

Základy teorie pravděpodobnosti

Podmíněná pravděpodobnost



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
FAKULTA VEŘEJNÝCH
POLITIK V OPAVĚ

doc. Ing. Petr Sed'a, Ph.D.

Pravděpodobnost je teorií statistiky a statistika je praxí teorie pravděpodobnosti.

Co se dnes dozvíte?

- Náhodný pokus a náhodný jev.
- Intuitivní zavedení pravděpodobnosti.
- Operace s jevy, pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi.
- Podmíněná a úplná pravděpodobnost, Bayesova věta.
- Rozhodovací stromy.

- **náhodný pokus**

- činnost, která může za stejných předem stanovených podmínek vést k různým výsledkům

příklad: hod kostkou, denní kurs eura vůči koruně

- **náhodný jev**

- každá událost, která při náhodném pokusu buď nastane, nebo nenastane

příklad: na kostce padne sudé číslo, kurs eura je vyšší než 24,50 Kč / 1€

- jev, který lze vícekrát (teoreticky nekonečněkrát) opakovat
 - hod kostkou můžeme opakovat stále dokola
 - kurs eura můžeme sledovat každý den

- jev, který lze pozorovat na více objektech stejného typu
 - můžeme házet více kostkami najednou
 - můžeme sledovat kurs eura u různých bank

Náhodné a nenáhodné jevy



- **jev jistý Ω** – za daných podmínek nastane vždy

Příklad: na kostce padne číslo menší než 10

- **jev nemožný \emptyset** – za daných podmínek nemůže nastat

Příklad: na kostce padne sedmička

- **jev náhodný A** – za daných podmínek může, ale nemusí nastat

Příklad: na kostce padne sudé číslo

Číslo, které vyjadřuje šanci, že při náhodném pokusu daný jev nastane.

- jev jistý $P(\Omega) = 1$
- jev nemožný $P(\emptyset) = 0$
- jev náhodný $0 < P(A) < 1$

šance



Klasická pravděpodobnost



- náhodný pokus může mít n různých výsledků
- všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné

Základní (klasická) definice pravděpodobnosti:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

počet výsledků příznivých danému jevu A

počet všech možných výsledků pokusu

Elementární jev

Odpovídá jednomu jedinému výsledku

E_1 : Na kostce padne jednička.

...

E_6 : Na kostce padne šestka.

} 6 elementárních
jevů

pravděpodobnost elementárního jevu:

$$p(E_i) = \frac{1}{n}$$

*stejná pravděpodobnost
pro všechny elementární jevy*

Příklad 1 – náhodný výběr



V osudí je 10 kuliček, z toho 5 červených. Určete pravděpodobnost jevu, že z pěti náhodně vytažených kuliček budou 3 červené.

$$P = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10 \cdot 10}{252} = 0,40$$

Pravděpodobnost hledaného jevu je cca 40%.

Omezení klasické definice



Kdy nelze použít klasickou definici pravděpodobnosti?

- elementární jevy nemají stejnou pravděpodobnost
- elementárních jevů je nekonečně mnoho
- není znám počet elementárních jevů

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že kurs eura bude mezi 22 a 24 Kč / € ?

Míra četnosti výskytu jevu v řadě opakovaných pokusů

$$p(A) \approx \frac{m}{n}$$

počet pokusů, při kterých nastane jev A

celkový počet provedených pokusů

Zákon velkých čísel:

čím více pokusů provádíme, tím více se podíl výskytu daného jevu blíží jeho pravděpodobnosti

Příklad 2 – zákon velkých čísel



Házíme kostkou a sledujeme počet šestek, které padnou. Po každé stovce zapíšeme stav a spočítáme empirickou pravděpodobnost:

| počet hodů | počet šestek | pravděpodobnost |
|------------|--------------|-----------------|
| 100 | 18 | 18,0% |
| 200 | 30 | 15,0% |
| 300 | 45 | 15,0% |
| 400 | 66 | 16,5% |
| 500 | 82 | 16,4% |
| 600 | 98 | 16,3% |

Pravděpodobnost hledaného jevu je cca 16%.

Axiomatická definice pravděpodobnosti



Jednotlivé výsledky pokusu nemusí mít stejnou pravděpodobnost.

