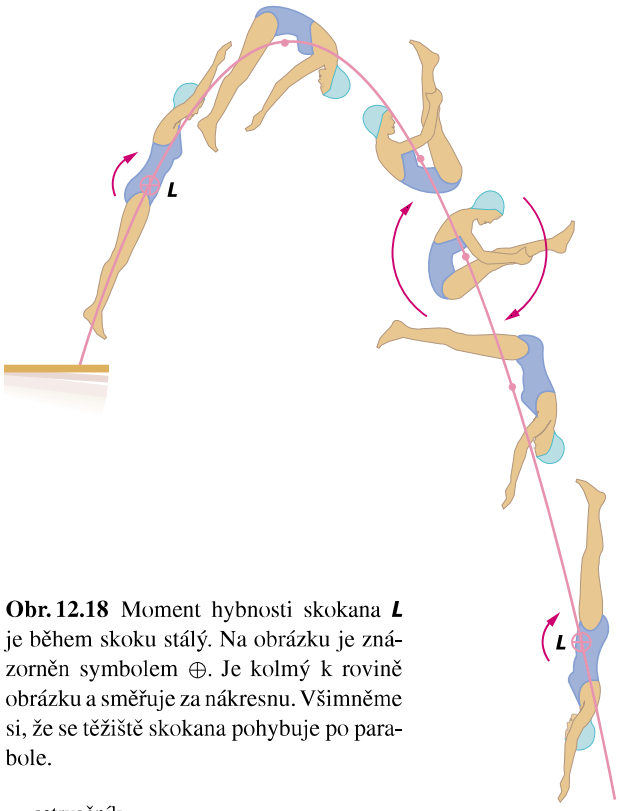
Výsledný moment vnějších sil působících na soustavu člověk s činkami + stolička je nulový (společná vektorová přímka tíhové síly a tlakové síly podložky leží v ose otáčení). Moment hybnosti soustavy vzhledem k ose otáčení se proto zachovává bez ohledu na to, jak člověk činkami pohybuje. Úhlová rychlost soustavy zachycené v situaci na obr. 12.17a je malá a moment setrvačnosti velký. Podle rov. (12.42) je úhlová rychlost soustavy na obr. 12.17b větší. Její zvýšení totiž kompenzuje pokles momentu setrvačnosti soustavy, způsobený změnou rozložení její hmoty.



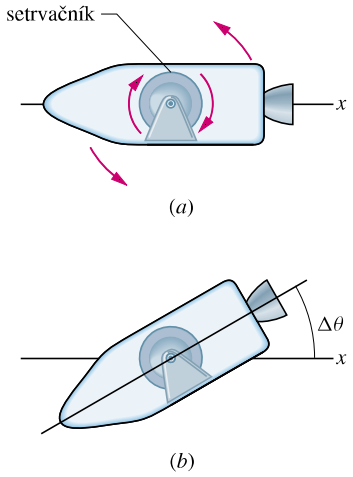
Obr. 12.17 (a) Soustava člověk + stolička má poměrně velký moment setrvačnosti a malou úhlovou rychlost. (b) Při poklesu momentu setrvačnosti se zvětší úhlová rychlost soustavy. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ zůstává zachován.

2. *Skokan.* Obr. 12.18 ukazuje skok do vody s jedním a půl saltem vpřed. Podle očekávání se těžiště skokana pohybuje po parabole. Skokan opustí odrazový můstek s určitým momentem hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k ose jdoucí jeho těžištěm. Vektor $\boldsymbol{L}$ je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Jedinou silou, která na skokana během jeho letu působí, je síla tíhová. Její moment vzhledem k těžišti sportovce je však nulový. Moment hybnosti skokana se tedy zachovává. Pokrčením paží a nohou docílí akrobat poklesu momentu setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Podle rov. (12.42) tím urychlí rotaci svého těla (zvýší úhlovou rychlost). Natažením paží i nohou ke konci letu opět moment setrvačnosti zvýší a rotaci zpomalí natolik, že voda při doskoku téměř nevystříkne. Moment hybnosti skokana se samozřejmě zachovává co do velikosti i směru i při složitějších skocích se salty a výkruty.

3. *Orientace kosmické lodi.* Na obr. 12.19 je znázorněna kosmická loď s pevně uloženým setrvačníkem. Obrázek zachycuje změnu orientace lodi. Jestliže se loď ani setrvačník neotáčí, je celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy kosmická



Obr. 12.18 Moment hybnosti skokana $\boldsymbol{L}$ je během skoku stálý. Na obrázku je znázorněn symbolem $\oplus$. Je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Všimněme si, že se těžiště skokana pohybuje po parabole.



Obr. 12.19 (a) Zjednodušený náčrtek kosmické lodi se setrvačníkem. Roztočíme-li setrvačník např. ve směru otáčení hodinových ručiček, roztočí se loď směrem opačným. Celkový moment hybnosti soustavy musí totiž zůstat nulový. (b) Jestliže setrvačník uvedeme opět do klidu, zastaví se i loď. Její osa se však vůči své původní orientaci natočila o úhel $\Delta\theta$.

loď + setrvačník nulový a díky její izolovanosti se zachovává.

Roztočíme-li setrvačník podle obr. 12.19a, roztočí se loď opačným směrem, neboť celkový moment hybnosti soustavy musí zůstat nulový. Zastavíme-li setrvačník, zastaví se i rotace kosmické lodi. Loď však už zůstane ve změněné poloze (obr. 12.19b).

Nežádoucí účinky zákona zachování momentu hybnosti se projevily při letu kosmické lodi *Voyager 2* kolem planety Uran (v roce 1986). Loď se roztočila pokaždé, když se její magnetofonové záznamové zařízení přepnulo na vyšší rychlost. Řízení letu v Jet Propulsion Laboratory muselo během letu naprogramovat palubní počítač lodi tak, aby při každém zapnutí či vypnutí magnetofonové jednotky došlo k zážehu korekčních motorů.

4. *Neuvěřitelná hroutící se hvězda.* Vyhasíná-li hvězda, tj. dochází-li jí jaderné „palivo“, začne se postupně smršťovat a tlak v jejím nitru roste. Smršťování může pokračovat tak dlouho, až se původní poloměr hvězdy (srovnatelný např. s poloměrem našeho Slunce) zmenší na pouhých několik kilometrů. Hvězda se přemění v *neutronovou hvězdu*, jejíž hmota je stlačena v neuvěřitelně hustý plyn složený z neutronů.

Hvězda je izolovanou soustavou a její moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ se zachovává. Moment setrvačnosti hvězdy se během jejího smršťování podstatně zmenší. Její úhlová rychlost při tom vzroste až na hodnotu zhruba 600 až 800 otáček *za sekundu*. Pro srovnání uveďme, že naše Slunce, které můžeme považovat za typickou hvězdu, vykoná asi jednu otáčku na měsíc!

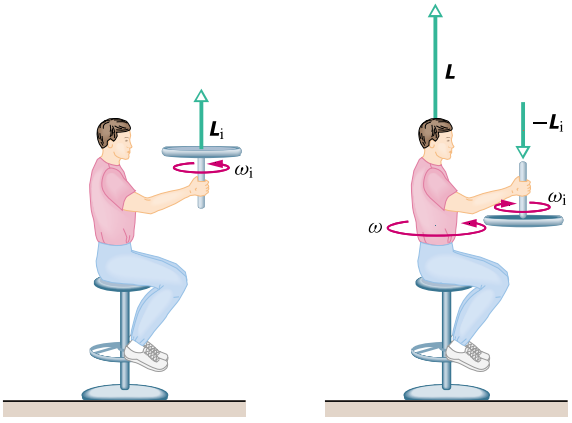
KONTROLA 7: Brouk sedící na obvodu kolotoče začne lézt k jeho středu. Rozhodněte, zda následující veličiny, vztažené k ose otáčení kolotoče, vzrostou, klesnou, nebo zůstanou zachovány: (a) moment setrvačnosti soustavy brouk + kolotoč, (b) moment hybnosti soustavy a (c) úhlová rychlost kolotoče s broukem.

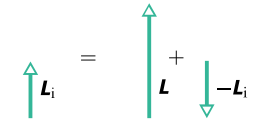
PŘÍKLAD 12.10

Experimentátor na obr. 12.20 sedí na stoličce, která se může otáčet kolem svislé osy. Drží v rukou bicyklové kolo, podél jehož obvodu je ohnut olověný prut. Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je $I = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Zpočátku je člověk na stoličce v klidu a kolo se otáčí úhlovou rychlostí $\omega_i = 3{,}9\,\mathrm{ot/s}$ proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). Osa otáčení kola je svislá a jeho počáteční moment hybnosti $\boldsymbol{L}_i$ směřuje vzhůru. Experimentátor otočí kolo o 180° podle obr. 12.20b a stolička se s ním roztočí. Jakým směrem a jakou úhlovou rychlostí se bude člověk na stoličce otáčet? Moment setrvačnosti I_0 soustavy člověk + stolička + kolo vzhledem k ose otáčení je $6{,}8\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

ŘEŠENÍ: Vnější síly působící na soustavu člověk + stolička + kolo (tíhová síla a tlaková síla podlahy) mají vzhledem k libovolnému vztažnému bodu ležícímu na ose otáčení nulové momenty. Další síly na soustavu nepůsobí a její moment

hybnosti se proto zachovává. Počáteční moment hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}_\mathrm{i}$ je shodný s momentem hybnosti otáčejícího se kola. I při převrácení osy kola se zachová velikost a směr celkového momentu hybnosti soustavy.





Obr. 12.20 Příklad 12.10. (a) Experimentátor drží bicyklové kolo, které se otáčí kolem své svislé osy. (b) Člověk kolo převrátí a začne se otáčet. (c) Celkový moment hybnosti soustavy se zachovává.

Moment hybnosti kola po jeho převrácení je $-\boldsymbol{L}_\mathrm{i}$. Člověk a stolička získají moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Podle obr. 12.20c musí platit

$$L_\mathrm{i} = L + (-L_\mathrm{i}),$$

tedy

$$L = 2L_\mathrm{i} = I_0\omega,$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení člověka na stoličce po převrácení osy kola. Dostáváme

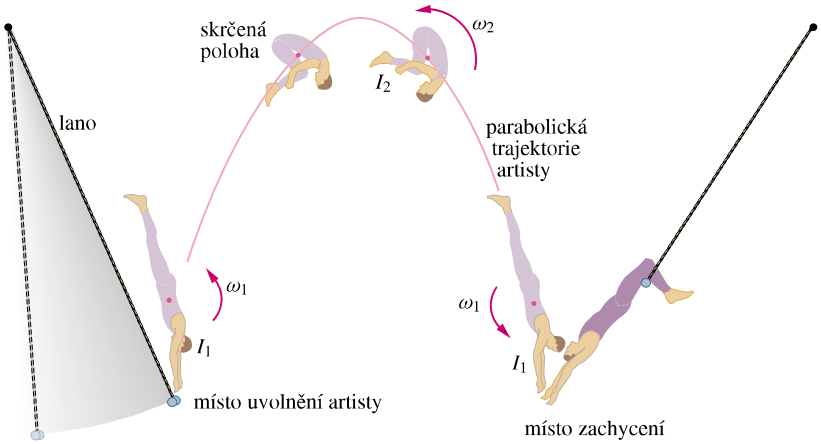
$$\omega = \frac{2L_\mathrm{i}}{I_0} = \frac{2I\omega_\mathrm{i}}{I_0} = \\ = \frac{2(1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^2})(3{,}9\,\mathrm{ot/s})}{(6{,}8\,\mathrm{kg\cdot m^2})} = \\ = 1{,}4\,\mathrm{ot/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota výsledku znamená, že se člověk na stoličce otáčí proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). K zastavení rotace stačí otočit kolo do původní polohy.

Při překlápění kola působí člověk na jeho osu určitou silou, jejíž moment je obecně nenulový. Stejně velkou, avšak opačně orientovanou silou působí osa kola na ruku člověka. Tyto síly jsou z hlediska soustavy člověk + stolička + kolo silami vnitřními, a neovlivní tedy její celkový moment hybnosti. K řešení úlohy můžeme zvolit i jiný přístup. Za soustavu můžeme zvolit samotného člověka na stoličce a kolo považovat za součást jejího okolí. Člověk působí na osu kola silou s nenulovým momentem. Osa působí na ruku člověka silou opačnou, která však je z hlediska soustavy člověk + stolička silou vnější. Vlivem jejího momentu se mění moment hybnosti soustavy a stolička s člověkem se roztočí. Vidíme, že třídění sil a jejich momentů na vnitřní a vnější závisí na volbě posuzované soustavy částic a že vhodnou volbou zkoumaného systému lze řešení úlohy zjednodušit.

PŘÍKLAD 12.11

Akrobat na visuté hrazdě provede během skoku trvajícího $t = 1{,}87$ s trojité salto. Během první a poslední čtvrtiny otáčky se akrobat otáčí v natažené poloze podle obr. 12.21. Jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm je při tom $I_1 = 19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Ve střední části letu se akrobat



Obr. 12.21 Příklad 12.11. Trojité salto

skrčí a jeho moment setrvačnosti se sníží na hodnotu $I_2 = 5{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

(a) Jakou má akrobat počáteční úhlovou rychlost ω_1, otáčí-li se kolem osy procházející jeho těžištěm?

ŘEŠENÍ: V napjaté poloze absolvuje akrobat dvě čtvrtiny otáčky za dobu t_1. Odpovídající úhel otočení je tedy $\theta_1 = 0{,}500$ ot. Úhel otočení ve skrčené poloze je $\theta_2 = 2{,}50$ ot, odpovídající dobu letu označme t_2. Pro tyto časové intervaly platí

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}, \tag{12.43}$$

kde ω_2 je úhlová rychlost akrobata ve skrčené poloze. Protože se moment hybnosti akrobata během skoku zachovává, můžeme úhlovou rychlost určit pomocí rov. (12.42):

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1,$$

tj.

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1. \tag{12.44}$$

Celková doba letu akrobata je

$$t = t_1 + t_2.$$

Po dosazení z rov. (12.43) a (12.44) dostaneme

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2 I_2}{\omega_1 I_1} = \frac{1}{\omega_1}\left(\theta_1 + \theta_2\frac{I_2}{I_1}\right). \tag{12.45}$$

Pro zadané číselné hodnoty je

$$(1{,}87\,\mathrm{s}) = \frac{1}{\omega_1}\left(0{,}500\,\mathrm{ot} + 2{,}50\,\mathrm{ot}\,\frac{5{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}}{19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}}\right).$$

Z poslední rovnice pak získáme výsledek

$$\omega_1 = 0{,}636\,9\,\mathrm{ot/s} \doteq 0{,}637\,\mathrm{ot/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Podaří-li se akrobatovi ještě více se skrčit, může se pokusit o čtyřnásobné salto při stejných hodnotách ω_1 a t. Jaký musí být jeho moment setrvačnosti ve skrčené poloze?

ŘEŠENÍ: Úhel otočení ve skrčené poloze je nyní $\theta_2 = 3{,}50$ ot. Podle rov. (12.45) je nyní

$$(1{,}87\,\mathrm{s}) = \frac{1}{(0{,}636\,9\,\mathrm{ot/s})}\cdot \cdot\left(0{,}500\,\mathrm{ot} + 3{,}50\,\mathrm{ot}\,\frac{I_2}{19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}}\right),$$

odkud

$$I_2 = 3{,}929\,\mathrm{kg\cdot m^2} \doteq 3{,}93\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Menší hodnota I_2 umožní rychlejší otáčení ve skrčené poloze. Nemusí však již být v silách akrobata jí docílit. Pokud by se akrobat chtěl pokusit o čtyřapůlnásobné salto, musel by buď prodloužit dobu letu nebo zvýšit svou počáteční úhlovou rychlost. Pokud by se rozhodl pro druhou možnost, riskoval by, že se jeho kolegovi nemusí podařit ho zachytit. (Víte proč?)

(c) Určete periodu otáčení akrobata během čtyřnásobného salta ve skrčené poloze.

ŘEŠENÍ: Z rov. (12.44) nejprve vypočtěme úhlovou rychlost ω_2 ve skrčené poloze:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2})}{(3{,}929\,\mathrm{kg\cdot m^2})}\,(0{,}636\,9\,\mathrm{ot/s}) = 3{,}226\,\mathrm{ot/s}.$$

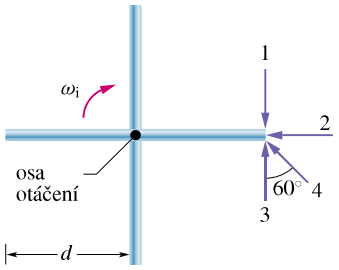
Periodu T již určíme velmi snadno:

$$T = \frac{1\,\mathrm{ot}}{\omega_2} = \frac{1\,\mathrm{ot}}{3{,}226\,\mathrm{ot/s}} = 0{,}310\,\mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jednou z příčin mimořádné obtížnosti čtyřnásobného salta je skutečnost, že otáčení je velmi rychlé. Artista při něm nestačí sledovat své okolí a jemně regulovat svou úhlovou rychlost vzájemnou polohou trupu a končetin — tedy změnou svého momentu setrvačnosti.

PŘÍKLAD 12.12

Čtyři tenké tyče, každá o hmotnosti m a délce $d = 1{,}0$ m jsou pevně spojeny do tvaru rovnoramenného kříže. Soustava se volně otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Počáteční úhlová rychlost je $\omega_i = -2{,}0$ rad/s, tj. ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 12.22). Koule z bláta o hmotnosti $m' = m/3$ a počáteční rychlosti $v_i = 12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ narazí na konec jedné tyče a přilne k ní. Jaká je výsledná úhlová rychlost soustavy kříž + koule? Uvažujme čtyři různé trajektorie koule podle obr. 12.22: trajektorie 1 — koule dopadá kolmo na tyč, trajektorie 2 — koule dopadá v radiálním směru, trajektorie 3 — koule dopadá kolmo na tyč v opačném směru než v případě 1, trajektorie 4 — koule dopadá na tyč pod úhlem 60° měřeným od kolmice k tyči.



Obr. 12.22 Příklad 12.12. Čtyři pevně spojené tyče se volně otáčejí kolem svislé osy. Blátivá koule může dopadnout na tyč čtyřmi různými způsoby a po dopadu zůstane k tyči přilepena. Obrázek představuje půdorysný průmět situace.

ŘEŠENÍ: Celkový moment hybnosti L soustavy kříž + koule vzhledem k ose otáčení se během srážky koule s rotujícím křížem zachovává, tj.

$$L_f = L_i. \tag{12.46}$$

Indexy (i) a (f) představují počáteční a výslednou hodnotu. Označme I_+ moment setrvačnosti kříže vzhledem k ose otáčení. Podle vztahu (f) v tab. 11.2 je

$$I_+ = 4(\tfrac{1}{3}md^2).$$

Moment setrvačnosti blátivé koule přilepené na jedné z tyčí vzhledem k ose otáčení je $I_{\mathrm{bk}} = m'd^2$. Označme jako L_i moment hybnosti koule vzhledem k ose otáčení před dopadem na tyč a ω_f výslednou úhlovou rychlost soustavy. Pomocí známého vztahu $L = I\omega$ přepíšeme rovnici (12.46) do tvaru

$$I_+\omega_\mathrm{f} + I_{\mathrm{bk}}\omega_\mathrm{f} = I_+\omega_\mathrm{i} + L_\mathrm{i},$$

a tedy

$$(\tfrac{4}{3}md^2)\omega_\mathrm{f} + (m'd^2)\omega_\mathrm{f} = (\tfrac{4}{3}md^2)\omega_\mathrm{i} + L_\mathrm{i}. \quad (12.47)$$

Dosadíme $m = 3m'$ a $\omega_\mathrm{i} = -2{,}0\,\mathrm{rad/s}$ a získanou rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé ω_f:

$$\omega_\mathrm{f} = \frac{1}{5m'd^2}\left(4m'd^2(-2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}) + L_\mathrm{i}\right). \quad (12.48)$$

Velikosti L_i pro trajektorie 1 a 3 vypočteme pomocí rov. (12.28), kde $r_\perp = d$ a $v = v_\mathrm{i}$. Pro případ 2 použijeme rov. (12.28) s $r_\perp = 0$. U trajektorie 4 využijeme rov. (12.27), kde položíme $r = d$ a $v_\perp = v_\mathrm{i}\cos 60°$. Znaménko veličiny L_i určíme tak, že sestrojíme polohový vektor dopadající koule a zjistíme, kterým směrem se otáčí při dopadu koule na kříž. Je-li zjištěný směr otáčení souhlasný se směrem otáčení hodinových ručiček, je hodnota L_i záporná, v opačném případě je kladná. Dostáváme:

dráha 1: $L_\mathrm{i} = -m'dv_\mathrm{i}$; dráha 2: $L_\mathrm{i} = 0$;
dráha 3: $L_\mathrm{i} = m'dv_\mathrm{i}$; dráha 4: $L_\mathrm{i} = m'dv_\mathrm{i}\cos 60°$.

Dosazením zadaných číselných hodnot vypočteme L_i pro každý z případů 1 až 4 a výsledek dosadíme do rov. (12.48). Nakonec dostáváme

dráha 1: $\omega_\mathrm{f} = -4{,}0\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$;
dráha 2: $\omega_\mathrm{f} = -1{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$;
dráha 3: $\omega_\mathrm{f} = 0{,}80\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$;
dráha 4: $\omega_\mathrm{f} = -0{,}40\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. (Odpověď)

12.9 KVANTOVANÝ MOMENT HYBNOSTI

Říkáme, že fyzikální veličina je **kvantovaná**, může-li nabývat jen určitých hodnot, jejichž množina je diskrétní. Všechny ostatní hodnoty jsou zakázány. Prozatím jsme se setkali se dvěma příklady kvantované veličiny z oblasti fyziky mikrosvěta: kvantování hmotnosti (čl. 2.9) a energie (čl. 8.9). Třetím příkladem, spadajícím rovněž do mikrosvěta, je moment hybnosti.

Elementární částice, jakými jsou například elektron nebo proton, mají vždy jistý vnitřní (**spinový**) moment hybnosti, jako by se neustále otáčely okolo své osy jako káča. (Ve skutečnosti se nejedná o žádné otáčení v mechanickém smyslu. Spinový moment hybnosti je veličina daleko abstraktnější než třeba moment hybnosti káči, který postihuje její skutečné otáčení.) Spinový moment hybnosti S je kvantován, jeho složka v libovolném směru (který označíme z) je dána vztahem

$$S_z = m_s\hbar, \quad (12.49)$$

kde $\hbar = 1{,}056{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ je redukovaná Planckova konstanta a m_s je kvantové číslo. V případě elektronů, protonů, pozitronů a antiprotonů nabývá toto číslo pouze dvou hodnot: $+\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$. Je-li $m_s = +\frac{1}{2}$, říkáme, že částice má *spin nahoru* a její spinový moment hybnosti je $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$. Je-li $m_s = -\frac{1}{2}$, má *spin dolů* a $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$.

Při srážkách a reakcích elementárních částic (zahrnujících i změny jejich identity) na jiné elementární částice se spinový moment hybnosti jejich soustavy zachovává. Například se může stát, že při srážce protonu (p) a antiprotonu ($\bar{\mathrm{p}}$) obě částice *anihilují* a vzniknou jiné elementární částice, a to 4 kladné piony (π^+) a 4 záporné piony (π^-):

$$\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \rightarrow 4\pi^+ + 4\pi^-.$$

Všechny piony mají $m_s = 0$. Po anihilaci $\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$ podle této reakce je celkový spinový moment hybnosti soustavy nulový. Při anihilaci se však celkový spinový moment hybnosti zachovává. Má-li tedy uvedená reakce proběhnout, musí mít proton a antiproton spiny orientovány opačně (jeden nahoru, druhý dolů), aby jejich součet byl roven nule.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Valivý pohyb těles

Pro kolo o poloměru R valící se bez klouzání platí

$$v_T = \omega R, \tag{12.2}$$

kde v_T je rychlost středu kola a ω je úhlová rychlost kola (vzhledem k libovolnému bodu, např. k jeho středu). Valení kola lze také popsat jako otáčení kolem okamžité osy rotace procházející bodem dotyku P kola s podložkou. Úhlová rychlost otáčení kola kolem tohoto bodu je stejná jako kolem středu kola. Valící se kolo má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_T^2, \tag{12.5}$$

kde I_T je moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem a m je jeho celková hmotnost.

Moment síly jako vektor

Moment síly $\boldsymbol{M}$ je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (obvykle počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{12.21}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je síla působící v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$ vzhledem k vztažnému bodu (např. počátku soustavy souřadnic). Velikost vektoru $\boldsymbol{M}$ je dána vztahem

$$M = rF\sin\varphi = rF_\perp = r_\perp F, \tag{12.22–12.24}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$, $F_\perp$ je složka vektoru $\boldsymbol{F}$ v rovině kolmé k vektoru $\boldsymbol{r}$ a $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$. Směr vektoru $\boldsymbol{M}$ je určen pravidlem pravé ruky pro vektorový součin.

Moment hybnosti částice

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ částice s hybností $\boldsymbol{p}$, hmotností m a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (většinou počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}). \tag{12.25}$$

Velikost vektoru $\boldsymbol{L}$ je

$$L = rmv\sin\varphi = rp_\perp = rmv_\perp = r_\perp p = r_\perp m v, \tag{12.26–12.28}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, $p_\perp$ a $v_\perp$ jsou složky vektorů $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ v rovině kolmé k $\boldsymbol{r}$ a $r_\perp$ je vzdálenost vztažného bodu od vektorové přímky hybnosti $\boldsymbol{p}$. Směr momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je dán pravidlem pravé ruky.

Druhý Newtonův zákon pro úhlové veličiny

Druhý Newtonův zákon pro částici lze pomocí úhlových veličin zapsat ve vektorovém tvaru takto:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}, \tag{12.30}$$

kde $\sum \boldsymbol{M}$ je výsledný moment všech sil působících na částici a $\boldsymbol{L}$ je její moment hybnosti.

Moment hybnosti soustavy částic

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy částic je vektorovým součtem momentů hybnosti jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots + \boldsymbol{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i. \tag{12.35}$$

Jeho časová změna je dána vektorovým součtem momentů všech vnějších sil působících na částice soustavy (tj. momentů sil popisujících působení objektů, které do soustavy nejsou zahrnuty, na částice soustavy):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_\mathrm{ext}. \tag{12.37}$$

Moment hybnosti tuhého tělesa

Složka momentu hybnosti tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy do směru této osy je

$$L = I\omega. \tag{12.39}$$

Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy se zachovává, je-li výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový (zákon zachování momentu hybnosti):

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.}, \tag{12.40}$$

nebo

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{L}_\mathrm{f}. \tag{12.41}$$

Zákon zachování momentu hybnosti je jedním ze základních zákonů zachování. Jeho platnost byla ověřena i pro soustavy, v nichž Newtonovy zákony v klasickém tvaru neplatí (např. částice pohybující se velkými rychlostmi, subatomární částice).

Kvantovaný moment hybnosti

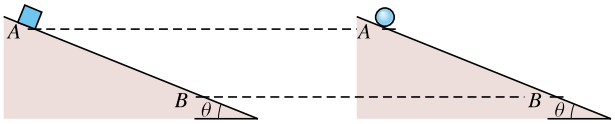
Spinový moment hybnosti S elementárních částic je kvantován. Jeho složka v libovolném směru má velikost

$$S = m_s \hbar, \tag{12.49}$$

kde $\hbar = 1{,}056{\cdot}10^{-34}$ J·s je redukovaná Planckova konstanta a m_s je kvantové číslo. *Orientace spinu nahoru*, resp. *dolů* odpovídají hodnotám $m_s = +\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$. Spinový moment hybnosti soustavy elementárních částic se zachovává při jejich srážkách nebo reakcích.

OTÁZKY

1. Kvádr na prvním z obr. 12.23 klouže dolů po dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu θ. Koule na vedlejším obrázku má stejnou hmotnost jako kvádr a bez klouzání se valí po nakloněné rovině se stejným úhlem sklonu. Obě tělesa byla po nakloněné rovině volně vypuštěna z bodu A a dorazila do bodu B. (a) Rozhodněte, zda tíhová síla působící na kvádr vykonala při jeho pohybu z bodu A do bodu B větší, menší, nebo stejnou práci jako tíhová síla působící na kouli. (b) Které z obou těles má v bodě B větší kinetickou energii připadající na posuvný pohyb? (c) Které z nich má v bodě B větší rychlost?



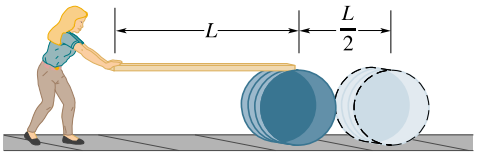
Obr. 12.23 Otázka 1

2. Dělová koule a dětská kulička se valí bez klouzání po nakloněné rovině. Obě tělesa byla zpočátku v klidu. (a) Rozhodněte, zda doba, za kterou dorazí dělová koule na konec nakloněné roviny, je větší, menší, či stejná jako v případě malé kuličky. (b) Zjistěte, zda část kinetické energie dělové koule připadající na její posuvný pohyb je větší, menší, nebo stejná jako u kuličky.

3. Dělová koule se valí bez klouzání nejprve po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ, poté po jiné rovině stejné výšky, avšak s menším úhlem sklonu. Rozhodněte, zda (a) doba potřebná k dosažení konce nakloněné roviny a (b) kinetická energie posuvného pohybu na konci nakloněné roviny je při druhém experimentu větší, menší, nebo stejná jako v prvním případě.

