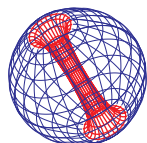


Slezská univerzita v Opavě  
Filozoficko-přírodovědecká fakulta  
Ústav fyziky



**Silesian University in Opava**



INSTITUTE OF PHYSICS  
SU OPAVA



INVESTMENTS IN EDUCATION DEVELOPMENT

# Fyzikální procesy v poli černých děr

Sbírka řešených úloh

Jan Schee, Filip Blaschke

Opava 2014

# Obsah

|   |                                                                       |    |
|---|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Rovnice geodetiky                                                     | 3  |
| 2 | Testovací částice ve sféricky symetrických, statických prostoročasech | 12 |
| 3 | Pohyb testovacích částic v Kerrově geometrii                          | 25 |
| 4 | Pohyb testovacích částic v elektromagnetickém poli                    | 47 |
| 5 | Skalární pole v okolí černých děr                                     | 54 |
| 6 | Termodynamika černých děr                                             | 60 |
| 7 | Elektromagnetické pole v zakřiveném prostoročase                      | 66 |
|   | Reference                                                             | 69 |

# 1 Rovnice geodetiky

Volné testovací částice se pohybují v metrickém poli podél takové světočáry spojující dva světobody, která je extrémální a nazýváme ji *geodetika*. Jestliže je

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1)$$

délkový element světočáry, pak prostoročasový interval geodetiky musí splňovat podmínku

$$\delta S = mc\delta \int_a^b ds = 0. \quad (2)$$

Geodetika  $x^\mu(\lambda)$  je pak řešením rovnice

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (3)$$

kde  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  jsou koeficienty afinní konexe, které mají tvar

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (-g_{\beta\gamma,\sigma} + g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta}). \quad (4)$$

Pokud má metrické pole určité symetrie, tak s těmito symetriemi jsou spojeny pohybové konstanty. Symetrie prostoročasu určují Killingovy vektorová pole, řekněme  $\xi^\alpha$ , které splňují Killinkovu rovnici

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0. \quad (5)$$

Detailnímu teoretický základ studia pohybu testovacích částic v metrických polích najdete například v [9, 16].

**Úloha č.1)** Odvoďte rovnici geodetiky z principu nejmenší akce.

---

**Řešení:** Určeme nejprve variaci veličiny  $ds^2$ . Dostaneme výraz

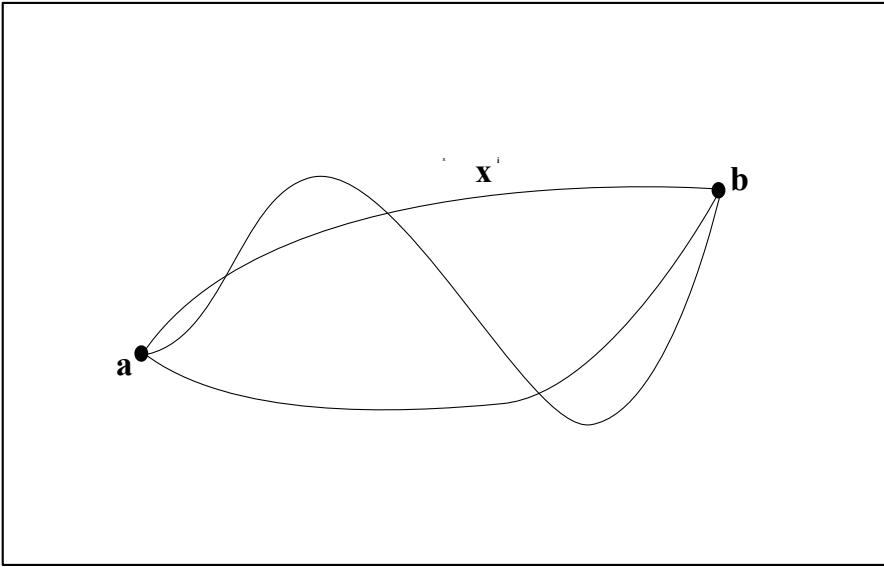
$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds, \quad (6)$$

který se současně rovná vztahu

$$\delta ds^2 = \delta (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} dx^\alpha dx^\beta \delta x^\sigma + 2g_{\alpha\beta} dx^\alpha d\delta x^\beta. \quad (7)$$

Variace akce  $S$  má potom tvar

$$\delta S = mc \int_a^b \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \delta x^\sigma + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d\delta x^\beta}{ds} \right) ds = 0. \quad (8)$$



Obrázek 1: Hledání trajektorie  $x^\alpha(\lambda)$  spojující body  $a$  a  $b$  tak aby příslušná akce byla extrémální, tj.  $\delta S = 0$ .

Když si uvědomíme, že hledáme funkcional spojující dva pevné body  $a$  a  $b$  jejichž variace je, samozřejmě,  $\delta x_a = \delta x_b = 0$  pak úpravou druhého členu v integraci postupně, pomocí integrační metody per-partes, dostaneme

$$\int_a^b g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d\delta x^\beta}{ds} ds = \underbrace{\left[ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \delta x^\beta \right]_a^b}_0 - \int_a^b \frac{d}{ds} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \right) \delta x^\beta. \quad (9)$$

Variaci akce potom dostane tvar

$$\delta S = mc \int_a^b \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \delta x^\sigma - \frac{d}{ds} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \right) \delta x^\beta \right) ds = 0. \quad (10)$$

Nyní už jenom, ve druhém členu, přejmenujeme index  $\beta$  na  $\sigma$  a vytkneme  $\delta x^\sigma$ . Pohybová rovnice testovací částice potom je

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - \frac{d}{ds} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \right) = 0. \quad (11)$$

Po úpravách a s využitím vztahu pro afinní konexi  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  dostaneme hledanou rovnici

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \quad (12)$$

□

**Úloha č.2)** Uvažujte Killingovo vektorové pole  $\xi^\alpha$  asociované s metrickým polem  $g_{\alpha\beta}$ . Dále, necht' je  $u^\alpha$  čtyřrychlost testovací částice. Ukažte, se podél geodetiky zachovává veličina  $u_\alpha \xi^\alpha$ .

---

**Řešení:** Jestliže se má zachovávat podél geodetiky  $x^\alpha$  veličina  $u_\alpha \xi^\alpha$ , pak musí být splněna identicky rovnice

$$(u_\alpha \xi^\alpha)_{;\beta} u^\beta = 0. \quad (13)$$

Počítejme,

$$\begin{aligned} (u_\alpha \xi^\alpha)_{;\beta} u^\beta &= u_{\alpha;\beta} \xi^\alpha u^\beta + u_\alpha \xi^\alpha_{;\beta} u^\beta \\ &\stackrel{\text{Rce geodetiky}}{=} 0 + u^\alpha \xi_{\alpha;\beta} u^\beta \\ &\stackrel{\text{Killingova rce}}{=} -\xi_{\beta;\alpha} u^\alpha u^\beta \\ &\stackrel{\text{Přejmenování indexů}}{=} -\xi_{\alpha;\beta} u^\alpha u^\beta = 0. \end{aligned}$$

Poslední řádek plyne z faktu, že pokud má být  $A = -A$  pak jedinou možností je  $A = 0$ .  $\square$

**Úloha č.3)** Ukažte, že Hamiltonián ve tvaru

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (14)$$

vede na rovnici geodetiky ve tvaru

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma = 0. \quad (15)$$

---

**Řešení:** Vezměme Hamiltonián v předkládaném tvaru

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (16)$$

a dosadíme jej do Hamiltonových rovnic

$$\frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \text{ a } \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (17)$$

a dostaneme

$$\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\lambda} p^\sigma + g_{\alpha\sigma} \frac{dp^\sigma}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} p_\mu p_\nu \quad (18)$$

kde jsme využili vztah  $p_\alpha = g_{\alpha\sigma} p^\sigma$ . Dále zřejmě platí

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = p^\alpha. \quad (19)$$

Použijeme tento vztah v rovnici (18) a dále ji upravíme

$$g_{\alpha\sigma} \frac{dp^\sigma}{d\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} p^\rho p^\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} p_\mu p_\nu = 0. \quad (20)$$

Z identity

$$g_{\nu\sigma}g^{\sigma\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (21)$$

dostaneme vztah

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}g^{\nu\beta} = -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}g_{\nu\beta}. \quad (22)$$

Jeho užitím v rovnici (20) získáme rovnici

$$g_{\alpha\sigma}\frac{dp^{\sigma}}{d\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}}p^{\rho}p^{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}}p^{\nu}p^{\beta} = 0 \quad (23)$$

kteřá po úpravách přejde na tvar

$$\frac{dp^{\rho}}{d\lambda} + \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}\left(-\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}}\right)p^{\nu}p^{\beta} = 0, \quad (24)$$

což je rovnice geodetiky. □

**Úloha č.4)** Pokud Hamiltonián nezávisí explicitně na souřadnici  $x^{\alpha}$ , pak je s touto souřadnicí spojena pohybová konstanta  $p_{\alpha}$ .

---

**Řešení:** Důkaz tohoto tvrzení nasnadě, plyne totiž rovnou z Hamiltonovy rovnice

$$\frac{dp_{\alpha}}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^{\alpha}}. \quad (25)$$

Pokud je  $H \neq H(x^{\alpha})$ , pak ihned dostaneme výsledek

$$\frac{dp_{\alpha}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow p_{\alpha} = \text{const}. \quad (26)$$

□

**Úloha č.5)** Řešte Hamiltonovu-Jacobiho rovnici pro nerelativistickou testovací částici v potenciálovém poli  $V(x)$  mající energii  $E$  (1D pohyb).

---

**Řešení:** Nejprve připomeňme původ Hamiltonovy rovnice. William Hamilton byl přesvědčený že trajektorie testovacích částic je idealizací v analoogii k paprskům v geometrické optice. Naše testovací částice (ze zadání) je popsána Hamiltoniánem

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (27)$$

a lokalizovaná energie částice je  $E$ . Jestliže přijmeme tezi, že trajektorie částice je krátkovlnnou aproximací vlnového pohybu musíme nějak tento vlnový pohyb adekvátně popsat. Částici popíšeme vlnou amplitudy pravděpodobnosti výskytu částice. V krátkovlnné aproximaci tuto vlnu popíšeme WKB vlnovou funkcí

$$\psi_E(x, t) = A(x, t) \exp \frac{i}{\hbar} S_E(x, t) \quad (28)$$

kde je  $A$  pomalu se měnící amplituda vlny a  $S_E$  je dynamická fáze. Tato fáze splňuje rovnici

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x). \quad (29)$$

Řešení budeme hledat v separovaném tvaru

$$S = S_x + S_t. \quad (30)$$

V konzervativním poli  $V(x)$  platí že  $H = V$ , neboli

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = E \quad (31)$$

odkud, z předpokladu separability (30), plyne vztah

$$S_t = -Et + \delta_E. \quad (32)$$

Tento poslední vztah použijeme v Hamiltonově-Jacobiho rovnici (29) a obdržíme rovnici

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_x}{dx} \right)^2 + V(x) \Rightarrow S_x = \int_{x_0}^{x_1} [2m(E - V(x))]^{1/2} dx. \quad (33)$$

Celkové řešení (30) tak můžeme psát ve tvaru

$$S(x, t) = -Et + \int_{x_0}^{x_1} [2m(E - V(x))]^{1/2} dx + \delta_E. \quad (34)$$

Určili jsme amplitudu pravděpodobnosti ale stále jsme neurčili trajektorii částice  $x = x(t)$ . Abychom mohli lokalizovat částici, tj. určit její trajektorii, vytvoříme vlnový balík amplitudy pravděpodobnosti superpozicí monochromatických vln, tj.

$$\psi(x, t) = \psi_E(x, t) + \psi_{E+\Delta E}(x, t) + \dots \quad (35)$$

Vlnový balík bude soustředěn v oblasti s konstruktivní interferencí jednotlivých vln. V této oblasti jsou fáze různých vln totožné, tj.

$$S_E(x, t) = S_{E+\Delta E}(x, t). \quad (36)$$

Pro konstruktivní interferenci navíc musí platit, že změna fáze vzhledem ke změně energie (parametru popisující vlnu) je taky nulová, tj. platí

$$\frac{\partial S}{\partial E} = 0. \quad (37)$$

Aplikujeme tudto podmínku na řešení (34) a obdržíme výsledek

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{[2m(E - V(x))]^{1/2}} dx + t_0 \quad (38)$$

kde je  $t_0 \equiv d\delta_E/dE$ . Rovnice (38) tak představuje implicitně trajektorii částice s energií  $E$ , mezi body  $x_0$  a  $x_1$ .  $\square$

**Úloha č.6)** Použijte Hamilton-Jacobiho rovnici k vyřešení problému pohybu testovací částice v centrálním gravitačním poli.