Kolmogorovy axiomy (1930):

1. Pravděpodobnost každého jevu je nezáporné reálné číslo.
2. Součet pravděpodobností všech možných výsledků je roven jedné.
3. Pravděpodobnost každého jevu je rovna součtu pravděpodobností všech výsledků, při kterých jev nastává.

Množinové pojetí jevu



Každý jev může být reprezentován množinou všech příznivých výsledků.

Na kostce padne šestka.

$$A = \{6\}$$

Na kostce padne liché číslo.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

Na kostce padne sedmička.

$$C = \emptyset$$

Na kostce padne jednociferné číslo.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

Ω - množina všech možných výsledků

Operace s jevy – opačný jev



opačný jev (doplňěk jevu) – není pravda, že nastane jev A

$$\bar{A} = \Omega - A$$

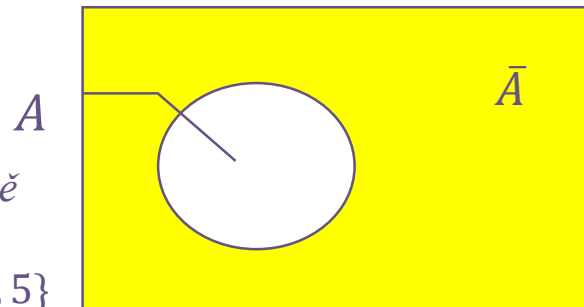
nastane-li jev A , nenastane jev \bar{A} – a opačně

A – na kostce padne liché číslo $A = \{1, 3, 5\}$

B – na kostce padne sudé číslo $B = \{2, 4, 6\}$

$$B = \bar{A}$$

$$A = \bar{B}$$



Operace s jevy – sjednocení



sjednocení jevů – nastane jev A **nebo** jev B

$$A \cup B$$

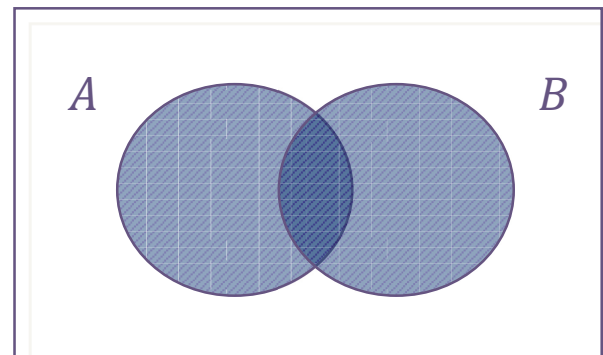
A – padne liché číslo

$$A = \{1, 3, 5\}$$

B – padne číslo větší než 3

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$



$$A \cup B$$

Operace s jevy – průnik



průnik jevů – nastane jev A a současně jev B

$$A \cap B$$

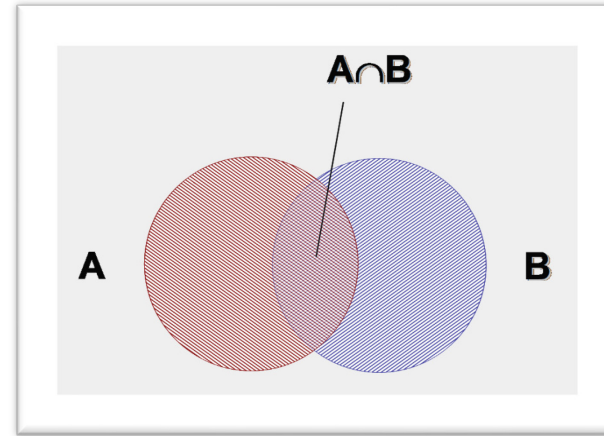
A – padne liché číslo

B – padne číslo větší než 3

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{5\}$$



Operace s jevy – pravděpodobnost sjednocení

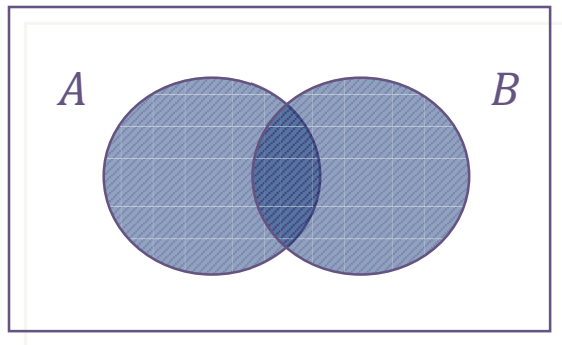


pravděpodobnost opačného jevu:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

pro libovolné dva jevy A, B platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$A \cup B$