4. Dva plné válce, mosazný a dřevěný, mají shodný poloměr i hmotnost (dřevěný válec je tedy delší). Oba jsou volně vypuštěny po nakloněné rovině a valí se bez klouzání. (a) Dorazí některý z nich na konec nakloněné roviny dříve? Pokud ano, který? (b) Pro další pokus byly válce upraveny tak, aby měly stejnou délku a hmotnost. Dřevěný válec byl zkrácen a v mosazném válci byl podél osy jeho rotační symetrie vyvrtán otvor vhodného průměru. Jak dopadne závod válců po nakloněné rovině nyní?

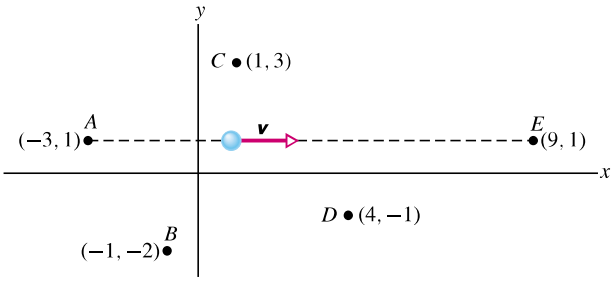
5. Skladnice na obr. 12.24 valí válcový soudek pomocí desky o délce L. Soudek se valí bez klouzání a urazí dráhu $L/2$. Deska po povrchu na soudku rovněž neklouže. (a) Jak dlouhá část desky přišla během pohybu do styku s povrchem soudku? (b) Jakou vzdálenost přitom ušla skladnice?



Obr. 12.24 Otázka 5

6. Polohový vektor částice $\boldsymbol{r}$, vztažený k bodu O, má délku 3 m. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 4 N. Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$, jestliže velikost momentu síly vzhledem k bodu O (a) je nulová, (b) má hodnotu 12 N·m?

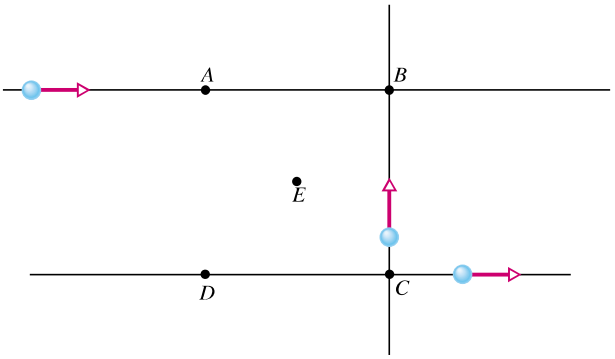
7. Na obr. 12.25 je rozmístěno pět vztažných bodů, jejichž polohy jsou určeny souřadnicemi (x, y). Částice, která je v obrázku rovněž zakreslena, se pohybuje stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Seřaďte vztažné body sestupně podle velikosti odpovídajícího momentu hybnosti částice.



Obr. 12.25 Otázka 7

8. (a) V kontrole 4 se částice 1 a 2 pohybují rovnoměrně po kružnicích. V obou případech určete moment dostředivé síly vzhledem k bodu O. (b) Částice 3, 4 a 5 se pohybují po přímkách zleva doprava. Pro každou z nich rozhodněte, zda velikost jejího momentu hybnosti vzhledem k bodu O roste, klesá, nebo zůstává stejná.

9. Na obr. 12.26 jsou znázorněny tři stejné částice pohybující se ve vyznačených směrech stejně rychle. Tyto částice tvoří soustavu. Vztažné body A, B, C a D leží ve vrcholech čtverce, bod E je v jeho středu. Seřaďte body (sestupně) podle velikosti celkového momentu hybnosti soustavy částic.

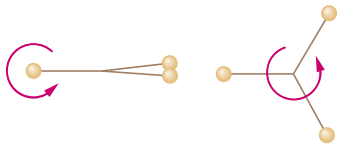


Obr. 12.26 Otázka 9

10. Následující funkce představují časovou závislost momentu hybnosti částice ve čtyřech různých situacích: (1) $L(t) = 3t + 4$, (2) $L(t) = -6t^2$, (3) $L(t) = 2$, (4) $L(t) = 4/t$. Ve které z nich je výsledný moment sil působících na částici (a) nulový,

(b) kladný a konstantní, (c) záporný s rostoucí velikostí (pro $t > 0$), (d) záporný s klesající velikostí (pro $t > 0$)?

11. Bolaso se skládá ze tří těžkých koulí spojených třemi stejně dlouhými pevnými lany (obr. 12.27). S předmětem se zachází takto: jednu kouli držíme nad hlavou a zbývající dvě roztočíme tak, aby obíhaly po kružnici (obr. 12.27a). V určitém okamžiku střední kouli uvolníme. Rozložení koulí se změní podle obr. 12.27b. Rozhodněte, zda se (a) moment hybnosti a (b) úhlová rychlost bolasa během této změny zvětší, zmenší, případně nezmění.

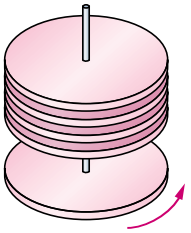


(*a*) (*b*)

Obr. 12.27 Otázka 11

12. Brouk sedí na obvodu kolotoče, který se otáčí proti směru chodu hodinových ručiček. V určitém okamžiku začne brouk lézt po obvodu ve směru otáčení. Rozhodněte, zda následující veličiny při pohybu brouka rostou, klesají, nebo se nemění: (a) moment hybnosti soustavy kolotoč + brouk, (b) moment hybnosti a úhlová rychlost brouka a (c) moment hybnosti a úhlová rychlost kolotoče? (d) Jak se změní odpovědi na předchozí otázky, poleze-li brouk proti směru otáčení kolotoče?

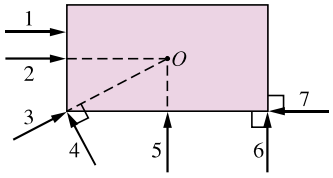
13. Spodní kotouč na obr. 12.28 se volně otáčí kolem vyznačené



Obr. 12.28 Otázka 13

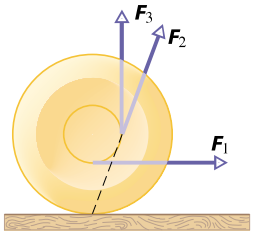
osy proti směru chodu hodinových ručiček. Jeho moment hybnosti vzhledem k jeho ose otáčení je 50 jednotek. Čtyři další rotující kotouče jsou postupně spuštěny po ose a dopadnou na spodní kotouč. Jejich momenty hybnosti před dopadem jsou (1) 20 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček, (2) 10 jednotek proti směru otáčení hodinových ručiček, (3) 10 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček a (4) 60 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček. Po dopadu se kotouče vlivem třecích sil spojí a celek se nakonec otáčí stejnou úhlovou rychlostí. (a) Jaký je výsledný moment hybnosti soustavy kotoučů? (b) V jakém pořadí je třeba kotouče přidávat, aby nastal okamžik, kdy je úhlová rychlost spojených kotoučů nulová?

14. Vodorovná obdélníková deska na obr. 12.29 se může otáčet kolem svislé osy procházející jejím středem O. Zpočátku je deska v klidu. Dítě hází na desku stejné kousky žvýkačky, které se s ní po dopadu spojí. V obrázku jsou vyznačeny možné trajektorie kousků dopadajících na desku ve vyznačených bodech jejího obvodu. Velikost rychlosti žvýkaček bezprostředně před dopadem je rovněž stejná. (a) Seřaďte vyznačené trajektorie podle velikosti úhlové rychlosti, kterou se budou otáčet soustava deska + žvýkačka po dopadu žvýkačky. (b) Pro kterou z nich bude moment hybnosti desky s kouskem žvýkačky záporný?



Obr. 12.29 Otázka 14

15. Jojo na obr. 12.30 je zpočátku v klidu. Promyslete, jak se bude pohybovat, bude-li na vlákno působit tažná síla (a) $\boldsymbol{F}_2$, jejíž vektorová přímka prochází bodem dotyku joja s podložkou, (b) $\boldsymbol{F}_1$ s vektorovou přímkou ležící nad bodem dotyku, (c) $\boldsymbol{F}_3$ s vektorovou přímkou procházející vpravo od bodu dotyku.



Obr. 12.30 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 12.1 Valení

1C. Tenkostěnná trubice se valí po podlaze. Určete poměr kinetické energie jejího posuvného pohybu a kinetické energie otáčivého pohybu vzhledem k její podélné ose.

2C. Prstenec o hmotnosti 140 kg se valí po vodorovné podlaze. Jeho těžiště má rychlost 0,150 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jakou práci je třeba vykonat, aby se prstenec zastavil?

3C. Automobil jede rychlostí 80,0 km/h. (a) Určete úhlovou rychlost pneumatik vzhledem k jejich osám, víte-li, že průměr pneumatiky je 75,0 cm. (b) Řidič automobilu zastavil bez prokluzu kol. Od okamžiku, kdy začal rovnoměrně brzdit, vykonala kola 30,0 otáček. Určete jejich úhlové zrychlení. (c) Jakou dráhu automobil během brzdění urazil?

4C. Vůz o hmotnosti 1 000 kg má čtyři kola. Hmotnost každého z nich je 10 kg. Jaká část celkové kinetické energie vozu připadá na otáčivý pohyb jeho kol? Při výpočtu momentu setrvačnosti

považujeme kolo za homogenní kotouč. Proč nepotřebujete znát poloměr kol?

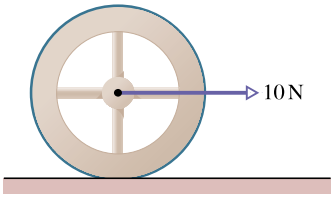
5C. Kolo o poloměru 0,250 m se valí bez klouzání s počáteční rychlostí 43,0 m·s^{-1} a zastaví se na dráze 225 m. Vypočtěte jeho (a) zrychlení a (b) úhlové zrychlení. (c) Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je 0,155 kg·m^2. Vypočtěte vzhledem k této ose moment třecích sil, které na kolo při brzdění působí.

6C. Automobil o celkové hmotnosti 1 700 kg se rozjíždí z klidu a za dobu 10 s dosáhne rychlosti 40 km/h. Každé jeho kolo považujeme za homogenní kotouč o hmotnosti 32 kg. Vypočtěte (a) kinetickou energii otáčivého pohybu každého kola vzhledem k jeho ose, (b) celkovou kinetickou energii každého kola, (c) celkovou kinetickou energii automobilu na konci desáté sekundy pohybu.

7C. Homogenní koule se valí dolů po nakloněné rovině. (a) Jak je třeba zvolit úhel sklonu roviny, aby se těžiště koule pohybovalo se zrychlením o velikosti $0,10g$? (b) Jaké by bylo zrychlení tělesa, které by po této nakloněné rovině klouzalo bez tření?

8C. Plná koule o hmotnosti 4,00 kg se valí vzhůru po nakloněné rovině se sklonem 30,0°. Počáteční rychlost jejího těžiště má velikost 5,0 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte počáteční kinetickou energii koule. (b) Jakou dráhu koule po nakloněné rovině urazí, než vystoupí do bodu obratu? (c) Závisí odpověď na otázku (b) na hmotnosti koule?

9Ú. Na kolo o hmotnosti 10 kg a poloměru 0,30 m působí stálá vodorovná síla o velikosti 10 N (obr. 12.31). Kolo se valí bez klouzání po vodorovné rovině a zrychlení jeho těžiště je 0,60 m·s^{-2}. (a) Určete velikost a směr třecí síly působící na kolo. (b) Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho těžištěm kolmo k jeho rovině.

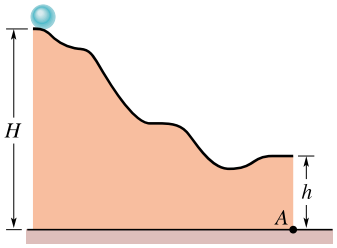


Obr. 12.31 Úloha 9

10Ú. Automobil jede rychlostí 80 km/h ve směru kladné osy x. Průměr pneumatik je 66 cm. Ve vztažné soustavě spojené s automobilem určete rychlost a zrychlení (a) středu kola, (b) bodu na vrcholu pneumatiky, (c) bodu dotyku pneumatiky se silnicí. (d) Úlohy (a), (b) a (c) řešte i ve vztažné soustavě spojené se silnicí.

11Ú. Těleso o poloměru R a hmotnosti m se valí bez klouzání po vodorovné podlaze rychlostí $\boldsymbol{v}$. V určitém okamžiku najede na nakloněnou rovinu a začne podél ní stoupat. Bod obratu leží ve výšce $h = 3v^2/(4g)$ nad úrovní podlahy. (a) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. (b) O jaké těleso se pravděpodobně jedná?

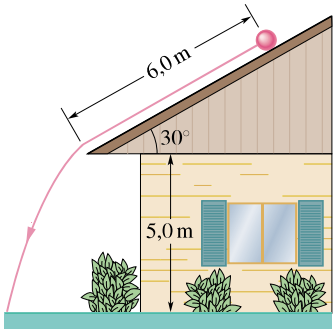
12Ú. Homogenní koule je uvolněna z klidové polohy v nejvyšším bodě dráhy znázorněné na obr. 12.32 a valí se po ní bez klouzání. Dráha končí nad bodem A, který je v obrázku vyznačen. V okamžiku, kdy koule opustí dráhu, má její rychlost vodorovný směr. Pro hodnoty $H = 6,0$ m a $h = 2,0$ m zjistěte, jak daleko od bodu A dopadne koule na podlahu.



Obr. 12.32 Úloha 12

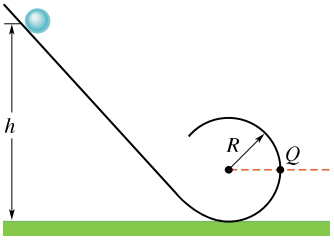
13Ú. Kulička o poloměru r a hmotnosti m se může valit bez klouzání po vnitřním povrchu nádoby polokulového tvaru o poloměru R. Kuličku uvolníme z klidové polohy na okraji nádoby. (a) Určete její kinetickou energii v nejnižším bodě trajektorie. (b) Jaká část vypočtené hodnoty odpovídá otáčivému pohybu kuličky vzhledem k ose vedené jejím těžištěm? (c) Určete tlakovou sílu, jíž působí kulička na polokouli v nejnižším bodě své trajektorie. Předpokládejte, že poloměr kuličky r je mnohem menší než poloměr nádoby R.

14Ú. Válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 12 kg byl volně puštěn po šikmé střeše se sklonem 30° (obr. 12.33) a valí se po ní bez klouzání. Poté, co urazí dráhu 6,0 m, dospěje k okapu a spadne. (a) Určete jeho úhlovou rychlost vzhledem k ose vedené jeho těžištěm v tomto okamžiku. (b) Stěna domu je vysoká 5,0 m. Jak daleko od okapu dopadne válec na zem?



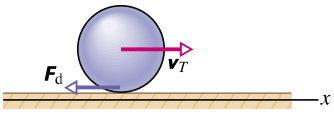
Obr. 12.33 Úloha 14

15Ú. Malá plná kulička o hmotnosti m a poloměru r se valí bez klouzání po nakloněné rovině zakončené smyčkou podle obr. 12.34. Kulička byla uvolněna ve výšce h nad úrovní vodorovné podlahy. (a) Určete nejmenší hodnotu h, při které kulička ještě projde vrcholem smyčky. Poloměr R smyčky je mnohonásobně větší než poloměr r kuličky. (b) Pro hodnotu $h = 6R$ vypočtěte vodorovnou složku síly, kterou působí dráha na kuličku v bodě Q.



Obr. 12.34 Úloha 15

16Ú. Koule o poloměru $R = 11$ cm byla vržena po vodorovné podlaze s počáteční rychlostí $v_0 = 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a nulovou počáteční úhlovou rychlostí $\omega_0 = 0$. Koeficient dynamického tření mezi koulí a podlahou je 0,21. Zpočátku koule po podlaze klouže. Vlivem dynamické třecí síly (obr. 12.35) $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ a jejího nenulového



Obr. 12.35 Úloha 16

momentu vzhledem k těžišti je nenulové jak zrychlení těžiště koule, tak její úhlové zrychlení. Velikost rychlosti posuvného pohybu koule v klesá a její úhlová rychlost ω naopak roste. V určitém okamžiku přestane koule po podlaze klouzat a začne se valit. Rychlost jejího těžiště v_T i úhlová rychlost ω se od té chvíle přestanou měnit. (a) Zapište vztah mezi „ustálenými" hodnotami v_T a ω. Zjistěte, (b) s jakým zrychlením se pohybovalo těžiště koule a (c) jaké bylo její úhlové zrychlení do okamžiku, než se začala valit bez klouzání. (d) Jak dlouho koule klouzala a (e) jakou dráhu přitom urazila? (f) Určete hodnotu v_T v okamžiku, kdy se koule začala valit.

ODST. 12.2 Jojo

17C. Jojo o hmotnosti 120 g má moment setrvačnosti 950 $\mathrm{g\cdot cm^2}$. Poloměr jeho osičky 3,2 mm a vlákno má délku 120 cm. Jojo je zpočátku v klidu a po uvolnění se odvaluje podél vlákna dolů. (a) Určete jeho zrychlení. (b) Určete okamžik, kdy jojo dospěje na konec vlákna, a zjistěte hodnoty následujících veličin v tomto okamžiku: (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) kinetickou energii otáčivého pohybu, (f) úhlovou rychlost.

18Ú. Předpokládejme, že na rozdíl od předchozího cvičení nebylo jojo uvolněno z klidové polohy, ale vrženo svisle dolů počáteční rychlostí o velikosti $1{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho dorazí jojo na konec vlákna nyní? Vypočtěte v tomto okamžiku jeho (b) celkovou kinetickou energii, (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) úhlovou rychlost a (f) kinetickou energii otáčivého pohybu.

ODST. 12.3 Ještě jednou moment síly

19C. Pro $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ dokažte, že moment síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ je dán vztahem

$$\boldsymbol{M} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}.$$

20C. Dokažte následující tvrzení: Průmět momentu síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ do roviny vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$ je nulový.

21C. Na malý míček umístěný v bodě $(-2{,}0\ \mathrm{m}; 0; 4{,}0\ \mathrm{m})$ působí síla $\boldsymbol{F}$, která má nenulovou pouze jedinou složku. Určete velikost a směr momentu této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic v následujících případech: (a) $F_x = 6{,}0$ N, (b) $F_x = -6{,}0$ N, (c) $F_z = 6{,}0$ N a (d) $F_z = -6{,}0$ N.

22C. Na částici v bodě o souřadnicích $(0; -4{,}0\ \mathrm{m}; 3{,}0\ \mathrm{m})$ působí (a) síla $\boldsymbol{F}_1$ o složkách $F_{1x} = 2{,}0$ N a $F_{1y} = F_{1z} = 0$, (b) síla $\boldsymbol{F}_2$ o složkách $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2{,}0$ N a $F_{2z} = 4{,}0$ N. V obou případech vypočtěte velikost a směr momentu síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

23Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (2{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působí na kamínek, jehož poloha vzhledem k počátku soustavy souřadnic je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (0{,}50\ \mathrm{m})\boldsymbol{j} - (2{,}0\ \mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Vypočtěte moment této síly (a) vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (b) vzhledem k bodu o souřadnicích $(2{,}0\ \mathrm{m}; 0; -3{,}0\ \mathrm{m})$.

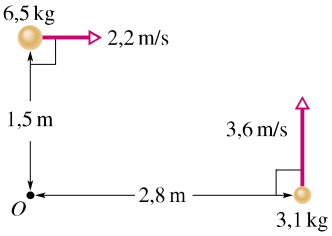
24Ú. Na částici v poloze určené souřadnicemi $(3{,}0\ \mathrm{m}; -2{,}0\ \mathrm{m}; 4{,}0\ \mathrm{m})$ působí (a) síla $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} + (5{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$, (b) síla $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} - (5{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$, (c) výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Ve všech případech vypočtěte moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

25Ú. Na částici v bodě o souřadnicích $(0; -4{,}0\ \mathrm{m}; 5{,}0\ \mathrm{m})$ působí síly $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Vypočtěte jejich výsledný moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

26Ú. Na částici o poloze $\boldsymbol{r} = (3{,}0\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{m})\boldsymbol{j}$ působí síla $\boldsymbol{F} = (-8{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (6{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Vypočtěte (a) moment této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$.

ODST. 12.4 Moment hybnosti

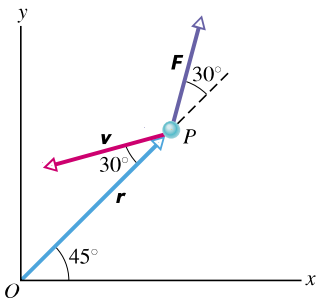
27C. Soustava na obr. 12.36 je složena ze dvou pohybujících se těles. Vypočtěte její celkový moment hybnosti vzhledem k bodu O.



Obr. 12.36 Cvičení 27

28C. Letadlo o hmotnosti 1 200 kg letí rychlostí $80\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Letí po přímce ve stálé výšce 1,3 km nad zemí. Vypočtěte velikost jeho momentu hybnosti vzhledem k bodu, který leží na zemském povrchu přímo pod ním.

29C. Částice o hmotnosti 2,0 kg je právě v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r}$ ($r = 3{,}0$ m) a má rychlost $\boldsymbol{v}$ ($v = 4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$) (obr. 12.37). Síla $\boldsymbol{F}$ ($F = 2{,}0$ N), která na ni působí, leží v rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$. Vypočtěte vzhledem k počátku soustavy souřadnic (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly $\boldsymbol{F}$.



Obr. 12.37 Cvičení 29

30C. Pomocí rov. (12.26) lze ze zadaných hodnot r, p a φ určit moment hybnosti částice. V některých případech jsou však místo velikostí vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ a úhlu mezi nimi zadány pouze jejich složky (x, y, z) a (v_x, v_y, v_z). (a) Dokažte, že složky momentu hybnosti částice $\boldsymbol{L}$ jsou dány vztahy $L_x = m(yv_z - zv_y)$, $L_y = m(zv_x - xv_z)$ a $L_z = m(xv_y - yv_x)$. (b) Dokažte, že při pohybu částice v rovině xy má její moment hybnosti nenulovou jedině z-ovou složku.

31C. Částice má v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech) rychlost $\boldsymbol{v} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (v m/s) a působí na ni síla $\boldsymbol{F} = 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v newtonech). Vypočtěte (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly $\boldsymbol{F}$, obojí vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (*Tip*: Viz cvič. 19 a 30.)

32Ú. Člověk o hmotnosti 84 kg stojí na rovníku. Jaká je velikost jeho momentu hybnosti vzhledem ke středu Země?

33Ú. Soustava je tvořena dvěma stejně hmotnými částicemi, které se pohybují opačnými rychlostmi o velikosti v. Vzdálenost jejich přímkových trajektorií je d. (a) Vyjádřete velikost momentu hybnosti soustavy vzhledem k bodu ležícímu uprostřed mezi oběma trajektoriemi pomocí veličin m, v a d. (b) Jak se změní velikost momentu hybnosti, zvolíme-li jiný vztažný bod? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), budou-li se částice pohybovat po přímkách souhlasně?

34Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje v rovině xy rychlostí $\boldsymbol{v}$ o složkách $v_x = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_y = 60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V určitém okamžiku prochází bodem o souřadnicích $(x, y) = (3{,}0\,\mathrm{m};\ -4{,}0\,\mathrm{m})$. (a) Určete v tomto okamžiku moment hybnosti tělesa vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Vypočtěte moment hybnosti tělesa v tomtéž okamžiku, avšak vzhledem k bodu $(-2{,}0\,\mathrm{m};\ -2{,}0\,\mathrm{m})$.

35Ú. (a) Pomocí údajů v dodatcích vypočtěte velikost celkového momentu hybnosti soustavy planet při jejich oběhu kolem Slunce. Slunce považujte za vztažný bod. (b) Jak velký je moment hybnosti samotného Jupiteru a jakou část velikosti celkového momentu hybnosti představuje?

ODST. 12.5 Věta o momentu hybnosti

36C. Částice o hmotnosti 3,0 kg má v bodě o souřadnicích $x = 3{,}0$ m a $y = 8{,}0$ m rychlost $\boldsymbol{v} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (6{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 7,0 N ve směru záporné osy x. (a) Vypočtěte její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Určete moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (c) Jak rychle se mění moment hybnosti částice? (Rychlost změny fyzikální veličiny určuje její časová derivace.)

37C. Na částici působí dvě síly. Moment první síly, označený $\boldsymbol{M}_1$ a vztažený k počátku soustavy souřadnic, má velikost 2,0 N·m a směřuje podél kladné osy x. Moment druhé síly, $\boldsymbol{M}_2$, má velikost 4,0 N·m a je rovnoběžný se záporným směrem osy y. Určete velikost a směr vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$, představujícího časovou derivaci momentu hybnosti částice, vztaženého rovněž k počátku soustavy souřadnic.

38C. V každém z následujících případů určete moment síly, která působí na částici pohybující se v rovině xy, znáte-li její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic:

(a) $-4{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(b) $-4{,}0t^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(c) $-4{,}0\sqrt{t}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(d) $-4{,}0/t^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$.

39C. Autíčko o hmotnosti 3,0 kg jede podél osy x. Časová závislost jeho rychlosti je dána funkcí $v_x = -2{,}0t^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V obecném okamžiku $t > 0$ vyjádřete (a) moment hybnosti autíčka vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) moment síly, která na ně působí, vzhledem k témuž vztažnému bodu. Opakujte výpočet (a) a (b) pro vztažný bod o souřadnicích (c) (2,0 m; 5,0 m; 0), (d) (2,0 m; −5,0 m, 0).

40Ú. V okamžiku $t = 0$ je poloha částice o hmotnosti 2,0 kg dána polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = (4{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$. Její rychlost závisí na čase vztahem $\boldsymbol{v} = (-6{,}0t^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Pro libovolný okamžik $t > 0$ vyjádřete (a) moment hybnosti částice, (b) výsledný moment sil, které na ni působí. Za vztažný bod pro výpočet momentů zvolte počátek soustavy souřadnic. (c) Výpočet částí (a) a (b) zopakujte pro vztažný bod $(-2{,}0\,\mathrm{m};\ -3{,}0\,\mathrm{m};\ 0\,\mathrm{m})$.

41Ú. Kulka o hmotnosti m je vystřelena ze země počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem θ_0. (a) Vyjádřete její moment hybnosti vzhledem k místu výstřelu v závislosti na čase. (b) Jak rychle se moment hybnosti mění? (c) Vypočtěte velikost vektoru $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ přímo a porovnejte ji s výsledkem úlohy (b). Proč jsou oba výsledky shodné?

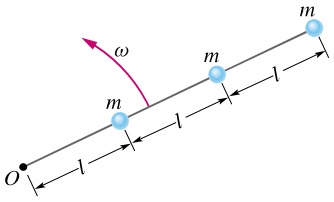
ODST. 12.7 Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose

42C. Brusný kotouč s momentem setrvačnosti $1{,}2{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ je připojen k motoru, který na něj působí silou s momentem 16 N·m. Určete (a) moment hybnosti kotouče vzhledem k ose vedené jeho středem a (b) jeho úhlovou rychlost po uplynutí doby 33 ms od zapnutí motoru.

43C. Velikost momentu hybnosti setrvačníku vzhledem k ose vedené jeho středem se během 1,50 s zmenšila z $3{,}00\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$ na $0{,}800\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$. Těleso má vzhledem k této ose moment setrvačnosti $0{,}140\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. (a) Určete průměrný moment sil, které na setrvačník při jeho brzdění působily, vzhledem k ose otáčení. (b) Vypočtěte celkový úhel otočení setrvačníku během brzdění

za předpokladu, že bylo rovnoměrné. (c) Jakou práci vykonaly brzdné síly? (d) Jaký byl jejich průměrný výkon?

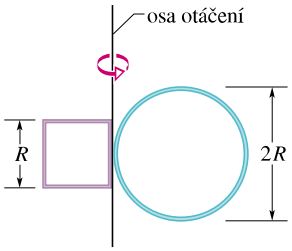
44C. Tři částice se stejnými hmotnostmi m jsou navzájem spojeny třemi vlákny délky l a připojeny k ose otáčení vedené bodem O (obr. 12.38). Hmotnost vláken je zanedbatelná. Soustava částic se otáčí kolem této osy s úhlovou rychlostí ω tak, že částice leží na přímce. Pomocí veličin m, l a ω vyjádřete (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu O, (b) moment hybnosti prostřední částice vzhledem k témuž bodu a (c) celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k bodu O.



Obr. 12.38 Cvičení 44

45C. Homogenní tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím koncem. Délka tyče je 6,00 m, tíhová síla má velikost 10,0 N. Tyč se otáčí úhlovou rychlostí 240 ot/min ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení a (b) její moment hybnosti vzhledem k této ose.

46Ú. Na obr. 12.39 je znázorněno tuhé těleso, které se skládá z kruhové obruče o poloměru $R = 0{,}50$ m a hmotnosti $m = 2{,}0$ kg a ze čtverce vyrobeného ze čtyř stejných tenkých tyčí o délce R a hmotnosti m. Těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí kolem svislé osy s periodou 2,5 s. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a (b) jeho moment hybnosti vzhledem k této ose.

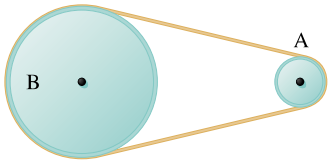


Obr. 12.39 Úloha 46

47Ú. Kola A a B na obr. 12.40 jsou spojena neprokluzujícím řemenem. Poloměr kola B je třikrát větší než poloměr kola A. Určete poměr momentů setrvačnosti kol I_A/I_B víte-li, že mají (a) stejný moment hybnosti vzhledem k osám otáčení, nebo (b) stejnou kinetickou energii otáčivého pohybu.