**Řešení:** Hamiltonián testovací částice v centrálním gravitačním poli, ve sférických souřadnicích, bude mít tvar

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}p_\varphi^2 - \frac{M}{r} \quad (39)$$

a k němu odpovídající Hamiltonovu-Jacobiho rovnici, pro fázi  $S$  amplitudy pravděpodobnosti částice, zapíšeme výrazem

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{M}{r}. \quad (40)$$

Řešení budeme hledat v separovaném tvaru

$$S = S_t + S_r + S_\theta + S_\varphi. \quad (41)$$

Z Hamiltoniánu a Hamiltonových rovnic  $dp_i/dt = -\partial H/\partial x^i$  ihned zjistíme, že existují dvě pohybové konstanty které označíme  $E = -p_t$  a  $L_z = p_\varphi$ . Potom, fázi (41) píšeme ve tvaru

$$S = -E t + S_r + S_\theta + L_z \varphi + C_{E,L_z} \quad (42)$$

kde jsou sloučeny integrační konstanty z integrace přes  $t$  a  $\varphi$  do jedné konstanty  $C_{E,L_z}$ . K určení  $S_r$  a  $S_\theta$  dosadíme řešení  $S$  do rovnice (40), která vede na rovnici

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L_z^2}{2r^2 \sin^2 \theta} - \frac{M}{r}. \quad (43)$$

Tuto rovnici lze snadno separovat na část závislou pouze na souřadnici  $r$  a na část závislou pouze na souřadnici  $\theta$ . Po krátké úpravě obdržíme předchozí rovnici ve tvaru

$$r^2 \left( E - \frac{M}{r} \right) - r^2 \frac{1}{2} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L_z^2}{2 \sin^2 \theta}. \quad (44)$$

Má-li levá i pravá strana platit pro libovolné  $r$  a  $\theta$  tak se obě strany musejí rovnat jedné a téže konstantě, řekněme  $K$ . Funkce  $S_r$  a  $S_\theta$  pak snadno určíme integrací posledních rovnic a obdržíme vztahy

$$S_r = \int^r [2(E + M/r - K/(2r^2))]^{1/2} dr + C_{K2}, \quad (45)$$

$$S_\theta = \int^\theta (K - L_z^2/\sin^2 \theta)^{1/2} d\theta + C_{K1}. \quad (46)$$

Výsledná fáze má následující tvar

$$\begin{aligned}
S &= -Et + L_z \varphi + \int^r [2(E + M/r - K/(2r^2))]^{1/2} dr \\
&\quad + \int^\theta (K - L_z^2/\sin^2 \theta)^{1/2} d\theta + C_{E,L_z,K}.
\end{aligned} \tag{47}$$

K nalezení trajektorie budeme opět aplikovat, na fázi  $S$ , podmínku konstruktivní interference, tj. musí platit

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial L_z} = \frac{\partial S}{\partial K} = 0. \tag{48}$$

Z těchto podmínek postupně obdržíme výsledky

$$t = \int^r \frac{dr}{[2(E + M/r - K/(2r^2))]^{1/2}}, \tag{49}$$

$$\varphi = \int^\theta \frac{L_z d\theta}{(K - L_z^2/\sin^2 \theta)^{1/2}}, \tag{50}$$

$$0 = - \int^r \frac{dr}{r^2 [2(E + M/r - K/(2r^2))]^{1/2}} + \int^\theta \frac{d\theta}{(K - L_z^2/\sin^2 \theta)^{1/2}}. \tag{51}$$

□

## 2 Testovací částice ve sféricky symetrických, statických prostoročasech

Prostoročasový interval sféricky symetrického a stacionárního prostoročasu má tvar v pseudo-sférických souřadnicích má tvar

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (52)$$

V našich dalších úvahách budeme uvažovat následující prostoročasy:

- *Schwarzschildův* prostoročas je vakuovým řešením Einsteinových rovnic  $R_{\mu\nu} = 0$ . Funkce  $f(r)$  má tvar [9, 16]

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (53)$$

- *Schwarzschildův-de Sitterův* prostoročas je vakuovým řešením Einsteinových rovnic s Kosmologickou konstantou. Funkce  $f(r)$  pak bude [12]

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3} c^2 r^2. \quad (54)$$

- *Reissnerův-Nordstromův* prostoročas je řešením Einsteinových rovnic s tenzorem energie hybnosti elektromagnetického pole. Funkce  $f(r)$  má tvar [9, 16]

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (55)$$

**Úloha č.1)** Uvažujte sféricky symetrický a statický prostoročas pokrytý souřadnicemi  $(t, r, \theta, \varphi)$ . Uvažujte pohyb testovací částice v ekvatoriální rovině ( $\theta = \pi/2$ ) podél geodetiky, která má pro radiální souřadnici tvar

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V_{eff}(r, L), \quad (56)$$

kde  $E = -p_t$  a  $L = p_\varphi$  jsou integrály pohybu ve stationárním, sféricky symetrickém prostoročase. Nalezněte podmínky, které rozhodují o stabilitě či nestabilitě kruhových orbit.

---

**Řešení:** Zderivujeme-li (56) podle afinního parametru  $\tau$  (vlastního času) obdržíme:

$$2 \frac{dr}{d\tau} \left( \frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) = - \frac{dV_{eff}}{dr} \frac{dr}{d\tau}, \Rightarrow \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{1}{2} \frac{dV_{eff}}{dr}. \quad (57)$$

Na kruhových geodetikách je radiální zrychlení nulové

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = 0, \Rightarrow \boxed{\frac{dV_{eff}}{dr} = 0}. \quad (58)$$

Podmínky stability/nestability určíme perturbační analýzou rovnice (57). Kruhovou orbitu  $r_0, E_0, L_0$  radiálně perturbujeme na  $r = r_0 + \delta r, E = E_0 + \delta E$  ale  $L = L_0$ . Po dosazení do (57) dostáváme

$$\underbrace{\ddot{r}_0}_{=0} + \ddot{\delta r} = - \frac{1}{2} \frac{d}{dr} V_{eff}(r_0 + \delta r, L_0) = - \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \frac{dV_{eff}}{dr} \right]_{r_0}}_{=0} - \frac{1}{2} \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \bigg|_{r_0} \delta r + O(\delta r^2). \quad (59)$$

Celkově tedy máme:

$$\ddot{\delta r} = - \frac{1}{2} \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \bigg|_{r_0} \delta r. \quad (60)$$

Tudíž, je-li

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \bigg|_{r_0} > 0 &\Rightarrow \text{harmonické kmity poruchy } \delta r \Rightarrow \text{STABILITA.} \\ \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \bigg|_{r_0} < 0 &\Rightarrow \text{exponenciální růst poruchy } \delta r \Rightarrow \text{NESTABILITA.} \end{aligned}$$

□

**Úloha č.2)** V Reissnerově-Nordströmově prostoročase je délkový element dán výrazem

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (61)$$

kde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (62)$$

UkaŹte, Źe v této geometrii existuje  $r = r_{min}$ , na které mŹe bŹt částice v klidu (hranice repulsivní oblasti).

**Řešení:** UvaŹujme pohyb v ekvatoriální rovině. Pak má rovnice geodetiky pro radiální složku tvar

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (63)$$

UvaŹujme částici s nulovým momentem hybnosti  $L = 0$ .

$$V_{eff} \xrightarrow{L=0} 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = f(r). \quad (64)$$

Pokud má existovat stabilní hranice  $r = r_{min}$  mezi repulsivním a atraktivním charakterem geometrie, pak musí v tomto bodě platit  $dV_{eff}/dr|_{r_{min}} = 0$  a  $d^2V_{eff}/dr^2|_{r_{min}} > 0$ .

Počítejme:

$$\left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r_{min}} = \frac{2M}{r_{min}^2} - \frac{2Q^2}{r_{min}^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{min} = \frac{Q^2}{M}}. \quad (65)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{d^2f(r)}{dr^2}\right|_{r_{min}} = -\frac{4M}{r_{min}^3} + \frac{6Q^2}{r_{min}^4} = \frac{2M^3}{Q^6} > 0. \quad (66)$$

□

**Úloha č.3)** V poli Reissnerovi-Nordströmovi nahé singularity jsou k jejímu centru vyslány dvě částice s  $E = 1$ ,  $L = 0$  a s klidovou hmotností  $m$ . Obě částice jsou vyslány za sebou s určitým časovým odstupem. První částice se po dosažení bodu obratu otočí a střetne se s přilétávající částicí v určité vzdálenosti  $r$  od singularity.

Určete energii této srážky. Dále určete ve které vzdálenosti by muselo ke srážce dojít aby byla její energie maximální.

---

**Řešení:** R-N metrika je dána rovnicí (61). Čtyř-rychlost radiálně se pohybující částice je

$$U^t = g^{tt}U_t = -\frac{U_t}{f} = \frac{E}{f} = \frac{1}{f}, \quad (67)$$

$$\left(U^r\right)^2 = E^2 - V_{eff} = E^2 - f = 1 - f \quad \Rightarrow \quad U^r = \pm\sqrt{1-f}. \quad (68)$$

V okamžiku srážky jsou tedy čtyř-rychlosti přilétávající a odlétávající částice dány jako

$$U_1 = (1/f, \sqrt{1-f}, 0, 0), \quad U_2 = (1/f, -\sqrt{1-f}, 0, 0). \quad (69)$$

Energie srážky je

$$\begin{aligned} E_{CM}^2 &= -(P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = 2m^2 - 2m^2g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \\ &= 2m^2\left[1 - \left(-\frac{f}{f^2} - \frac{1}{f} + 1\right)\right] = \frac{4m^2}{f}. \end{aligned} \quad (70)$$

Maximální energie srážky  $E_{CM,max}^2$  bude dosaženo v minimu  $f(r)$ , tedy v bodě  $r_{min} = Q^2/M$ . Tudíž

$$E_{CM,max}^2 = \frac{4m^2}{1 - \frac{M^2}{Q^2}}. \quad (71)$$

□

**Úloha č.4)** Ve Schwarzschildově-de Sitterově prostoročase ukažte, že

1. existují dva horizonty události, pokud je  $\Lambda < 1/(9M^2)$ ,
2. existuje poloměr, na kterém může být částice s  $L = 0$  v klidu. Určete jeho závislost na  $\Lambda$ .

---

**Řešení:** Ve Schwarzschildově-de Sitterově prostoročase má dráhový element tvar:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (72)$$

kde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (73)$$

1. Horizonty leží tam, kde je metrika singulární, tj.  $f(r) = 0$ . Odtud dostáváme kubickou rovnici:

$$\underbrace{r^3}_{p} - \underbrace{\frac{\Lambda}{3}r^2}_{q} = 0. \quad (74)$$

Diskriminant je

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{9M^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{\Lambda^3}. \quad (75)$$

Abychom obdrželi dva kladné reálné kořeny, pak musí platit  $D < 0$  a tudíž

$$\Lambda < \frac{1}{9M^2}. \quad (76)$$

Goniometrické řešení má potom tvar:

$$r_1 = 2\Lambda^{1/2}\cos(\varphi/3), \quad (77)$$

$$r_2 = -2\Lambda^{1/2}\cos(\varphi/3 - \pi/3), \quad (78)$$

$$r_2 = -2\Lambda^{1/2}\cos(\varphi/3 + \pi/3), \quad (79)$$

kde  $\cos(\varphi) = -3\Lambda^{1/2}M$ .

2. K určení statického poloměru lze postupovat takto, vyjdeme z výrazu pro radiální složku čtyř-rychlosti (normovací podmínka)

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (80)$$

Požadujeme  $L = 0$ . Derivováním předchozí rovnice podle vlastního času dostáváme:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r. \quad (81)$$

Díky sférické symetrii je toto jediná složka zrychlení, která působí na testovací částici s  $L = 0$ . Pro stacionární částici je  $d^2 r/d\tau^2 = 0$  a tudíž:

$$-\frac{M}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{stat} = \left(\frac{3M}{\Lambda}\right)^{1/3}. \quad (82)$$

Pozn: Jiný postup vychází ze studia efektivního potenciálu. V případě  $L = 0$  má  $V_{eff}(r)$  jediný extrém (maximum) na  $r = r_{stat}$ . Částice nacházející se na stacionárním horizontu je tudíž v nestabilní rovnováze.

□

**Úloha č.5)** Určete azimutální moment hybnosti  $L_c$ , kovariantní energii  $E_c$  a úhlovou rychlost  $\Omega_c$  kruhové orbity testovací částice na poloměru  $r$  v ekvatoriální rovině. Nejprve uvažujte obecný, statický, sféricky symetrický prostoročas a pak aplikujte obdržené výsledky na případy pohybu v poli RN a Schw-dS černé díry.

---

**Řešení:** Prostoročasový interval statické, sféricky symetrické metriky ve Schwarzschildových souřadnicích má tvar

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (83)$$

Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že pohyb se odehrává v ekvatoriální rovině  $\theta = \pi/2$ . Definujme nyní úhlovou rychlost měřenou vzdálenými, stacionárními pozorovateli výrazem

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (84)$$

Dále definujme impaktní parametr  $l$  vztahem

$$l = \frac{L}{E} = \frac{u_\varphi}{-u_t}. \quad (85)$$

Vztah mezi  $\Omega$  a  $l$  pak zřejmě bude

$$l = \frac{u_\varphi}{-u_t} = \frac{g_{\varphi\varphi}u^\varphi}{-g_{tt}u^t} = \frac{r^2}{f(r)}\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{f(r)}{r^2}l. \quad (86)$$

Zbývá tedy určit  $E = E(r)$  a  $L = L(r)$ . Tyto funkce jsou určeny z podmínek, které musí být na kruhové orbitě splněny, tj.  $u^r = 0$  a  $dV_{eff}/differ = 0$ . Máme tedy rovnice

$$(u^r)^2 = E^2 - f(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = 0, \quad (87)$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = f'(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) - \frac{2f(r)}{r^3}L^2 = 0 \quad (88)$$

Z rovnice (88) dostaneme po algebraických úpravách vztah pro čtverec azimutálního momentu hybnosti ve tvaru

$$L^2 = \frac{r^3 f'(r)}{2f(r) - r f'(r)}. \quad (89)$$

Jeho dosazením do rovnice (87) dostaneme vztah pro čtverec energie testovací částice na kruhové orbitě ve tvaru

$$E^2 = \frac{2f(r)^2}{2f(r) - r f'(r)}. \quad (90)$$

Když dosadíme obě získané funkce do vztahu (86) pak výsledný výraz pro čtverec úhlové rychlosti částice na kruhové orbitě bude

$$\Omega^2 = \frac{r^3 f'(r)}{2f(r)^2}. \quad (91)$$

Nyní stačí tyto obecné vztahy aplikovat na případy konkrétních prostoročasů.

- *R-N metrika*, funkce  $f$  a její první derivace podle  $r$  mají tvar

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad f'(r) = \frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}. \quad (92)$$

Príslušné tvary funkcí  $L(r)$ ,  $E(r)$  a  $\Omega(r)$  potom jsou

$$L^2 = \frac{r^2(rM - Q^2)}{r(r - 3M) + 2Q^2}, \quad (93)$$

$$E^2 = \frac{[r(r - 2M) + Q^2]^2}{r^2[r(r - 3M) + 2Q^2]}, \quad (94)$$

$$\Omega^2 = \frac{rM - Q^2}{r^4}. \quad (95)$$

- *Schw-dS metrika*, funkce  $f$  a její první derivace podle  $r$  mají tvar

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad f'(r) = \frac{2M}{r^2} - \frac{2\Lambda r}{3}. \quad (96)$$

Príslušné tary funkcí  $L(r)$ ,  $E(r)$  a  $\Omega(r)$  potom jsou

$$L^2 = \frac{r^2(M - \Lambda r^3/3)}{r - 3M}, \quad (97)$$

$$E^2 = \frac{[\Lambda r^3 - 3r + 6M]^2}{9r(r - 3M)}, \quad (98)$$

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}. \quad (99)$$

□

**Úloha č.6)** Určete velikost lokálního zrychlení, které je zapotřebí k udržení testovací částice v klidu na daném poloměru  $r$ . Jaká bude velikost tohoto zrychlení na horizontu?