Řešený příklad 3 – studenti



Jedničku z matematiky má 15% studentů (jev A), jedničku ze statistiky 22% studentů (jev B), jedničku z obou předmětů 8% studentů. Kolik studentů má jedničku aspoň z jednoho předmětu?

$$P(A \cup B) = 0,15 + 0,22 - 0,08 = 0,29 = 29\%$$

Jedničku alespoň z jednoho předmětu má 29% studentů.

Operace s jevy – neslučitelné a nezávislé jevy



neslučitelné (disjunktní) jevy – nemohou nastat současně

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

neslučitelné jevy mají prázdný průnik

nezávislé jevy – výsledky jevů se navzájem neovlivňují

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Jsou hody dvěma různými kostkami nezávislé jevy ?

Příklad 4 - studenti



Ze 130 studentů si 52 zapsalo jako volitelnou Veřejnou ekonomiku (jev A), 28 Psychologii (jev B), 12 studentů oba předměty. Lze zápis těchto předmětů považovat za nezávislé jevy?

$$P(A) = \frac{52}{130} = 0,40$$

$$P(B) = \frac{28}{130} = 0,22$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{130} = 0,09$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,40 \cdot 0,22 = 0,09$$

Ano, jevy lze považovat za nezávislé.

Podmíněná pravděpodobnost



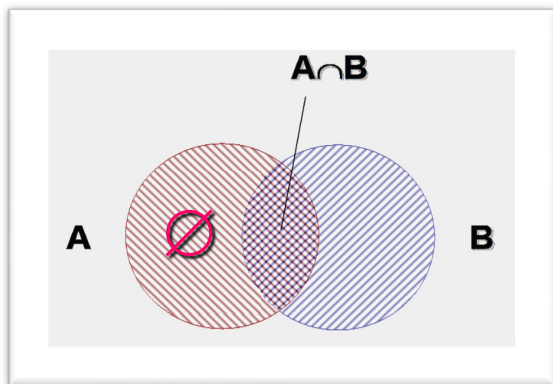
Pokud pravděpodobnost jevu A závisí na výsledku jevu B , jsou oba jevy **závislé**.

$P(A|B)$ podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že jev B nastal

$P(A|\bar{B})$ podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že jev B nenastal

vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost (Bayes):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Příklad 5 - studenti



Jedničku z matematiky má 15% studentů (jev B), jedničku ze statistiky 22% studentů (jev A), jedničku z obou předmětů 8% studentů. Jaká je pravděpodobnost, že student dostane jedničku ze statistiky, víme-li, že má jedničku z matematiky?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,08}{0,15} = 0,53$$

Pravděpodobnost, že student dostane jedničku ze statistiky, má-li jedničku z matematiky, je 53%.

Úplná pravděpodobnost



Úplná pravděpodobnost jevu A

- pravděpodobnost jevu A bez ohledu na výsledek jevu B , tj. výsledek jevu B neznáme nebo neuvažujeme:

$$P(A) = \underbrace{P(A|B) \cdot P(B)}_{P(A \cap B)} + \underbrace{P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})}_{P(A \cap \bar{B})}$$

„Svět kolem nás je plný navzájem provázaných a ovlivňujících se jevů“.

úplná pravděpodobnost = pravděpodobnost *á priori*

Budou lidé kupovat v létě deštníky?

podmíněná pravděpodobnost = pravděpodobnost *á posteriori*

Budou lidé kupovat v létě deštníky, víme-li, že se očekává deštivé léto?