48Ú. Síla $F(t)$ působí po krátkou dobu Δt na rotující tuhé těleso s momentem setrvačnosti I. Ukažte, že platí

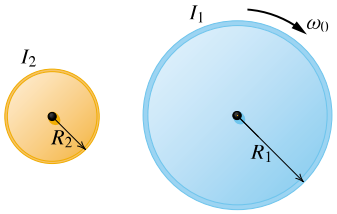
$$\int M\,\mathrm{d}t = \overline{F} R \Delta t = I(\omega_\mathrm{f} - \omega_\mathrm{i}),$$



Obr. 12.40 Úloha 47

kde R je rameno síly, $\overline{F}$ průměrná hodnota síly F v časovém intervalu Δt a ω_i, ω_f jsou úhlové rychlosti tělesa na začátku a na konci intervalu Δt. (Veličina $\int M\,\mathrm{d}t = \overline{F} R \Delta t$ se nazývá *impulz momentu síly*, v analogii s impulzem síly $\overline{F}\Delta t$.)

49Ú*. Dva válce s poloměry R_1 a R_2 se mohou volně otáčet kolem svých os (obr. 12.41). Odpovídající momenty setrvačnosti vzhledem k těmto osám jsou I_1 a I_2. Zpočátku se větší válec otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Menší válec je v klidu a v určitém okamžiku se dotkne většího válce. Vlivem třecí síly se začne rovněž roztáčet. Po jisté době přestanou válce klouzat a od té chvíle se budou otáčet stálými úhlovými rychlostmi v opačných směrech. Vyjádřete úhlovou rychlost ω_2 menšího válce pomocí veličin I_1, I_2, R_1, R_2 a ω_0. (*Tip*: Moment hybnosti soustavy ani její kinetická energie se nezachovávají. Použijte vztah pro impulz momentu síly z úlohy 48.)



Obr. 12.41 Úloha 49

ODST. 12.8 Zákon zachování momentu hybnosti

50C. Rotor elektrického motoru má vzhledem k ose své rotační symetrie moment setrvačnosti $I_\mathrm{m} = 2{,}0\cdot10^{-3}$ kg·m^2. Motor je umístěn na palubě vesmírné sondy a slouží ke změně její orientace. Moment setrvačnosti sondy vzhledem k její ose, rovnoběžné s osou motoru, je $I_\mathrm{s} = 12$ kg·m^2. Vypočtěte, kolik otáček musí rotor vykonat, aby se sonda pootočila kolem své osy o úhel 30°.

51C. Člověk stojí s upaženýma rukama na desce, která se otáčí bez tření úhlovou rychlostí 1,2 ot/s. V každé ruce drží závaží. Moment setrvačnosti soustavy člověk+závaží+podložka vzhledem k ose otáčení má hodnotu 6,0 kg·m^2. Člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy na hodnotu 2,0 kg·m^2. (a) Jakou úhlovou rychlostí se potom bude deska otáčet? (b) Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Odkud se vzala „přebytečná“ kinetická energie?

52C. Dva kotouče jsou připojeny k ose pomocí ložisek a mohou se volně otáčet bez tření. Posouváním kotoučů podél osy lze docílit jejich spojení v jedno těleso. (a) První kotouč, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je 3,3 kg·m^2, byl roztočen úhlovou rychlostí 450 ot/min. Druhý kotouč s momen-

tem setrvačnosti 6,6 kg·m^2 má úhlovou rychlost 900 ot/min. Kotouče se otáčejí souhlasně. (a) Určete společnou úhlovou rychlost kotoučů po jejich spojení. (b) Zodpovězte otázku (a) pro případ, že se kotouče před spojením otáčejí úhlovými rychlostmi 900 ot/min v opačných směrech.

53C. Kolo se volně otáčí úhlovou rychlostí 800 ot/min. Druhé kolo má dvakrát větší moment setrvačnosti a je zpočátku v klidu. V jistém okamžiku připojíme druhé kolo k hřídeli prvního kola. Hřídel má zanedbatelný moment setrvačnosti. (a) Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy kol na hřídeli. (b) Určete změnu kinetické energie soustavy při spojení kol.

54C. Moment setrvačnosti rotující hvězdy se zmenšil na jednu třetinu své původní hodnoty. Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie otáčivého pohybu hvězdy.

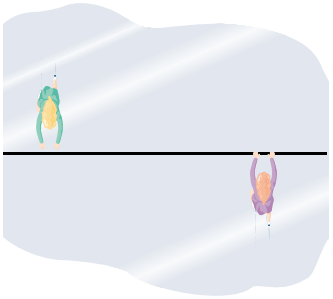
55C. Předpokládejme, že by Slunce spotřebovalo všechno jaderné palivo a náhle se smrštilo v bílého trpaslíka s poloměrem shodným s poloměrem Země. Jaká by byla nová perioda otáčení Slunce za předpokladu, že by se při smršťování neztratila žádná sluneční hmota? Současná perioda otáčení Slunce je asi 25 dní.

56C. Malý kolotoč má poloměr 1,20 m a hmotnost 180 kg. Jeho gyrační poloměr (úloha 58 v kap. 11) je 91,0 cm. Kolotoč je zpočátku v klidu. Chlapec o hmotnosti 44,0 kg běží rychlostí 3,00 m·s^{-1} po přímé dráze, která se dotýká obvodu kolotoče. V bodě dotyku hoch na kolotoč naskočí. Zanedbejte tření v ložiscích a vliv hřídele kolotoče a vypočtěte (a) moment setrvačnosti kolotoče vzhledem k ose otáčení, (b) moment hybnosti běžícího chlapce vzhledem k ose otáčení kolotoče a (c) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a chlapce.

57C. Vodorovná kruhová deska se otáčí bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. Deska má hmotnost 150 kg, poloměr 2,0 m a moment hybnosti 300 kg·m^2 vzhledem k ose otáčení. Člověk o hmotnosti 60 kg pomalu kráčí od obvodu desky k jejímu středu. V okamžiku, když se nacházel na obvodu desky, byla úhlová rychlost soustavy deska + člověk 1,5 rad/s. Určete úhlovou rychlost soustavy v okamžiku, kdy je člověk vzdálen od osy otáčení o 0,50 m?

58C. Ráfek bicyklového kola má hmotnost 3,79 kg a poloměr 34,7 cm. Může se otáčet v ložisku bez tření. Člověk stojí na otočné stoličce a drží kolo nad hlavou tak, aby jeho osa byla svislá. Kolo se otáčí úhlovou rychlostí 57,7 rad/s ve směru chodu hodinových ručiček při pohledu shora. Otočná stolička je zpočátku v klidu. Moment setrvačnosti soustavy kolo + člověk + stolička vzhledem ke společné ose otáčení je 1,36 kg·m^2. Člověk volnou rukou náhle zastaví otáčení kola (vzhledem ke stoličce). Určete výslednou úhlovou rychlost (velikost a směr) soustavy. Moment setrvačnosti loukotí a středního ložiska kola zanedbejte.

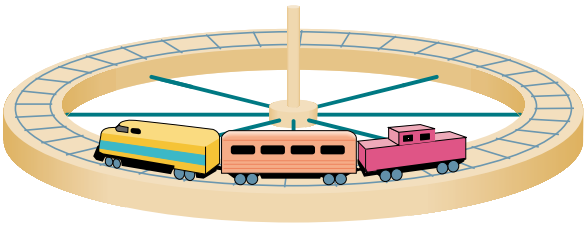
59Ú. Dva bruslaři o hmotnostech 50 kg se přibližují po rovnoběžných přímých drahách vzdálených o 3,0 m. Rychlosti bruslařů mají stejnou velikost 1,4 m·s^{-1}, jsou však opačně orientovány. První bruslař svírá v rukou konec dlouhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Druhý bruslař uchopí tyč v okamžiku, kdy ji míjí (obr. 12.42). Tření mezi bruslemi a ledem považujeme za zanedbatelné. (a) Popište kvantitativně pohyb bruslařů po jejich spojení. (b) Ručkováním podél tyče se bruslaři přiblížili na vzdálenost 1,0 m. Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy. (c) Vypočtěte kinetickou energii bruslařů ve stavech (a) a (b). (d) Odkud se vzala „přebytečná“ kinetická energie?



Obr. 12.42 Úloha 59

60Ú. Dvě děti o stejných hmotnostech m sedí na opačných koncích úzké desky o délce L a hmotnosti m shodné s hmotností dítěte. Deska se může otáčet bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti desky s dětmi vzhledem k ose otáčení. (b) Určete moment hybnosti soustavy, otáčí-li se úhlovou rychlostí ω_0 ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. Určete směr vektoru momentu hybnosti. (c) Během otáčení se děti posunuly podél desky a zmenšily svou vzdálenost od osy otáčení na polovinu původní hodnoty. Vyjádřete výslednou úhlovou rychlost soustavy pomocí ω_0. (d) Vypočtěte změnu kinetické energie soustavy. Jak vznikla „přebytečná“ kinetická energie? Při výpočtech nahraďte desku tenkou tyčí.

61Ú. Koleje dětského vláčku leží na velkém kole o hmotnosti m a poloměru R, které se může volně otáčet bez tření kolem svislé osy (obr. 12.43). Na kolejích stojí vláček o hmotnosti m'. Soustava je v klidu. Vláček uvedeme do pohybu rychlostí v vzhledem ke kolejím. Vypočtěte úhlovou rychlost ω kola. Při výpočtu nahraďte kolo obručí a zanedbejte hmotnost loukotí a středního ložiska.



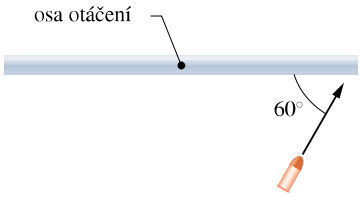
Obr. 12.43 Úloha 61

62Ú. Moucha o hmotnosti m se pohybuje proti směru chodu hodinových ručiček po obvodu kruhového talíře, který se může bez tření otáčet kolem svislé osy. Talíř má poloměr R a moment setrvačnosti I. Rychlost mouchy vzhledem k zemi je v, talíř se otáčí úhlovou rychlostí ω_0 ve směru chodu hodinových ručiček. Moucha se najednou zastaví. (a) Jaká je výsledná úhlová rychlost talíře? (b) Zachovala se mechanická energie soustavy?

63Ú. Děvče o hmotnosti m stojí na obvodu kolotoče o poloměru R a momentu setrvačnosti I. Kolotoč se může otáčet bez tření kolem svislé osy, zpočátku je však v klidu. Děvče hodí kámen o hmotnosti m' vodorovným směrem tečně k obvodu kolotoče. Rychlost kamene vzhledem k zemi je v. Vypočtěte (a) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a (b) obvodovou rychlost děvčete na kolotoči.

64Ú. Gramofonová deska o hmotnosti 0,10 kg a poloměru 0,10 m se otáčí kolem svislé osy vedené jejím středem úhlovou rychlostí 4,7 rad/s. Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose otáčení je $5{,}0\cdot10^{-4}$ kg·m^2. Na desku spadne hrudka tmelu o hmotnosti 0,020 kg a zůstane přilepena na jejím obvodu. Určete úhlovou rychlost desky po dopadu tmelu.

65Ú. Tenká homogenní tyč o délce 0,50 m a hmotnosti 4,0 kg se může otáčet ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Tyč je zpočátku v klidu. Na konec tyče narazí střela o hmotnosti 3,0 g. Dráha střely je vodorovná a svírá s osou tyče úhel 60° (obr. 12.44). Střela se do tyče zaryje a roztočí ji úhlovou rychlostí 10 rad/s. Jakou rychlostí střela do tyče narazila?



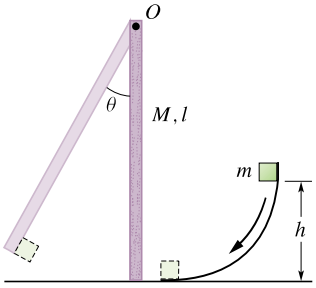
Obr. 12.44 Úloha 65

66Ú. Moucha o hmotnosti m sedí na obvodu homogenního kotouče o hmotnosti $10{,}0m$, který se může volně otáčet kolem svislé osy vedené jeho středem. Zpočátku se kotouč s mouchou otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Moucha přejde po kotouči směrem k jeho středu a zastaví se v bodě vzdáleném od středu o polovinu poloměru kotouče. (a) Určete změnu úhlové rychlosti $\Delta\omega$ soustavy kotouč + moucha. (b) Vypočtěte poměr $E_k/E_{k,0}$ výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Jak vznikl přírůstek kinetické energie?

67Ú. Homogenní kotouč o hmotnosti $10m$ a poloměru $3{,}0r$ se může volně otáčet kolem pevné svislé osy vedené jeho středem. Menší homogenní kotouč o hmotnosti m a poloměru r leží na povrchu většího kotouče tak, že jejich osy symetrie splývají. Zpočátku se oba kotouče otáčejí společně úhlovou rychlostí o velikosti 20 rad/s. Vlivem malé poruchy se menší kotouč vychýlí ze své původní polohy a klouže po velkém kotouči až k jeho obvodu, kde se zachytí. Poté se oba kotouče opět otáčejí společně, bez prokluzování. (a) Vypočtěte výslednou úhlovou rychlost velkého kotouče. (b) Vypočtěte poměr $E_{k,f}/E_{k,i}$ výsledné a počáteční kinetické energie soustavy kotoučů.

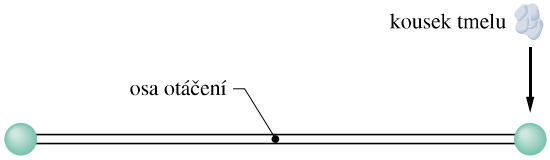
68Ú. Znečištění atmosféry prý může způsobit zvýšení průměrné teploty a roztavení polárních čepiček. Kdyby se polární ledové čepičky Země rozpustily a voda se vrátila do světového oceánu, zvětšila by se hloubka oceánu asi o 30 m. Jaký vliv by tato změna měla na otáčení Země? Odhadněte, jak by se změnila délka dne.

69Ú*. Částice o hmotnosti m klouže po dokonale hladké skluzavce na obr. 12.45. Narazí na homogenní svislou tyč a spojí se s ní. Po nárazu se tyč otočí kolem bodu O o úhel θ. Vyjádřete tento úhel pomocí veličin uvedených na obrázku.



Obr. 12.45 Úloha 69

70Ú*. Dva míče o hmotnostech 2,00 kg jsou připevněny ke koncům tenké tyče délky 50,0 cm zanedbatelné hmotnosti. Tyč se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy vedené jejím středem. V okamžiku, kdy má tyč vodorovnou polohu, dopadne na ni hrudka tmelu o hmotnosti 50,0 g rychlostí 3,00 m·s^{-1} a zůstane s ní spojena (obr. 12.46). (a) Určete výslednou úhlovou rychlost tyče. (b) Vypočtěte poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy tyč s míči + hrudka. (c) Vypočtěte úhlovou výchylku tyče z vodorovné polohy v okamžiku, kdy je její okamžitá úhlová rychlost nulová (bod obratu).



Obr. 12.46 Úloha 70

ODST. 12.9 Kvantovaný moment hybnosti

71C. Jakou hodnotu má složka spinového momentu hybnosti elektronu do libovolného pevného směru?

72C. Kladný pion (π^+) se může spontánně rozpadnout na kladný mion (μ^+) a neutrino (ν):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu.$$

Má-li neutrino $m_s = +\frac{1}{2}$, vypočtěte (a) kvantové číslo m_s a (b) spinový moment hybnosti S kladného mionu.

73C. Dva protony, které se sráží velkými rychlostmi, se mohou přeměnit na tři protony a antiproton:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}.$$

Vypočtěte orientaci spinového momentu hybnosti produktů reakce (nahoru nebo dolů), víte-li, že oba protony mají spinové momenty hybnosti orientovány nahoru.

PRO POČÍTAČ

74Ú. Kuželková koule se obvykle bezprostředně po vrhu nejprve smýká a teprve pak se valí bez klouzání. Během smýkání na ni působí dynamická třecí síla, která zpomaluje její posuvný pohyb a urychluje její otáčení. Koule se přestane smýkat v okamžiku, kdy je $\omega R = v$, kde ω je úhlová rychlost, R je poloměr koule a v rychlost jejího těžiště. Na kouli působí třecí síla o velikosti $F = f_{\mathrm{d}} N$, kde f_{d} je koeficient dynamického tření a N je velikost normálové síly. Protože je dráha koule vodorovná, platí $N = mg$, kde m je hmotnost koule. Moment třecí síly je $M = FR$. Koule má hmotnost 7,25 kg a poloměr 10,9 cm, její moment setrvačnosti přibližně odpovídá momentu setrvačnosti homogenní koule. Sestavte počítačový program pro výpočet časových závislostí úhlové rychlosti a rychlosti těžiště koule a vypočtěte tyto hodnoty s krokem 0,1 s od okamžiku vrhu až do doby, kdy se koule začne valit. Za koeficient dynamického tření dosaďte 0,35 a za počáteční hodnotu rychlosti koule $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Sestrojte grafy závislostí úhlové rychlosti a rychlosti koule na čase. Určete okamžik, kdy se koule přestane smýkat, a velikost její rychlosti v tomto okamžiku. (Touto rychlostí narazí koule do kuželek, neuvažujeme-li malý pokles rychlosti způsobený odporem vzduchu). Výpočty proveďte pro kouli, která (a) se zpočátku neotáčela, (b) byla vržena s počáteční úhlovou rychlostí 150 rad/s a otáčela se stejným směrem jako po skončení smýkání, (c) byla vržena se stejnou velikostí úhlové rychlosti jako v (b), ale směr otáčení byl opačný. (d) Jak musíme kouli hodit, aby narazila na kuželky největší možnou rychlostí?

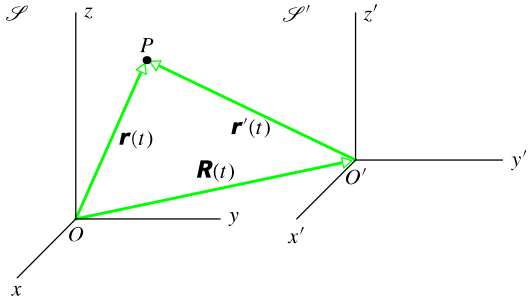
75Ú. Střela o hmotnosti 0,15 kg je vypálena počáteční rychlostí $50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 35°. Odpor vzduchu je zanedbatelný. (a) Sestavte počítačový program pro výpočet časové závislosti momentu hybnosti střely vzhledem k místu výstřelu. Použijte numerické integrace. Moment hybnosti tabelujte s krokem 0,1 s až do okamžiku, kdy střela dopadne na vodorovnou rovinu. Sestrojte graf závislosti velikosti momentu hybnosti střely na druhé mocnině času a ověřte, že je přímkový. Znázorněte závislost velikosti momentu tíhové síly na čase a ověřte, že i v tomto případě je grafem přímka. Při výpočtu použijte vztah $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor střely vzhledem k vztažnému bodu a $\boldsymbol{F}$ je tíhová síla, která na ni působí. Platí pro získané výsledky také vztah $\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$, analogický druhému Newtonovu pohybovému zákonu? (b) Započtěme nyní i vliv odporu vzduchu. Předpokládejme, že mezní rychlost střely je $v_{\mathrm{m}} = 75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a že zrychlení střely může být vyjádřeno ve tvaru $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j} - bv\boldsymbol{v}$, kde $b = g/v_{\mathrm{m}}^2$. Bude i nyní velikost momentu hybnosti přímo úměrná druhé mocnině času? Je velikost momentu síly opět lineární funkcí času? Pro obecně zvolený okamžik rozhodněte, zda je velikost výsledného momentu sil působících na střelu větší, nebo menší než v případě bez odporu vzduchu. Získané numerické výsledky fyzikálně interpretujte.

76Ú. V určitém okamžiku je poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic dána vektorem $\boldsymbol{d} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} - (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$, její rychlost je $\boldsymbol{v} = -(6{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} + (3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{k}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F} = (6{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (8{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (4{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$. Určete (a) zrychlení částice, (b) její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (c) výsledný silový moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (d) úhel mezi vektorem rychlosti a vektorem výslednice sil působících na částici.

PROBLÉM

77. Při odvození věty o momentu hybnosti pro soustavu částic (rov. (12.37)) jsme momenty hybnosti všech částic i momenty sil působících na tyto částice vztahovali k pevně zvolenému bodu O. Tento vztažný bod byl vždy v *klidu* vzhledem k určité *inerciální* vztažné soustavě. Na druhé straně jsme konstatovali, že věta o momentu hybnosti ve tvaru (12.37) platí i za předpokladu, že za vztažný bod zvolíme těžiště studované soustavy částic či tělesa. V příkladech a úlohách jsme pak valení těles interpretovali jako jejich otáčení kolem pevné osy vedené těžištěm. Je takový postup opravdu přípustný? Vždyť vztažná soustava spojená s těžištěm může být neinerciální! (Právě tak tomu je například u těles valících se zrychleně po nakloněné rovině.) A jestliže je možné spojit počátek vztažné soustavy s těžištěm, je třeba nějak omezit volbu souřadných os? Odpověď na poslední otázku prozradíme, zbytek dokážete pomocí návodu odvodit sami:

Označme $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ dvě vztažné soustavy, jejichž odpovídající si souřadnicové osy jsou trvale rovnoběžné (obr. 12.47). Soustava $\mathscr{S}$ je inerciální a pohyb počátku O' soustavy $\mathscr{S}'$ je v ní popsán polohovým vektorem $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$. Poloha částice P je v okamžiku t zadána vektorem $\boldsymbol{r}(t)$ vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ a vektorem $\boldsymbol{r}'(t)$ vzhledem k soustavě $\mathscr{S}'$.



Obr. 12.47 Vztažná soustava $\mathscr{S}'$ se vzhledem k inerciální soustavě $\mathscr{S}$ pohybuje čistě posuvným pohybem se zrychlením $\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}$.

(a) Vyjádřete $\boldsymbol{r}(t)$ pomocí $\boldsymbol{r}'(t)$ a $\boldsymbol{R}(t)$. Označte $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{v}'(t)$, $\boldsymbol{V}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{a}'(t)$, $\boldsymbol{A}(t)$ odpovídající rychlosti a zrychlení a ukažte, že platí následující *transformační vztahy*:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}(t), \qquad \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}'(t) + \boldsymbol{A}(t).$$

(V dalších výpočtech již nebudeme závislost veličin na čase explicitně vypisovat.) Uvědomte si, že požadavek neustálé rovnoběžnosti souřadnicových os soustav $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ zaručuje, že vzájemný pohyb těchto soustav je čistě posuvný. Zamyslete se nad tím, zda by předchozí transformační vztahy pro rychlosti a zrychlení zůstaly v platnosti, kdybychom připustili možnost otáčení soustavy $\mathscr{S}'$ vzhledem k $\mathscr{S}$.

(b) Označme $\boldsymbol{L}$ moment hybnosti soustavy částic vzhledem ke vztažné soustavě $\mathscr{S}$. Platí (rov. (12.25) a (12.35))

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i .$$

(Výpočet $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ proveďte a zdůvodněte poslední rovnost.) Do vztahu pro $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ dosaďte $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{A}$ a vyjádřete tak výsledek pomocí čárkovaných veličin. Přesvědčte se, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i\right) \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{A},$$

kde $\boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i$ je moment hybnosti soustavy částic vztažený k bodu O' a $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ je celková hmotnost soustavy.

(c) Obdobně postupujte při vyjádření celkového momentu vnějších sil působících na částice soustavy. Platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}},$$

kde $\boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}$ je výslednice sil, jimiž objekty náležející do okolí soustavy působí na její i-tou částici. Použijte věty o hybnosti pro soustavu částic $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}\right)$ a ukažte, že

$$\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} = \sum \boldsymbol{M}'_{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{R} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}'_i + \boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{A},$$

kde $M'_{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}$ je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu, vztažený k bodu O'.

(d) Veličiny $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$ jsou vázány větou o momentu hybnosti (rov. (12.37)). Porovnejte výrazy pro $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$, získané v částech (b) a (c) a ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}'_{\mathrm{ext}} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i\right) \times \boldsymbol{A}.$$

(e) V případě, že jsou všechny momenty vztaženy k bodu O' se tedy veličiny $\mathrm{d}\boldsymbol{L}'/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}'_{\mathrm{ext}}$ liší o vektor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i\right) \times \boldsymbol{A}.$$

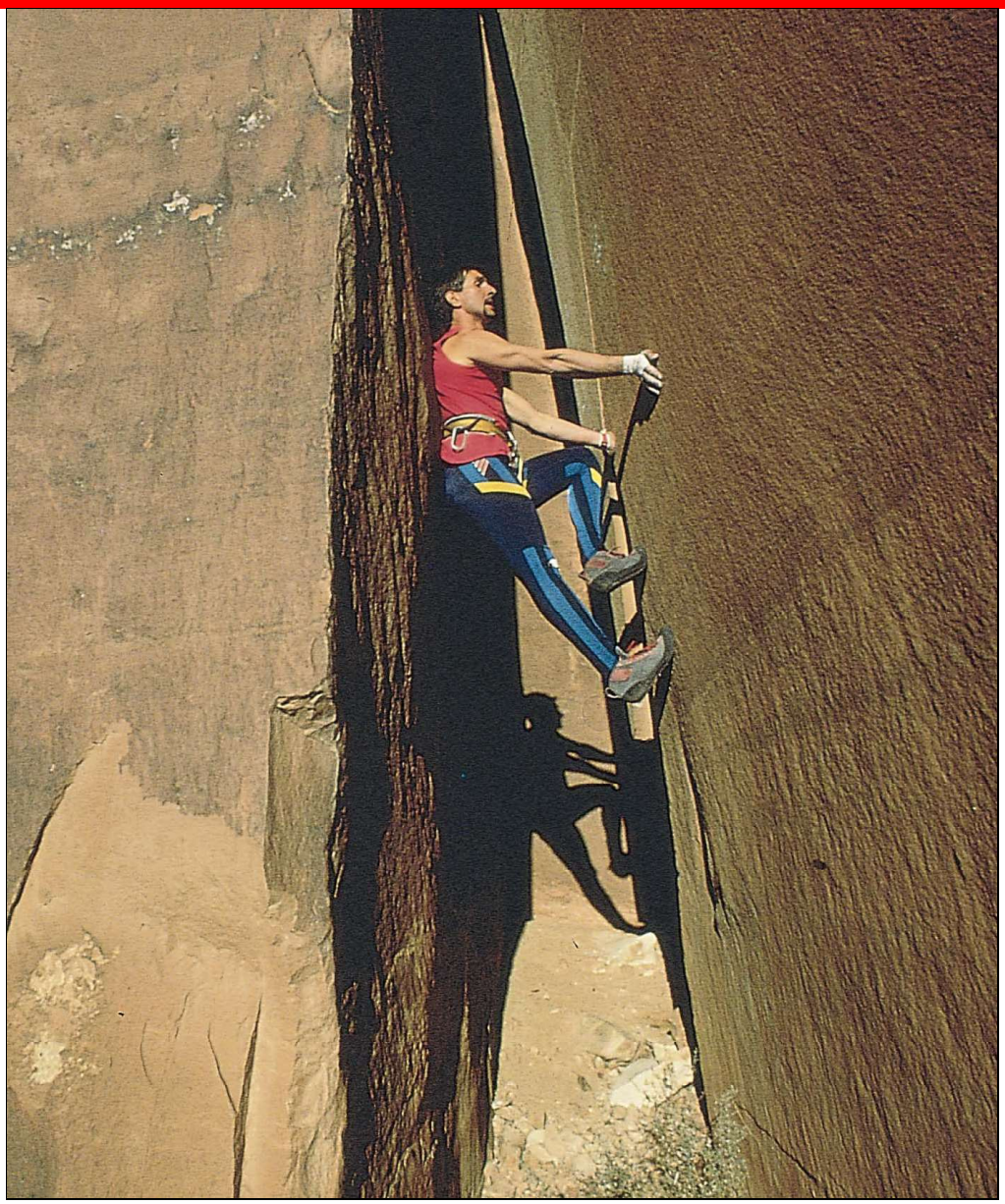
Tento vektor, představující „odchylku“ od zápisu věty o momentu hybnosti v inerciální vztažné soustavě, je nulový v každé ze tří situací (zdůvodněte použitím definice vektorového součinu):

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$,
2. $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0}$, a tedy $\boldsymbol{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i$ (ověřte zpětným dosazením $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$),
3. $\boldsymbol{A} \parallel \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i$ v každém okamžiku,

   $\boldsymbol{A}(t) = K\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}(t)\right)$, tj. $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} + K\boldsymbol{R} = K\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$.

K je jistá (neznámá) konstanta. V uvedených situacích budou formulace věty o momentu hybnosti ve vztažných soustavách $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ formálně shodné. Fyzikálně významné jsou pouze případy 1 a 2. Interpretujte je. (Třetí případ představuje soustavu diferenciálních rovnic pro neznámý vektor $\boldsymbol{R}(t)$, s konstantou K jako parametrem.)

13
Rovnováha a pružnost



Horolezectví může být vaší — doslova — poslední praktickou zkouškou z fyziky. Pád může znamenat smrt a i mírné zaváhání může způsobit vážné zranění. Např. lezete-li dlouhým „komínem“, máte ramena zapřena o jednu stěnu široké svislé pukliny a chodidla o její druhou stěnu. Občas však musíte odpočívat, jinak spadnete vyčerpáním. Otázka zní: Jak se můžete uvolnit, abyste si odpočinuli? Budete-li odpočívat bez uvážení fyzikálních zákonů, stěny vás neudrží. Tedy — jaká je odpověď na tuto otázku života a smrti?