---

**Řešení:** Uvažujme sféricky symetrický prostoročas s dráhovým elementem

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (100)$$

Čtyř-zrychlení částice s čtyř-rychlostí  $u^\alpha$  je dáno:

$$a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau} = u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta = u^\alpha{}_{,\beta}u^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma. \quad (101)$$

Složky čtyř-rychlosti stacionární částice jsou  $u = (u^t, 0, 0, 0)$ . Z normovací podmínky plyne  $u^t = 1/\sqrt{-f(r)}$ . Tudíž:

$$a^\alpha = \Gamma_{tt}^\alpha (u^t)^2 = -\Gamma_{tt}^\alpha \frac{1}{f(r)}. \quad (102)$$

Zřejmě je  $\Gamma_{tt}^t = \Gamma_{tt}^\theta = \Gamma_{tt}^\varphi = 0$  a

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{tt,r}) = \frac{1}{2} f f'. \quad (103)$$

Jedinou nenulovou složkou čtyř-zrychlení je tedy  $a^r = -f'/2$ . Velikost čtyř-zrychlení je

$$a(r) = \sqrt{g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta} = \sqrt{g_{rr} (a^r)^2} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}. \quad (104)$$

Jelikož na horizontu je  $f = 0$  tak potom, zřejmě  $a(r_{hor}) = \infty$ .  $\square$

**Úloha č.7)** Uvažujte, že testovací částice je spouštěna pozorovatelem v nekonečnu na poloměr  $r$  pomocí nekonečně dlouhé, nehmotné struny. Jaká je velikost  $a_\infty(r)$ , kterou působí tento pozorovatel na testovací částici? Jaká bude hodnota  $a_\infty(r_{hor})$ ?

---

**Řešení:** Uvažujme následující myšlenkový pokus. Pozorovatel v nekonečnu posune strunu o malou vlastní vzdálenost  $\delta s$ . Tím vykoná práci

$$\delta W_\infty = a_\infty \delta s. \quad (105)$$

Na poloměru  $r$  se částice posune o vlastní vzdálenost  $\delta s$ , ale vykonaná práce je

$$\delta W = a(r) \delta s. \quad (106)$$

Nechť je nyní práce  $\delta W$  přeměněna na záření, které je sbíráno v nekonečnu. Energie tohoto záření podléhá rudému posuvu

$$\delta E_\infty = f^{1/2} \delta \omega = f^{1/2} a \delta s. \quad (107)$$

Ze zákona zachování energie ovšem plyne, že  $\delta E_\infty = \delta W_\infty$  a tudíž

$$f^{1/2} a \delta s = a_\infty \delta s, \quad \Rightarrow \quad a_\infty = f^{1/2} a. \quad (108)$$

Dosazením do tohoto vztahu za  $a$  z předchozího příkladu (rov. (104)) tak docházíme k závěru

$$\boxed{a_\infty = \frac{1}{2}f'}. \quad (109)$$

Hodnota zrychlení  $a_\infty(r_{hor})$  na horizontu je tudíž konečná.  $\square$

**Úloha č.8)** Určete kovariantní energii testovací částice v klidu na statickém poloměru  $r_{stat}$  ve Schwarzschildově-de Sitterově geometrii.

---

**Řešení:** Z normovací podmínky pro čtyř-rychlost  $U^\mu U_\mu = -1$  dostaneme (pro  $\theta = \pi/2$ )

$$(U^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (110)$$

Jelikož je na statickém poloměru částice v klidu  $U^r = 0$  a  $L = 0$  dostáváme

$$E^2 = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (111)$$

Z minulého příkladu víme, že  $r_{stat} = (3M/\Lambda)^{1/3}$ . Dosadíme-li tento výraz do předchozí rovnice, obdržíme energii pozorovatele na statickém poloměru

$$E_{stat}^2 = 1 - 2M\left(\frac{\Lambda}{3M}\right)^{1/3} - \frac{\Lambda}{3}\left(\frac{3M}{\Lambda}\right)^{2/3} = 1 - 3\left(\frac{\Lambda M}{3}\right)^{1/3} = 1 - 3y^{1/3}, \quad (112)$$

kde jsme zavedli bezrozměrný parametr  $y \equiv \Lambda M^2/3$ . Výsledná energie je tak

$$E_{stat} = \sqrt{1 - 3y^{1/3}}. \quad (113)$$

$\square$

**Úloha č.9)** Ukažte, že v případě nulových geodetik existuje mezní hodnota impaktního parametru  $l_c^2$ , taková že pro  $l^2 < l_c^2$  spadne foton do černé díry. Ukažte, že tato hodnota závisí na parametru  $y$  podle vztahu

$$l_c^2 = \frac{27}{1 - 27y}. \quad (114)$$

---

**Řešení:** Z normovací podmínky pro čtyř-rychlost fotonu  $U^\mu U_\mu$  dostaneme rovnici

$$(U^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) \frac{L^2}{r^2}, \quad (115)$$

kde  $r$  a  $L$  měříme v jednotkách  $M$ . Změníme-li afinní parametr  $\lambda \rightarrow E\lambda$  můžeme napsat

$$(U^r)^2 = 1 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) \frac{l^2}{r^2}, \quad (116)$$

kde  $l = L/E$  je impaktní parametr. Aby se foton putující směrem k černé díře mohl vrátit zpět do  $\infty$  musí pro dané  $l$  existovat bod obratu (na přípustné geodetice), tj.  $l$  musí splňovat pro všechna  $r \geq r_c$

$$0 \leq 1 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) \frac{l^2}{r^2}. \quad (117)$$

Odtud máme

$$l^2 \leq \frac{r^2}{1 - \frac{2}{r} - yr^2} = \frac{r^3}{r - 2 - yr^3} \equiv l_\gamma^2(r; y). \quad (118)$$

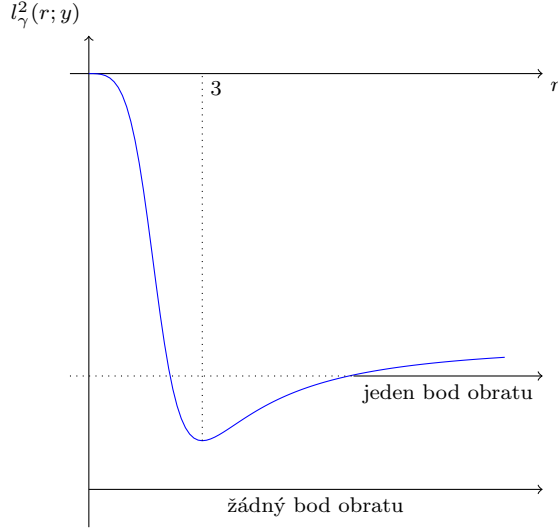
Prozkoumejme průběh funkce  $l_\gamma^2(r; y)$ . Pokud bude existovat minimum  $l_\gamma^2(r_{ph}; y)$  potom pro  $l^2 < l_\gamma^2(r_{ph}; y)$  nebude na příslušné geodetice existovat bod obratu a foton spadne pod horizont černé díry. Minimum určíme z extrému funkce  $l_\gamma^2(r; y)$ :

$$\frac{dl_\gamma^2(r; y)}{dr} = \frac{3r^2(r - 2 - yr^3) - r^3(1 - 3yr^2)}{r - 2 - yr^3} = \frac{2r^3 - 6r^2}{r - 2 - yr^3} 0, \quad (119)$$

jejímž řešením je  $r_{ph} = 3$  (viz obr. 2). Po dosazení dostáváme  $l_\gamma^2(r_{ph}; y) \equiv l_c^2$

$$l_c^2 = \frac{27}{1 - 27y}. \quad (120)$$

□



Obrázek 2: Průběh funkce  $l_\gamma^2(r; y)$  pro  $y = 0.14$ .

**Úloha č.10)** Určete únikový světelný kužel z pohledu tetrády statického pozorovatele

$$\vec{e}_{(t)} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (121)$$

$$\vec{e}_{(r)} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (122)$$

$$\vec{e}_{(\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (123)$$

$$\vec{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (124)$$

---

**Řešení:** Složky čtyř-hybnosti fotonu měřené statickým pozorovatelem jsou

$$P_{(a)} = P_\mu e^\mu_{(a)}. \quad (125)$$

Definujeme směrový úhel fotonu  $\alpha$  vůči dané tetradě vztahem

$$\sin \alpha = \frac{P^{(\varphi)}}{P^{(t)}}, \quad \cos \alpha = \frac{P^{(r)}}{P^{(t)}}. \quad (126)$$

Postupně tak dostáváme (s využitím (125))

$$\sin \alpha = \frac{P_{(\varphi)}}{-P_{(t)}} = \frac{P_{\varphi} e_{(\varphi)}^{\varphi}}{P_t e_{(t)}^t} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \frac{L}{Er} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \frac{l}{r}. \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{P_{(r)}}{-P_{(t)}} = \frac{e_{(r)}^r g_{rr} P^r}{-e_{(t)}^t P_t} = \pm \frac{\left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) L^2 / r^2}}{\left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} E} = \\ &= \pm \left[1 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (128)$$

□

**Úloha č.11)** Určete hodnotu kritického úhlu  $\alpha_c$ , pro který daný foton ještě unikne do  $\infty$ . Diskutujte hodnotu  $\cos \alpha_c$  s ohledem na radiální polohu zdroje  $r$  vůči fotonové orbitě  $r_{ph} = 3$ .

---

**Řešení:** Hodnotu kritického úhlu určíme dosazením kritické hodnoty impaktního parametru  $l_c(y)$  do vztahů (127) a (128).

$$\sin \alpha_c = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \left(\frac{27}{1 - 27y}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{27(r - 2 - yr^3)}{r^3(1 - 27y)}}. \quad (129)$$

$$\cos \alpha_c = \pm \left[1 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) \frac{27}{r^2(1 - 27y)}\right]^{1/2} = \pm \sqrt{\frac{r^3 - 27r + 54}{r^3(1 - 27y)}}. \quad (130)$$

Na  $r = r_{ph} = 3$  je  $\cosh \alpha_c = 0$  a tudíž  $\alpha_c = \pi/2$  a  $P^{(r)} = 0$ . Je-li  $r > r_{ph}$  pak  $P^{(r)} < 0$  a za znaménko v rovnici (130) bereme  $(-)$   $\Rightarrow \cos \alpha_c < 0$ . Je-li  $r < r_{ph}$  pak musí být  $P^{(r)} > 0$  a za znaménko v rovnici (130) bereme  $(+)$   $\Rightarrow \cos \alpha_c > 0$ .

□

### 3 Pohyb testovacích částic v Kerrově geometrii

#### Kerrova metrika

Prostoročiasový interval obecného, statického, osově symetrického prostoročasu píšeme ve tvaru

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_1} dr^2 + e^{2\mu_2} d\varphi^2. \quad (131)$$

Srovnáním s Kerrovou metrikou v Boyer-Lindquistových souřadnicích [7]

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2r}{\Sigma}\right) dt^2 - 2 \left(\frac{2ar \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\varphi \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (132)$$

dostaneme vztahy

$$e^{2\nu} = \Sigma \Delta / A, \quad e^{2\psi} = A \sin^2 \theta / \Sigma, \quad (133)$$

$$e^{2\mu_1} = \Sigma / \Delta, \quad e^{2\mu_2} = \Sigma, \quad \omega = 2ar / A \quad (134)$$

kde je

$$\Delta = r^2 - 2r + a^2, \quad (135)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (136)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (137)$$

**Úloha č.1)** Určete meze hodnot kruhových frekvencí stacionárních pozorovatelů a ukažte, že existuje oblast ve které neexistují protitrotující trajektorie.

---

**Řešení:** Stacionární pozorovatelé mají pevné souřadnice  $r$  a  $\theta$  a pohybují se s uniformní kruhovou frekvencí  $\Omega = u^\varphi / u^t$ . Příslušný vektor 4-rychlosti

$$\mathbf{u} = (u^t, 0, 0, u^\varphi) \quad (138)$$

leží uvnitř světelného kuželu, tj. nanejvýš se mohou blížit k jeho plášti, kde 4-rychlost splňuje podmínku

$$0 = u^\mu u_\mu = g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\varphi}u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2. \quad (139)$$

Společně s definicí úhlové frekvence vůči statickým pozorovatelům v nekonečnu dostáváme rovnici

$$0 = g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2 \quad (140)$$

s řešením

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}}, \quad (141)$$

kde je

$$\omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \quad (142)$$

úhlová frekvence lokálně nerotujících pozorovatelů kteří jsou určeni podmínkou  $l = 0$ . Hraniční hodnoty pro  $\Omega$  jsou

$$\Omega_{min} = \omega - \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}}, \quad (143)$$

$$\Omega_{max} = \omega + \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}} \quad (144)$$

$$(145)$$

Diskutujme tyto mezní hodnoty vzhledem k radiální souřadnici  $r$ :

- je-li  $g_{tt} < 0$ , pak pro všechna  $r$  splňující tuto podmínku je  $\Omega_{min} < 0$ ,  $\Omega_{max} > 0$ .
- je-li  $g_{tt} = 0$  pak je  $\Omega_{min} = 0$  a  $\Omega_{max} = 2\omega$ . Pro danou latitudu dostaneme z rovnice

$$g_{tt} = -(1 - 2r/\Sigma) = 0 = r^2 - 2r + a^2 \cos^2 \theta \quad (146)$$

radiální souřadnici bodu na ploše statické limity

$$r_{stat} = 1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (147)$$

- je-li  $g_{tt} > 0$ , tj. pro  $r < r_{stat}$  bude zřejmě  $\Omega_{max} > \Omega_{min} > 0$ . V oblasti pod statickou limitou neexistují protitotující stacionární pozorovatelé.
- je-li  $g_{tt} = \omega^2 g_{\varphi\varphi}$  bude  $\Omega_{min} = \Omega_{max} = \omega$ . V takovém případě nemají stacionární pozorovatelé na výběr a musejí korotovat s rotoující černou dírou s frekvencí  $\omega$ . K této situaci dochází na horizontu, protože je

$$g_{tt} = \omega^2 g_{\varphi\varphi} \Rightarrow -e^{2\nu} + \omega^2 e^{2\varphi} = \omega e^{2\varphi} \Rightarrow e^{2\nu} = 0 = \frac{\Delta\Sigma}{A} \quad (148)$$

a horizonty černé díry splňují podmínku  $\Delta = 0$ .