Příklad 6 - konkurs



U konkursu na místo obchodního zástupce firmy má vysokoškolák 60% šanci na přijetí, středoškolák 20%. Mezi zájemci o místo je 40% vysokoškoláků a 60% středoškoláků. Jakou šanci má náhodně vybraný zájemce, pokud neznáme jeho vzdělání?

$$P(A) = P(A|VŠ) \cdot P(VŠ) + P(A|SŠ) \cdot P(SŠ)$$

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,36$$

Náhodně vybraný zájemce má 36% šanci na přijetí.

Bayesův vzorec



Známe $P(A|B)$, umíme vypočítat $P(B|A)$?

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$P(A|VŠ)$ – pravděpodobnost, že uchazeč bude přijat, je-li vysokoškolák

$P(VŠ|A)$ – pravděpodobnost, že přijatý uchazeč je vysokoškolák

Příklad 7 - konkurs



Uchazeč o místo byl přijat. S jakou pravděpodobností měl vysokoškolské vzdělání?

$$P(VŠ|A) = \frac{P(VŠ \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|VŠ) \cdot P(VŠ)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,36} = 0,67 = 67\%$$

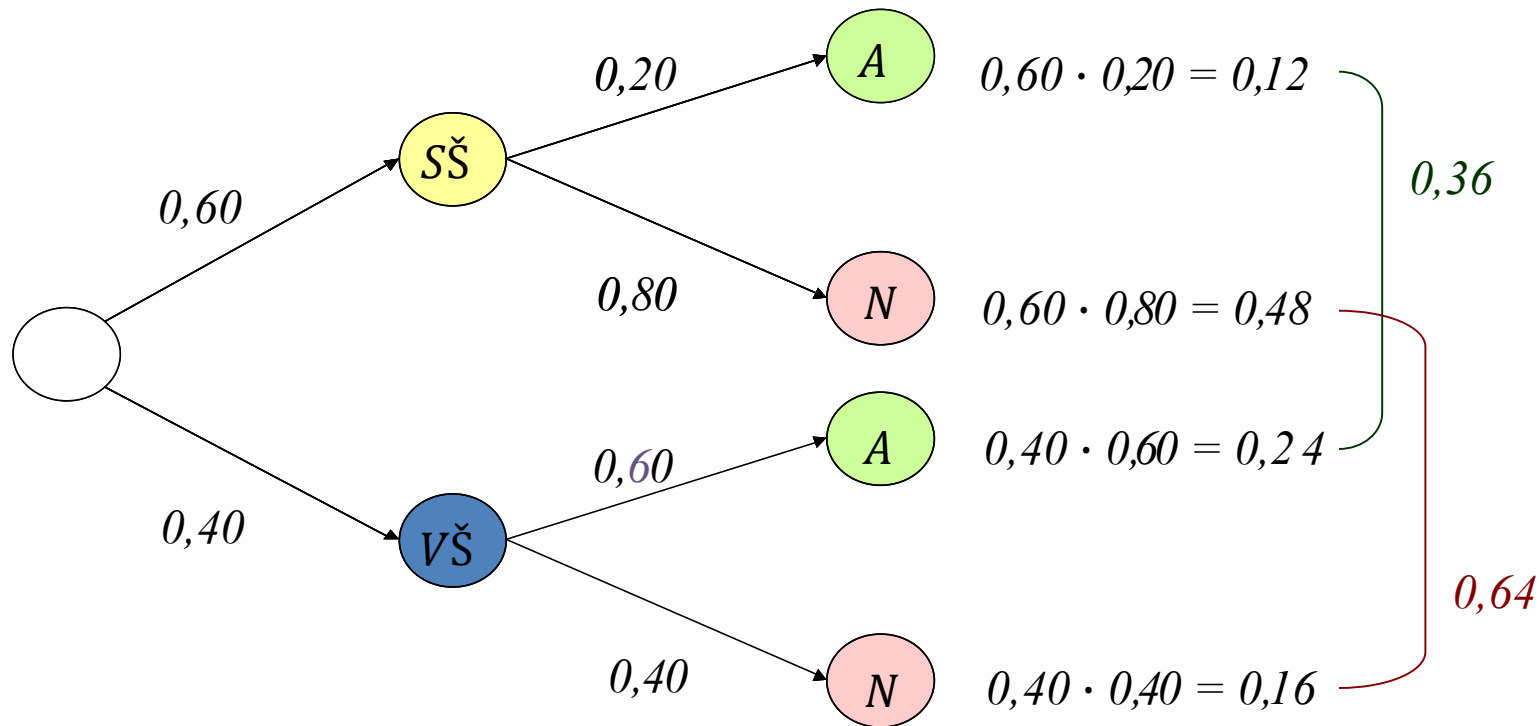
Uchazeč o místo byl odmítnut. S jakou pravděpodobností byl středoškolák?