13.1 ROVNOVÁHA

Uvažujme několik těles: (1) kniha ležící na stole, (2) hokejový puk klouzající se zanedbatelným třením po ledě stálou rychlostí, (3) lopatky stropního větráku otáčející se stálou rychlostí a (4) kolo automobilu, jedoucího po rovné cestě stálou rychlostí. Pro každý z těchto případů platí (pozorováno ze Země, kterou v celé kapitole bereme za inerciální systém):

1. Celková hybnost $\boldsymbol{P}$ tělesa je konstantní.
2. Celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ tělesa je konstantní.

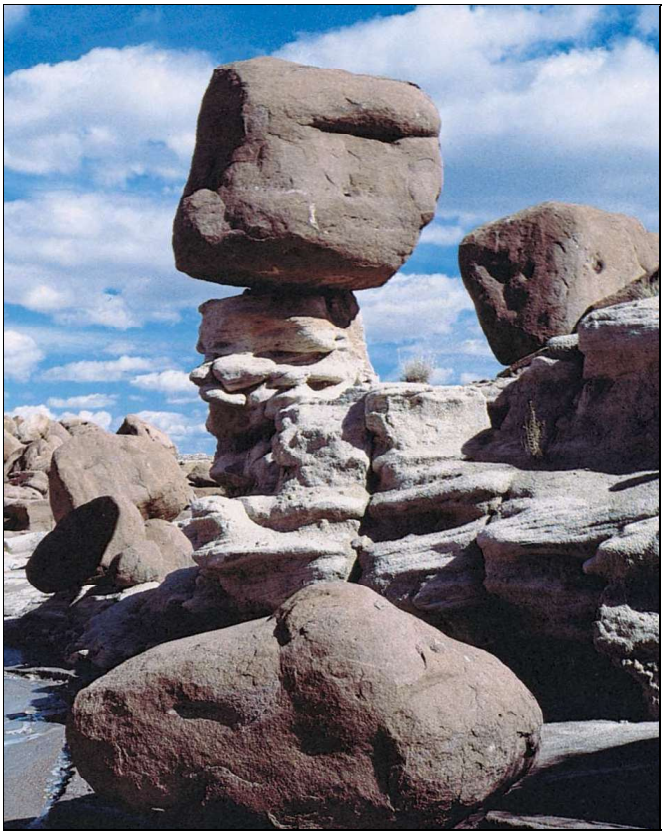
Říkáme, že taková tělesa jsou v rovnováze. Podmínky rovnováhy tedy jsou

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{L} = \text{konst.} \qquad (13.1)$$

V této kapitole se zaměříme na případy, kdy v naší inerciální soustavě jsou konstanty v rov. (13.1) nulové. To znamená, že sledovaná tělesa se vůči Zemi žádným způsobem nepohybují — neposouvají ani neotáčejí. Jsou tedy v klidu vůči zvolené inerciální soustavě, ve které je popisujeme; rovnoměrný posuv lze vždy vhodnou volbou inerciální soustavy odstranit, otáčení nikoliv. Taková tělesa jsou ve **statické rovnováze**. Ze čtyř těles uvedených na začátku tohoto odstavce je ve statické rovnováze pouze jedno — kniha ležící na stole.

Nebezpečně vyhlížející kámen — viklan — z obr. 13.1 je též příkladem tělesa, které je ve statické rovnováze — alespoň prozatím. Sdílí tuto vlastnost s nesčetnými dalšími objekty, jakými jsou katedrály, domy, čerpací stanice nebo budky v poli, které zůstávají na místě v průběhu času.

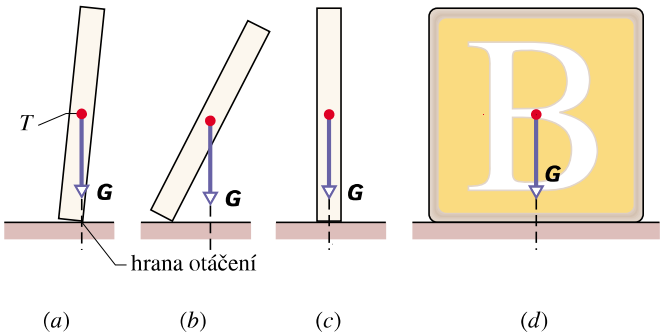
Obr. 13.1 Viklan u národního parku Zkamenělý les v Arizoně. I když jeho podložka vypadá podezřele, je kámen ve statické rovnováze.



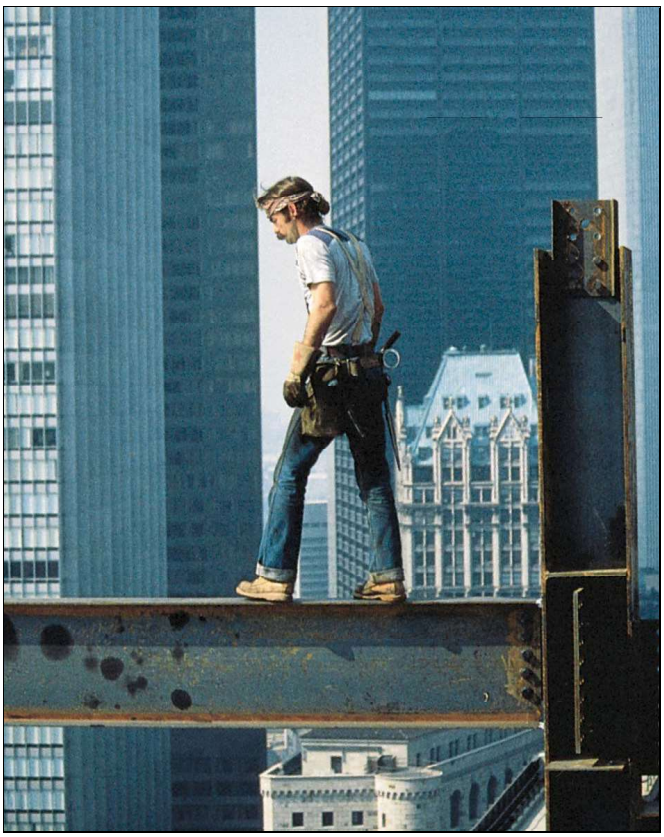
Jestliže se těleso vrátí do své rovnovážné polohy poté, co z ní bylo vychýleno, říkáme (viz čl. 8.5), že je ve **stálé** neboli stabilní rovnováze. Příkladem je kulička na dně důlku. Naopak, jestliže malá síla nevratně vychýlí těleso ze statické rovnovážné polohy, označujeme rovnováhu za **vratkou** neboli labilní. Mírou stability polohy je práce, kterou je nutno vynaložit, aby těleso nevratně změnilo svou polohu za jinou, zpravidla stabilnější. (A pro úplnost připomeňme z čl. 8.5 i rovnováhu **volnou** neboli indiferentní.)

Předpokládejme např., že vychýlíme dominovou kostku tak, jak je naznačeno v obr. 13.2a. Těžiště kostky leží přímo nad hranou, kolem které se kostka může otáčet a o kterou se opírá. Moment $\boldsymbol{M}$ její tíhové síly $\boldsymbol{G}$ vůči této hraně je zřejmě nulový, protože přímka, podél které síla $\boldsymbol{G}$ působí, prochází podpůrnou hranou. Nenutí tedy dominovou kostku konat rotační pohyb a kostka je ve statické rovnováze. Ovšem sebemenší náhodná síla rovnováhu poruší, protože posune **těžnici** (přímku, podél které síla $\boldsymbol{G}$ působí) mimo podpůrnou hranu (obr. 13.2b) a její moment pak bude otáčet dominovou kostku víc a víc. Statická rovnováha kostky znázorněná na obr. 13.2a je labilní (vratká).

Dominová kostka na obr. 13.2c již není tak nestabilní. Aby se kostka převrátila, musí na ni zapůsobit síla, která ji převalí přes rovnovážnou polohu znázorněnou na obr. 13.2a, kdy těžiště kostky leží přesně nad hranou otáčení. Slabá síla kostku nepřevrátí, ale silnější cvrnknutí prstem již ano. (Sestavíme-li z takto postavených dominových kostek řetězec, cvrnknutí na první kostku může způsobit postupný pád celého řetězce — „dominový efekt“.)



Obr. 13.2 (a) Dominová kostka vyvážená na hraně, těžiště leží přesně nad hranou. Těžnice (přímka, ve které tíhová síla $\boldsymbol{G}$ na kostku působí) prochází hranou otáčení. (b) Když je dominová kostka vychýlena i nepatrně za rovnovážnou polohu, vytvoří síla $\boldsymbol{G}$ moment, který zrychleně otáčí kostku dál. (c) Dominová kostka stojící na úzké stěně je o něco stabilnější než kostka v poloze (a). (d) Krychlová kostka je ještě stabilnější.



Obr. 13.3 Dělník balancující nad New Yorkem je ve statické rovnováze, jeho rovnováha ve směru nosníku je však stabilnější než ve směru kolmém na nosník.

Dětská kostka z obr. 13.2d je ještě stabilnější, protože její těžiště je nutno ještě více zdvihnout, aby přešlo přes hranu otáčení. Cvrnknutí prstem kostku nepřevrátí. Dělník z obr. 13.3 má vlastnosti jak dominové kostky, tak kostky čtvercového průřezu: podél nosníku je široce rozkročen a jeho postavení je stabilní, příčně na nosníku spočívá úzkou částí chodidel, takže jeho postavení je v tomto směru podstatně méně stabilní (je vydán na milost náhodnému závanu větru).

Analýza statické rovnováhy je velmi důležitá v inženýrské praxi. Konstruktér musí nalézt a určit všechny vnější síly a momenty sil, které mohou působit na navrhované dílo a zaručit vhodným konstrukčním návrhem a volbou materiálů, že jim vytvořené dílo odolá. Taková analýza je nezbytná, aby se např. zajistilo, že se most nezřítí vlivem dopravního ruchu či poryvem větru nebo že podvozek letadla vydrží prudké nárazy při tvrdých přistáních.

13.2 PODMÍNKY ROVNOVÁHY

Posuvný (translační) pohyb tělesa se řídí *větou o hybnosti* neboli *první impulzovou větou*, která vyjadřuje pro těleso totéž, co druhý Newtonův zákon pro hmotný bod. Podle rov. (9.28) platí

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}. \tag{13.2}$$

Když je těleso v rovnováze pro posuvný pohyb, tj. když je $\boldsymbol{P}$ konstantní, pak je $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ a platí

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha sil)}. \tag{13.3}$$

Otáčivý (rotační) pohyb tělesa se řídí *větou o momentu hybnosti* neboli *druhou impulzovou větou*, která vyjadřuje pro otáčení to, co předchozí rovnice pro posuvný pohyb. Podle rov. (12.37) platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}. \tag{13.4}$$

Když je těleso v rovnováze pro otáčivý pohyb, tj. když je $\boldsymbol{L}$ konstantní, pak $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ a platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha momentů sil)}. \tag{13.5}$$

Z uvedeného plynou dvě **podmínky rovnováhy** tělesa, kladené na vnější síly:

V rovnováze musí být roven nule

1. vektorový součet všech vnějších sil působících na těleso,
2. vektorový součet všech momentů vnějších sil působících na těleso.

Tyto podmínky platí jak pro *statickou* rovnováhu, tak i pro obecnější případ rovnováhy, kdy $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou konstantní, ale ne nulové. (Je dobré připomenout, že každý moment $\boldsymbol{M}_i$ každé síly $\boldsymbol{F}_i$ obecně závisí na poloze bodu B, vůči němuž moment počítáme. Je-li však $\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$, pak $\sum \boldsymbol{M}_i$ na volbě B nezávisí.)

Rov. (13.3) a (13.5) jakožto vektorové rovnice odpovídají každá třem nezávislým rovnicím pro jednotlivé souřadnice:

Rovnováha sil	Rovnováha momentů sil
$\sum F_x = 0$	$\sum M_x = 0$
$\sum F_y = 0$	$\sum M_y = 0$
$\sum F_z = 0$	$\sum M_z = 0$

(13.6)

Pro jednoduchost jsme v posledních rovnicích vypustili index $_{\text{ext}}$, který v předcházejících rovnicích zdůrazňoval,

že se jedná o vnější (externí) síly a vnější momenty sil působící na těleso.

Problém si zjednodušíme tím, že budeme uvažovat pouze případy, kdy síly působící na těleso leží v rovině xy. To znamená, že momenty sil mohou vyvolávat pouze otáčení kolem osy rovnoběžné s osou z. Tímto předpokladem vyloučíme jednu rovnici pro složky sil a dvě rovnice pro složky momentů sil ze soustavy rovnic (13.6). Zbývají rovnice

$$\sum F_x = 0 \quad \text{(rovnováha sil)}, \tag{13.7}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(rovnováha sil)}, \tag{13.8}$$

$$\sum M_z = 0 \quad \text{(rovnováha momentů sil)}. \tag{13.9}$$

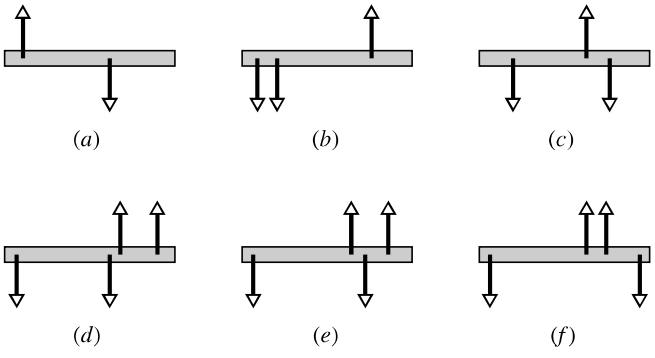
Zde F_x a F_y jsou x-ové, resp. y-ové složky vnějších sil působících na těleso a M_z je moment vnějších sil způsobující otáčení tělesa kolem osy z nebo kolem *libovolné* osy s ní rovnoběžné.

Hokejový puk klouzající stálou rychlostí po ledě splňuje rov. (13.7) až (13.9), a je tedy v rovnováze (dokonce i když rotuje), *ale nikoli ve statické*. Pro dosažení podmínek statické rovnováhy musí být hybnost puku $\boldsymbol{P}$ dokonce nulová; puk musí na ledě klidně ležet. Tak můžeme vyjádřit další podmínky statické rovnováhy kladené na okamžitý stav tělesa:

Ve statické rovnováze musí být také rovny nule

3. úhrnná hybnost $\boldsymbol{P}$ tělesa,
4. úhrnný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ tělesa.

KONTROLA 1: Na obrázku je pohled shora na šest homogenních tyčí, na které kolmo působí různé soustavy dvou a více sil. V kterých případech lze při správně volených nenulových velikostech sil dosáhnout statické rovnováhy?

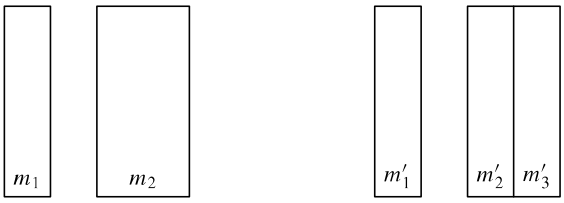


13.3 TĚŽIŠTĚ; STŘED HMOTNOSTI

Nyní rozebereme dva velmi blízké pojmy — střed hmotnosti a těžiště. Ukážeme si, v čem se liší i proč v praxi obvykle splývají. (Termín „těžiště“ je běžný i v hovorové češtině, zatímco „střed hmotnosti“ je výhradně odborný termín. V angličtině je však „center of mass“ obvyklý i v hovorovém stylu.)

Střed hmotnosti

Střed hmotnosti (SH) soustavy neboli **hmotný střed** je jednoznačně určen rozložením hmotnosti v soustavě a fakticky jsme ho již studovali v čl. 9.2. SH jediné částice splývá s její polohou: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \boldsymbol{r}_1$. SH soustavy dvou *stejných* částic leží uprostřed mezi nimi: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$. Analogicky je tomu u soustavy N stejných částic: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i / N$, což můžeme zapsat i jako $\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i / \sum_i 1$. Jedničky, které sčítáme ve jmenovateli, nám ukazují, že všechny částice bereme se stejnou vahou.



K odvození středu hmotnosti

A co když mají částice různé hmotnosti? Představme si nejprve soustavu dvou částic, kde druhá je dvakrát těžší než první: $m_2 = 2m_1$. S takovou soustavou je zřejmě ekvivalentní soustava tří stejných částic, kde $m'_1 = m'_2 = m'_3 = m_1$ a $\boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}'_2 = \boldsymbol{r}'_3 = \boldsymbol{r}_2$ podle obrázku. Snadno tedy najdeme její střed hmotnosti:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{r}'_i}{\sum_i 1} = \frac{\boldsymbol{r}'_1 + \boldsymbol{r}'_2 + \boldsymbol{r}'_3}{1+1+1}.$$

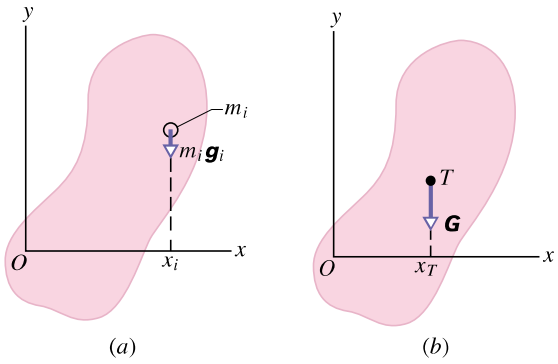
To můžeme zapsat sugestivněji:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{m'_1}{m'_1}\frac{\boldsymbol{r}'_1 + 2\boldsymbol{r}'_2}{1+2} = \frac{m'_1\boldsymbol{r}'_1 + 2m'_1\boldsymbol{r}'_2}{m'_1 + 2m'_1} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

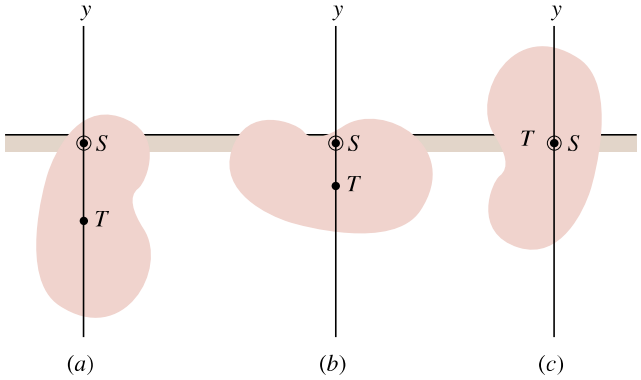
Tento vzorec lze snadno zobecnit na N *různých* částic:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{SH}} = \frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i, \tag{13.10}$$

kde $m = \sum_i m_i$ značí celkovou hmotnost soustavy. Dostali jsme týž vzorec, který jsme používali v rov. (9.8) pro těžiště. Nepoužili jsme přitom žádné jiné veličiny než vnitřní parametry $N, m_i, m, \boldsymbol{r}_i$ soustavy.



Obr. 13.4 (a) Na element tělesa o hmotnosti m_i působí tíhová síla $m_i\boldsymbol{g}_i$ a vytváří vůči počátku O soustavy souřadnic moment s ramenem rovným souřadnici x_i. (b) Výsledná tíhová síla $\boldsymbol{G}$ působí v těžišti T tělesa. Její rameno vzhledem k počátku O je rovno x_T.



Obr. 13.5 Těleso volně otočné kolem podpěrného bodu S se bude otáčet tak dlouho, dokud těžiště nezaujme polohu svisle pod bodem S, jako je tomu v případech (a) a (b). Výjimkou je jenom případ (c), kdy bod S leží právě v těžišti.

Těžiště

Uvažujme nyní tuhé těleso (tj. soustavu částic, které mají navzájem neproměnné vzdálenosti) nacházející se ve vnějším silovém poli $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Na jeho i-tou částici působí tedy síla $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{F}_i$. Příkladem může být nepravidelný kámen v tíhovém poli Země. Chceme nyní nahradit silové působení na jednotlivé částice tělesa jedinou silou $\boldsymbol{G}$ působící v jistém bodě — **těžišti** T. Nahrazení znamená, že kdybychom mohli vypnout působení tíhového pole na jednotlivé částice tělesa a místo něj zapnuli tíhovou sílu v těžišti, celkové silové a momentové působení na těleso by se nezměnilo.

Doposud jsme tvrdili, že tíhová síla $\boldsymbol{G}$ působí ve středu hmotnosti (SH) tělesa, že tedy těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa. Ukážeme nyní, že toto tvrzení je správné, když tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$ je v celém tělese konstantní.

Obr. 13.4a ukazuje těleso hmotnosti m s vyznačenou i-tou částicí hmotnosti m_i. Na každou takovou částici působí tíhová síla $m_i\boldsymbol{g}_i$, kde $\boldsymbol{g}_i$ je tíhové zrychlení v místě, kde se částice nachází. Každá tíhová síla $m_i\boldsymbol{g}_i$ vytváří vůči ose, která prochází počátkem O soustavy souřadnic kolmo k obrázku, moment síly $\boldsymbol{M}_i$, který dle rov. (11.32) má velikost

$$M_i = x_i m_i g_i,$$

kde x_i je rameno $r_\perp$ síly $m_i\boldsymbol{g}_i$. Velikost výsledného momentu M_v od všech částic je pak

$$M_\mathrm{v} = \sum M_i = \sum x_i m_i g_i. \tag{13.11}$$

Obr. 13.4b ukazuje tíhovou sílu $\boldsymbol{G}$ působící v těžišti T tělesa. Dle rov. (11.32) velikost momentu síly vyvolaného silou $\boldsymbol{G}$ vůči ose procházející počátkem je

$$M = x_T G, \tag{13.12}$$

kde x_T je rameno síly $\boldsymbol{G}$. Síla $\boldsymbol{G}$ je rovna součtu tíhových sil $m_i\boldsymbol{g}_i$ působících na jeho elementy. Když nyní do rov. (13.12) dosadíme $\sum m_i\boldsymbol{g}_i$ za $\boldsymbol{G}$, můžeme psát

$$M = x_T \sum m_i g_i. \tag{13.13}$$

Těžiště jsme zavedli jako bod, vůči němuž je moment $\boldsymbol{M}$ výsledné tíhové síly $\boldsymbol{G}$ stejný jako součet $\boldsymbol{M}_\mathrm{v}$ všech momentů $\boldsymbol{M}_i$ sil $\boldsymbol{G}_i$ působících na částice tělesa. Je tedy M z rov. (13.13) stejné jako M_v z rov. (13.11) a můžeme psát

$$x_T \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \tag{13.14}$$

Je-li tedy $\boldsymbol{g}$ konstantní, jsou všechna g_i stejná, můžeme je ze součtů na obou stranách rov. (13.14) vytknout a pak zkrátit. Dosadíme-li ještě na levé straně rov. (13.14) za $\sum m_i$ úhrnnou hmotnost tělesa m a touto hmotností vydělíme pravou stranu rovnice, dostaneme

$$x_T = \frac{1}{m} \sum x_i m_i. \tag{13.15}$$

Porovnáním s rov. (13.10) vidíme, že pravá strana (13.15) dává souřadnici x_SH středu hmotnosti. Můžeme tedy napsat

$$x_\mathrm{SH} = x_T. \tag{13.16}$$

Střed hmotnosti tělesa a jeho těžiště mají stejnou souřadnici x.

Tento výsledek můžeme rozšířit na všechny tři souřadnice použitím vektorového vyjádření momentů sil. Výsledek zní: Těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa, jestliže tíhové zrychlení je stejné ve všech bodech tělesa.

Jednoslovné a stručné označení „těžiště“, umožňující pohodlné odvozeniny typu „těžišťový vztažný systém“, se

proto běžně používá též jako synonymum pro delší a dvojslovný termín „střed hmotnosti“. (V této knize tak činíme všude.)

Z rov. (13.12) plyne, že moment síly vyvolaný tíhovou silou tělesa je nulový pouze tehdy, když rameno síly x_T je nulové. Je-li těleso podepřeno v nějakém bodu S, kolem kterého se může otáčet, otáčí se (vlivem momentu síly $M = x_T G$ vzhledem k S) tak dlouho, dokud rameno síly x_T není nulové. Těžiště tělesa pak leží svisle pod bodem podepření, jak je naznačeno na obr. 13.5a, b, a těleso je ve stálé rovnováze. Když je těleso podepřeno v těžišti jako na obr. 13.5c, potom pro jakékoliv natočení tělesa je x_T nulové a těleso je v *rovnováze volné*.

„Těžiště“ v nehomogenním poli

Co se změní, když silové pole $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ není homogenní? I v takovém případě bychom mohli — při každé konkrétní poloze tělesa v poli — zavést „tíhovou sílu“ a „těžiště“ tak, aby tato tíhová síla byla součtem dílčích sil a celkový moment dílčích sil by byl roven nule. Přesněji řečeno, našli bychom takto těžnici, tj. přímku (se směrem daným výslednou silou), na níž by leželo těžiště. Problém je v tom, že pro různé polohy tělesa se těžnice v nehomogenním poli nemusejí protínat, a v tělese tedy neexistuje těžiště jakožto *univerzální* bod, do něhož bychom mohli pro zjednodušení „stáhnout“ veškerou hmotu tělesa. Pro každou konkrétní polohu tělesa je vždy nutno určit znovu jak výslednou tíhovou sílu, tak i její působiště („těžiště“).

Není pravděpodobné, že bychom kdy vyšetřovali v tíhovém poli zemském těleso tak rozlehlé, abychom museli započíst nehomogenitu tíhového pole. Nebudeme také asi nikdy měřit natolik přesně, abychom museli zahrnout nehomogennost tíhového pole v rámci běžných předmětů.

Je třeba si uvědomit, že např. *odstředivá síla*, kterou uplatníme při zkoumání v otáčejícím se systému, roste se vzdáleností od osy otáčení: $F = m\omega^2 r$, a pole odstředivé síly je tedy výrazně nehomogenní.

V nehomogenním poli, a tedy i při studiu kývání či otáčení *nemůžeme* tuhé těleso nahradit hmotným bodem v jeho středu hmotnosti.

13.4 PŘÍKLADY STATICKÉ ROVNOVÁHY

V tomto odstavci budeme řešit šest příkladů na statickou rovnováhu. V každém vybereme systém o jednom či více objektech, na které aplikujeme rovnice rovnováhy (rov. (13.7) až (13.9)). Ve všech příkladech budeme uvažovat jen síly působící v rovině xy, které vůči počátku soustavy souřadnic vytvářejí moment síly mířící ve směru osy z. Ve smyslu rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů vybereme osu rovnoběžnou s osou z, vůči které budeme počítat momenty sil. I když je rov. (13.9) splněna pro jakoukoliv volbu takové osy, ukážeme si, že vhodnou volbou osy můžeme vyloučit jednu či více neznámých sil, čímž se použití rov. (13.9) zjednoduší.

Michel Menin kráčí po laně napjatém ve výši 3 150 m nad francouzskou zemědělskou krajinou. Svou polohu stabilizuje těžkou ohnutou tyčí, která sníží těžiště systému Menin+tyč do blízkosti lana, a umožní mu tak čelit závanům větru.

PŘÍKLAD 13.1

Homogenní nosník délky d a hmotnosti $m_n = 1{,}8\,\text{kg}$ spočívá svými konci na dvou digitálních siloměrech, jak je naznačeno v obr. 13.6a. Homogenní kvádr hmotnosti $m_k = 2{,}7\,\text{kg}$ leží na nosníku, přičemž jeho střed leží ve vzdálenosti $\frac{1}{4}d$ od levého konce nosníku. Jaké síly ukáží siloměry?

Náš systém bude tvořit nosník a kvádr. Obr. 13.6b je diagram systému, který uvažujeme jako volný, s vyznačením všech sil na něj působících. Siloměry podpírají levý a pravý konec nosníku silami $\boldsymbol{F}_l$ a $\boldsymbol{F}_p$. Velikosti těchto sil odečteme na siloměrech. Na nosník působí tíhová síla $m_n\boldsymbol{g}$ svisle dolů v jeho středu. Podobně na kvádr působí tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ svisle dolů v jeho středu. V diagramu na obr. 13.6b je kvádr reprezentován pouze tečkou uvnitř schématu nosníku a vektor $m_k\boldsymbol{g}$ je znázorněn jako vycházející z této tečky. (Při překreslování obr. 13.6a do obr. 13.6b je vektor $m_k\boldsymbol{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly $m_k\boldsymbol{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.)

Náš systém je ve statické rovnováze, takže musí být splněny jak rovnice rovnováhy sil rov. (13.7) a (13.8), tak i rov-

nice rovnováhy momentů sil (13.9). Zadaný příklad budeme řešit dvojím způsobem.

PRVNÍ ŘEŠENÍ: Síly nemají žádné x-ové složky, takže rov. (13.7) $\sum F_x = 0$ je splněna automaticky, aniž poskytne nějaké informace. Rov. (13.8) dá pro velikosti y-ových složek sil podmínku

$$\sum F_y = F_l + F_p - m_n g - m_k g = 0. \qquad (13.17)$$

V rovnici vystupují dvě neznámé síly (F_l a F_p), ale nemůžeme je obě určit z této jediné rovnice. Máme však po ruce ještě jednu rovnici, totiž rov. (13.9), která vyjadřuje rovnováhu momentů sil.