□

**Úloha č.2)** Určete tetradu lokálně nerotujících pozorovatelů (LNRF).

---

**Řešení:** 4-rychlost lokálně nerotujících pozorovatelů je

$$\mathbf{u} = u^{(t)} \mathbf{e}_{(t)} = u^t \mathbf{e}_t + u^\varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (149)$$

Vyjádříme vektor časový tetrady obecně vztahem

$$\mathbf{e}_t = A \mathbf{e}_t + B \mathbf{e}_\varphi \quad (150)$$

a dosadíme jej do (149). Dostaneme rovnice

$$A u^{(t)} = u^t, \quad (151)$$

$$B u^{(t)} = u^\varphi = \omega u^t \quad (152)$$

ze kterých plyne

$$B = A\omega. \quad (153)$$

Vektory tetrady splňují podmínku ortonormality, tj.

$$\mathbf{e}_{(a)} \cdot \mathbf{e}_{(b)} = \eta_{(a)(b)}. \quad (154)$$

Pro  $\mathbf{e}_{(t)}$  tak dostáváme rovnici

$$\mathbf{e}_{(t)} \cdot \mathbf{e}_{(t)} = -1 = A^2 (g_{tt} + 2\omega g_{t\varphi} + \omega^2 g_{\varphi\varphi}) \quad (155)$$

Odtud získáme funkci  $A$  ve tvaru

$$A = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2\omega g_{t\varphi} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}}} = e^{-\nu}. \quad (156)$$

Časový vektor tetrády má výsledný tvar

$$\mathbf{e}_{(t)} = e^{-\nu}(\mathbf{e}_t + \omega \mathbf{e}_\varphi). \quad (157)$$

Azimutální vektor tetrády hledejme opět v obecném tvaru

$$\mathbf{e}_{(\varphi)} = C\mathbf{e}_t + D\mathbf{e}_\varphi. \quad (158)$$

S využitím podmínek ortonormality, máme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

$$1 = \mathbf{e}_{(\varphi)} \cdot \mathbf{e}_{(\varphi)} = C^2 g_{tt} + 2CD g_{t\varphi} + D^2 g_{\varphi\varphi}, \quad (159)$$

$$0 = \mathbf{e}_{(\varphi)} \cdot \mathbf{e}_{(t)} = (C\mathbf{e}_t + D\mathbf{e}_\varphi) \cdot e^{-\nu}(\mathbf{e}_t + \omega \mathbf{e}_\varphi) \quad (160)$$

která má řešení

$$C = 0, \quad D = e^{-\psi}. \quad (161)$$

Azimutální vektor tetrády má nakonec tvar

$$\mathbf{e}_{(\varphi)} = e^{-\psi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (162)$$

Zbylé dva vektory  $\mathbf{e}_{(r)}$  a  $\mathbf{e}_{(\theta)}$  lze z podmínek ortonormality určit přímo, tj.

$$\mathbf{e}_{(r)} = H\mathbf{e}_r \rightarrow \mathbf{e}_{(r)} \cdot \mathbf{e}_{(r)} = 1 \rightarrow \mathbf{e}_{(r)} = e^{-\mu_1} \mathbf{e}_r \quad (163)$$

and

$$\mathbf{e}_{(\theta)} = G\mathbf{e}_\theta \rightarrow \mathbf{e}_{(\theta)} \cdot \mathbf{e}_{(\theta)} = 1 \rightarrow \mathbf{e}_{(\theta)} = e^{-\mu_2} \mathbf{e}_\theta. \quad (164)$$

□

**Úloha č.3)** Určete kovariantní energii  $E$  testovací částice, pohybující se v ekvatoriální rovině, určenou vzhledem k LNRF. Určete podmínku pro kterou bude  $E < 0$ .

**Řešení:** Vzhledem k LNRF je vektor čtyřhybnosti částice

$$\mathbf{p} = \mu(\gamma, \gamma V), \quad (165)$$

kde je  $\gamma = \sqrt{1 - V^2}$ . Kovariantní energie je určena vztahem

$$E = -p_t = -p^{(a)} \mathbf{e}_{t(a)} = \mu\gamma(e^\nu + \omega e^\psi V^{(\varphi)}) \quad (166)$$

a v ekvatoriální rovině nakonec obdržíme

$$E = \mu\gamma A^{-1/2}(r\Delta^{1/2} + 2MaV^{(\varphi)}). \quad (167)$$

Energie  $E$  bude záporná při splnění podmínky

$$V^{(\varphi)} < -\frac{r(r^2 - 2Mr + a^2)^{1/2}}{2Ma}. \quad (168)$$

□

**Úloha č.4)** Ukažte, že oblast ve které je  $E < 0$  leží pod statickou limitou, tj. pro pohyb v ekvatoriální rovině  $r < 2M$ .

**Řešení:** Z předchozího příkladu víme, že  $E < 0$  tam kde je splněna podmínka

$$V^{(\varphi)} < V_{max} = -\frac{r(r^2 - 2Mr + a^2)^{1/2}}{2Ma}. \quad (169)$$

Určeme nejprve průběh funkce  $V_{max}$  vzhledem k radiální souřadnici  $r$ .

$$\frac{dV_{max}}{dr} = \frac{-a^2 + 3r - 2r^2}{2a\sqrt{r^2 - 2r + a^2}}. \quad (170)$$

Extrémy jsou tam kde je

$$-a^2 + 3r - 2r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 8a^2}}{4} \quad (171)$$

Snadno se přesvědčíme, že  $r_{\pm}$  jsou monotónní na  $a$  a dostáváme

$$r_+(a=0) = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad r_-(a=0) = 0, \quad (172)$$

$$r_+(a=1) = 1 \quad \text{a} \quad r_-(a=0) = \frac{1}{2}. \quad (173)$$

V případě černých děr je extrémní funkce  $V_{max}$  pod horizontem a nad nimi je monotónní. Studujme následující tři případy vzhledem k  $r = 2M$ .

- Pro  $r = 2M$ , tj. na statické limitě je

$$V_{max} = -1. \quad (174)$$

Požadavek  $E < 0$  zde nemůže být splněn protože by muselo platit  $V^{(\varphi)} < V_{max} = -1$ .

- Pro  $r > 2M$  je  $V_{max} < -1$  a tedy v této oblasti taky nemůžou být geodetiky s  $E < 0$  protože by opět muselo platit  $V^{(\varphi)} < -1$ .
- Z monotónnosti funkce  $V_{max}$  nad horizontem musí být  $V_{max} > -1$  a tedy, v této oblasti může být podmínka  $-1 < V^{(\varphi)} < V_{max}$  splněna. Zde existují geodetiky s  $E < 0$ .

□

**Úloha č.5)** Určete pohybové rovnice testovací částice v Kerrově geometrii pomocí Hamiltonovy-Jacobiho metody.

---

**Řešení:** Na geodetice zřejmě platí  $a^\mu = 0$ , což je ekvivalentní Hamiltonovým rovnicím

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (175)$$

s Hamiltoniánem ve tvaru

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (176)$$

Jádrem Hamiltonovy-Jacobiho metody je Hamiltonova-Jacobiho funkce  $S$ . Když v Hamiltoniánu nahradíme zobecněné hybnosti gradienty funkce  $S$ , tj.

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (177)$$

Příslušná Hamiltonova-Jacobiho rovnice má potom tvar

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}. \quad (178)$$

Za předpokladu, že má systém integrály pohybu  $\xi_i$ , budou se testovací částice pohybovat po takových trajektoriích na kterých je funkce  $S$  vzhledem k příslušným integrálům pohybu extrémální, tj. platí

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_i} = 0. \quad (179)$$

Kontravariantní metrické koeficienty  $g^{\mu\nu}$  jsou, v Boyer-Lindquistových souřadnicích, dány vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{\Delta \rho^2} \left[ (r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 + \\ &+ \frac{\Delta}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2, \end{aligned} \quad (180)$$

kde je  $\Delta = r^2 - 2r + a^2$  a  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ . Srovnáním rovnic (178) a (180) dostaneme HJ rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{2\Delta \rho^2} \left[ (r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right]^2 + \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial S}{\partial \varphi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} \right]^2 + \\ &+ \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (181)$$

Řešení této rovnice hledáme v separovaném tvaru

$$S = S_\lambda + S_t + S_\varphi + S_r + S_\theta. \quad (182)$$

Protože Hamiltonián  $H$  nezávisí na  $t$  a  $\varphi$  tak se během pohybu testovací částice zachovávají  $p_t = -E$  a  $p_\varphi = L_z$ , tj. kovariantní energie a azimutální moment hybnosti. Vzhledem ke vztahu (177) dostáváme pro funkci  $S$  danou vztahem (182) následující

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_t}{\partial t} = -E \Rightarrow S_t = -Et, \quad (183)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} = L_z \Rightarrow S_\varphi = L_z \varphi. \quad (184)$$

Dále, je čtyřhybnost normována tak, že platí

$$-m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (185)$$

kde  $m$  je klidová hmotnost částice. Odtud srovnáním s Hamiltonovou-Jacobiho rovnicí dostáváme, že platí

$$\frac{1}{2}m^2 = \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} \Rightarrow S_\lambda = \frac{1}{2}m^2 \lambda. \quad (186)$$

Hledané řešení tak píšeme ve tvaru

$$S = \frac{1}{2}m^2 \lambda - Et + L_z \varphi + S_r + S_\theta. \quad (187)$$

Zbývající neznámé funkce  $S_r$  a  $S_\theta$  určíme dosazením  $S$  do Hamiltonovy-Jacobiho rovnice (181) a řešíme rovnici

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m^2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta \rho^2} [aL_z - E(r^2 + a^2)]^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} [L_z - aE \sin^2 \theta]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (188)$$

Vynásobení této rovnice výrazem  $2\rho^2$  a následnou separací funkcí závislých na  $r$  od funkcí závislých na  $\theta$  dostaneme rovnici

$$F(r) = -m^2 r^2 + \frac{1}{\Delta} [aL_z - E(r^2 + a^2)]^2 - \Delta \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2, \quad (189)$$

$$G(\theta) = m^2 a^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} [L_z - aE \sin^2 \theta]^2 + \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2, \quad (190)$$

$$F(r) = G(\theta). \quad (191)$$

Výše uvedená rovnice musí platit pro libovolné  $r$  a  $\theta$ , tzn. musí platit

$$F(r) = K = konst = G(\theta), \quad (192)$$

kde  $K$  je Carterova separační konstanta. Dostáváme tak pro  $S_r$  a  $S_\theta$  obyčejné diferenciální rovnice ve tvaru

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ [aL_z - E(r^2 + a^2)]^2 - \Delta(m^2 r^2 + K) \right\} = \frac{R(r)}{\Delta^2}, \quad (193)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = K - m^2 a^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} [L_z - aE \sin^2 \theta]^2 = W(\theta) \quad (194)$$

s řešeními

$$S_r = \int^r \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr, \text{ a } S_\theta = \int^\theta \sqrt{W(\theta)} d\theta. \quad (195)$$

Z podmínky extrémnosti funkce  $S$  vzhledem k pohybovým konstantám dostaneme

•

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial K} = \frac{\partial S_r}{\partial K} + \frac{\partial S_\theta}{\partial K} &= - \int^r \frac{dr}{2\sqrt{R}} + \int^\theta \frac{d\theta}{2\sqrt{W}} = 0 \\ &\Downarrow \\ \int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} &= \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{W}}. \end{aligned} \quad (196)$$

•

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial m^2} = \frac{\partial S_\lambda}{\partial m^2} + \frac{\partial S_r}{\partial m^2} + \frac{\partial S_\theta}{\partial m^2} &= \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} - \frac{1}{2} \int^\theta \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{W}} = 0 \\ &\Downarrow \\ \lambda &= \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} + \int^\theta \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{W}}. \end{aligned} \quad (197)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_t}{\partial E} + \frac{\partial S_r}{\partial E} + \frac{\partial S_\theta}{\partial E} &= -t + \int^r \frac{(r^2 + a^2) [E(r^2 + a^2) - aL_z] dr}{\Delta\sqrt{R}} + \\
&\quad \int^\theta \frac{a \sin^2 \theta E - L_z}{\sin^2 \theta \sqrt{W}} d\theta = 0 \\
\Downarrow \\
t &= \int^r \frac{(r^2 + a^2) [E(r^2 + a^2) - aL_z] dr}{\Delta\sqrt{R}} + \\
&\quad \int^\theta \frac{a \sin^2 \theta E - L_z}{\sin^2 \theta \sqrt{W}} d\theta.
\end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial L_z} = \frac{\partial S_t}{\partial L_z} + \frac{\partial S_r}{\partial L_z} + \frac{\partial S_\theta}{\partial L_z} &= \varphi + \int^r \frac{a [aL_z - E(r^2 + a^2)]}{\Delta\sqrt{R}} dr + \\
&\quad \int^\theta \frac{aE \sin^2 \theta - L_z}{\sin^2 \theta \sqrt{W}} d\theta \\
\Downarrow \\
\varphi &= \int^r \frac{a [E(r^2 + a^2) - aL_z]}{\Delta\sqrt{R}} dr + \\
&\quad \int^\theta \frac{L_z - aE \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \sqrt{W}} d\theta.
\end{aligned} \tag{199}$$

Rovnice (196) - (199) jsou Carterovými rovnicemi v integrálním tvaru [5].

Carterovy rovnice v diferenciálním tvaru snadno obdržíme ze vztahu (177). Počítejme,

$$\begin{aligned}
p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \int^r \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr = \frac{\sqrt{R}}{\Delta} \\
\Downarrow \\
g_{rr} p^r = \frac{\sqrt{R}}{\Delta} &\Rightarrow \rho^2 p^r = \sqrt{R}.
\end{aligned} \tag{200}$$

•

$$\begin{aligned}
 p_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \int^\theta \sqrt{W} d\theta = \sqrt{W} \\
 &\Downarrow \\
 g_{\theta\theta} p^\theta &= \sqrt{W} \Rightarrow \rho^2 p^\theta = \sqrt{W}.
 \end{aligned} \tag{201}$$

Diferenciální rovnice pro souřadnicový čas  $t$  a pro azimutální souřadnici  $\varphi$  dostaneme derivací rovnic (198) a (199) podle afinního parametru  $\lambda$  a dostáváme rovnice

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2) [E(r^2 + a^2) - aL_z]}{\Delta} + a \frac{a \sin^2 \theta E - L_z}{\sin^2 \theta} \tag{202}$$

a

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{a [E(r^2 + a^2) - aL_z]}{\Delta} + \frac{L_z - aE \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}. \tag{203}$$

□

## Ekvatoriální rovina

**Úloha č.1)** V Kerrově geometrii určete hranici, která rozděluje tuto geometrii na oblast, kde existují stacionární pozorovatelé (vůči stacionárním pozorovatelům v nekonečnu) a na oblast, kde takoví pozorovatelé neexistují.