$$P(SŠ|\bar{A}) = \frac{P(SŠ \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}|SŠ) \cdot P(SŠ)}{P(\bar{A})} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,64} = 0,75 = 75\%$$

Rozhodovací strom



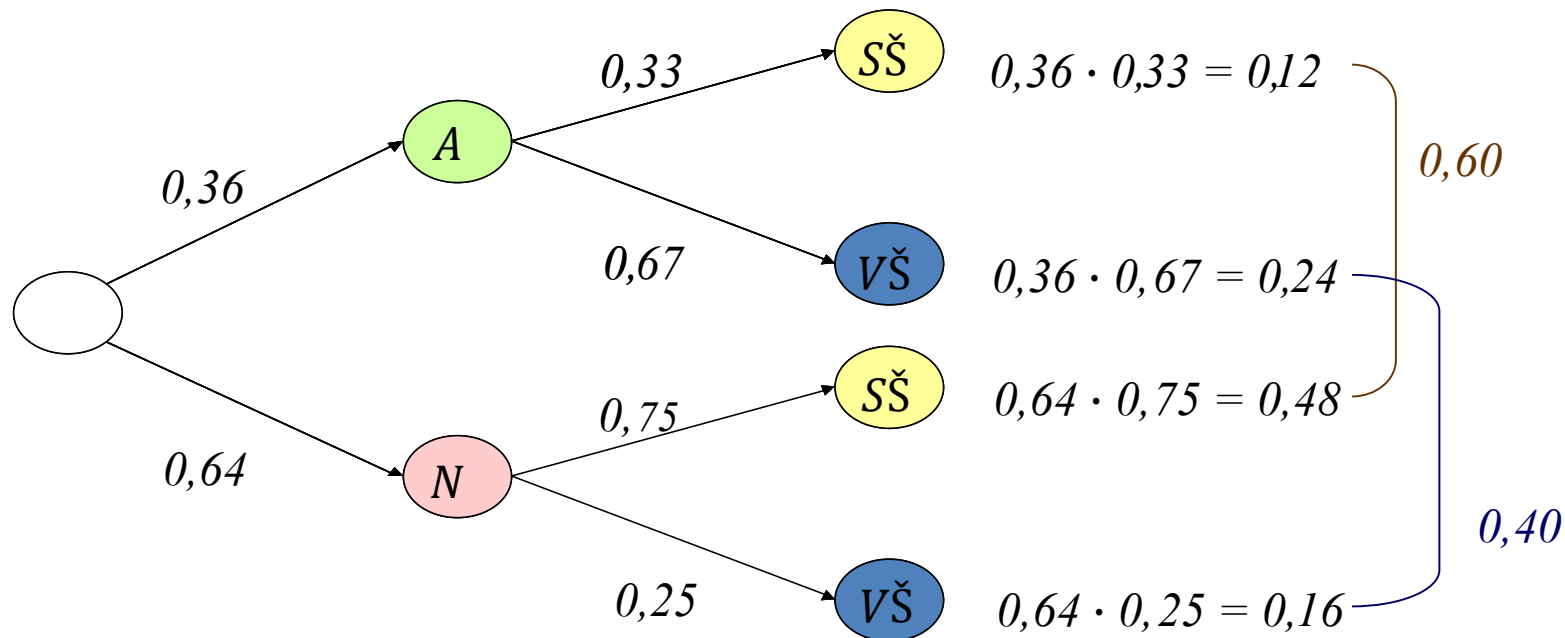
Grafické zobrazení rozhodování na základě větvení



Rozhodovací strom



Lze změnit pořadí větvení – Bayesův vzorec



1. Ramík J. a Čemerková Š. *Statistika A*. Karviná: SLU, 2000. **(kapitola 3)**.





Děkuji za pozornost.