Momenty sil v rov. (13.9) můžeme vyjádřit vůči libovolné ose kolmé k rovině obr. 13.6. Zvolíme osu procházející levým koncem nosníku. Za kladné budeme pokládat ty momenty sil, které — působí-li samostatně — vyvolají kolem zvolené osy otáčení proti směru hodinových ručiček. Z rov. (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = (F_l)(0) - (m_k g)(\tfrac{1}{4}d) - \\ - (m_n g)(\tfrac{1}{2}d) + (F_p)(d) = 0,$$

odkud

$$F_p = (\tfrac{1}{4}g)(2m_n + m_k) = \\ = \tfrac{1}{4}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2\cdot 1{,}8\,\mathrm{kg} + 2{,}7\,\mathrm{kg}) = \\ = 15\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (13.18)$$

Všimněte si: tím, že jsme zvolili osu procházející působištěm jedné z neznámých sil (F_l), jsme tuto sílu vyloučili z rov. (13.9), a tím umožnili přímo z ní vypočítat druhou z neznámých sil. *Vhodná volba osy zjednoduší řešení problému.*

Neznámou sílu F_l pak určíme z rov. (13.17), když do ní dosadíme již známé hodnoty:

$$F_l = (m_k + m_n)g - F_p = \\ = (2{,}7\,\mathrm{kg} + 1{,}8\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (15\,\mathrm{N}) = \\ = 29\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

DRUHÉ ŘEŠENÍ: Pro kontrolu vyřešíme příklad ještě pro jinou volbu osy. Když jsme zvolili osu procházející levým koncem nosníku, dostali jsme rov. (13.18) a velikost síly $F_p = 15\,\mathrm{N}$.

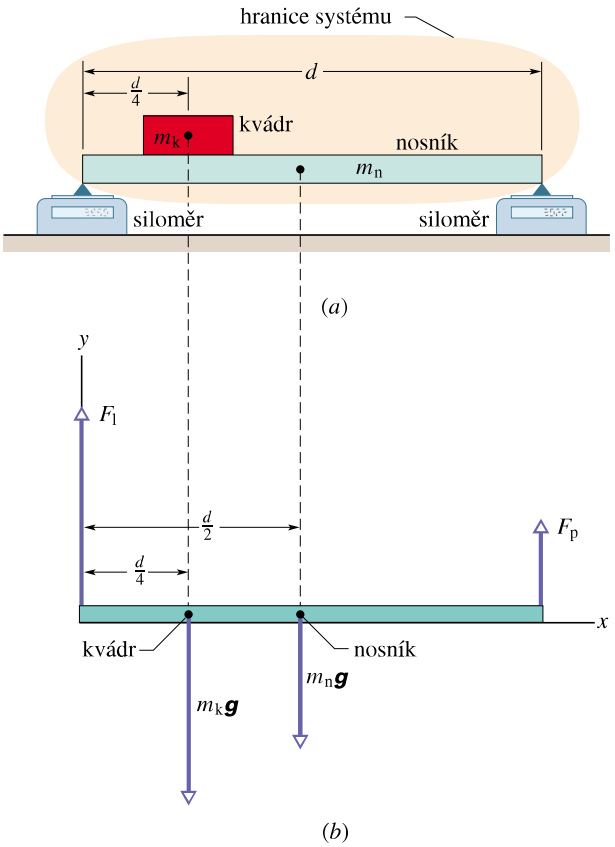
Pro osu procházející pravým koncem nosníku rov. (13.9) dává

$$\sum M_z = -(F_l)(d) + (m_k g)(\tfrac{3}{4}d) + \\ + (m_n g)(\tfrac{1}{2}d) + (F_p)(0) = 0.$$

Když tuto rovnici řešíme pro F_l, dostaneme

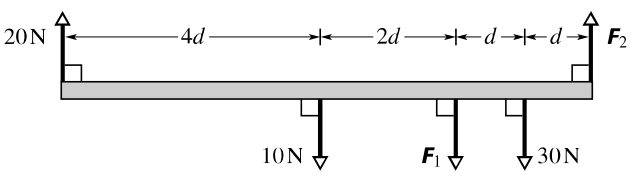
$$F_l = (\tfrac{1}{4}g)(2m_n + 3m_k) = \\ = \tfrac{1}{4}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2\cdot 1{,}8\,\mathrm{kg} + 3\cdot 2{,}7\,\mathrm{kg}) = \\ = 29\,\mathrm{N}, \quad \text{(Odpověď)}$$

což je ve shodě s naším předcházejícím výsledkem. Všimněte si ještě, že délka nosníku nevystupuje v poslední rovnici přímo, ale jen prostřednictvím toho, jak ovlivňuje hmotnost nosníku. Všimněte si také, že podmínku rovnováhy sil nepotřebujeme, když podmínku rovnováhy momentů sil užijeme pro dvě různé osy.



Obr. 13.6 Příklad 13.1. (a) Nosník hmotnosti m_n nese kvádr o hmotnosti m_k. Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému, který uvažujeme jako volný, ukazuje síly působící na systém nosník + kvádr.

KONTROLA 2: Na obrázku je pohled shora na homogenní tyč, která je ve statické rovnováze. (a) Můžete najít velikosti neznámých sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ pouze z podmínky rovnováhy sil? (b) Chcete-li určit velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ použitím jediné rovnice, kam musíte umístit osu otáčení? (c) Ukáže se, že velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je 65 N. Jaká je pak velikost síly $\boldsymbol{F}_1$?



PŘÍKLAD 13.2

Kuželkář drží v ruce kouli o hmotnosti $m_k = 7{,}2\,\text{kg}$. Jak ukazuje obr. 13.7a, vrchní část jeho ruky (paže) je ve svislé, spodní část (předloktí) ve vodorovné poloze. Jakou silou v tomto případě musí působit biceps a jeho úpony na předloktí? Předloktí má hmotnost $m = 1{,}8\,\text{kg}$; předpokládané rozměry jsou vyznačeny na obr. 13.7a.

ŘEŠENÍ: Naším systémem je předloktí spolu s koulí. Na obr. 13.7b je znázorněn silový diagram systému. (Koule je znázorněna tečkou uvnitř hranic schématu předloktí; tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ má své působiště umístěno do této tečky. Při překreslování obr. 13.7a do diagramu na obr. 13.7b byl vektor $m_k\boldsymbol{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly $m_k\boldsymbol{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Neznámé síly jsou síla $\boldsymbol{T}$, kterou působí biceps, a síla $\boldsymbol{F}$, kterou působí kost paže v loketním kloubu na kost předloktí. Všechny síly působí svisle.

Z rov. (13.8), která říká $\sum F_y = 0$, dostáváme

$$\sum F_y = T - F - mg - m_k g = 0. \qquad (13.19)$$

Užijeme momentovou rovnici (13.9). Proložíme osu otáčení loketním kloubem (bod O) kolmo k rovině obrázku, momenty sil vyvolávající rotaci proti směru otáčení hodinových ručiček budeme pokládat za kladné a dostaneme

$$\sum M_z = (F)(0) + (T)(d) - (mg)(D) - (m_k g)(a) = 0. \qquad (13.20)$$

Volbou osy procházející bodem O jsme vyloučili neznámou F z rov. (13.20). Z rovnice vypočítáme T:

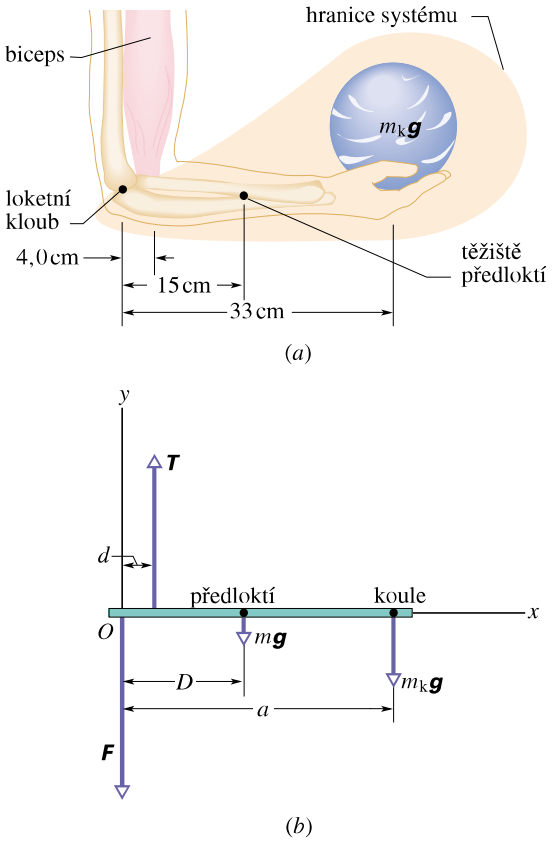
$$T = g\frac{mD + m_k a}{d} = (9{,}8\,\text{m·s}^{-2})\frac{(1{,}8\,\text{kg})(15\,\text{cm}) + (7{,}2\,\text{kg})(33\,\text{cm})}{(4{,}0\,\text{cm})} = 648\,\text{N} \doteq 650\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Biceps musí držet předloktí silou, která je přibližně devětkrát větší než tíha koule; držet těžkou kouli způsobem znázorněným na obr. 13.7a je obtížné.

Z rov. (13.19) po dosazení již známých hodnot dostaneme pro F vyjádření

$$F = T - g(m_k + m) = (648\,\text{N}) - (9{,}8\,\text{m·s}^{-2})(7{,}2\,\text{kg} + 1{,}8\,\text{kg}) = 560\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla F je přibližně osmkrát větší než tíha koule.

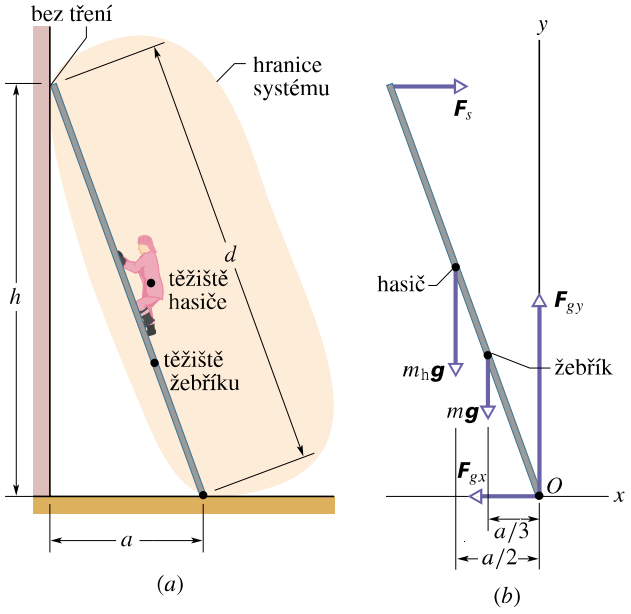


Obr. 13.7 Příklad 13.2 (a) Ruka drží kuželkovou kouli. Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému předloktí+koule ukazuje působící síly, když pokládáme systém za volný. Vektory nejsou znázorněny ve stejném měřítku; síla $\boldsymbol{T}$ přenášená bicepsem a síla $\boldsymbol{F}$ působící na loketní kloub jsou mnohonásobně větší než ostatní síly.

PŘÍKLAD 13.3

Žebřík o délce $d = 12\,\text{m}$ a hmotnosti $m = 45\,\text{kg}$ je opřen o stěnu ve výšce $h = 9{,}3\,\text{m}$, jak je naznačeno na obr. 13.8a. Těžiště žebříku je v jedné třetině jeho výšky. Hasič o hmotnosti $m_h = 72\,\text{kg}$ vyšplhá po žebříku tak vysoko, že jeho těžiště leží v polovině výšky žebříku. Předpokládejte, že tření mezi žebříkem a stěnou je zanedbatelné a opření žebříku o podlahu je pevné. Jaké síly působí na žebřík od stěny a od podlahy?

ŘEŠENÍ: Na obr. 13.8b je znázorněn diagram systému *hasič+žebřík*, když jej pokládáme za volný. (Hasič je znázorněn tečkou uvnitř hranic schématu žebříku; vektor tíhové síly $m_h\boldsymbol{g}$ má počátek v místě tečky. Při překreslování obr. 13.8a do obr. 13.8b byl vektor $m_h\boldsymbol{g}$ posunut podél přímky, ve které působí. Posunutí nezmění ani velikost síly $m_h\boldsymbol{g}$, ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Stěna působí na žebřík vodorovnou silou $\boldsymbol{F}_s$. Síla nemůže mít žádnou svislou složku, protože předpokládáme, že mezi stěnou a žebříkem nevzniká tření. Podlaha působí na žeb-



Obr. 13.8 Příklady 13.3 a 13.4. (a) Hasič vyšplhá do poloviny výšky žebříku, který je opřen o hladkou stěnu (mezi žebříkem a stěnou nepůsobí tření). Tření mezi podlahou a žebříkem zabrání podklouznutí žebříku. (b) Silový diagram systému, který pokládáme za volný, ukazuje síly působící na systém hasič + žebřík. Počátek O soustavy souřadnic je volen v místě, kde působí neznámá síla $\boldsymbol{F}_g$ (její složky $\boldsymbol{F}_{gx}$ a $\boldsymbol{F}_{gy}$ jsou v diagramu vyznačeny). Taková volba usnadní nalezení další neznámé síly $\boldsymbol{F}_s$.

řík silou $\boldsymbol{F}_g$, která má vodorovnou složku F_{gx} (vzhledem k pevnému opření — dostatečně velké tření mezi podlahou a žebříkem nebo zapíchnutí žebříku do země) a svislou složku F_{gy} (obvyklá normálová síla). Jak je ukázáno v diagramu, zvolíme soustavu souřadnic s počátkem O v místě, kde je žebřík opřen o podlahu. Vzdálenost a od stěny k patě žebříku vypočteme jako odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku:

$$a = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{(12\,\mathrm{m})^2 - (9{,}3\,\mathrm{m})^2} = 7{,}58\,\mathrm{m}.$$

Z rovnic rovnováhy složek sil (13.7) a (13.8) dostaneme pro náš systém rovnice

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0 \qquad (13.21)$$

a

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - mg = 0. \qquad (13.22)$$

Rov. (13.22) dává

$$F_{gy} = g(m_h + m) = (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(72\,\mathrm{kg} + 45\,\mathrm{kg}) = \\ = 1\,146{,}6\,\mathrm{N} \doteq 1\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro výpočet rovnováhy momentů sil zvolíme osu procházející počátkem O kolmo na rovinu obrázku. Ramena sil $\boldsymbol{F}_s$, $m_h\boldsymbol{g}$, $m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{F}_{gx}$ a $\boldsymbol{F}_{gy}$ vůči zvolené ose jsou postupně h, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, 0 a 0. Nulová ramena sil $\boldsymbol{F}_{gx}$ a $\boldsymbol{F}_{gy}$ způsobí, že tyto síly mají nulový moment vůči zvolené ose. Z rovnice rovnováhy momentů sil (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = -(F_s)h + (m_h g)(\tfrac{1}{2}a) + (mg)(\tfrac{1}{3}a) = 0. \qquad (13.23)$$

Řešením rov. (13.23) dostaneme pro F_s vyjádření

$$F_s = \frac{ga(\frac{1}{2}m_h + \frac{1}{3}m)}{h} = \\ = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(7{,}58\,\mathrm{m})(36\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg})}{(9{,}3\,\mathrm{m})} = \\ = 407\,\mathrm{N} \doteq 410\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rov. (13.21) potom ještě dostaneme

$$F_{gx} = F_s = 410\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 13.4

Nechť v př. 13.3 má statický činitel tření f_s mezi žebříkem a podlahou hodnotu 0,53. Na jakou část $0 \leqq q \leqq 1$ žebříku může hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat?

ŘEŠENÍ: Síly mají stejná označení jako na obr. 13.8. Nechť qd je délka, kam může po žebříku hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat (jeho vodorovná vzdálenost od počátku O je pak qa). V okamžiku podklouznutí je splněna rovnice

$$F_{gx} = f_s F_{gy}, \qquad (13.24)$$

ve které je F_{gx} statická síla tření (obvykle značená F_s) a F_{gy} je normálová síla (obvykle značená N).

Použijeme-li rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů a volíme-li osu procházející počátkem O, dostaneme v okamžiku podklouznutí rovnici

$$\sum M_z = -(F_s)(h) + (m_h g)(qa) + (mg)(\tfrac{1}{3}a) = 0,$$

odkud

$$F_s = \frac{ga}{h}(\tfrac{1}{3}m + m_h q). \qquad (13.25)$$

Rovnice ukazuje toto: jak hasič stoupá po žebříku, tj. jak roste q, tak musí vzrůstat i síla F_s, kterou působí stěna na žebřík, aby byla dosažena rovnováha. Abychom našli hledanou hodnotu q v okamžiku podklouznutí, musíme nejprve nalézt, jaká bude v tomto okamžiku síla F_s.

Rov. (13.7) pro rovnováhu x-ových složek sil dává

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0.$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rov. (13.24), dostaneme, že v okamžiku podklouznutí

$$F_s = F_{gx} = f_s F_{gy}. \qquad (13.26)$$

Z rov. (13.8) pro rovnováhu y-ových složek sil dostáváme

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - mg = 0,$$

odkud

$$F_{gy} = (m_h + m)g. \qquad (13.27)$$

Porovnáme-li rovnice (13.26) a (13.27), dostaneme

$$F_s = f_s g(m_h + m). \qquad (13.28)$$

Jestliže nakonec porovnáme rov. (13.25) a (13.28) a řešíme je pro q, dostaneme

$$q = \frac{f_s h}{a}\frac{(m_h + m)}{m_h} - \frac{m}{3m_h} = \qquad (13.29)$$

$$= \frac{(0{,}53)(9{,}3\,\text{m})}{(7{,}6\,\text{m})}\frac{(72\,\text{kg} + 45\,\text{kg})}{(72\,\text{kg})} - \frac{(45\,\text{kg})}{3(72\,\text{kg})} =$$

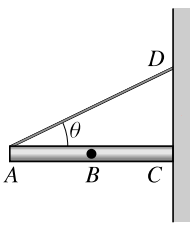
$$= 0{,}85. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Hasič může vylézt do 85 % délky žebříku, než začne žebřík podklouzávat.

Z rov. (13.29) můžete dále vyčíst, že hasič může vylézt až na konec žebříku (tomu odpovídá $q = 1$), aniž žebřík podklouzne, pokud činitel tření $f_s > 0{,}61$. Na druhé straně žebřík podklouzne už vlastní vahou ($q = 0$), když činitel tření $f_s < 0{,}11$.

Příklad lze vyřešit jednodušeji, zvolíme-li za počátek souřadnic místo dotyku žebříku o stěnu.

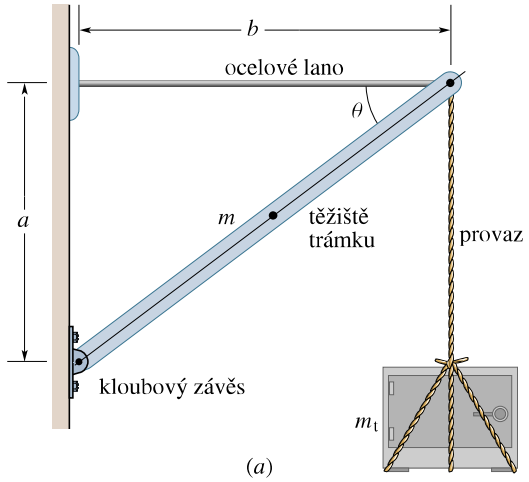
KONTROLA 3: Tyč AC o hmotnosti 5 kg, znázorněná na připojeném obrázku, je držena v klidu jednak silou $\boldsymbol{T}$ přenášenou přes provaz AD, jednak silou tření mezi stěnou a tyčí. Homogenní tyč je dlouhá 1 m a úhel, který svírá provaz s tyčí, činí $\theta = 30°$. (a) Do kterého z označených bodů musíte umístit osu, vůči níž budete počítat momenty sil, máte-li jedinou rovnicí najít sílu $\boldsymbol{T}$, kterou na tyč působí provaz? S takto zvolenou osou určete, jaká znaménka budou mít (b) moment síly M_t, způsobený tíhou tyče, a (c) moment síly M_p, kterým na tyč působí provaz, když budete pokládat momenty sil působící proti směru otáčení hodinových ručiček za kladné. (d) Je M_p větší, menší, nebo stejně velké jako M_t?



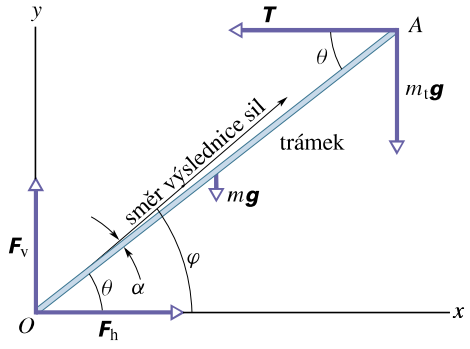
PŘÍKLAD 13.5

Obr. 13.9a zobrazuje trezor o hmotnosti $m_t = 430$ kg, který je provazem přivázán k nosníku s rozměry $a = 1{,}9$ m a $b = 2{,}5$ m. Homogenní trámek nosníku má hmotnost $m = 85$ kg, hmotnost vodorovného lana je zanedbatelná.

(a) Jak velkou silou $\boldsymbol{T}$ je napínáno lano?



(a)



(b)

Obr. 13.9 Příklad 13.5. (a) Trezor je zavěšen na nosníku, který sestává z homogenního šikmého trámku a vodorovného ocelového lana. (b) Silový diagram trámku uvažovaného jako volné těleso. Všimněte si, že výslednice sil $\boldsymbol{F}_v$ a $\boldsymbol{F}_h$ nemíří přesně ve směru osy trámku.

ŘEŠENÍ: Na obr. 13.9b je silový diagram trámku, který pokládáme za náš systém. Na trámek působí v jeho těžišti tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, v bodě A síla $\boldsymbol{T}$ od lana a síla $m_t\boldsymbol{g}$ od provazu (tíha trezoru), a konečně v kloubovém závěsu O síla $\boldsymbol{F}$ od stěny s horizontální složkou $\boldsymbol{F}_h$ a vertikální $\boldsymbol{F}_n$.

Použijme rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů sil, přičemž osu otáčení necháme procházet kloubovým závěsem (bod O) kolmo k rovině obrázku. Když pokládáme za kladné ty momenty sil, které vyvolávají rotaci působící proti směru otáčení hodinových ručiček, dostáváme

$$\sum M_z = (T)(a) - (m_t g)(b) - (mg)(\tfrac{1}{2}b) = 0.$$

Chytrou volbou osy jsme z rovnice vyloučili neznámé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{h}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ (nevytváří totiž žádný moment síly vůči zvolené ose) a zbyla nám jen jediná neznámá síla $\boldsymbol{T}$. Tu z rovnice vypočteme:

$$T = \frac{gb(m_\mathrm{t} + \frac{1}{2}m)}{a} = \\ = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{m})(430\,\mathrm{kg} + 42{,}5\,\mathrm{kg})}{(1{,}9\,\mathrm{m})} = \\ = 6\,090\,\mathrm{N} \doteq 6\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte složky $\boldsymbol{F}_\mathrm{h}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ síly, která na trámek působí přes kloubový závěs.

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnice rovnováhy sil. Z rov. (13.7) dostaneme

$$\sum F_x = F_\mathrm{h} - T = 0,$$

a tedy

$$F_\mathrm{h} = T = 6\,090\,\mathrm{N} \doteq 6\,100\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rov. (13.8) dostaneme

$$\sum F_y = F_\mathrm{v} - mg - m_\mathrm{t}g = 0,$$

a tedy

$$F_\mathrm{v} = g(m + m_\mathrm{t}) = (9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(85\,\mathrm{kg} + 430\,\mathrm{kg}) = \\ = 5\,047\,\mathrm{N} \doteq 5\,000\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou silou působí kloubový závěs na trámek?

ŘEŠENÍ: Z obrázku vidíme, že

$$F = \sqrt{F_\mathrm{h}^2 + F_\mathrm{v}^2} = \\ = \sqrt{(6\,090\,\mathrm{N})^2 + (5\,047\,\mathrm{N})^2} \doteq 7\,900\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že síla F je podstatně větší než společná tíha trezoru a trámku (5 000 N) i než napětí ve vodorovném lanu (6 100 N).

(d) Jaký je úhel α mezi osou trámku a směrem působení výsledné síly $\boldsymbol{F}$, která působí od kloubového závěsu na trámek?

ŘEŠENÍ: Z obrázku vidíme, že

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{(1{,}9\,\mathrm{m})}{(2{,}5\,\mathrm{m})} = 0{,}760, \quad \text{tedy } \theta = 37{,}2^\circ,$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_\mathrm{v}}{F_\mathrm{h}} = \frac{(5\,047\,\mathrm{N})}{(6\,090\,\mathrm{N})} = 0{,}829, \quad \text{tedy } \varphi = 39{,}6^\circ,$$

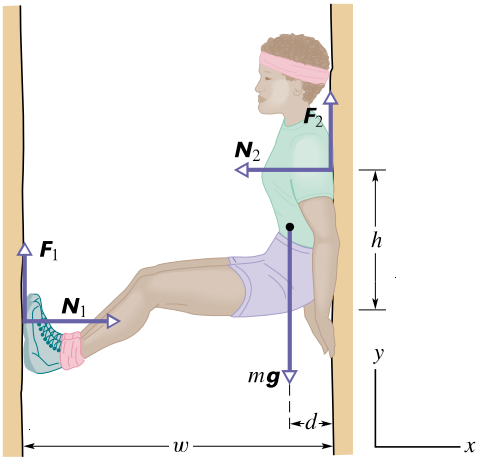
a tedy

$$\alpha = \varphi - \theta = 39{,}6^\circ - 37{,}2^\circ = 2{,}4^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby tíha trámku byla tak malá, že by se dala zanedbat, úhel α by se rovnal nule. Síla od kloubového závěsu by pak působila přesně ve směru osy trámku.

PŘÍKLAD 13.6

Na obr. 13.10 je zobrazena horolezkyně o hmotnosti $m = 55\,\mathrm{kg}$, která odpočívá při lezení „komínem“. Má zapřena ramena a nohy ve spáře, jejíž šířka $w = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Její těžiště je ve vzdálenosti $d = 0{,}2\,\mathrm{m}$ od stěny, na které má zapřena ramena. Činitel statického tření mezi botami a stěnou $f_1 = 1{,}1$ a mezi rameny a stěnou $f_2 = 0{,}70$.



Obr. 13.10 Příklad 13.6. Na obrázku jsou znázorněny síly, které působí na horolezkyni odpočívající při lezení skalním komínem. Síla, kterou horolezkyně působí na stěny komínu, vede ke zvýšení normálových sil $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ (obě jsou stejně velké), a tím i třecích sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

(a) Jakou minimální silou musí horolezkyně působit na stěny, aby nespadla?

ŘEŠENÍ: Horizontální síly působící na ramena ($\boldsymbol{N}_2$) i boty ($\boldsymbol{N}_1$) mají stejnou velikost N, ale opačnou orientaci. Proto je výsledná horizontální síla nulová a rov. (13.7), tj. $\sum F_x = 0$, je splněna.

Tíhová síla působí na horolezkyni svisle dolů. Proti ní působí třecí síly $\boldsymbol{F}_1$ na chodidla a $\boldsymbol{F}_2$ na ramena. Dokud je síla působící na stěny dostatečně velká, ustaví se automaticky rovnováha a je splněna rov. (13.8) ($\sum F_y = 0$), která dává

$$F_1 + F_2 = mg. \qquad (13.30)$$

Předpokládejme, že zpočátku horolezkyně tlačí na stěny velmi silně a potom tlak uvolňuje. Jak uvolňuje tlak, klesá velikost normálové síly N, a spolu s ní klesají i hodnoty součinů f_1N a f_2N, které limitují velikosti automatického nastavení rovnováhy třecích sil působících na ramena a chodidla horolezkyně a její tíhy (viz rov. (6.1)).

Když velikost síly N klesne na hodnotu, kdy součin f_1N je právě roven třecí síle F_1 působící na chodidla horolezkyně

a součin f_2N třecí síle F_2 působící na její ramena, je horolezkyně na pokraji podklouznutí na obou místech. Kdyby ještě dále snížila tlak na stěny, bude součet zmíněných součinů menší než její tíha mg a horolezkyně spadne. Nejmenší hodnotu velikosti síly N, při které ještě nedojde k podklouznutí, tak dostaneme z rovnice

$$f_1N + f_2N = mg, \qquad (13.31)$$

která plyne z rov. (13.30). Jejím řešením dostaneme hledanou hodnotu

$$N = \frac{mg}{f_1 + f_2} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(1{,}1 + 0{,}70)} = \\ = 299\,\mathrm{N} \doteq 300\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Minimální síla, kterou horolezkyně musí tlačit na stěny, aby nespadla, je přibližně 300 N.

(b) Jaká musí být při této síle vertikální vzdálenost h mezi horolezčinými rameny a chodidly, aby byla ve stabilní rovnováze?

ŘEŠENÍ: Aby byla splněna momentová rov. (13.9), tj. $\sum M_z = 0$, musí mít síly působící na horolezkyni nulový výsledný moment vůči libovolné ose otáčení kolmé k rovině obrázku. Zvolíme-li takovou osu v místě, kde působí síla mezi rameny a stěnou, dostaneme rovnici

$$\sum M_z = -F_1 w + Nh + mgd = 0. \qquad (13.32)$$

Vyřešíme-li tuto rovnici pro h, dosadíme za F_1 hodnotu f_1N, položíme $N = 299\,\mathrm{N}$ a užijeme ostatní známé hodnoty, dostaneme postupně

$$h = \frac{F_1 w - mgd}{N} = \frac{f_1 N w - mgd}{N} = f_1 w - \frac{mgd}{N} = \\ = (1{,}1)(1{,}0\,\mathrm{m}) - \frac{(55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}20\,\mathrm{m})}{(299\,\mathrm{N})} = \\ = 0{,}739\,\mathrm{m} \doteq 0{,}74\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejný výsledek dostaneme, když zvolíme jakoukoliv jinou osu kolmou k rovině obrázku, např. osu procházející místem působení chodidel na stěnu.