---

**Řešení:** Délkový element v Boyerových-Lindquistových souřadnicích má tvar

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} \left( dt - a \sin^2 \theta d\varphi \right)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[ (r^2 + a^2) d\varphi - a dt \right]^2 - \frac{\rho}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \tag{204}$$

kde

$$\Delta = r^2 - 2r + a^2, \tag{205}$$

$$\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \tag{206}$$

Uvažujme nulové křivky, které splňují podmínky

$$ds = dr = d\theta = 0, \quad (207)$$

z rovnice (204) potom dostaneme

$$0 = \frac{\Delta}{\rho^2} \left( dt - a \sin^2 \theta d\varphi \right)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[ (r^2 + a^2) d\varphi - a dt \right]^2. \quad (208)$$

Tuto rovnici budeme řešit pro veličinu  $\frac{d\varphi}{dt}$  a dostaneme

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a \sin \theta \pm \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2) \sin \theta \pm a \sqrt{\Delta} \sin^2 \theta}. \quad (209)$$

Pro znaménko (+) v této rovnici je  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$  a foton se pohybuje ve stejném směru jako je rotace černé díry. Nyní zjistíme, za jakých podmínek bude  $\frac{d\varphi}{dt} \leq 0$  (tj. bereme rovnici (209) se znaménkem (-)).

1. Určeme znaménko jmenovatele v rovnici (209). Snadno se přesvědčíme, že

$$(r^2 + a^2) \sin \theta \pm a \sqrt{\Delta} \sin^2 \theta > 0. \quad (210)$$

2. To znamená, že pokud  $\frac{d\varphi}{dt} \leq 0$  pak musí platit  $a \sin \theta - \sqrt{\Delta} \leq 0$ . Tato nerovnost je splněna pro všechna  $r \geq r_s$ , kde  $r_s$  je kořen rovnice

$$r^2 - 2r + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (211)$$

Plocha  $r = r_s$  se nazývá plochou statické limity, kde  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . Jinými slovy, každá částice na této ploše se musí pohybovat rychlostí světla proti směru rotace černé díry, aby byla v klidu vůči statickým pozorovatelům v nekonečnu.

□

**Úloha č.2)** UkaŹte, Źe testovací částice v Kerrově prostoročase bude mít na kruhové orbitě specifickou energii  $\mathcal{E}$  a specifický moment hybnosti  $\mathcal{L}$  ve tvaru

$$\mathcal{E} = \frac{r^{3/2} - 2r^{1/2} \pm a}{r^{3/4} \left( r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a \right)^{1/2}}, \quad (212)$$

$$\mathcal{L} = \pm \frac{r^2 \mp 2ar^{1/2} + a^2}{r^{3/4} \left( r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a \right)^{1/2}}. \quad (213)$$

**Řešení:** Vydeme z Carterovi rovnice pro radiální souřadnici

$$\rho^2 \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{R}, \quad (214)$$

kde  $R$  je v ekvatoriální rovině ( $\theta = \pi/2$ ) dáno vztahem

$$R = m^2 \left[ \mathcal{E}(r^2 + a^2) - a\mathcal{L} \right]^2 - m^2 \Delta \left[ r^2 + (\mathcal{L} - a\mathcal{E})^2 \right]. \quad (215)$$

Pro kruhové orbity musí zřejmě platit  $\frac{dr}{d\tau} = \frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ , což implikuje soustavu rovnic  $R = \frac{dR}{dr} = 0$  ve tvaru

$$\left[ \mathcal{E}(r^2 + a^2) - a\mathcal{L} \right]^2 - \Delta \left[ r^2 + (\mathcal{L} - a\mathcal{E})^2 \right] = 0, \quad (216)$$

$$4(\mathcal{E}^2 - 1)r^3 + 6r^2 + 2 \left[ a^2(\mathcal{E}^2 - 1) - \mathcal{L}^2 \right] r + 2(\mathcal{L} - a\mathcal{E})^2 = 0. \quad (217)$$

Z těchto rovnic obdrŹíme hledaný výsledek

$$\mathcal{E} = \frac{r^{3/2} - 2r^{1/2} \pm a}{r^{3/4} \left( r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a \right)^{1/2}}, \quad (218)$$

$$\mathcal{L} = \pm \frac{r^2 \mp 2ar^{1/2} + a^2}{r^{3/4} \left( r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a \right)^{1/2}}. \quad (219)$$

□

**Úloha č.3)** Určete limitní hranici, na které ještě může existovat kruhová orbita.

**Řešení:** Výraz pod odmocninou ve jmenovateli rovnic (218) a (219) z předchozího příkladu musí být  $> 0$ , tj.

$$r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a > 0. \quad (220)$$

Mezní hodnota poloměru pro kruhové orbity je kořen rovnice

$$r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{ph} = 2 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2}{3} \arccos(\mp a)\right) \right]. \quad (221)$$

Pro poloměr  $r_{ph}$  specifická energie  $\mathcal{E}$  a specifický moment hybnosti  $\mathcal{L}$  divergují. To naznačuje, že  $r = r_{ph}$  odpovídá fotonové kruhové orbitě. Pokud  $a = 0$  pak  $r_{ph} = 3$  jako u Schwartzshildovy černé díry. Pro extrémní Kerrovu díru  $a = 1$  je hodnota poloměru fotonové orbity  $r_{ph} = 1$  pro korotující fotony a  $r_{ph} = 4$  pro antikorotující fotony.

□

**Úloha č.4)** Určete polohu mezně vázaných orbit a mezně stabilních kruhových orbit.

**Řešení:** Nevázané kruhové orbity splňují podmínku  $\mathcal{E} > 1$ . Pro mezně vázanou orbitu pak dostáváme rovnici (viz rovnice (218))

$$1 = \frac{r^{3/2} - 2r^{1/2} \pm a}{r^{3/4} \left( r^{3/2} - 3r^{1/2} \pm 2a \right)^{1/2}}, \quad (222)$$

což dává

$$\begin{aligned} \text{korotující: } r^2 - 4r + 4a\sqrt{r} - a^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad r_{mb+} = 2 - a + 2\sqrt{1-a}, \\ \text{antikorotující: } r^2 - 4r - 4a\sqrt{r} - a^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad r_{mb-} = 2 + a + 2\sqrt{1-a}. \end{aligned} \quad (223)$$

A pro

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow r_{mb+} = r_{mb-} = 4, \\ a = 1 &\Rightarrow r_{mb+} = 1, \\ &r_{mb-} = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.83. \end{aligned} \quad (224)$$

Stabilita kruhových orbit implikuje nerovnost  $\frac{d^2 R}{dr^2} \leq 0$ . Dostáváme tak rovnici

$$12(\mathcal{E}^2 - 1)r^2 + 12r - 2\left[\mathcal{L}^2 - a^2(\mathcal{E}^2 - 1)\right] \leq 0. \quad (225)$$

Dosažením z rovnice (218) a (219) obdržíme nerovnost

$$r^2 - 6r \pm 8ar^{1/2} - 3a^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r \geq r_{ms}, \quad (226)$$

kde  $r_{ms}$  je kořen rovnice

$$r^2 - 6r \pm 8ar^{1/2} - 3a^2 = 0, \quad (227)$$

jehož řešením je

$$r_{ms} = 3 + Z_2 \mp \left[(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)\right]^{1/2}, \quad (228)$$

$$Z_1 = 1 + (1 - a)^{1/3} \left[(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}\right], \quad (229)$$

$$Z_2 = (3a^2 + Z_1^2)^{1/2}. \quad (230)$$

Pro  $a = 0$  obdržíme  $r_{ms} = 6$ . Pro  $a = 1$  pak  $r_{ms+} = 1$  v korotujícím případě a  $r_{ms-} = 9$  v antikorotujícím případě.

□

**Úloha č.5)** Uvažujte dvě testovací částice pohybuující v ekvatoriální rovině směrem ke Kerrově černé díře. Každá částice má nenulový moment hybnosti  $l_1$ , resp.  $l_2$ . Tyto částice necháme srazit v bodě  $r_c > r_+$  kde  $r_+ = 1 + \sqrt{1 - a^2}$  je vnější horizont černé díry.

Určete:

- minimální a maximální azimutální moment hybnosti, pro který částice spadne na horizont,

- energii srážky  $E_{CM}$  vůči hmotnému středu systému obou částic.

**Řešení:** Radiální rovnice má pro testovací částici pohybující s kovariantní energií  $E = 1$  v ekvatoriální rovině Kerrovy černé díry tvar

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{V(r; l)}, \quad (231)$$

kde je

$$V(r; l) = (r^2 + a^2 - al)^2 - \Delta (r^2 + (l - a)^2). \quad (232)$$

Částice putující z nekonečna se do něj opět vrátí, pokud má její geodetika bod obratu, tj. bod  $r_t > r_+$  splňující podmínku  $V(r_t; l) = 0$ . Pro mezní hodnoty momentu hybnosti musí být navíc splněna podmínka  $dV(r_t; l)/dr = 0$ , která znamená, že pokud má funkce nestabilní kruhovou orbitu tak pro  $l_{min} < l < l_{max}$  se neodrazí od potenciálové bariéry a spadne pod černoděrový horizont. Řešíme tak soustavu rovnic

$$(r^2 + a^2 - al)^2 - \Delta (r^2 + (l - a)^2) = 0 \quad (233)$$

$$3r^2 - l^2r + (a - l)^2 = 0 \quad (234)$$

Řešením této soustavy jsou následující kořeny

$$r_1 = 2(1 - \sqrt{1 - a}) - a \quad l_1 = 2(1 - \sqrt{1 - a}), \quad (235)$$

$$r_2 = 2(1 + \sqrt{1 - a}) - a \quad l_2 = 2(1 + \sqrt{1 - a}), \quad (236)$$

$$r_3 = 2(1 + \sqrt{1 + a}) + a \quad l_3 = -2(1 + \sqrt{1 + a}), \quad (237)$$

$$r_4 = 2(1 - \sqrt{1 + a}) + a \quad l_4 = -2(1 - \sqrt{1 + a}). \quad (238)$$

Pouze  $r_2$  a  $r_3$  jsou větší než  $r_+$  a tedy dostáváme výsledek

$$l_{min} = -2(1 + \sqrt{1 + a}) \text{ a } l_{max} = 2(1 + \sqrt{1 - a}). \quad (239)$$

A dostáváme se k druhému bodu zadání, určení energie srážky  $E_{CM}$ . Je-li celková 4-hybnost srážejících se částic  $P_{tot} = P_1 + P_2$ , kde  $P_1$  a  $P_2$  jsou čtyřhybnosti první, res. druhé částice, pak je energie srážky v CM systému určena vztahem

$$E_{CM}^2 = -P_{tot} \cdot P_{tot}. \quad (240)$$

Z něj pak postupně dostáváme, za předpokladu  $m_1 = m_2 = m$ ,

$$E_{CM}^2 = -(P_1 + P_2) \cdot (P_1 + P_2) = -(P_1 \cdot P_1 + P_2 \cdot P_2 + 2P_1 \cdot P_2) \quad (241)$$

$$= |P \cdot P| = -m^2 = 2m^2(1 + U_1 \cdot U_2) = 2m^2(1 + g_{ij}U_1^i U_2^j), \quad (242)$$

kde byl využit vztah  $P = mU$ . Složky 4-rychlostí obou částic v ekvatoriální rovině jsou

$$U_1 = (U_1^t, U_1^r, 0, U_1^\varphi) \text{ a } U_2 = (U_2^t, U_2^r, 0, U_2^\varphi). \quad (243)$$

Vztah pro  $E_{CM}^2$  tak upravíme a obdržíme vztah

$$E_{CM}^2 = 2m^2 \sqrt{1 + g_{tt}U_1^t U_2^t + g_{rr}U_1^r U_2^r + g_{\varphi\varphi}U_1^\varphi U_2^\varphi + g_{t\varphi}(U_1^t U_2^\varphi + U_2^t U_1^\varphi)}. \quad (244)$$

kde pak jsou jednotlivé, nenulové složky určeny z Carterových rovnic

$$U^t = -\frac{1}{r^2} \left[ a(a-l) + \frac{(r^2 + a^2)T}{\Delta} \right], \quad (245)$$

$$U^r = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{V}, \quad (246)$$

$$U^\varphi = -\frac{1}{r^2} \left[ (a-l) + \frac{aT}{\Delta} \right] \quad (247)$$

kde je  $T = r^2 + a^2 - al$ .

□

**Úloha č.6)** Uvažujte následující experiment (demonstrace Penroseova procesu) kterým je "odčerpávána" energie a moment hybnosti Kerrovy černé díry. Necht' se částice vypuštěná v z klidu v nekonečnu,  $E^{(0)} = 1$  a  $L_z^0$ , rozpadne v bodě obratu ( $L_z$  je voleno tak aby  $r_t < 2M$ ) své geodetiky na dva fotony. Foton č. 1 necháme spadnout pod horizont s energií a momentem hybnosti  $L_z^{(1)} < 0$  a  $E^1 < 0$  zatímco druhý foton odletí zpět do nekonečna s  $E^{(2)}$  a  $L_z^{(2)}$ . Určete maximální možný výtěžek energie  $\Delta E = E^{(2)} - E^{(0)}$  při tomto pokusu.

**Řešení:** Uvažujeme pohyb v ekvatoriální rovině, tj.  $Q = 0$ . Z Carterovy rovnice pro radiální složku 4-hybnosti máme rovnici pro

$$[r(r^2 + a^2) + 2a^2 M] E^2 - 4aM L_z E - L_z^2 (r - 2M) + (\kappa r) \Delta = 0 \quad (248)$$

kde  $\kappa = 1$  pro časupodobné geodetiky a  $\kappa = 0$  pro nulové geodetiky. Vyjádřeme z této rovnice kovariantní energii  $E$  a azimutální moment hybnosti  $L_z$  a dostaneme rovnice

$$E_{\pm} = \frac{2aML_z \pm \Delta^{1/2} [r^2 L_z^2 + (r(r^2 + a^2) + 2a^2 M)\kappa r]^{1/2}}{r(r^2 + a^2) + 2a^2 M}, \quad (249)$$

$$L_{z\pm} = \frac{-2aME \pm \Delta^{1/2} [r^2 E^2 + (r - 2M)\kappa r]^{1/2}}{r - 2M}. \quad (250)$$

Poznamenejme, že pro radiálně padající částici z klidu z nekonečna je  $E = 1$  a tedy bereme rovnici s  $E = E_+$ . Geodetika rozpadající se částice má následující konstanty pohybu

$$E^{(0)} = 1, \quad (251)$$

$$L_z^{(0)} = \frac{-2aM + \Delta^{1/2} [2r(r - M)]^{1/2}}{r - 2M} = \alpha^{(0)}. \quad (252)$$

Nechť momenty hybnosti pro vzniklé fotony jsou (odpovídají bodu obratu na daném  $r$ )

$$L_z^{(1)} = \frac{-2aM - r\Delta^{1/2}}{r - 2M} E^{(1)} = \alpha^{(1)} E^{(1)} \quad (253)$$

a

$$L_z^{(2)} = \frac{-2aM + r\Delta^{1/2}}{r - 2M} E^{(2)} = \alpha^{(2)} E^{(2)}. \quad (254)$$

Samozřejmě, platí zákony zachování energie

$$E^{(1)} + E^{(2)} = E^{(0)} = 1 \quad (255)$$

a momentu hybnosti

$$L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = \alpha^{(1)} E^{(1)} + \alpha^{(2)} E^{(2)} = L_z^{(0)} = \alpha^{(0)}. \quad (256)$$

Řešením této soustavy rovnic obdržíme následující výrazy pro energie fotonů

$$E^{(1)} = \frac{\alpha^{(0)} - \alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}, \quad (257)$$

$$E^{(2)} = \frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}. \quad (258)$$

Dosazením za  $\alpha^{(i)}$  dostaneme konečné výrazy

$$E^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \right), \quad (259)$$

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2M}{r}} + 1 \right), \quad (260)$$

$$(261)$$

V ergosféře ( $r < 2M$ ) je energie fotonu č. 1 záporná. Výtěžek energie bude

$$\Delta E = E^{(2)} - E^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \right) = -E^{(1)}. \quad (262)$$

Maximální výtěžek energie získáme pro minimálně možný bod obratu, který je na  $r_+$ , tj.