(c) Jaké jsou hodnoty třecích sil držících horolezkyni?

ŘEŠENÍ: Ze známé hodnoty síly $N = 299\,\mathrm{N}$ dostaneme

$$F_1 = f_1 N = (1{,}1)(299\,\mathrm{N}) = \\ = 328{,}9\,\mathrm{N} \doteq 330\,\mathrm{N} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a z rov. (13.30) dále plyne

$$F_2 = mg - F_1 = (55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (328{,}9\,\mathrm{N}) = \\ = 210{,}1\,\mathrm{N} \doteq 210\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Je horolezkyně ve stabilní rovnováze, když působí na stěny stejnou silou (299 N), ale její chodidla jsou výše? Uvažujte případ, kdy $h = 0{,}37\,\mathrm{m}$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (13.32) pro stejnou volbu osy, stejnou hodnotu síly (299 N) a novou hodnotu výšky h dostáváme pro velikost síly F_1 vyjádření

$$F_1 = \frac{Nh + mgd}{w} = \\ = \frac{(299\,\mathrm{N})(0{,}37\,\mathrm{m}) + (55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}20\,\mathrm{m})}{(1{,}0\,\mathrm{m})} = \\ = 218\,\mathrm{N}.$$

To je méně než mezní hodnota $f_1N = 329\,\mathrm{N}$, a sílu tedy lze vyvinout.

Dále užijeme rov. (13.30), abychom nalezli hodnotu F_2, která vyhoví rovnici rovnováhy sil $\sum F_y = 0$:

$$F_2 = mg - F_1 = (55\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (218\,\mathrm{N}) = 321\,\mathrm{N}.$$

Tato hodnota přesahuje mezní hodnotu $f_2N = 209\,\mathrm{N}$, a je tedy nemožné ji realizovat tlakem 299 N. Jediný způsob, jak zabránit pádu při hodnotě $h = 0{,}37\,\mathrm{m}$ (a též každé jiné hodnotě menší než 0,74 m), je tlačit na stěnu větší silou než 299 N, a tak zvýšit mezní hodnotu f_2N.

Podobně je nutno vyvozovat tlak na stěny větší než 299 N i v případě, kdy $h > 0{,}74\,\mathrm{m}$. Zde je právě výhoda těch, kteří se seznámí s fyzikou, než začnou lézt komínem. Když potřebujete odpočívat, vyhněte se chybě horolezeckých nováčků, kteří zapřou chodidla buď příliš vysoko nebo příliš nízko. Budete vědět, že existuje optimální svislá vzdálenost mezi rameny a chodidly, která vám dovoluje bezpečně odpočívat s nejmenší silou, kterou se musíte opírat o stěny. Tak můžete odpočívat nejpohodlněji.

RADY A NÁMĚTY

Bod 13.1: *Úlohy na statickou rovnováhu*

Takové úlohy řešte podle následujících kroků:

1. Nakreslete si *náčrtek* problému.
2. Zvolte *systém*, na který budete aplikovat rovnice rovnováhy. Hranice systému vyznačte na náčrtku uzavřenou křivkou, abyste si je dobře zapamatovali. Někdy zvolíte za systém pouze jeden objekt, který chcete mít v rovnováze (jako v př. 13.6 horolezkyni). Jindy je výhodnější zahrnout do systému více objektů. Zjednoduší se tím výpočet. Kdybyste např. v př. 13.3 a 13.4 zvolili za systém pouze žebřík, museli byste v silovém diagramu (obr. 13.8b) uvažovat i síly, kterými na žebřík působí ruce a nohy hasiče. Tyto další neznámé síly by vám zkomplikovaly výpočet. Systém byl na obr. 13.8 zvolen tak, aby zahrnoval i hasiče, a tím se zmíněné neznámé síly staly *vnitřními silami* soustavy, které není nutné pro vyřešení př. 13.3 a 13.4 znát.
3. Namalujte diagram, kde považujete systém za volné těleso, tj. nepodrobené vazbám. V diagramu vyznačte všechny

síly působící na těleso (nezapomeňte na síly nahrazující vazby, např. na reakci podložky), zřetelně je označte a ujistěte se, že jejich působiště a směry působení jsou správně vyznačeny.

4. Vyznačte v diagramu osy x a y souřadnicového systému. Volte je tak, aby nejméně jedna osa byla rovnoběžná s jednou či více neznámými silami. Síly, které neleží ve směru jedné z os rozložte na složky. Ve všech našich řešených příkladech bylo rozumné volit osu x vodorovně a osu y svisle.
5. Napište pro složky sil ve směru obou os *rovnice rovnováhy sil* se správným vyznačením symbolů.
6. Vyberte jednu nebo více os otáčení kolmých k rovině obrázku a napište pro ně *rovnici rovnováhy momentů sil*. Vyberete-li osu, která prochází působištěm některé z neznámých sil, rovnice se zjednoduší, protože zmíněná neznámá funkce v ní nebude vystupovat.
7. *Řešte* rovnice *algebraicky* pro příslušné neznámé. Někteří studenti raději již v této fázi dosazují hodnoty veličin včetně jejich jednotek. Zkušení řešitelé však dávají přednost algebraickému řešení, protože v něm lépe vynikne závislost řešení na jednotlivých proměnných.
8. Nakonec do algebraického řešení *dosaďte číselné hodnoty* s příslušnými jednotkami, abyste dostali číselné hodnoty neznámých veličin.
9. Zamyslete se nad výsledkem — má vůbec smysl? Není výsledek na první pohled příliš velký nebo příliš malý? Má správné znaménko? Odpovídají jednotky veličině, kterou určujeme?

13.5 NEÚPLNĚ URČENÉ SOUSTAVY

Pro řešení úloh této kapitoly máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice. Zpravidla to jsou dvě rovnice rovnováhy pro složky sil ve směru souřadnicových os a jedna rovnice rovnováhy momentů sil kolem osy kolmé k rovině dané souřadnicovými osami užitými v rovnicích rovnováhy sil. Když má úloha více než tři neznámé, nestačí soustava tří rovnic na její řešení. Takové úlohy nemůžeme jednoznačně řešit.

Je jednoduché najít takové problémy. Např. v př. 13.3 a 13.4 stačí předpokládat, že tření působí také mezi žebříkem a svislou stěnou. Musíme pak uvažovat také svislou třecí sílu mezi vrchním koncem žebříku a stěnou, čímž počet neznámých stoupne na čtyři. Tyto čtyři neznámé nemůžeme ze tří rovnic jednoznačně určit a úlohu nelze dořešit.

Dále můžeme uvažovat nesymetricky zatížené auto. Jaké síly — obecně všechny různé — působí na čtyři pneumatiky? Znovu nemůžeme tyto síly najít, protože máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice.

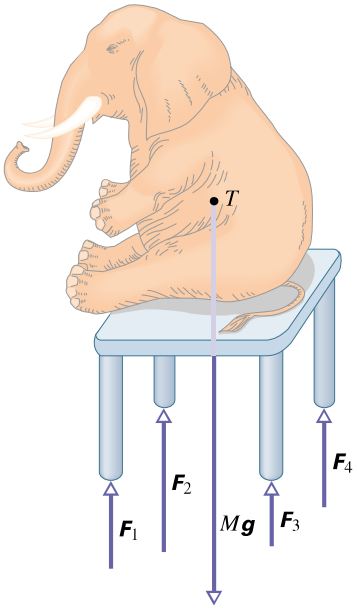
Podobně můžeme řešit problém statické rovnováhy stolu o třech nohách, ale už ne stolu o čtyřech nohách. Takové úlohy, kde je více neznámých než rovnic, označujeme jako **neúplně určené**.

V reálném světě však existují řešení i pro tyto neúplně určené úlohy. Postavíme-li kola aut na čtyři siloměry, každý ukáže nějakou hodnotu síly, přičemž součet těchto hodnot dá tíhu auta. Co nám brání v řešení problému nalézt hodnoty údajů na jednotlivých siloměrech početně?

Každý takový rozpor naznačuje, že původně zvolený model *není* dost dobrý pro úlohu, kterou právě řešíme. Zde jsme např. předpokládali — aniž jsme to zvláště zdůraznili — že tělesa, na která jsme aplikovali rovnice statické rovnováhy, jsou dokonale tuhá. To znamená, že se vůbec nedeformují, když na ně působí síly. Skutečná tělesa však tuhá nejsou. Např. pneumatiky vozu se po jeho zatížení snadno deformují, dokud nenastane statická rovnováha.

Všichni máme zkušenosti s viklajícím se restauračním stolem, jehož jednu nohu podložíme několikrát přeloženým kouskem papíru, abychom viklání odstranili. Můžeme si představit, že kdyby si dostatečně těžké slůně sedlo na takový stůl a on se pod ním nerozpadl, zdeformuje se stůl (i podlaha) tak, že se nakonec všechny čtyři nohy dotknou podlahy. Síly podpírající nohy dosáhnou zcela určitých hodnot (obecně pro každou nohu jinou hodnotu) a stůl se přestane viklat (obr. 13.11). Jak ale najdeme jejich velikosti?

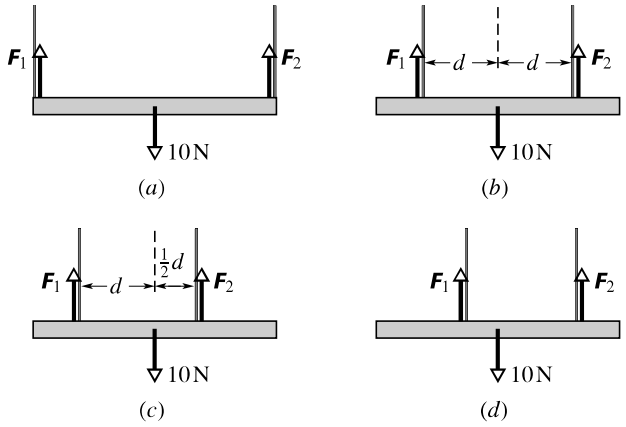
Abychom vyřešili tuto zatím neúplně určenou úlohu, musíme doplnit rovnice rovnováhy jistými poznatky z teo-



Obr. 13.11 Stůl je neúplně určená soustava. Čtyři síly působící na jeho nohy jsou různě velké a nemohou být určeny pouze z rovnic statické rovnováhy.

rie *pružnosti (elasticity)*, části fyziky a technických věd, která popisuje, jak se reálná tělesa deformují, když na ně působí síly.

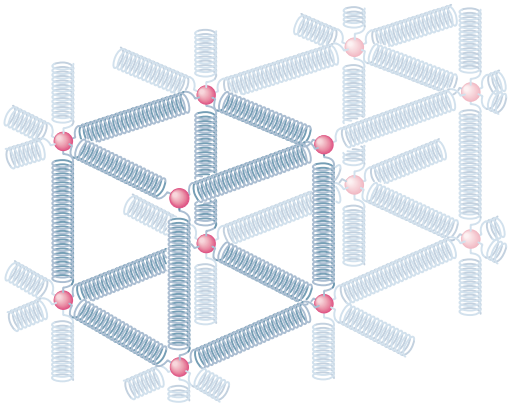
KONTROLA 4: Homogenní vodorovná tyč vážící 10 N je zavěšena na strop dvěma dráty, které ji drží dvěma silami $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Obrázek ukazuje čtyři uspořádání drátů. Jsou mezi nimi uspořádání, která vedou na neúplně určenou soustavu (tj. takovou soustavu, že nemůžeme určit číselné hodnoty sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$)?



13.6 PRUŽNOST

Když se spojí velké množství atomů, aby vytvořilo kus kovu (např. hřebík), uspořádají se zpravidla tak, že jejich rovnovážné polohy vytvoří trojrozměrnou *mřížku*, tedy pravidelné prostorové uspořádání, ve kterém každý atom má jisté vzdálenosti od svých nejbližších sousedů*. Atomy jsou drženy pohromadě meziatomovými silami, které jsou na obr. 13.12 reprezentovány pružinkami. Mřížka je neobyčejně pevná, což jinak řečeno znamená, že meziatomové pružinky jsou velmi tuhé. Z toho důvodu pokládáme mnohé běžné předměty, jako např. kovový žebřík, stůl nebo lžíci, za dokonale tuhé. Ovšem jiné běžné předměty, např. zahradní hadice nebo gumové rukavice, se vůbec jako tuhé nejeví. Molekuly těchto předmětů *netvoří* pevné mřížky znázorněné na obr. 13.12, ale jsou uspořádány do dlouhých molekulárních řetězců, které jsou vzájemně vázány velmi volně.

* Běžné kovové předměty, např. hřebík, jsou tvořeny kovovými zrny, jejichž vnitřní struktura má podobu více méně pravidelné mřížky, jaká je znázorněna na obr. 13.12. Síly působící mezi zrny jsou však podstatně slabší než síly držící pohromadě mřížku. Proto deformace nastává přeuspořádáním zrn a lom probíhá po hranicích zrn, a to výrazně snadněji než „drcení zrn".



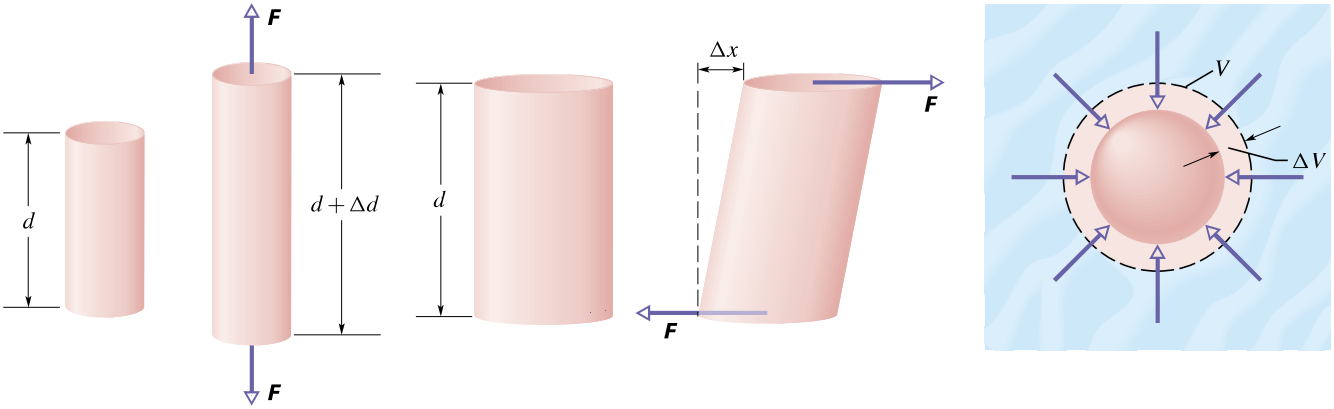
Obr. 13.12 Atomy pevných kovových materiálů jsou rozmístěny v trojrozměrné mřížce, kde motiv mřížky se opakuje až k hranicím krystalových zrn. Pružinky představují meziatomové síly.

Všechny reálné „pevné" předměty jsou do určité míry pružné. To znamená, že můžeme do určité míry měnit jejich rozměry tahem, jednosměrným tlakem, kroucením či všestranným tlakem. Abychom odhadli řádovou velikost těchto změn, představme si ocelovou tyč délky 1 m a průměru 1 cm, na kterou zavěsíme malé osobní auto. Tyč se protáhne, ale pouze o 0,5 mm neboli o 0,05 %. Po odlehčení se opět zkrátí na svou původní délku.

Když zavěsíme na tyč dvě auta, tyč se trvale deformuje, po odlehčení se nevrátí přesně do své původní délky. Když na tyč zavěsíme tři auta, tyč se přetrhne. Těsně před přetržením bude deformace menší než 0,2 %. I když uvedené deformace vypadají jako malé, hrají důležitou roli v inženýrské praxi. (Je zřejmě důležité, zda křídlo letadla přečká náhodně zvýšené zatížení bez pohromy a neodtrhne se od letadla.)

Na obr. 13.13 jsou znázorněny tři způsoby změny rozměrů tělesa pod vlivem vnějších sil. Na obr. 13.13a je válec natahován. Na obr. 13.13b je válec namáhán silou, která působí kolmo k jeho ose. Je to podobný způsob namáhání, jakým můžeme měnit tvar balíčku karet nebo knihy. Na obr. 13.13c je znázorněno pevné těleso umístěné v kapalině, které je rovnoměrně stlačováno všestranným vysokým tlakem přenášeným kapalinou. Co mají společného uvedené tři typy namáhání těles? **Napětí**, tj. síla přepočtená na jednotkovou plochu, v nich vyvolává **deformaci**, kterou v nauce o pružnosti chápeme jako relativní změnu tvaru. Napětí zobrazené na obr. 13.13a označujeme jako **tah**, na obr. 13.13b jako **smyk** a napětí z obr. 13.13c označujeme jako **všestranný tlak** (nebo jen tlak, když nemůže dojít k záměně s případem probíraným v následujícím odstavci „Tah a tlak").

Napětí i deformace jsou v případech znázorněných v obr. 13.13 různé, ale je jim společné, že v prvním při-

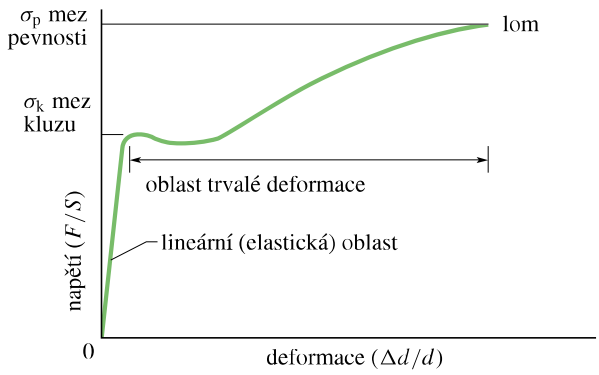


Obr. 13.13 (a) Válec podrobený *tahu* se protáhne o Δd. (b) Válec podrobený *smyku* se deformuje o Δx podobným způsobem, jako když se sesune balíček hracích karet. (c) Pevná koule podrobená *všestrannému tlaku*, který vytvoří hydrostatický tlak kapaliny, se smrští o objem ΔV. Velikost deformací je v obrázku značně zvětšena.

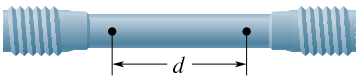
blížení, které většinou stačí k řešení praktických úloh, jsou vzájemně úměrné. Konstanta úměrnosti se nazývá **modul pružnosti**, takže můžeme psát

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace} \qquad (13.33)$$

Na obr. 13.14 je graf závislosti napětí na deformaci pro ocelový zkušební válcový vzorek, jehož tvar je znázorněn na obr. 13.15. Při standardní zkoušce se tahové napětí působící na vzorek pomalu zvyšuje z nuly až na hodnotu, při které se zkušební vzorek přetrhne. V celém průběhu děje pečlivě měříme a zaznamenáváme deformaci a k ní příslušné napětí. Pro podstatný rozsah použitých napětí je mezi napětím a deformací přímá úměrnost. Zrušíme-li napětí, vrátí se vzorek do svých původních rozměrů; v tomto oboru platí rov. (13.33). Jestliže napětí zvýšíme nad **mez kluzu** σ_k materiálu, zůstane vzorek trvale deformován. Jestliže napětí dále zvyšujeme, vzorek se nakonec přetrhne při napětí σ_p, které se nazývá **mez pevnosti**.



Obr. 13.14 Křivka napětí-deformace pro ocelový zkušební vzorek tvaru znázorněného na obr. 13.15. Vzorek se začne trvale deformovat, jakmile napětí dosáhne *meze kluzu* oceli a přetrhne se, když napětí dosáhne její *meze pevnosti*.



Obr. 13.15 Vzorek, který se užívá ke stanovení křivky napětí-deformace zobrazené na obr. 13.14. Odpovídající hodnoty napětí a deformace tvořící křivku se měří a zobrazují.

Tah a tlak

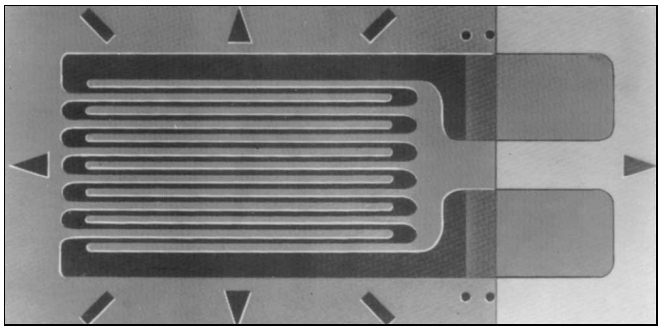
Pro případ namáhání vzorku tahem (obr. 13.13a) získáme napětí σ na ploše kolmé k působící síle jednoduše vydělením velikosti F působící síly velikostí S plochy průřezu, tedy $\sigma = F/S$. Působí-li síly protahující vzorek tak, jak je vyznačeno na obrázku, nazýváme napětí **tahem**. Jsou-li síly opačně orientované, takže vzorek zkracují, mluvíme o **tlaku** a znaménko napětí σ pokládáme za záporné. (V tahově namáhané tyči je na ploše říznuté šikmo ke směru působící síly napětí jiné než právě uvedený tlak. Tlak právě zavedený nesmíme zaměňovat se všestranným tlakem v kapalinách a plynech. Ten je stejný na všech plochách procházejících daným bodem a setkáme se s ním na str. 344.) **Deformace** e je bezrozměrová veličina, kterou pro tahové namáhání vzorku vyjádříme jako podíl prodloužení vzorku Δd k jeho délce d, tedy $e = \Delta d/d$. Deformaci v tomto případě nazýváme **relativní prodloužení**. Je dána hodnotou zlomku a často ji vyjadřujeme v procentech. Působí-li na tyč tlak, tyč se zkrátí a relativní prodloužení pokládáme za záporné. Jestliže tyč je dostatečně dlouhá a napětí v ní nepřesáhne hodnotu meze kluzu, pak deformace, kterou spočítáme pro celou tyč, platí také pro každou její část. Protože deformace je bezrozměrová, má modul pružnosti z rov. (13.33) stejný rozměr jako napětí, tj. sílu na jednotku plochy.

Modul pružnosti pro tahové (a tlakové) namáhání vzorku se nazývá **Youngův modul** neboli **modul pružnosti v tahu** a užíváme pro něj symbol E. Obecná rov. (13.33)

tak pro případ tahového namáhání dostane tvar

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta d}{d}. \qquad (13.34)$$

Deformace vzorku $\Delta d/d$ může často být poměrně snadno změřena tenzometrem (obr. 13.16). Je to jednoduché zařízení: plátek, který se speciálním lepidlem přilepí k místu, kde chceme relativní prodloužení měřit. Činnost tenzometru znázorněného na obrázku je založena na skutečnosti, že elektrický odpor jeho vodivé cesty (značena tmavěji) se s protažením tenzometru zvětší.



Obr. 13.16 Tenzometr vnějších rozměrů 9,8 mm × 4,6 mm. Tenzometr se přilepí na místo předmětu, ve kterém potřebujeme změřit deformaci; tenzometr se deformuje spolu s předmětem v místě, kde je přilepen. Elektrický odpor tenzometru se mění s deformací a umožňuje měřit deformace asi do velikosti 3 %.

I když Youngův modul pro tah a tlak bývá téměř stejný, mez pevnosti se často pro obě namáhání velmi liší. Např. beton je velmi pevný v tlaku, ale má velmi malou mez pevnosti v tahu, a proto se jako materiál přenášející tah téměř neužívá. V tab. 13.1 jsou uvedeny hodnoty Youngových modulů a dalších elastických konstant často užívaných materiálů.

Smyk

Napětí je síla na jednotku plochy i v případě smykového namáhání vzorku, ale síla zde působí v rovině plochy a ne kolmo na ni jako v případě tahu. Smyková deformace je bezrozměrové číslo $\Delta x/d$ — význam veličin plyne z obr. 13.13b. Odpovídající modul se označuje písmenem G a nazývá se **modul pružnosti ve smyku**. Pro smyk dostane rov. (13.33) konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{d}. \qquad (13.35)$$

Smykové napětí hraje rozhodující úlohu při kroucení tyčí, a tedy též při lyžařům známých spirálních zlomeninách, zaviněných zkroucením končetin.

Všestranný tlak

Napětí působící na kouli z obr. 13.13c je realizováno všestranným tlakem přenášeným kapalinou (srovnej s kap. 15). Deformace je dána poměrem $\Delta V/V$, kde V je původní objem deformovaného tělesa a ΔV je absolutní hodnota změny jeho objemu způsobená tlakem. Odpovídající modul se označuje symbolem K a nazývá se **modul objemové pružnosti**. Říkáme, že takto namáhané těleso je pod hydrostatickým tlakem. Tlak přenášený kapalinou, která je v klidu, označujeme jako hydrostatický tlak p. Pro popsanou objemovou deformaci vzorku přejde obecná rov. (13.33) na tvar

$$p = K\,\frac{\Delta V}{V}. \qquad (13.36)$$

Modul objemové pružnosti vody je $2{,}2\cdot10^9$ Pa a oceli $16\cdot10^{10}$ Pa. Hydrostatický tlak v průměrné hloubce Tichého oceánu, která je 4 000 m, je $4{,}0\cdot10^7$ Pa. Relativní smrštění $\Delta V/V$ objemu vody způsobené tímto tlakem je 1,8 %, ocel se pod stejným tlakem smrští jen o 0,025 %. Obecně jsou pevné látky díky svým tuhým atomovým mřížkám podstatně méně stlačitelné než kapaliny, jejichž atomy či molekuly jsou ke svým sousedům vázány mnohem méně pevně.

Tabulka 13.1 **Elastické vlastnosti často užívaných materiálů**

MATERIÁL	ϱ / kg·m^{-3}	E / 10^9 Pa	σ_p / 10^6 Pa	σ_k / 10^6 Pa
Ocel[a]	7 860	200	400	250
Hliník	2 710	70	110	95
Sklo	2 190	65	50[b]	–
Beton[c]	2 320	30	40[b]	–
Dřevo[d]	525	13	50[b]	–
Kost	1 900	9[b]	170[b]	–
Polystyren	1 050	3	48	–

[a] konstrukční ocel (ASTM-A36) [b] v tlaku [c] vysokotlaký [d] jedle douglaska

PŘÍKLAD 13.7

Tyč kruhového průřezu z konstrukční oceli má poloměr $R = 9{,}5\,\text{mm}$ a délku $d = 81\,\text{cm}$. Síla F o velikosti $6{,}2{\cdot}10^4\,\text{N}$ (přibližně 6 tun) ji protahuje ve směru její délky.

(a) Jaké je napětí v tyči?

ŘEŠENÍ: Z definice plyne, že

$$\text{napětí} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{(6{,}2{\cdot}10^4\,\text{N})}{\pi(9{,}5{\cdot}10^{-3}\,\text{m})^2} = \\ = 2{,}2{\cdot}10^8\,\text{Pa}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Mez kluzu pro konstrukční ocel je $2{,}5{\cdot}10^8\,\text{Pa}$, tyč je tedy nebezpečně blízko ke své mezní hodnotě, při které začne plasticky téci.

(b) Jaké je prodloužení tyče při tomto zatížení? Jaká je hodnota deformace?

ŘEŠENÍ: Z rov. (13.34), po dosazení právě získaných výsledků a hodnoty Youngova modulu pro ocel (tab. 13.1), plyne

$$\Delta d = \frac{(F/S)d}{E} = \frac{(2{,}2{\cdot}10^8\,\text{Pa})(0{,}81\,\text{m})}{(2{,}0{\cdot}10^{11}\,\text{Pa})} = \\ = 8{,}9{\cdot}10^{-4}\,\text{m} = 0{,}89\,\text{mm} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a pro deformaci dále dostaneme

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{(8{,}9{\cdot}10^{-4}\,\text{m})}{(0{,}81\,\text{m})} = \\ = 1{,}1{\cdot}10^{-3} = 0{,}11\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 13.8

Femur, základní kost stehna, má u dospělého člověka minimální průměr asi 2,8 cm, což odpovídá ploše průřezu $S = 6{\cdot}10^{-4}\,\text{m}^2$. Při jakém tlaku kost praskne?

ŘEŠENÍ: Z tab. 13.1 plyne, že mez pevnosti σ_p pro kost namáhanou tlakem je $170{\cdot}10^6\,\text{Pa}$. Síla F, která vytvoří ve femuru napětí σ_p, je tedy

$$F = \sigma_\text{p} S = (170{\cdot}10^6\,\text{Pa})(6{\cdot}10^{-4}\,\text{m}^2) = \\ = 1{,}0{\cdot}10^5\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

To je přibližně 10 tun. I když je to velká síla, může být dosažena např. při nešikovném přistání parašutisty. Vhodným rozložením nárazu do delšího časového intervalu je však možno sílu zmenšit hluboko pod nebezpečnou hodnotu.

PŘÍKLAD 13.9

Stůl má tři nohy, které jsou $d = 1{,}00\,\text{m}$ dlouhé, a čtvrtou, která je delší o $\Delta d = 0{,}50\,\text{mm}$, takže se stůl mírně viklá. Těžký ocelový válec o hmotnosti $m = 290\,\text{kg}$ je vzpřímeně postaven na stůl (hmotnost stolu, která je podstatně menší než hmotnost válce, při výpočtu zanedbáme), takže všechny čtyři nohy se zkrátí a stůl se přestane viklat. Nohy jsou umělohmotné válce s plochou průřezu $S = 1{,}0\,\text{cm}^2$ a mají Youngův modul $E = 1{,}3{\cdot}10^{10}\,\text{Pa}$. Předpokládejte, že na dokonale tuhé vrchní desce stolu je válec umístěn tak, že deska zůstane vodorovná, že nohy stolu se neohnou a že podlaha je dokonale tuhá. Jakou silou nese podlaha každou ze čtyř noh?

ŘEŠENÍ: Za systém zvolíme stůl a ocelový válec. Situace je podobná jako na obr. 13.11, pouze slona zastupuje ocelový válec. Aby zůstala deska stolu vodorovná, musí být všechny tři stejně dlouhé nohy stlačeny o stejný úsek, který označíme Δd_3. Síly, které způsobí tato stlačení také musí být stejné, jejich velikost označíme F_3. Delší noha musí být stlačena o delší úsek Δd_4 větší silou F_4. Musí platit rovnice

$$\Delta d_4 = \Delta d_3 + \Delta d. \qquad (13.37)$$

Rovnici (13.34) můžeme přepsat na tvar $\Delta d = Fd/(ES)$. Tuto rovnici užijeme, abychom dosadili za Δd_3 a Δd_4 do rov. (13.37). Přitom za d budeme pokládat původní délku všech noh, tj. 1 m. Nepatrný rozdíl jejich délek zde můžeme zanedbat. Z rov. (13.37) tak dostaneme

$$F_4 d = F_3 d + SE\Delta d. \qquad (13.38)$$

Z rov. (13.8), která udává rovnováhu y-ových složek sil, pro náš systém plyne

$$\sum F_y = 3F_3 + F_4 - mg = 0. \qquad (13.39)$$

Ze soustavy rov. (13.38) a rov. (13.39) vypočteme neznámou sílu F_3

$$F_3 = \frac{mg}{4} - \frac{SE\Delta d}{4d} = \\ = \frac{(290\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2})}{4} - \\ - \frac{(1{\cdot}10^{-4}\,\text{m}^2)(1{,}3{\cdot}10^{10}\,\text{Pa})(5{,}0{\cdot}10^{-4}\,\text{m})}{4(1{,}00\,\text{m})} = \\ = 711\,\text{N} - 163\,\text{N} = 548\,\text{N} \doteq 550\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

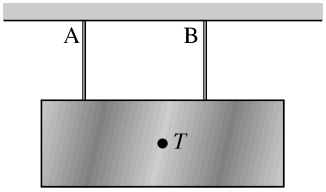
Z rov. (13.39) potom získáme

$$F_4 = mg - 3F_3 = (290\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}) - \\ -3(548\,\text{N}) \doteq 1\,200\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Dále lze ukázat, že každá ze tří kratších noh byla stlačena o 0,42 mm a delší noha o 0,92 mm, tedy že rozdíl délek noh 0,50 mm byl vyrovnán.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje vodorovný homogenní blok zavěšený na dvou drátech A a B, které byly ustřiženy z téže cívky. Těžiště bloku je blíže k drátu B než

k drátu A. (a) Uvažujete-li momenty vzhledem k těžišti, udejte, zda moment vytvářený silou přenášenou drátem A je větší, menší, nebo stejně velký jako moment síly vytvářený drátem B. (b) Kterým drátem je přenášena větší síla? (c) Jestliže délky drátů jsou nyní stejné, který z drátů byl původně delší?



PŘEHLED & SHRNUTÍ

Statická rovnováha

Říkáme, že tuhé těleso, které je a zůstává v klidu, je ve *statické rovnováze*. Vektorový součet všech vnějších sil působících na takové těleso musí být nulový:

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha sil)}. \tag{13.3}$$

Když všechny síly leží v rovině xy, je právě uvedená vektorová rovnice ekvivalentní dvěma skalárním rovnicím pro složky sil:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{(rovnováha } x\text{-ových složek sil)} \tag{13.7}$$

a

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(rovnováha } y\text{-ových složek sil)}. \tag{13.8}$$

Je-li těleso ve statické rovnováze, musí být také součet všech vnějších momentů sil na něj působících nulový, a to *nezávisle na tom*, vůči kterému bodu moment počítáme;

$$\sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \quad \text{(rovnováha momentů sil)}. \tag{13.5}$$

Když všechny síly leží v rovině xy, jsou všechny vektory momentů sil rovnoběžné s osou z. Rov. (13.5) je potom ekvivalentní jedné skalární rovnici pro z-ové složky momentů sil,

$$\sum M_z = 0 \quad \text{(rovnováha } z\text{-ových složek momentů sil)}. \tag{13.9}$$

Těžiště

Tíhová síla působí na jednotlivé částice tělesa. Výsledek takového působení je stejný, jako když umístíme výslednici těchto individuálních sil — tíhovou sílu $m\boldsymbol{g}$ — do význačného bodu tělesa, který nazveme *těžiště*. Těžiště splývá se středem hmotnosti, když je tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$ konstantní v celém objemu tělesa, tedy stejné pro všechny jeho částice. Termíny „těžiště“ a „střed hmotnosti“ ve zbytku knihy nerozlišujeme.

Moduly pružnosti

Uvedli jsme tři *moduly pružnosti*, které se užívají k popisu pružnostního (elastického) chování těles, na která působí síly. Deformace (relativní změna tvaru tělesa) je přímo úměrná napětí (síle na jednotku plochy); jejich podíl je příslušným modulem. Obecná rovnice vztahu napětí a deformace je

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace}. \tag{13.33}$$

Tah a tlak

Pro těleso, které je namáháno tahem nebo tlakem (obr. 13.13a), dostane obecná rov. (13.33) tvar

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta d}{d}, \tag{13.34}$$

kde $\Delta d/d$ je relativní prodloužení (deformace) vzorku (namáhaného tělesa), F je velikost síly $\boldsymbol{F}$ působící na vzorek, S je plocha průřezu vzorku kolmého ke směru působící síly $\boldsymbol{F}$ a E je *Youngův modul* látky, ze které je vzorek zhotoven. Napětí je F/S.

Smyk

Pro objekt, který je namáhán smykovým napětím (obr. 13.13b), přejde rov. (13.33) na konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G\,\frac{\Delta x}{d}, \tag{13.35}$$

kde $\Delta x/d$ je smyková deformace vzorku, Δx je posunutí vrchního konce vzorku ve směru síly $\boldsymbol{F}$ působící na vrchní konec vzorku a G je modul *pružnosti ve smyku* látky, z níž je vzorek zhotoven. Napětí je F/S.

Všestranný tlak (hydrostatický)

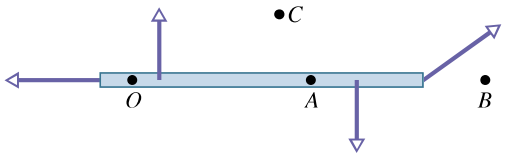
Když je vzorek vystaven *všestrannému tlaku* — nejsnadněji jej lze realizovat hydrostatickým tlakem kapaliny obklopující vzorek (obr. 13.13c) — přejde rov. (13.33) na tvar

$$p = K\,\frac{\Delta V}{V}, \tag{13.36}$$

kde p je *hydrostatický tlak* kapaliny obklopující vzorek. Deformace $\Delta V/V$ je absolutní hodnota relativní změny objemu vzorku vyvolané působícím tlakem a K je *modul objemové pružnosti* látky, z které je zhotoven vzorek.

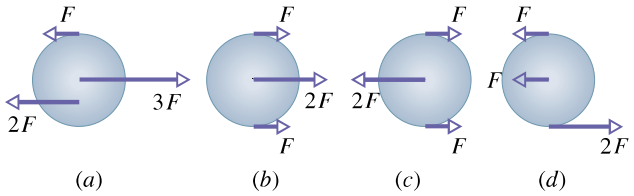
OTÁZKY

1. Na obr. 13.17 je pohled shora na tyč namáhanou čtyřmi silami. Předpokládejme, že jsme zvolili osu otáčení bodem O kolmo k rovině obrázku a zjistili, že momenty sil vůči této ose jsou v rovnováze (jejich součet je nulový). Bude rovnováha momentů sil zachována, zvolíme-li místo osy procházející bodem O osu s ní rovnoběžnou, procházející body (a) A, (b) B, (c) C? (d) Předpokládejme, že oproti předcházejícímu případu nyní zjistíme, že momenty sil vůči ose O nejsou v rovnováze. Existuje v tomto případě takový bod, aby — když jím povedeme rovnoběžnou osu — byly momenty sil vůči této ose v rovnováze?



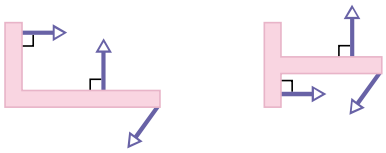
Obr. 13.17 Otázka 1

2. Obr. 13.18 ukazuje pohled shora na čtyři disky (puky), které bez tření kloužou po podložce. Tři síly o velikostech F, $2F$ nebo $3F$ působí na každý z disků, přičemž působiště sil je buď ve středu disku, na jeho okraji, nebo na půl cesty mezi okrajem a středem. Vektory sil se otáčejí spolu s diskem a v momentce znázorněné na obr. 13.18 míří přesně doprava nebo doleva. Které disky jsou v rovnováze?



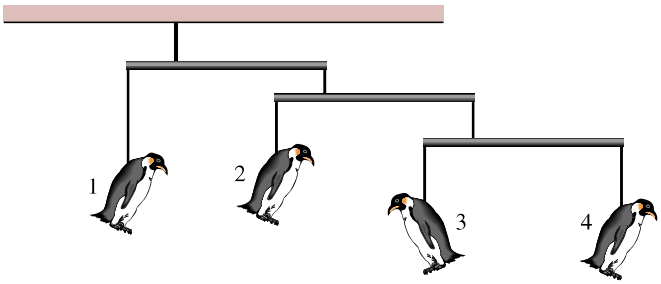
Obr. 13.18 Otázka 2

3. Na obr. 13.19 je pohled shora na dva pevné útvary, na které působí tři síly. Směry sil jsou na obrázku vyznačeny. Které útvary mohou být uvedeny do stavu statické rovnováhy vhodným nastavením velikostí působících sil (uvažujme pouze nenulové síly)?



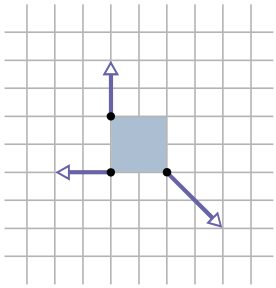
Obr. 13.19
Otázka 3

4. Na obr. 13.20 je zobrazena hračka s visícími tučňáky. Každá vodorovná tyčka (hmotnost tyček budeme v dalších úvahách zanedbávat) je zavěšena tak, že její část vpravo od závěsu je třikrát delší, než část vlevo od závěsu. Tučňák 1 má hmotnost $m_1 = 48\,\mathrm{kg}$. Jaké jsou hmotnosti ostatních tučňáků, aby mohli viset tak, jak je znázorněno na obrázku?



Obr. 13.20 Otázka 4

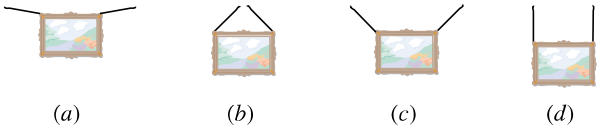
5. Na obr. 13.21 je pohled shora na kovový čtvereček ležící na dokonale hladké podložce (mezi čtverečkem a podložkou nepředpokládáme žádné tření). Tři síly, jejichž velikosti i směry jsou na obrázku přesně vyznačeny, působí na rohy čtverečku. (a) Je splněna první podmínka rovnováhy z rov. (13.1)? (b) Je splněna také druhá podmínka rovnováhy z této rovnice? (c) Jestliže některá z odpovědí na otázku (a) nebo (b) je záporná, můžeme přidáním vhodně volené čtvrté síly dosáhnout splnění obou podmínek rovnováhy?



Obr. 13.21
Otázka 5

6. (a) Kolik různých věží, které budou bez další podpory stát, můžete vytvořit ze tří malých kostek stavebnice Lego? Kostky se čtyřmi výčnělky lze postavit přímo nad sebe nebo je možné je spojit tak, že vrchní kostka je posunuta o půl své délky vpravo nebo vlevo. (Uspořádání a jeho zrcadlový obraz pokládejte za jedno uspořádání.) Kolik takových věží je (b) v stabilní rovnováze a kolik (c) v labilní rovnováze (těžiště nad hranou kostky)? (d) Které uspořádání je nejstabilnější (nejhůře se převrátí) a proč?

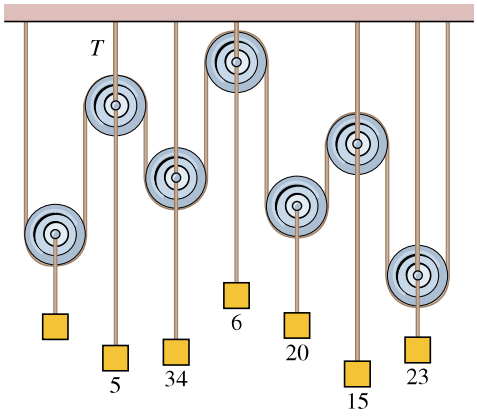
7. Na obr. 13.22 jsou znázorněny čtyři způsoby zavěšení obrazu na stěnu dvěma stejně dlouhými vlákny. Vlákna na obr. 13.22b, c svírají stejné úhly s vodorovnou přímkou. Seřaďte všechna čtyři uspořádání podle velikosti sil přenášených vlákny. Uspořádání, kde jsou síly největší, zařaďte jako první.



Obr. 13.22 Otázka 7

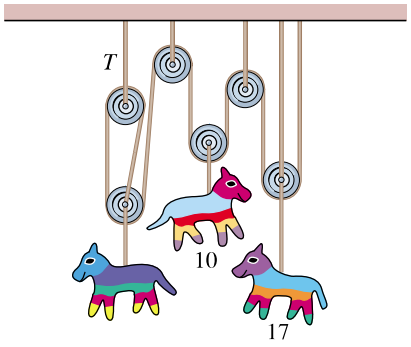
8. Žebřík je opřen o stěnu, přičemž tření mezi stěnou a žebříkem zanedbáme. Proti spadnutí je žebřík zabezpečen třením mezi ním a podlahou. Spodní konec žebříku přisuneme směrem ke stěně. Uveďte, které z následujících veličin se zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) síla, kterou působí podlaha na žebřík, (b) síla, kterou působí stěna na žebřík, (c) síla statického tření působící od podlahy na žebřík a (d) maximální hodnota $F_{s,max}$ statické třecí síly.

9. Jeden učitel fyziky, když se dostal do ráže, zkonstruoval statický systém kladek a lan, znázorněný na obr. 13.23. Jedno dlouhé lano vychází od stropu, obtáčí všechny kladky a končí opět na stropě. Na kratších lanech jsou od stropu zavěšeny některé kladky a také všechna závaží upevněná v ose kladek. Tíhy závaží jsou až na jednu výjimku na obrázku vyznačeny (čísla udávají tíhu v newtonech). (a) Jaká je velikost zbývající tíhy? (*Tip*: Obtáčí-li lano kladku z poloviny, jak je tomu na obrázku, je výsledná síla působící od lana na kladku dvojnásobkem síly přenášené lanem — neboli, jak se běžně ne zcela přesně říká, dvojnásobkem napětí lana.) (b) Jakou silu T přenáší krátké lano? Při výpočtech pokládejte kladky a lana za nehmotné.



Obr. 13.23 Otázka 9

10. Tři figurky visí na statickém systému kladek a lan zobrazeném na obr. 13.24. Jedno dlouhé lano jde z místa upevnění vpravo na stropě přes všechny kladky až do osy kladky vlevo dole. Několik kratších lan slouží k zavěšení kladek na strop nebo figurek na kladky. Tíha dvou figurek (v newtonech) je vyznačena na obrázku. (a) Jaká je tíha třetí figurky? (*Tip*: Podobně jako v předcházející otázce využijte skutečnosti, že síla přenášená dlouhým lanem je poloviční než síla, kterou lano působí na kladku.) (b) Jaká je síla přenášená v krátkém laně označeném T?



Obr. 13.24
Otázka 10

11. (a) Použijete v úloze uvedené v kontrole 3 při výpočtu velikosti momentu síly M_p, který na tyč působí od síly T, funkci $\sin\theta$ nebo $\cos\theta$? (b) Jestliže zmenšíme úhel θ tak, že zkrátíme provaz a tyč ponecháme vodorovnou, bude nutno moment M_p síly pro zachování rovnováhy zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejný? (c) Sílu T vytvářející moment musíme v tom případě zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejnou?

12. Tabulka udává velikosti ploch tří povrchů a velikosti výsledných sil, které na tyto plochy působí. Síly působí kolmo k povrchům a jsou podél nich rovnoměrně rozloženy. Seřaďte povrchy podle velikostí napětí, která na ně působí.

	VELIKOST PLOCHY	SÍLA
Povrch A	$0{,}5S_0$	$2F_0$
Povrch B	$2S_0$	$4F_0$
Povrch C	$3S_0$	$6F_0$

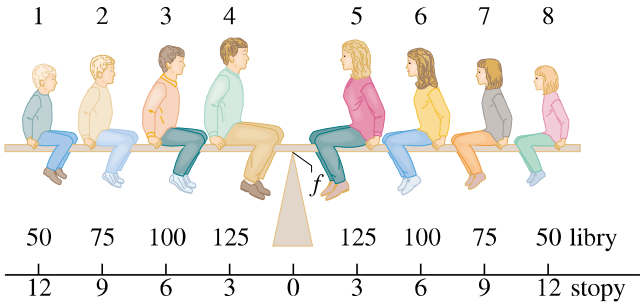
13. Dlouhá tyč byla rozřezána na tyče A, B, C. Tyče se přiloženými silami prodloužily. Seřaďte je sestupně podle velikosti napětí v nich.

	PŮVODNÍ DÉLKA	ZMĚNA DÉLKY
Tyč A	$2d_0$	Δd_0
Tyč B	$4d_0$	$2\Delta d_0$
Tyč C	$10d_0$	$4\Delta d_0$

CVIČENÍ & ÚLOHY

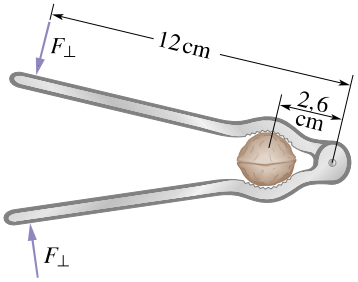
ODST. 13.4 Příklady statické rovnováhy

1C. Osmičlenná americká rodinka, jejíž váhy v librách jsou uvedeny na obr. 13.25, se houpe na prkně. Kteří z členů rodiny (udejte čísla) vytvářejí největší momenty síly vůči ose houpačky (a) mířící před rovinu stránky, (b) mířící za rovinu stránky?



Obr. 13.25 Cvičení 1

2C. Na obr. 13.26 je znázorněn ořech, který chceme rozlousknout louskáčkem. Předpokládejme, že k rozlousknutí ořechu je třeba na něj působit z obou stran silou o velikosti 40 N. Jaké velikosti $F_\perp$ musí mít síly, kterými působíme kolmo na rukojeti louskáčku, abychom ořech rozlouskli? Důležité rozměry jsou udány na obrázku.



Obr. 13.26
Cvičení 2

3C. Šikmá věž v Pise (obr. 13.27) je 55 m vysoká a její průměr je 7 m. Vršek věže je odchýlen 4,5 m od svislice. Pokládejte věž

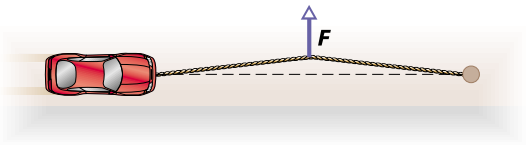
Obr. 13.27 Cvičení 3. Šikmá věž v Pise (fotografie *není* pootočena).

za homogenní kruhový válec. (a) Jak velká další odchylka vršku věže by vedla k jejímu pádu převrácením? (b) Jaký by přitom byl úhel mezi svislicí a osou věže?

4C. Na částici působí síly $\boldsymbol{F}_1 = 10\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = 17\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$. (a) Jaká síla $\boldsymbol{F}_3$ vyrovná tyto síly? (*Tip*: Vektorový součet všech tří sil musí být nulový.) (b) Jaký úhel svírá síla $\boldsymbol{F}_3$ s osou x? Pro číselný výpočet předpokládejte, že čísla udávají velikosti sil v newtonech.

5C. Lukostřelec napíná luk. Jaký úhel svírají dvě části tětivy, známe-li sílu, jakou ji lukostřelec natahuje?

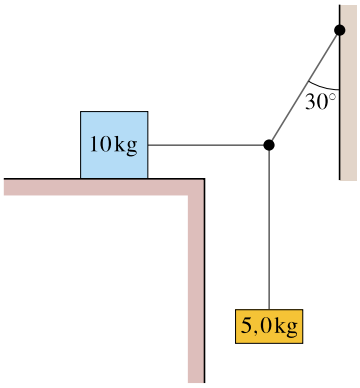
6C. Na obr. 13.28 je znázorněno, jak řidič znalý fyziky vyprošťuje svůj vůz z hlubokého bláta na krajnici silnice. Jeden konec lana uvázal pevně kolem předního nárazníku a druhý kolem patníku vzdáleného 20 m. Potom zatáhne za střed lana kolmo k jeho délce silou 600 N. Lano se protáhne, takže jeho střed se vysune ve směru síly o 30 cm, když se vůz nepatrně pohne. Jaká síla působí na vůz v tomto okamžiku?



Obr. 13.28 Cvičení 6

7C. Provaz, jehož hmotnost budeme zanedbávat, je natažen mezi dvěma úchyty vzdálenými 3,44 m. Provaz se prohne o 35 cm, když se na něj uprostřed zavěsí předmět o tíze 3 160 N. Jaká je potom síla napínající provaz?

8C. Na obr. 13.29 je znázorněn systém, který je v rovnováze, ale jehož blok spočívající na vodorovné podložce začne klouzat, když k předmětu o hmotnosti 5 kg je přidáno jakékoliv další závaží. Jaký je statický činitel tření mezi desetikilogramovým blokem a jeho podložkou?



Obr. 13.29
Cvičení 8

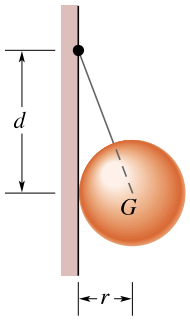
9C. Lešení o hmotnosti 60 kg a délce 5 m je drženo ve vodorovné poloze závěsnými lany na obou jeho koncích. Čistič oken o hmotnosti 80 kg stojí v místě, které je vzdáleno 1,5 m od jednoho konce. Jaká síla napínající lano je přenášena (a) lanem, které je blíže k čističi, (b) vzdálenějším lanem?

10C. Tři muži nesou trám. Jeden muž je na konci trámu a druzí dva nesou trámek mezi sebou na příčném trámku. Kde musí být umístěn příčný trámek, aby všichni muži nesli stejně? (Zanedbejte hmotnost příčného trámku.)

11C. Rovnoměrně naložená přepravka tvaru krychle o hraně 0,750 m a tíze 500 N spočívá na podlaze a je zapřena o velmi nízkou pevnou překážku. V jaké výšce nad podlahou musí působit sila 350 N, aby přepravku právě nadzvedla?

12C. Homogenní koule tíhy G a poloměru r visí na vlákně připevněném k dokonale hladké stěně ve výši d nad středem koule (obr. 13.30). Najděte (a) napěťovou sílu přenášenou vláknem, (b) sílu, kterou stěna působí na kouli.

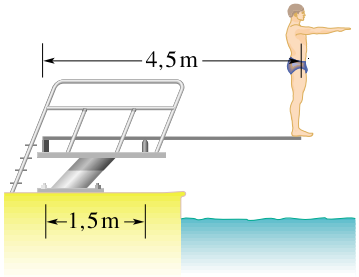
13C. Auto hmotnosti 1 360 kg má rozvor (vzdálenost mezi přední a zadní nápravou) 3,05 m. Těžiště auta je 1,78 m za přední nápravou. Určete zatížení (a) kol přední nápravy, (b) kol zadní nápravy, za předpokladu, že auto stojí na rovině a obě kola téže nápravy jsou zatížena stejně.



Obr. 13.30
Cvičení 12

14C. Muž o hmotnosti 75 kg se na vodorovné lávce zastaví, když urazil čtvrtinu vzdálenosti od jednoho jejího konce. Lávka je homogenní a její hmotnost je 300 kg. Jakou svislou silou působí lávka a muž (a) na vzdálenější pilíř, (b) na bližší pilíř? Pilíře jsou umístěny na koncích lávky.

15C. Skokan vážící 580 N stojí na konci 4,5 m dlouhého skákacího prkna. Prkno je připevněno k dvěma podpěrám vzdáleným 1,5 m, jak je ukázáno na obr. 13.31. Jaká je velikost a orientace síly působící na prkno od (a) levé podpěry, (b) pravé podpěry? (c) Která podpěra je natahována a která stlačována?

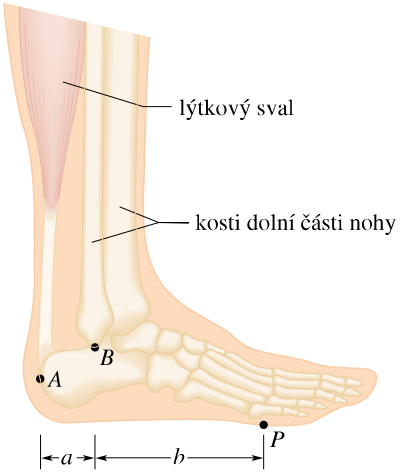


Obr. 13.31
Cvičení 15

16C. Metrové pravítko je vyváženo na břitu podloženém v místě se značkou 50,0 cm. Na značku 12,0 cm položíme na sebe dvě mince a pravítko se nám pak povede vyrovnat, když břit podložíme pod značku 45,5 cm. Jedna mince má hmotnost 5,0 g. Jaká je hmotnost pravítka?

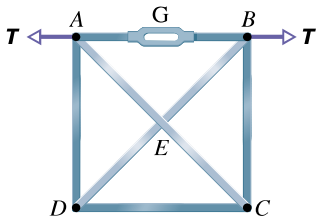
17C. Čistič oken hmotnosti 75 kg užívá žebřík, který má hmotnost 10 kg a je dlouhý 5,0 m. Spodní konec žebříku postaví na podlahu ve vzdálenosti 2,5 m od stěny a vrchní konec opře o naprasklé okno v této stěně. Když vyšplhá po žebříku 3,0 m, okno se rozbije. Vypočtěte (a) sílu, jakou žebřík působil na okno bezprostředně před jeho rozbitím, (b) velikost a směr síly, kterou podlaha působila na žebřík v tomto okamžiku. Zanedbejte tření mezi žebříkem a oknem a předpokládejte, že žebřík po podlaze neklouže.

18C. Obr. 13.32 ukazuje anatomickou stavbu spodní části nohy, která umožňuje stání na špičkách. Při něm je pata vysoko zvednutá nad podlahu a chodidlo se dotýká podlahy jen v malém okolí bodu P, které jsme na obrázku označili jako působiště síly podpírající nohu osoby stojící na špičkách. Vypočtěte síly, kterými působí na chodidlo (a) lýtkový sval v bodě A, (b) holenní a lýtková kost v bodě B, když osoba stojí na špičkách. Položte $a = 5{,}0$ cm a $b = 15{,}0$ cm a hledané síly vyjádřete v násobcích tíhy G osoby.



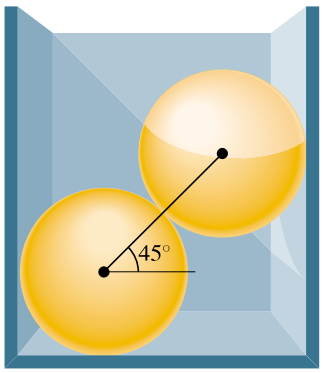
Obr. 13.32
Cvičení 18

19Ú. Stahovákem G zkrátíme tyč AB čtvercového rámu $ABCD$ znázorněného na obr. 13.33. Tím se tyč napne a na body A a B působí síly $\boldsymbol{T}$ mířící ven z rámu. Určete síly působící na ostatní tyče rámu. Najděte, které tyče jsou podrobeny tahu a které tlaku. Úhlopříčné tyče AC a BD se nedotýkají v místě E. Uvážení symetrie rámu zjednoduší řešení této a podobných úloh.



Obr. 13.33
Úloha 19

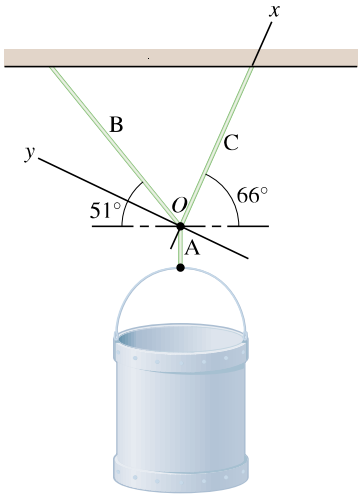
20Ú. Dvě stejné, homogenní koule jsou umístěny v pravoúhlé pevné nádobě (obr. 13.34). Najděte síly, které působí na koule (a) od stěn nádoby, (b) síly vzájemného působení koulí, jestliže spojnice těžišť koulí svírá úhel 45° s vodorovnou rovinou. Výsledky vyjádřete v násobcích tíhy jedné koule. Neuvažujte tření.