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2M}{r_+}} - 1 \right). \quad (263)$$

Pro extrémní černou díru ( $a = 1$ ) je  $r_+ = M$  a tedy maximálně možný výtěžek energie bude

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2} - 1 \right) \doteq 0.207. \quad (264)$$

□

**Úloha č.7)** Uvažujte prachovou slupku s radiálním rozměrem  $r_s \gg r_+$  v Kerrově metrickém poli [2]. Určete jak se původně sféricky symetrická slupka bude, během volného pádu na černoděrový horizont měnit (jako charakteristiku distorze slupky zvolte dobu radiální souřadnici,  $r_s(t; \theta)$ , prachových částic ve stejném souřadnicovém čase  $t$ ).

---

**Řešení:** V Boyerových-Lindquistových souřadnicích má prostorčasový interval v

Kerrově geometrii tvar

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (265)$$

kde je

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (266)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2, \quad (267)$$

$$A \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (268)$$

Pro testovací částici odvodil Bandon Carter, z Hamilton-Jacobiho rovnic, pohybové rovnice ve tvaru

$$\Sigma \frac{dr}{d\tau} = \sqrt{R}, \quad (269)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\tau} = \sqrt{W}, \quad (270)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = -a (aE \sin^2 \theta - \Phi) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P, \quad (271)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\tau} = \left( aE - \frac{\Phi}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{aP}{\Delta}. \quad (272)$$

V těchto rovnicích jsou zavedeny funkce

$$W(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left[ a^2 (m^2 - E^2) + \frac{\Phi^2}{\sin^2 \theta} \right], \quad (273)$$

$$P(r) = E(r^2 + a^2) - a\Phi, \quad (274)$$

a

$$R = P^2 - \Delta [m^2 r^2 + Q + (\Phi - aE)^2]. \quad (275)$$

Testovací částice, tvořící slupku, se pohybují s pohybovými konstantami

$$E = m, \Phi = 0, aQ = 0. \quad (276)$$

Za těchto předpokladů se Carterovy rovnice zjednoduší a píšeme je ve tvaru

$$\Sigma \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}, \quad (277)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (278)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = -a^2 \sin^2 \theta + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta}, \quad (279)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\tau} = -a \left[ 1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right]. \quad (280)$$

Z rovnice (278) je ihned vidět, že prachové částice budou následovat trajektorie s konstantní latitudinální souřadnicí  $\theta = \theta_i$ . Abychom určili deformaci slupky sloučíme dohromady rovnice (277) a (279) a obdržíme (z definice derivace složené funkce  $dt(r(\tau))/d\tau = (dt/dr)(dr/d\tau)$ )

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\tau}{dr/d\tau} = - \left[ \frac{-a^2 \sin^2 \theta_i}{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta \sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}} \right]. \quad (281)$$

Zavedeme bezrozměrné veličiny výrazy  $r/M \rightarrow r$ ,  $a/M \rightarrow a$  a  $t/M \rightarrow t$ . Rovnice (281) bude mít tvar

$$\frac{dt}{dr} = - \left[ \frac{-a^2 \sin^2 \theta_i}{\sqrt{2r(r^2 + a^2)}} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta \sqrt{2r(r^2 + a^2)}} \right]. \quad (282)$$

Nejprve integrujme tuto rovnici pro  $a = 0$ . Vzhledem k tomuto případu pak budeme diskutovat výsledky pro  $a \neq 0$ . Nechť je tedy  $a = 0$ . Určujeme následující integrál

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^r \frac{r^{3/2}}{r-2} dr = |r = x^2, dr = 2x dx| = -\frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{x^4}{x^2 - 2} dx. \quad (283)$$

Snadno se přesvědčíte, že výsledkem je funkce

$$\frac{t}{2M} = -2 \left( \frac{r}{2M} \right)^{1/2} - \frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{3/2} + \log \left| \frac{\left( \frac{r}{2M} \right)^{1/2} + 1}{\left( \frac{r}{2M} \right)^{1/2} - 1} \right|. \quad (284)$$

Určeme aproximaci výrazu

$$\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (285)$$

pro  $x \gg 1$ . Z Taylorova rozvoje dostaneme

$$\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \simeq \log |(1+x)^2| = 2 \log |1+x| \simeq x. \quad (286)$$

Odkud tedy plyne přibližná forma vztahu (284), kterou píšeme ve tvaru

$$\frac{t}{2M} = -2 \left( \frac{r}{2M} \right)^{1/2} - \frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{3/2} + 2 \left( \frac{2M}{r} \right)^{1/2}. \quad (287)$$

Pro  $r \gg 2M$  lze analyticky řešit rovnici (282) pro  $a \neq 0$ . Pro tento případ přepíšeme rovnici (282) na následující

$$\frac{dt}{dr} = - \left[ \frac{-a^2 \sin^2 \theta_i}{\sqrt{2r(r^2 + a^2)}} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta \sqrt{2r(r^2 + a^2)}} \right]. \quad (288)$$

kterou řeší funkce

$$\frac{t}{2M} = -2 \left( \frac{r}{2M} \right)^{1/2} - \frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{3/2} + \left[ 2 + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \theta \right) \right] \left( \frac{2M}{r} \right)^{1/2}. \quad (289)$$

□

## 4 Pohyb testovacích částic v elektromagnetickém poli

Přítomnost elektrických nábojů a proudů nabitých částic generují elektromagnetické pole, které samo, jako nositel energie, generuje zakřivený prostoročas. Jestliže  $A_\mu$  jsou složky vektorového 4-potenciálu pak píšeme složky Faradayova tenzoru ve tvaru

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}. \quad (290)$$

Tenzor energie-hybnosti elektromagnetického pole pak je

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (291)$$

Pokud hmotný objekt je kromě hmotnosti navíc vybaven nenulovým elektrickým nábojem tak v případě sférické symetrie a statičnosti dostáváme *Reissnerův-Nordstromův* prostoročas [11, 16].

V případě osové symetrie a stacionarity je řešením Einsteinových rovnic s tenzorem energie-hybnosti elektromagnetického pole *Kerr-Newmanův* prostoročas [10]. Jeho délkový element má tvar

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left( 1 - \frac{2Mr - e^2}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ & - \frac{2(2Mr - e^2)a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{A}{\Sigma} d\varphi^2 \end{aligned} \quad (292)$$

kde je

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (293)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + e^2, \quad (294)$$

$$A \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (295)$$

**Úloha č.1)** Z Hamiltonova formalizmu určete pohybové rovnice nabité, testovací částice v zakřiveném prostoročase, na kterou působí elektro-magnetické síly.

---

**Řešení:** Elektromagnetické pole, je ve prostoročasové formulaci zakódováno do 4-potenciálu  $A_\mu$ . Hamiltonián vedoucí k Lorentzově síle má tvar

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu)(\pi_\nu - eA_\nu), \quad (296)$$

kde je  $e$  elektrický náboj testovací částice a  $\pi_\mu$  jsou kovariantní složky zobecněné hybnosti. Pohybové rovnice jsou určeny Hamiltonovými rovnicemi

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\mu} \text{ a } \frac{d\pi_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \quad (297)$$

Z první soustavy Hamiltonových rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \pi_\alpha \frac{\partial \pi_\beta}{\partial \pi_\mu} + \pi_\beta \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial \pi_\mu} - eA_\alpha \frac{\partial \pi_\beta}{\partial \pi_\mu} - eA_\beta \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial \pi_\mu} \right) \\ &= g^{\alpha\mu} (\pi_\alpha - eA_\alpha) = \pi^\mu - eA^\mu. \end{aligned} \quad (298)$$

V parametrizaci  $\lambda = \tau/m$  je  $dx^\mu/d\lambda = p^\mu$ , takže máme první výsledek

$$p^\mu = \pi^\mu - eA^\mu \Rightarrow \pi^\mu = p^\mu + eA^\mu. \quad (299)$$

Odtud dosadíme za  $\pi_\mu$  do druhých Hamiltonových rovnic a postupně obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (p_\mu + eA_\mu) &= \frac{1}{2} \left[ g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} (\pi_\alpha - eA_\alpha)(\pi_\beta - eA_\beta) \right. \\ &\quad \left. - e g^{\alpha\beta} (\pi_\beta A_{\alpha,\mu} - \pi_\alpha A_{\beta,\mu} + eA_\beta A_{\alpha,\mu} + eA_\alpha A_{\beta,\mu}) \right] \end{aligned} \quad (300)$$

Podrobnějším rozepsáním této rovnice obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\sigma} p^\sigma p^\nu + g_{\mu\nu,\sigma} e p^\sigma A^\nu + g_{\mu\nu} \frac{dp^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} e p^\sigma A^\nu{}_{,\sigma} &= \\ \frac{1}{2} g_{\sigma\alpha,\mu} p^\sigma p^\alpha + e p^\beta A_{\beta,\mu}. \end{aligned} \quad (301)$$

Celou rovnici vynásobíme členem  $g^{\kappa\mu}$  a osamostatníme člen  $dp^\nu/d\lambda$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dp^\kappa}{d\lambda} = & \frac{1}{2}g^{\kappa\mu} (g_{\sigma\alpha,\mu}p^\sigma p^\alpha - g_{\mu\nu,\sigma}p^\sigma p^\nu - g_{\mu\sigma,\nu}p^\sigma p^\nu) \\ & + g^{\kappa\mu} (ep^\beta A_{\beta,\mu} - ep^\sigma A^\nu_{,\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}ep^\sigma A^\nu). \end{aligned} \quad (302)$$

Nyní si stačí uvědomit, že platí

$$\Gamma^\kappa_{\sigma\alpha} = \frac{1}{2}g^{\kappa\mu} (-g_{\sigma\alpha,\mu} + g_{\mu\alpha,\sigma} + g_{\mu\sigma,\alpha}) \quad (303)$$

a

$$(g_{\mu\nu}A^\nu)_{,\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma}A^\nu + g_{\mu\nu}A^\nu_{,\sigma}. \quad (304)$$

a obdržíme výsledek

$$\frac{dp^\kappa}{d\lambda} + \Gamma^\kappa_{\sigma\alpha}p^\sigma p^\alpha = eF^{\beta\kappa}p_\beta, \quad (305)$$

kde je

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}. \quad (306)$$

□

**Úloha č.2)** Uvažujte pozorovatele, pohybujícího se na kruhové, Keplerovské orbitě v okolí Reissnerovy-Nordstromovy černé díry s nábojem  $Q$  a hmotností  $M$ . Určete nenulové složky elektromagnetického pole, který tento pozorovatel bude měřit.

---

**Řešení:** Kovariantní složky tenzoru obecného elektromagnetického pole  $\mathbf{F}$  v lokální tetradě statického pozorovatele jsou

$$F_{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & E_r & E_\theta & E_\varphi \\ -E_r & 0 & -B_\varphi & B_\theta \\ -E_\theta & B_\varphi & 0 & -B_r \\ -E_\varphi & -B_\theta & B_r & 0 \end{pmatrix} \quad (307)$$

Centrální objekt má náboj  $Q$  a pole je statické a sféricky symetrické, tzn. jediná nenulová složka je

$$E_r = -\frac{Q}{r}. \quad (308)$$

Kovariantní složky tenzoru, tohoto elektromagnetického pole jsou

$$F_{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & -Q/r & 0 & 0 \\ Q/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (309)$$

Nás zajímají složky tenzoru elektromagnetického pole v systému pohybujícího se po keplerovské kruhové orbitě rychlostí

$$V^{(\varphi)} = \frac{U^{(\varphi)}}{U^{(t)}} = \frac{L_j^{(\varphi)} U^j}{L_j^{(t)} U^j}, \quad (310)$$

kde transformační matice  $[L_j^{(i)}]$  určuje vztah mezi složkami souřadnicové baze  $\omega^i$  a složkami tetrády statického pozorovatele  $\omega^{(i)}$ . Složky této matice zřejmě jsou (ověřte)

$$[L_j^{(i)}] = \begin{bmatrix} f^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (311)$$

takže pro rychlost  $V^{(\varphi)}$  obdržíme výraz

$$V^{(\varphi)} = \frac{r \sin \theta}{f^{1/2}} \frac{U^\varphi}{U^t} = |\theta = \pi/2| = \frac{r}{f^{1/2}} \Omega_K. \quad (312)$$

Pro určení Keplerovské frekvence,  $\Omega_K$  vyjdeme z rovnice geodetiky pro radiální složku čtyřrychlosti  $U^r$ , která má tvar

$$\frac{dU^r}{d\tau} + \Gamma^r_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0. \quad (313)$$

Na kruhové orbitě zřejmě platí  $U^r = 0$ ,  $dU^r/d\tau = 0$  a  $U = (U^t, 0, 0, U^\varphi)$ . Za těchto podmínek dostáváme výraz

$$\Omega_K \equiv \frac{U^\varphi}{U^t} = \sqrt{-\frac{\Gamma^r_{tt}}{\Gamma^r_{\varphi\varphi}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{f_{,r}}{r}} = \sqrt{\frac{r - Q^2}{r^4}}. \text{ (ověřte)} \quad (314)$$

Kovariantní složky elektromagnetického pole z pohledu pozorovatele na kruhové orbitě pak určuje momentální Lorentzova transformace ze systému statického pozorovatele do systému pohybujícího se pozorovatele podle vztahu

$$F'_{(\alpha)(\beta)} = \Lambda_{(\alpha)}^{(\mu)} \Lambda_{(\beta)}^{(\nu)} F_{(\mu)(\nu)}, \quad (315)$$

kde je

$$\Lambda_{(\nu)}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma V^{(\varphi)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma V^{(\varphi)} & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (316)$$

a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - [V^{(\varphi)}]^2}}. \quad (317)$$

Nakonec obdržíme kovariantní složky tenzoru elektromagnetického pole  $F'_{(\alpha)(\beta)}$  ve tvaru

$$[F'_{(\alpha)(\beta)}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \frac{Q}{r} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{Q}{r} & 0 & 0 & \gamma \frac{Q V^{(\varphi)}}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \frac{Q V^{(\varphi)}}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (318)$$

Kromě elektrické složky  $E_r = -\gamma Q/r$  pozoruje pozorovatel na kruhové orbitě ještě latitudinální magnetickou složku

$$B_\theta = \gamma \frac{Q V^{(\varphi)}}{r}. \quad (319)$$

□

**Úloha č.3)** Určete radiální souřadnici  $r_{stat}$  na které bude částice s nábojem  $q$ , v Reissnerově-Nordstromově metrickém poli určeném elektrickým nábojem  $Q$ , v klidu.