Obr. 13.34
Úloha 20

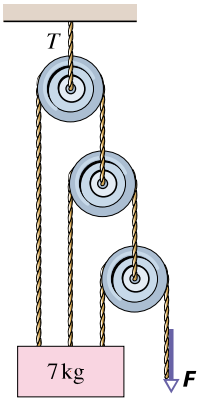
21Ú. Okov o hmotnosti 900 kg je zavěšen na svislém laně A, které je v místě O spojeno se dvěma dalšími lany B a C, která svírají s vodorovnou rovinou úhly 51° a 66° (obr. 13.35). Najděte napěťovou sílu přenášenou (a) lanem A, (b) lanem B, (c) lanem C. (*Tip*: Abyste nemuseli řešit systém dvou rovnic o dvou

neznámých, zvolte soustavu souřadnic tak, jak je naznačeno na obrázku.)



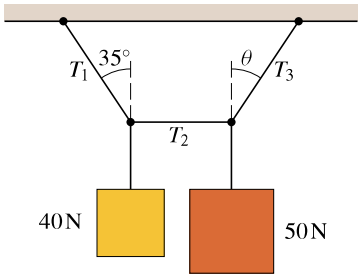
Obr. 13.35
Úloha 21

22Ú. Síla ***F*** udržuje v systému znázorněném na obr. 13.36 rovnováhu. Hmotnost bloku je 7 kg. Vypočtěte sílu T přenášenou lanem, na kterém visí systém. Hmotnost kladek a tření v systému zanedbejte.



Obr. 13.36
Úloha 22

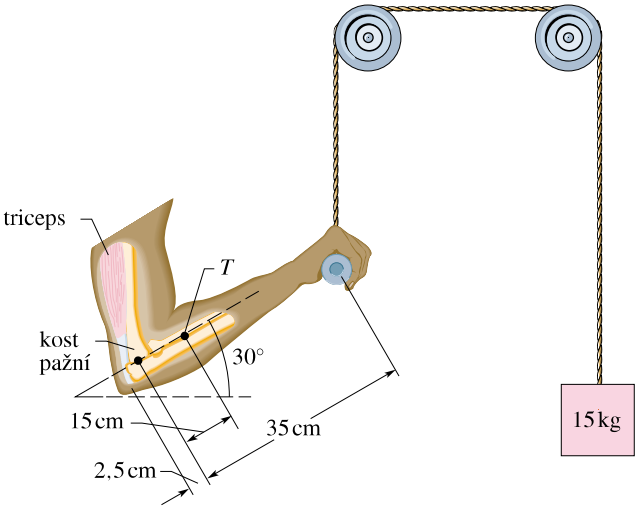
23Ú. Systém z obr. 13.37 je v rovnováze, když prostřední vlákno je přesně vodorovné. Najděte (a) sílu T_1, (b) sílu T_2, (c) sílu T_3 a úhel θ.



Obr. 13.37
Úloha 23

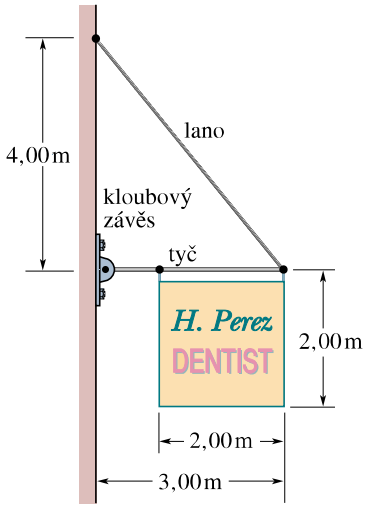
24Ú. Nerovnoramenné váhy jsou tvořeny pevnou tyčí podepřenou břitem mimo střed tyče a miskami zavěšenými na koncích tyče. Hmotnost tyče a misek budeme v dalších úvahách zanedbávat. Váhy jsou vyrovnány, když závaží hmotnosti m je na levé misce a závaží hmotnosti m_1 na pravé misce vah. Když umístíme závaží hmotnosti m na pravou misku, musíme dát k vyrovnání vah na levou misku závaží hmotnosti m_2. Ukažte, že platí $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

25Ú. Závaží o hmotnosti 15 kg je přes dvě kladky taženo rukou, jak je ukázáno na obr. 13.38. Paže je svislá, zatímco předloktí svírá úhel 30° s vodorovnou rovinou. Jakou silou působí na předloktí (a) triceps, (b) pažní kost? Předloktí a ruka mají dohromady hmotnost 2,0 kg. Těžiště systému je 15 cm od loketního kloubu směrem k ruce, místo upnutí tricepsu 2,5 cm na druhou stranu (srovnej s obrázkem).



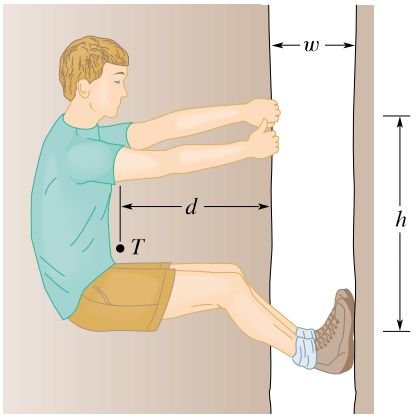
Obr. 13.38 Úloha 25

26Ú. Čtvercový vývěsní štít (hmotnost 50,0 kg, délka strany čtverce 2,0 m) je vysunut do ulice na tyči zanedbatelné hmotnosti a délky 3,00 m. Lano napnuté mezi vzdálenějším koncem tyče a místem upevnění na stěně, které je 4,00 m nad kloubovým závěsem nesoucím tyč, udržuje tyč ve vodorovné poloze (obr. 13.39). (a) Jaká je napěťová síla přenášená lanem? Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou působí stěna přes kloubový závěs na tyč?



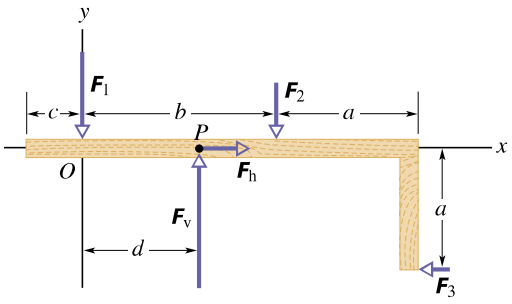
Obr. 13.39
Úloha 26

27Ú. Na obr. 13.40 je schematicky znázorněn horolezec, který leze „na sokolíka“ podél štěrbiny, přičemž rukama táhne za jednu stranu štěrbiny a chodidly tlačí na její druhou stranu. Štěrbina má šířku $w = 0{,}20\,\text{m}$. Těžiště horolezce je ve vodorovné vzdálenosti $d = 0{,}40\,\text{m}$ od bližší stěny štěrbiny. Statický činitel tření mezi rukama horolezce a skálou je $f_1 = 0{,}40$ a mezi botami horolezce a skálou $f_2 = 1{,}2$. (a) Jaký nejmenší tah rukama a tlak nohama ve vodorovném směru udrží horolezce na skále? (b) Jaká musí být při tomto tahu svislá vzdálenost h mezi rukama a nohama, aby horolezec byl v rovnováze? (c) Když se horolezec setká s mokrou skálou, takže hodnoty f_1 a f_2 se zmenší, jak se změní odpovědi na otázky (a) a (b)?



Obr. 13.40 Úloha 27

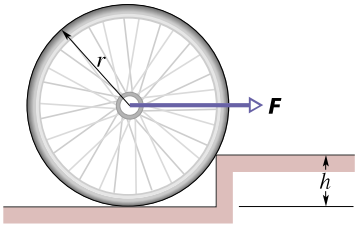
28Ú. Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ působí na systém znázorněný na obr. 13.41 při pohledu shora. Chceme dostat systém do rovnováhy tím, že do bodu P s vhodně zvolenou vzdáleností d umístíme sílu s vektorovými složkami $\boldsymbol{F}_\text{h}$ a $\boldsymbol{F}_\text{v}$. Zadané jsou hodnoty $a = 2{,}0\,\text{m}$, $b = 3{,}0\,\text{m}$, $c = 1{,}0\,\text{m}$, $F_1 = 20\,\text{N}$, $F_2 = 10\,\text{N}$ a $F_3 = 5{,}0\,\text{N}$. Najděte hodnoty: (a) F_h, (b) F_v a (c) d.



Obr. 13.41 Úloha 28

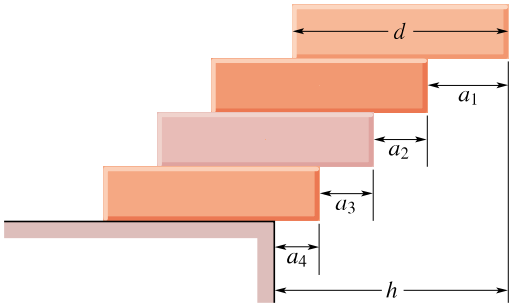
29Ú. Jak velká musí být síla F působící vodorovně na osu kola, aby kolo překonalo schod výšky h (obr. 13.42)? Kolo má poloměr r a váží G.

30Ú. Ve stropě je čtvercový poklop o straně 0,91 m a hmotnosti 11 kg. Na jedné straně jsou panty, na druhé držadlo. Těžiště poklopu je posunuto o 10 cm směrem k pantům od jeho geometrického středu. Jak velkou sílu musí být schopno přenést (a) držadlo, (b) panty?



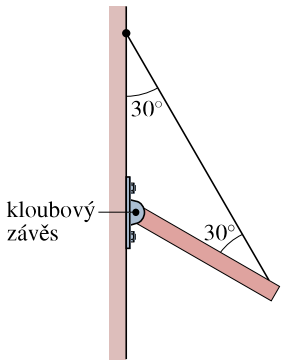
Obr. 13.42 Úloha 29

31Ú. Čtyři stejné cihly délky d jsou naskládány na sebe tak, že každá vyšší o něco přesahuje tu nižší (obr. 13.43). Nalezněte a vyjádřete v násobcích délky d maximální délky přesahů (a) a_1, (b) a_2, (c) a_3, (d) a_4 a (e) h, při kterých ještě stavba zůstane v rovnováze, tedy nespadne.



Obr. 13.43 Úloha 31

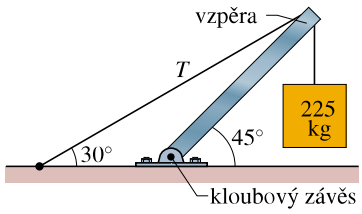
32Ú. Jeden konec tyče hmotnosti 20 kg a délky 1 m je připevněn ke stěně kloubovým závěsem. Druhý konec je zavěšen na vlákně způsobem vyznačeným na obr. 13.44. (a) Najděte napěťovou sílu přenášenou vláknem. Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloubový závěs působí na tyč?



Obr. 13.44 Úloha 32

33Ú. Systém na obr. 13.45 je v rovnováze. Závaží o hmotnosti 225 kg je zavěšeno na konci homogenní vzpěry, jejíž hmotnost je 45 kg. Stanovte: (a) sílu přenášenou vláknem T, (b) vodorovnou a (c) svislou složku síly, kterou vzpěra působí na kloubový závěs.

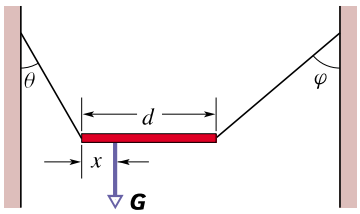
34Ú. Dveře vysoké 2,1 m a široké 0,91 m mají hmotnost 27 kg. Jeden pant je umístěn 0,30 m od vršku dveří, druhý ve stejné vzdálenosti od spodku dveří. Každý z pantů nese polovinu tíhy dveří. Předpokládejte, že těžiště dveří leží v jejich geometrickém



Obr. 13.45
Úloha 33

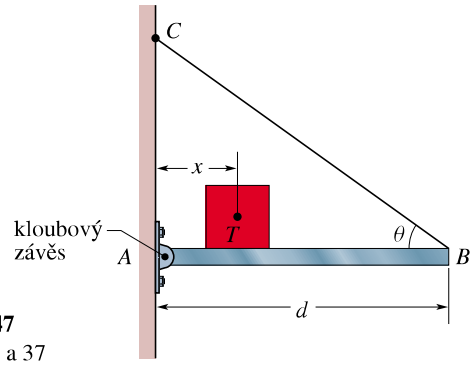
středu. Stanovte: (a) svislé a (b) vodorovné složky sil, kterými panty působí na dveře.

35Ú. Nehomogenní tyč tíhy **G** je zavěšena na dvou lanech tak, že je v rovnováze vodorovná (obr. 13.46). Jedno lano svírá se svislicí úhel $\theta = 36{,}9°$, druhé úhel $\varphi = 53{,}1°$. Délka tyče d je 6,1 m. Vypočtěte vzdálenost x těžiště tyče od jejího levého konce.



Obr. 13.46
Úloha 35

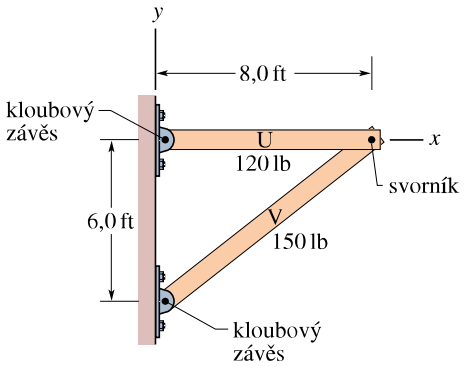
36Ú. Na obr. 13.47 je znázorněna vodorovná tyč AB připojená kloubovým závěsem ke svislé stěně a na opačném konci tenkým drátem BC, který se stěnou svírá úhel θ. Závaží se může volně pohybovat podél tyče; jeho polohu určíme udáním vzdálenosti x těžiště závaží od stěny. Zjistěte, jak závisí na x (a) síla přenášená drátem, (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloub působí na tyč. Hmotnost tyče zanedbejte.



Obr. 13.47
Úlohy 36 a 37

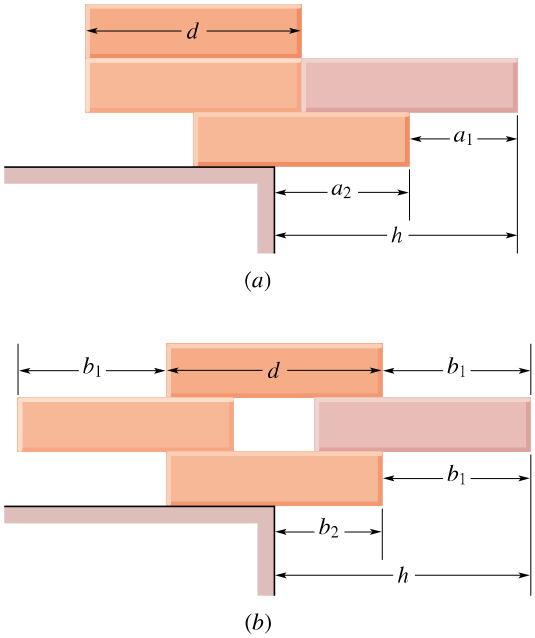
37Ú. V uspořádání stejném jako v úloze 36 (obr. 13.47) předpokládejte, že délka tyče d je 3,0 m a její váha 200 N. Váha závaží je 300 N a úhel $\theta = 30°$. Drát vydrží maximální zatížení 500 N. (a) Do jaké největší vzdálenosti x můžeme vysunout závaží, než drát praskne? Jaká je přitom velikost (b) vodorovné a (c) svislé složky síly, kterou kloub působí na tyč?

38Ú. Dva homogenní trámy U a V jsou přes kloub připojeny ke stěně a spolu volně spojeny svorníkem (obr. 13.48). Najděte vodorovnou a svislou složku síly působící (a) na trám U od jeho kloubového upevnění, (b) na trám U od svorníku, (c) na trám V od jeho kloubového upevnění a (d) na trám V od svorníku.



Obr. 13.48
Úloha 38

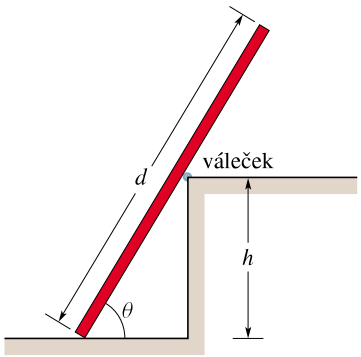
39Ú. Čtyři stejné cihly délky d jsou naskládány na stůl dvěma způsoby, jak je ukázáno na obr. 13.49 (srovnejte s úlohou 31). Snažte se v obou případech najít maximální vzdálenost h, o kterou může stavba přesáhnout stůl, aniž by spadla. Vypočtěte (v násobcích d) příslušné vzdálenosti h a nalezněte hodnoty přesahů a_1, a_2, b_1 a b_2, které k dosažení maximálních hodnot h musíte použít. (Podívejte se do The Amateur Scientist, *Scientific American*, June 1985, na podrobnější diskusi příkladu a ještě lepší uspořádání cihel typu (b).)



Obr. 13.49 Úloha 39

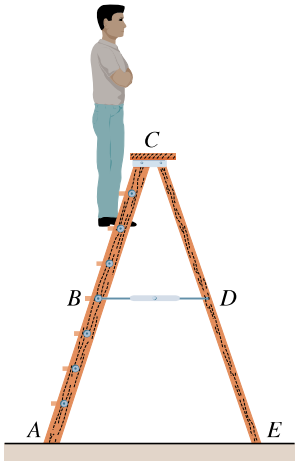
40Ú. Homogenní fošna délky $d = 14$ m a hmotnosti $m = 50$ kg spočívá na podlaze a kluzném válečku (nulové tření) umístěném na vršku zdi vysoké 3 m (obr. 13.50). Fošna je v rovnováze, když $\theta \geqq 70°$, ale podklouzne, když $\theta < 70°$. Určete činitel statického tření mezi fošnou a podlahou.

41Ú. Na obr. 13.51 jsou zobrazeny schůdky spojené osou v místě C s rameny AC a CE dlouhými 2,8 m. Zabezpečovací tyč dlouhá 0,75 m je umístěna v polovině výšky schůdků. Muž hmotnosti 85 kg stojí na schůdku, který je vzdálen 2,1 m od paty schůdků. Najděte: (a) napěťovou sílu v zabezpečovací tyči a síly, kterými podlaha působí na schůdky v místě (b) A a (c) E.



Obr. 13.50
Úloha 40

Zanedbejte hmotnost schůdků a tření mezi schůdky a podlahou. (*Tip*: Použijte rovnice rovnováhy na jednotlivé části schůdků.)



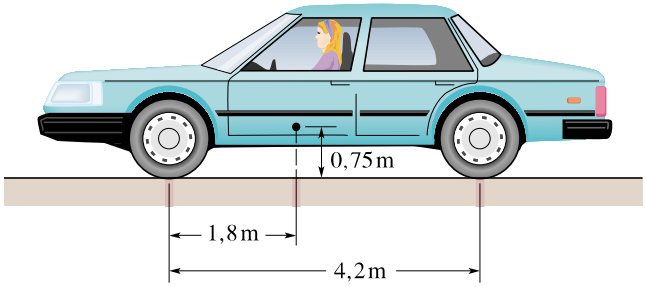
Obr. 13.51 Úloha 41

42Ú. Homogenní krychle o straně a spočívá na vodorovné podlaze. Činitel statického tření mezi krychlí a podlahou je f. Vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ tlačíme na jednu stranu krychle v její svislé ose symetrie ve výši h nad podlahou. Když pomalu zvyšujeme velikost síly F, krychle začne po podlaze buď (a) klouzat, nebo se začne (b) převracet. Pro jaká f nastane případ (a) a pro jaká případ (b)? (*Tip*: Uvažte, kde je umístěna normálová síla v případě převracení krychle.)

43Ú. Krychlová krabice naplněná pískem váží 890 N. Chceme krabici uvést do valivého pohybu tím, že začneme ve vodorovném směru tlačit na jednu z jejích vrchních hran. (a) Jakou minimální velikost síly k tomu potřebujeme? (b) Jaký minimální činitel statického tření mezi krabicí a podlahou musí působit? (c) Existuje efektivnější způsob, jak rozkutálet krabici? Jestliže ano, udejte minimální velikost síly, kterou to lze učinit. (*Tip*: Podívejte se na návod k úloze 42.)

44Ú. Bedna tvaru krychle s délkou hrany 1,2 m obsahuje část stroje, jehož tvar je takový, že se těžiště krychle nachází o 0,3 m výše, než je její geometrický střed. Bedna stojí na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou malý úhel θ. Když zvyšujeme úhel θ, dosáhneme hodnoty, při které bedna začne po rampě klouzat, nebo se začne převracet. Jaký případ nastane: (a) když činitel statického tření mezi rampou a bednou je 0,60, (b) když jeho hodnota je 0,70? Pro oba případy udejte úhel, kdy zjištěný případ nastane. (*Tip*: Podívejte se na návod k úloze 42.)

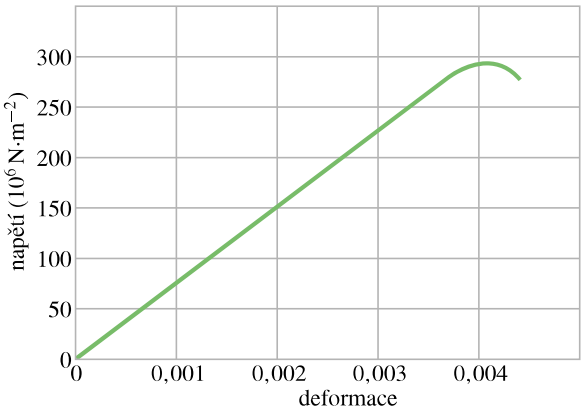
45Ú*. Auto jedoucí po vodorovné silnici prudce zabrzdí, takže všechna čtyři kola se zablokují a smýkají se po silnici. Dynamický činitel tření mezi koly a silnicí je 0,4. **Rozvor**, tj. vzdálenost mezi osou předních a zadních kol, je 4,2 m a těžiště auta je umístěno 1,8 m za osou předních kol ve výšce 0,75 m nad vozovkou (obr. 13.52). Auto váží 11 kN. Vypočtěte: (a) brzdné zrychlení auta, (b) normálovou sílu působící na každé kolo a (c) brzdnou sílu působící na každé kolo. (*Tip*: Auto při brzdění není sice v rovnováze pro posuvný pohyb, ale dokud se nezačne otáčet, je v rovnováze pro rotační pohyb. Zachování rovnováhy pro rotační pohyb předpokládejte.)



Obr. 13.52 Úloha 45

ODST. 13.6 Pružnost

46C. Na obr. 13.53 je graf závislosti napětí na deformaci (křivka napětí – deformace) pro křemen. Jaký je (a) jeho Youngův modul a jaká je (b) hodnota meze kluzu?



Obr. 13.53 Cvičení 46

47C. Po pádu zjistil horolezec hmotnosti 95 kg, že visí na konci lana. Lano délky 15 m a průměru 9,6 mm se vratně prodloužilo o 2,8 cm. Vypočtěte: (a) relativní prodloužení (deformaci) lana, (b) napětí lana a jeho (c) Youngův modul.

48C. Důlní výtah visí na jediném ocelovém laně o průměru 2,5 cm. Celková hmotnost kabiny výtahu a přepravovaných osob je 670 kg. Jaké bude prodloužení lana, (a) když je výtah na povrchu 12 m pod těžním strojem (motorem výtahu) a (b) když je

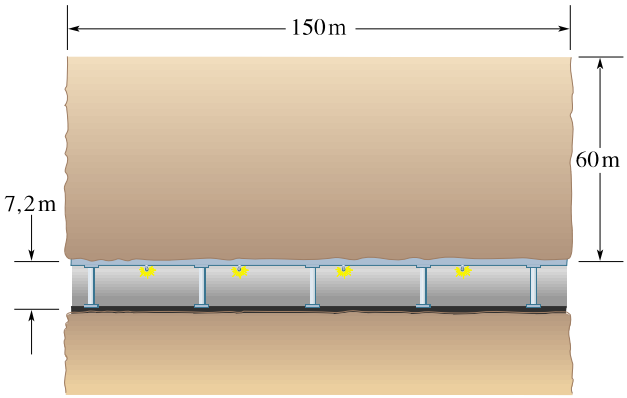
na dně šachty hluboké 350 m? (Při výpočtu zanedbejte hmotnost lana.)

49C. Předpokládejte, že trám na obr. 13.9a je z jedle douglasky a má čtvercový průřez. Jak musí být trám tlustý, aby tlak v něm nepřesáhl 1/6 jeho meze pevnosti v tlaku? (K řešení použijte výsledku př. 13.5.)

50C. Vodorovná hliníková tyč průměru 4,8 cm vyčnívá 5,3 cm ze zdi. Závaží hmotnosti 1 200 kg je zavěšeno na samý konec tyče. Modul pružnosti ve smyku hliníku je $3{,}0\cdot10^{10}$ Pa. Vypočtěte (a) smykové napětí v tyči a (b) svislou odchylku konce tyče, když zanedbáte tíhu tyče.

51C. Jak velký všestranný tlak musí působit na měděnou krychli o hraně 85,5 cm, aby se její hrany zkrátily na 85,0 cm? Objemový modul pružnosti mědi je $1{,}4\cdot10^{11}$ Pa.

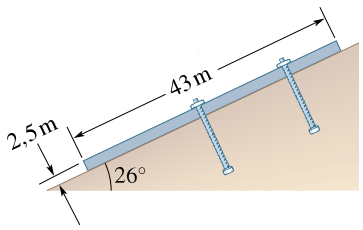
52Ú. Navrhujeme tunel s rovnou střechou dlouhý 150 m, vysoký 7,2 m, široký 5,8 m, který povede 60 m pod zemí (obr. 13.54). Střecha bude držena výlučně ocelovými sloupy, jejichž čtvercový průřez má plochu 960 cm^2. Zemina v nadloží (nad tunelem) má hustotu 2,8 $g\cdot cm^{-3}$. (a) Jaká je celková síla, kterou sloupy musí unést? (b) Kolik musí být v tunelu sloupů, aby tlak ve sloupech nepřesáhl hodnotu rovnou polovině meze pevnosti v tlaku?



Obr. 13.54 Úloha 52

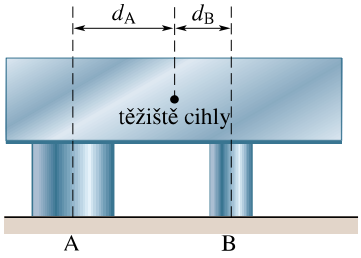
53Ú. Pravoúhlá břidlicová deska spočívá na nakloněné skalní podložce se sklonem 26° (obr. 13.55). Deska je 43 m dlouhá, 2,5 m tlustá a 12 m široká. Hustota desky je 3,2 $g\cdot cm^{-3}$. Činitel statického tření mezi deskou a podložní skálou je 0,39. (a) Vypočítejte složku tíhy desky působící podél nakloněné podložky. (b) Vypočtěte celkovou sílu statického tření působící na desku. Porovnáním výsledků (a) a (b) zjistíte, že desce hrozí sklouznutí z podložky a brání jí v tom pouze náhodné výčnělky vytvářející slabé přechodné záchyty. (c) Aby se deska upevnila, je kolmo provrtána i s podložní skálou a do otvorů jsou zasazeny svorníky. Jestliže plocha průřezu každého svorníku je 6,4 cm^2 a mez pevnosti ve smyku materiálu, z kterého je svorník vyroben, je $3{,}6\cdot10^8$ Pa, kolik svorníků musíme užít k upevnění desky? Předpokládejte, že svorníky jsou přitaženy tak mírně, že neovlivní velikost normálové síly (tlak desky na podložku).

54Ú. Olověná deska spočívá vodorovně na válcích A a B, jak



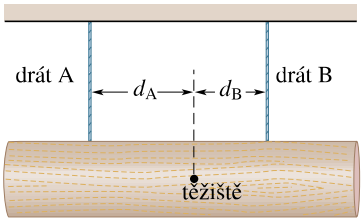
Obr. 13.55
Úloha 53

je ukázáno na obr. 13.56. Válec A má dvakrát větší Youngův modul a dvakrát větší průřez než válec B. Než byly válce deformovány cihlou, měly stejnou délku. Jaká část tíhy cihly je podepřena (a) válcem A a (b) válcem B? Vodorovné vzdálenosti mezi těžištěm cihly a osami válců jsou d_A pro válec A a d_B pro válec B. (c) Jaký je poměr d_A/d_B?



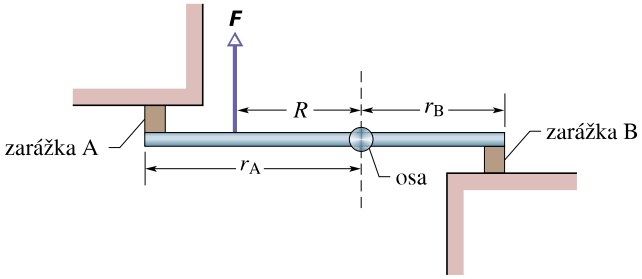
Obr. 13.56
Úloha 54

55Ú. Homogenní kláda hmotnosti 103 kg visí na dvou ocelových drátech A a B, které mají poloměr 1,2 mm. Původně byl drát A 2,50 m dlouhý a byl o 2 mm kratší než drát B. Po zavěšení znázorněném na obr. 13.57 je kláda vodorovně. Jakou silou ji drží (a) drát A, (b) drát B? Jaký je poměr délek d_A/d_B?



Obr. 13.57
Úloha 55

56Ú. Na obr. 13.58 je pohled shora na pevnou tyč, která se může otáčet kolem svislé osy, dokud ji nezastaví dvě stejné gumové zarážky A a B umístěné na tyči ve vzdálenosti r_A a r_B od osy. Nejprve zarážky po zastavení tyče zůstanou ve stavu, kdy nejsou stlačeny. Potom začne na tyč působit síla ***F*** ve vzdálenosti R od osy otáčení. Najděte síly, které stlačují (a) zarážku A, (b) zarážku B.



Obr. 13.58 Úloha 56