**Řešení:** Základem našich úvah bude pohybová rovnice pro radiální složku 4-hybnosti (255), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{dp^r}{d\tau} + \Gamma^r_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = q F^{r\alpha} p_\alpha. \quad (320)$$

Složky 4-hybnosti uvažované, nabité částice jsou

$$p^\alpha = (p^t, 0, 0, 0) \quad (321)$$

a navíc částice na statickém poloměru musí splňovat podmínku  $dp^r/d\tau = 0$ . Z těchto podmínek přejde rovnice (320) na tvar

$$\Gamma^r_{tt} (p^t)^2 = q F^{rt} p_t. \quad (322)$$

Tenzor elektromagnetického pole bodového náboje z pohledu tetrády statického pozorovatele má nenulové pouze složky

$$F^{(t)(r)} = -F^{(r)(t)} = Q/r. \quad (323)$$

Vztah tetrádových složek tenzoru elektromagnetického pole a jeho složek vyjádřených vůči souřadnicové bazi je

$$F^{\mu\nu} = L^\mu_{(\alpha)} L^\nu_{(\beta)} F^{(\alpha)(\beta)} \quad (324)$$

kde zřejmě je

$$[L^\mu_{(\alpha)}] = \begin{bmatrix} f^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (325)$$

Takže pro složku  $F^{rt}$  dostaneme

$$F^{rt} = L^r_{(r)} L^t_{(t)} F^{(r)(t)} = f^{1/2} f^{-1/2} \frac{Q}{r} = \frac{Q}{r}. \quad (326)$$

Rovnice (322) potom bude

$$\Gamma^r_{tt} f^{-2} (p_t)^2 = \frac{qQ}{r}. \quad (327)$$

Jediná kovariantní, nenulová složka 4-hybnosti částice je  $p_t$ . Z normovací podmínky dostáváme

$$-m^2 = g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = f^{-1}(p_t)^2 \Rightarrow p_t = m f^{1/2}. \quad (328)$$

Dále, pro složku afinní konexe  $\Gamma^r_{tt}$  snadno, z definice, obdržíme vztah

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2} f f_{,r}. \quad (329)$$

Rovnice, kterou musíme vyřešit pak budem mít tvar

$$\frac{f_{,r}}{f} = \frac{2qQ}{r}. \quad (330)$$

Zde jsem už položili  $m = 1$ . Dosazením za  $f$  z Reissnerovy-Nordstromovy metriky

$$f = 1 - \frac{2}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (331)$$

dostáváme výslednou rovnici (za předpokladu  $qQ > 0$ )

$$q^2 Q^2 r^4 - 2q^2 Q^2 r^3 - (1 - q^2 Q^4) r^2 + 2Q^2 r - Q^4 = 0, \quad (332)$$

kterou musí  $r_{stat}$  splňovat. □

## 5 Skalární pole v okolí černých děr

V této kapitole se na okamžik opustíme diskretní částice a budeme studovat jak se vyvíjí v metrickém poli skalární pole [3].

**Úloha č.1)** Hustota Lagrangianu má pro komplexní skalární pole  $\varphi$  s hmotností  $\mu$  tvar

$$\mathcal{L} = -g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi^* - \mu^2\varphi\varphi^*. \quad (333)$$

Odvoďte z této hustoty Lagrangianu pohybové rovnice skalárního pole.

---

**Řešení:** Příslušné pohybové rovnice plynou z Eulerových-Lagrangeových rovnic, které mají pro  $\varphi^*$  tvar

$$\nabla_i\varphi^* \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_i\varphi^*)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} = 0 \quad (334)$$

Určeme nejprve

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_i\varphi^*)} = -g^{ij}\nabla_j\varphi \quad (335)$$

a

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} = -\mu^2\varphi. \quad (336)$$

Tyto dva výsledky vložíme do Eulerových-Lagrangeových rovnic (334) a obdržíme

$$\begin{aligned} \nabla_i(-g^{ij}\nabla_j\varphi) + \mu^2\varphi &= 0 \\ -\underbrace{\nabla_i g^{ij}}_{=0}\nabla_j\varphi - g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi + \mu^2\varphi &= 0 \\ (\nabla^i\nabla_i - \mu^2)\varphi &= 0 \\ (\square - \mu^2)\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (337)$$

□

**Úloha č.2)** Ukažte, že pro skalární funkci  $\varphi$  lze d'Alambertián  $\square$  psát ve tvaru

$$\square\varphi = (\partial^i\partial_i - \Gamma^i_{ik}\partial^k)\varphi. \quad (338)$$

---

**Řešení:** O správnosti vztahu (338) se snadno přesvědčíme přímým výpočtem. Postupně tak dostáváme

$$\begin{aligned}
\Box\varphi &= \nabla_i \nabla^i \varphi = \nabla_i (g^{is} \nabla_s \varphi) = |\nabla_i g^{is} = 0| = g^{is} \nabla_i \nabla_s \varphi \\
&= |\nabla_s \varphi = \partial_s \varphi| = g^{is} \nabla_i (\partial_s \varphi) = \nabla_i (\partial^i \varphi) = \partial_i \partial^i \varphi + \Gamma^i_{is} \partial^s \varphi \\
&= (\partial_i \partial^i + \Gamma^i_{is} \partial^s) \varphi.
\end{aligned} \tag{339}$$

□

**Úloha č.3)** S využitím vztahu

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \sqrt{-g}, \tag{340}$$

kde  $g$  je diskriminant metriky  $[g_{ij}]$ , upravte Klein-Gordonovu rovnici na tvar

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (g^{jk} \sqrt{-g} \partial_k) - \mu^2 \right] \varphi = 0. \tag{341}$$

---

**Řešení:** Dosadíme vztah (340) do (338) a upravíme rovnici (337). Postupně tak dostáváme

$$\begin{aligned}
(\partial_i \partial^i + \Gamma^i_{ik} \partial^k - \mu^2) \varphi &= 0 \\
\left( \partial_i \partial^i + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} \partial^k - \mu^2 \right) \varphi &= 0 \\
\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \partial_i \partial^i + \partial_k \sqrt{-g} \partial^k) - \mu^2 \right] \varphi &= 0 \\
\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} \partial^i) - \mu^2 \right] \varphi &= 0.
\end{aligned} \tag{342}$$

□

**Úloha č.4)** Najděte a řešte pohybové rovnice skalárního pole v okolí Schwarzhildovy černé díry. Řešení hledejte v separovaném tvaru.

**Řešení:** Nenulové, kovariantní složky metrického tenzoru popisující Schwarzhildův prostorčas jsou

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2}{r}\right), \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (343)$$

Diskriminant metriky je v tomto případě roven

$$g = -r^4 \sin^2 \theta. \quad (344)$$

Nyní stačí rozepsat rovnici (342) vzhledem ke Schw. metrice a dostáváme

$$\left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( g^{tt} r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( g^{rr} r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( g^{\theta\theta} r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( g^{\varphi\varphi} r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] - \mu^2 \right\} \Phi = 0 \quad (345)$$

a výsledný tvar pro Schwarzhildovu metriku bude

$$\begin{aligned} -\frac{r^3}{r-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r(r-2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \mu^2 r^2 \Phi \right) = 0 \end{aligned} \quad (346)$$

Vzhledem k sférické symetrii a časové nezávislosti metriky hledejme řešení této diferenciální rovnice ve tvaru

$$\Phi = e^{-i\omega t} R(r) A_{lm}(\theta, \varphi). \quad (347)$$

Dosaďme nyní (347) do (346) a počítejme nejprve jednotlivé parciální derivace, dostáváme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t} R A, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{-i\omega t} R A, \quad (348)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = e^{-i\omega t} R \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = e^{-i\omega t} R \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}, \quad (349)$$

a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( (r^2 - 2r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 2(r - 1)e^{-i\omega t} A \frac{dR}{dr} + r(r - 2)e^{-i\omega t} A \frac{d^2 R}{dr^2}, \quad (350)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \cos \theta e^{-i\omega t} R \frac{\partial A}{\partial \theta} + \sin \theta e^{-i\omega t} R \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}. \quad (351)$$

Celkově jsme tak dospěli k rovnici

$$\begin{aligned} \frac{r^3}{r - 2} \omega^2 + \frac{1}{A \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{2(r - 1)}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r(r - 2)}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \\ \frac{\cot \theta}{R} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \mu^2 r^2 = 0, \end{aligned} \quad (352)$$

V této rovnici lze zřejmě od sebe oddělit radiální a úhlovou část a pak symbolicky zapsáno dostáváme

$$P(r) = W(\theta, \varphi). \quad (353)$$

Tato rovnice musí zřejmě platit pro libovolné  $r$ ,  $\theta$  a  $\varphi$ , tj. Pravá i levá strana se musí rovnat stejné konstantě, řekněme  $K$ . Vzhledem k této separační konstantě  $K$  dostáváme dvě rovnice

$$r(r - 2) \frac{d^2 R}{dr^2} + 2(r - 1) \frac{dR}{dr} + \left( \frac{r^3 \omega^2}{r - 2} - \mu^2 r^2 - K \right) R = 0 \quad (354)$$

a

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - K A = 0. \quad (355)$$

Kvůli snadnějšímu zápisu píšeme místo  $A_{lm}$  jen  $A$ . Nyní se soustředíme na úhlovou rovnici (355).  $\square$

**Úloha č.5)** Určete tenzor energie hybnosti klasického skalárního pole v poli Schwarchildovy černé díry a určete podmínky, za kterých toto pole splňuje slabou a silnou energetickou podmínku.

**Řešení:** Tenzor energie hybnosti pole  $\Phi$ , které je určeno Lagrangeovou hustotou  $\mathcal{L}$ , určuje rovnice

$$T^\alpha_\beta = \Phi_{;\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{;\alpha}} - \delta^\alpha_\beta \mathcal{L}. \quad (356)$$

Hustota Lagrangiánu  $\mathcal{L}$  klasického skalárního pole  $\Phi$  je dána vztahem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Phi_{;\mu} \Phi^{;\mu} + \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2. \quad (357)$$

K určení příslušného tenzoru energie hybnosti už jen stačí dosadit poslední vztah do rovnice (356). Postupnými výpočty dostáváme

$$T^\alpha_\beta = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta^\alpha_\mu \Phi_{;\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu} \delta^\alpha_\nu - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta (\Phi_{;\mu} \Phi^{;\mu} + \mu^2 \Phi^2) \quad (358)$$

$$= \Phi_{;\beta} \Phi^{;\alpha} - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta (\Phi_{;\mu} \Phi^{;\mu} + \mu^2 \Phi^2). \quad (359)$$

Energetické podmínky, které nás nyní zajímají, jsou:

- Silná energetická podmínka - vyjádřena nerovnicí

$$T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (360)$$

- Slabá energetická podmínka - vyjádřena vztahem

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (361)$$

V obou případech je  $V^\mu$  jednotkový, času-podobný 4-vektor. Než určíme silnou energetickou podmínku pro naše skalární pole spočítejme nejprve výraz pro  $T = T^\mu_\mu$ . Po krátkém výpočtu dostáváme výsledek

$$\begin{aligned} T &= T^\mu_\mu = \Phi^{;\mu} \Phi_{;\mu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_\mu [(\nabla \Phi)^2 + m^2 \Phi^2] \\ &= -(\nabla \Phi)^2 - 2m^2 \Phi^2. \end{aligned} \quad (362)$$

Tento výsledek využijeme k určení silné energetické podmínky

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right) V^\mu V^\nu &= \left(\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\Phi^2\right) V^\mu V^\nu \\ &= (V^\mu\Phi_{;\mu})^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \end{aligned} \quad (363)$$

kde jsme využili  $V_\mu V^\mu = -1$ . Vidíme, že silnou energetickou podmínku lze velmi snadno porušit. Například, pokud bude pole  $\Phi$  časově nezávislé v soustavě kde je  $V^\mu = (1, 0, 0, 0)$  tak bude silná energetická podmínka zjevně porušena. Nyní obraťme pozornost ke slabé energetické podmínce, která požadu platnost nerovnosti

$$0 \leq T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = (V^\mu\Phi_{;\mu})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2. \quad (364)$$

Jak je ihned vidět tato podmínka je pro skalární pole  $\Phi$  vždy splněna.  $\square$

## 6 Termodynamika černých děr

Stephen Hawking ukázal [6], že celková plocha všech, klasických černých děr ve Vesmíru nemůže klesat. Je-li  $A$  plocha černé díry pak Hawkingův teorém říká

$$\delta A \geq 0. \quad (365)$$

Tento teorém silně připomíná druhý termodynamický zákon, který říká, že žádným fyzikálním způsobem nemůže celková entropie  $S$  veškeré hmoty ve Vesmíru klesat, tj.  $\delta S \geq 0$ . Tím ovšem analogie nekončí. Na povrchu libovolné černé díry lze zavést veličinu  $\kappa$  - povrchová gravitace, která je konstantní v případě stacionárních černých děr. Toto pravidlo je analogií k nultému zákonu termodynamiky a sice, že teplota  $T$  je konstantní v tělese v termodynamické rovnováze. Dále, zde nalézáme analog k zákonu zachování celkové energie soustavy a to ve tvaru

$$dM = \frac{1}{8\pi} \kappa dA + \Omega_H dJ, \quad (366)$$

který říká, že celková změna hmotnosti černé díry odpovídá změně její plochy  $A$  a/nebo změně jejího momentu hybnosti  $J$ . A nakonec k třetímu termodynamickému zákonu, který říká, že je nemožné fyzikálními procesy dosáhnout  $T = 0$ , existuje analogie tvrdící, že není možné fyzikálními procesy dosáhnout  $\kappa = 0$ .

K entropii  $S$  je ekvivalentem plocha černé díry  $A$  a k teplotě  $T$  je analogem povrchová gravitace  $\kappa$ .

V roce 1975 Stephen Hawking navíc ukázal, že černé díry, v důsledku kvantově-mechanických procesů v blízkosti horizontu, vyzařují energii jako absolutně černé těleso. Můžeme tedy skutečně hovořit o termodynamice černých děr.

**Úloha č.1)** Nechtě  $\chi^a$  je Killingovo pole, které je normálou k horizontu staionární černé díry. Ukažtem, že lze na povrchu černé díry zavést veličinu  $\kappa$ , která je konstantní podél orbit určených  $\chi^a$ .

---

**Řešení:** Obecně Killingovo pole  $\chi^a$  nemusí splývat se stacionárním Killingovým polem  $\xi^a$ . V takovém případě získáme axiální Killingovo pole  $\psi^a$  jako lineární kombinaci polí  $\chi^a$  a  $\xi^a$ . Obecně tedy píšeme

$$\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a, \quad (367)$$

kde je  $\Omega_H$  úhlová rychlost horizontu černé díry, která je konstantní.

Horizont je nulový povrch a  $\chi^a$  je normálou k horizontu, pak musí platit

$$\chi_a \chi^a = 0. \quad (368)$$

Jinými slovy,  $\chi_a \chi^a$  je na horizontu konstantní a proto je i  $\nabla^a(\chi_b \chi^b)$  normálou k horizontu. Takže existuje funkce  $\kappa$  taková, že je

$$\nabla^a(\chi_b \chi^b) = -2\kappa \chi^a. \quad (369)$$

□

**Úloha č.2)** Uvažujme klasickou, rotující černou díru. Vratným procesem odebírejte z této černé díry energii (hmotnost) a rotaci (moment hybnosti). Ukažte, ze zákona neklesajících ploch černých děr, že takto vytvořená statická černá díra bude mít hmotnost  $M_f > M_{irr} = \sqrt{M_i(M_i + \sqrt{M_i^2 - a^2})}/2$ . Index  $i$  označuje iniciální, rotující černou díru se spinem  $a$  a index  $f$  označuje finální, nerotující černou díru.

**Řešení:** Určeme nejprve plochu rotující černé díry. Ta bude zřejmě

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{2}g d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (370)$$

Užitím vztahu  $\Delta = 0 = r_+^2 - 2Mr_+ + a^2$  dostáváme pro plochu horizontu Kerrovy černé díry výraz

$$A = 8\pi Mr_+ = 8\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2}). \quad (371)$$

Ze zákona neklesajících ploch klasických černých děr dostáváme nerovnost

$$A_f \geq A_i \quad (372)$$

kde je

$$A_f = 16\pi M_f^2 \quad (373)$$

a

$$A_i = 8\pi M_i(M_i + \sqrt{M_i^2 - a^2}). \quad (374)$$

Dostáváme tak nerovnost

$$M_f^2 \geq \frac{1}{2}M_i(M_i + \sqrt{M_i^2 - a^2}). \quad (375)$$

Hmotnost takto vytvořené statické černé díry nemůže být menší než určitá hmotnost  $M_{irr}$  která je dána vztahem

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{2}M_i(M_i + \sqrt{M_i^2 - a^2}). \quad (376)$$

□

**Úloha č.3)** Uvažujte kolizi dvou Kerrových černých děr se stejnou hmotností  $M_1$  a s opačnými rotačními parametry  $a$ . Jaká bude minimální hmotnost,  $M_2$ , Schwarzschildovy černé díry, která tímto procesem vznikne?

---

**Řešení:** Necht' je ploch každé z našich Kerrových černých děr  $A_1$  a plocha vytvořené Schwarzschildovy černé díry  $A_2$ . Podle teorému o neklesajících plochách černých děr musí platit

$$A_1 + A_1 \leq A_2 \rightarrow 2A_1 \leq A_2. \quad (377)$$

Plocha Kerrový černé díry bude

$$A_1 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{^2g} d\theta d\varphi, \quad (378)$$

kde je

$$^2g = g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi} = [(r_+^2 + a^2)^2 - a^2\delta_+ \sin^2 \theta] \sin^2 \theta = (r_+^2 + a^2) \sin^2 \theta. \quad (379)$$

Výsledná plocha Kerrový černé díry potom je

$$A_1 = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi M_1 r_+. \quad (380)$$

V případě Schwarzschildovy černé díry dostaneme pro její plochu výraz

$$A_2 = 4\pi r_h^2 = 16\pi M_2^2. \quad (381)$$

Dosazením do (377) obdržíme výsledek

$$16\pi M_1 r_+ \leq 16\pi M_2^2 \rightarrow M_2 \geq \sqrt{M_1(M_1 + \sqrt{M_1^2 - a^2})}. \quad (382)$$

□

**Úloha č.4)** Z Hawkingova teorému o neklesajících plochách černých děr ukažte, že Kerrova černá díra určité mody dopadajícího záření spíše zesiluje.

**Řešení:** Plocha Kerrovy černé díry je

$$A \equiv 8\pi \tilde{A} = 8\pi [M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}], \quad (383)$$

kde je  $J = aM$ . Odkud zřejmě dostaneme

$$\tilde{A} = M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2} \rightarrow \tilde{A}^2 - 2\tilde{A}M^2 + J^2 = 0. \quad (384)$$

První variací této rovnice obdržíme výraz

$$2\tilde{A}\delta\tilde{A} - 2M^2\delta\tilde{A} - 4\tilde{A}M\delta M + 2J\delta J = 0 \quad (385)$$

případně v upravené podobě

$$(\tilde{A} - M^2)\delta\tilde{A} = 2\tilde{A}M\delta M - J\delta J. \quad (386)$$

Z teorému o neklesajících plochách plyne, že levá strana předchozí rovnice je pozitivní. Předpokládejme, že vlnové mody mají časovou  $t$  a fázovou  $\varphi$  závislost danou vztahem  $\exp(-i\omega t + im\varphi)$ . Všechny skalární, elmg. a grav. vlny splňují

$$\delta M = \frac{\omega}{m}\delta J. \quad (387)$$

Dostáváme tak nerovnost

$$\left(2\tilde{A}M - \frac{m}{\omega}J\right)\delta M \geq 0. \quad (388)$$

Pro zesílenou vlnu, ze zákona zachování energie, plyne

$$\delta M < 0 \quad (389)$$

takže musí platit

$$2\tilde{A}M - \frac{m}{\omega}J < 0 \Rightarrow \frac{2Mr_+}{a} - \frac{m}{\omega} < 0. \quad (390)$$

To vede k podmínce

$$0 < \omega < \frac{am}{2Mr_+} = m\Omega_h. \quad (391)$$

K zesílení dopadající vlny dojde tehdy, když je její kruhová frekvence celočíselným násobkem kruhové frekvence Kerrovy černé díry.  $\square$

**Úloha č.5)** Uvažujte Schwarzschildovu černou díru s hmotností  $M$ . Najděte výraz pro zářivý výkon Hawkingova záření. Jaký je vztah mezi její hmotností  $M$  a dobou jejího vypaření  $t_{vyp}$ ?

---

**Řešení:** Stephen Hawking ukázal, že vlivem kvantověmechanických procesů v blízkosti horizontu černé díry dochází k odebrání její energie která je vyzařována do okolí ve formě záření absolutně černého tělesa s teplotou

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (392)$$

kde  $\kappa$  je povrchová gravitace černé díry. Určeme, jaké je zrychlení statického pozorovatele na daném  $r > r_h$  a pak určíme limitu pro  $r \rightarrow r_h$ . Pro 4-zrychlení platí

$$a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (393)$$

Pro statického pozorovatele budou složky jeho 4-rychlosti

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0\right) \quad (394)$$

kde z normovací podmínky  $u_\alpha u^\alpha = -1$  dostaneme

$$a^t = \frac{du^t}{d\tau} + \Gamma^t_{tt}(u^t)^2 = \frac{du^t}{dx^\mu}u^\mu + 0 = 0, \quad (395)$$

$$a^\varphi = \frac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma^\varphi_{tt}(u^t)^2 = 0 + 0 = 0, \quad (396)$$

$$a^\theta = \frac{du^\theta}{d\tau} + \Gamma^\theta_{tt}(u^t)^2 = 0 + 0 = 0, \quad (397)$$

$$a^r = \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma^r_{tt}(u^t)^2 = 0 + \frac{1}{2}g^{rr}g_{tt,r}(u^t)^2. \quad (398)$$

V případě statických prostoročasů je povrchová gravitace úměrná velikosti 4-zrychlení  $a$ , tj.

$$\kappa = Va, \quad (399)$$

kde  $V$  je redshiftový faktor. Velikost 4-zrychlení bude

$$a = \sqrt{a_\mu a^\mu} = \sqrt{g_{rr}}a^r. \quad (400)$$

Protože pro složku  $a^r$  snadno dostaneme výraz

$$a^r = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{2M}{r^2} (u^t)^2 = \frac{M}{r^2} \quad (401)$$

tak výsledná povrchová gravitace bude

$$\kappa = a = V \frac{M}{r^2 \sqrt{1 - 2M/r}}, \quad (402)$$

kde redshift faktor zřejmě bude

$$V = \sqrt{1 - 2M/r}. \quad (403)$$

Pro teplotu Hawkingovského záření ve Schwarzschildově poli tak dostaneme vztah

$$T_H = \frac{M}{2\pi r^2} = |r = 2M| = \frac{1}{8\pi M}. \quad (404)$$

Celkový zářivý výkon zdroje vyzařující jako absolutně černé těleso je

$$P = A\sigma T_H^4, \quad (405)$$

kde je  $A$  plocha povrchu černé díry

$$A = \int \int \sqrt{^2g} d\theta d\varphi = |^g = r^2 \sin \theta| = 4\pi r^2. \quad (406)$$

Pro zářivý výkon  $P$  pak dostaneme výraz

$$P = \frac{\sigma}{256\pi^3 M^2}. \quad (407)$$

Nyní určíme dobu za kterou se černá díra vypaří. Zářivý výkon představuje ztrátu energie černé díry, tj.

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{\alpha}{M^2}, \quad (408)$$

kde jsme zavedli faktor  $\alpha = 1/(256\pi^3)$ . Vztah mezi energií a hmotností určuje Einsteinův vztah

$$E = Mc^2. \quad (409)$$

Dostáváme tak diferenciální rovnici, popisující ztrátu hmoty černé díry za dobu  $t$  ve tvaru

$$-c^2 \frac{dM}{dt} = \frac{\alpha}{M^2}. \quad (410)$$

Její řešení snadno najdeme separací proměnných, tj.

$$-\int_0^M M^2 dM = \alpha \int_t^0 dt \Rightarrow t = \frac{c^2}{3\alpha} M^3. \quad (411)$$

Čím těžší bude černá díra tím déle se bude vypařovat a naopak.  $\square$

## 7 Elektromagnetické pole v zakřiveném prostoročase

Elektromagnetické pole budeme v následujících úlohách považovat za testovací, tj. neovlivňující geometrii prostoročasu. Maxwellovy rovnice mají v kovariantním záise tvar

$$F^{\nu\mu}_{;\nu} = 4\pi j^\mu \quad \text{Gaussův-Ampérův zákon} \quad (412)$$

a

$$F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0 \quad \text{Gaussův-Faradayův zákon.} \quad (413)$$

Zde je antisymetrický tenzor  $F_{\mu\nu}$  určen 4-vektorem elektromagnetického pole  $A_\mu$  vztahem

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}. \quad (414)$$

a  $j^\mu$  je 4-proud.

**Úloha č.6)** Ukažte, že platí:

1.

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}, \quad (415)$$

2.

$$F^{\nu\mu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{-g} F^{\nu\mu}]. \quad (416)$$

**Řešení:**

1. Počítejme

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} \\ &= A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha - A_{\nu,\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} A_\alpha \\ &= |\text{symetrie koeficientů } \Gamma \text{ v dolních indexech}| \\ &= A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \end{aligned} \quad (417)$$

2.

$$F^{\nu\mu}_{;\nu} = F^{\nu\mu}_{,\nu} - \Gamma^\nu_{\alpha\nu} F^{\alpha\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu} F^{\nu\alpha}$$

□

**Úloha č.7)** Určete elektromagnetické pole generované statickým, bodovým nábojem  $e$ , který leží na souřadnicích  $r = b$  a  $\theta = 0$  ve Schwarzschildově metrickém poli.

---

**Řešení:**



## Reference

- [1] Bardeen, J. M. and Press, W. H. and Teukolsky, S. A., Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation, *The Astrophys. J.*, 178, p.347–370, 1972
- [2] Bičák, J. and Stuchlík, Z., The Fall of the Shell of Dust on to a Rotating Black Hole, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 175, 381–393, 1976
- [3] Bičák, J., Stuchlík, Z., and Sob, M., Scalar fields around a charged, rotating black hole, *Czechoslovak Jour. of Phys.*, 28, p.121–124, 1978
- [4] Bhat, M. and Dhurandhar, S. and Dadhich, N., Energetics of the Kerr-Newman black hole by the Penrose process, *Journ. of Astrophys. and Astron.*, 6, p.85–100, 1985
- [5] Carter, B., Hamilton-Jacobi and Schrödinger Separable Solutions of Einstein's Equations, *Commun. math. Phys.*, 10, p.280–310, 1968
- [6] Hawking, S. W., Particle creation by black holes, *Comm. in Math. Phys.*, 43, p.199–220, 1975
- [7] Kerr, R. P., Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics, *Phys. Rev. Lett.*, 11, p.237–238, 1963
- [8] Madsen, M. S., Scalar fields in curved spacetimes, *Class. and Quant. Grav.*, 5, p.627–639, 1988
- [9] Misner, C. W. and Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., Gravitation, *San Francisco: W.H. Freeman and Co.*, 1973,
- [10] Newman, E., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A., and Torrence, R., Metric of a Rotating, Charged Mass, *Journ. of Math. Phys.*, 6 (6), p.918–919, 1965
- [11] Reissner, H., Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie, *Annalen der Physik*, 50, p.106–120, 1916

- [12] Stuchlik, Z., Equatorial circular orbits and the motion of the shell of dust in the field of a rotating naked singularity, *Bull. of the Astron. Inst. of Czechoslovakia*, 31, p.129–144, 1980
- [13] Stuchlik, Z., The motion of test particles in black-hole backgrounds with non-zero cosmological constant, *Bull. of the Astron. Instit. of Czechoslovakia*, 34, p.129–149, 1983
- [14] Teukolsky, S. A. and Press, W. H., Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation, *The Astrophys. J.*, 193, p.443–461, 1974
- [15] Wald, R. M., Energy Limits on the Penrose Process, *The Astrophys. J.*, 191, p.231–234, 1974
- [16] Wald, R. M., General relativity, *Chicago, University of Chicago Press, 1984*, 504 p., 1984