# Vybraná rozdělení náhodné veličiny

Diskrétní a spojitá rozdělení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

doc. Ing. Petr Seďa, Ph.D.

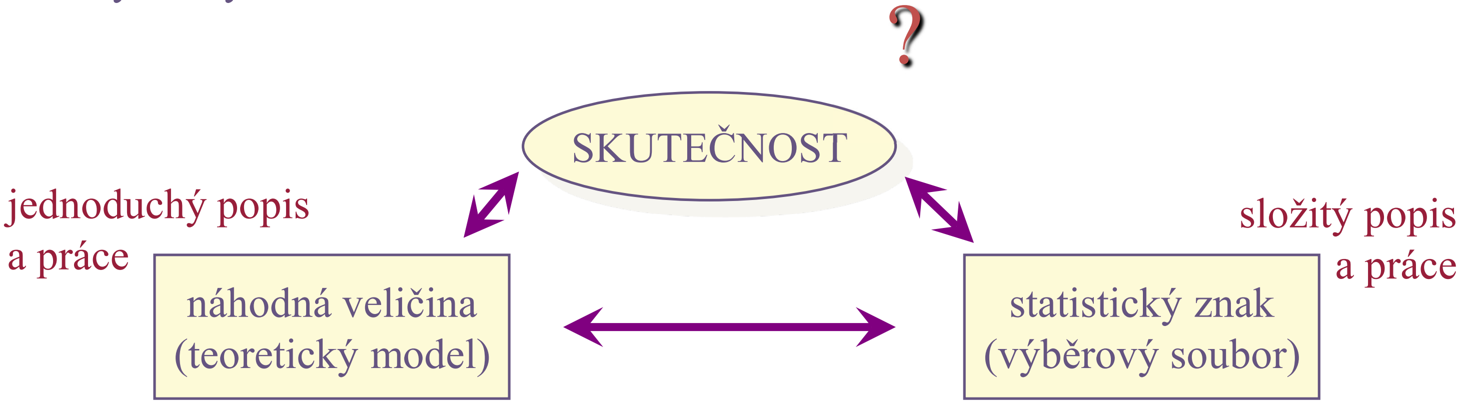
SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

# Co se dnes dozvíte?

- Rovnoměrné rozdělení.
- Binomické a hypergeometrické rozdělení.
- Poissonovo rozdělení.
- Normální rozdělení.
- Normované normální rozdělení, tabulky normálního rozdělení.
- Centrální limitní věta.

# Proč používat modely rozdělení?

- jsou jednodušší než realita,
- jsou důkladně popsané,
- lépe se s nimi počítá,
- výsledky se blíží skutečnosti.

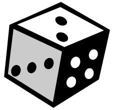


# Rovnoměrné rozdělení $R(n)$:

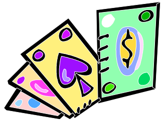
- rozdělení diskrétní náhodné veličiny, která má pro všechny hodnoty **1** až ***n*** stejnou pravděpodobnost výskytu

pravděpodobnostní funkce: $p(x) = \dfrac{1}{n} \quad pro\; x = 1, \ldots, n$

střední hodnota: $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$



rozptyl: $D(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$



# Příklad 1 – hod kostkou

Hod kostkou je náhodná veličina s rozdělením R(6).

pravděpodobnostní funkce: $p(x) = \frac{1}{6} \quad pro\, x = 1, 2, \ldots, 6$

střední hodnota: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

rozptyl: $D(X) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} = 2,92$

směr. odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,92} = 1,71$

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

## Binomické (Bernoulliho) rozdělení $Bi(n, p)$:

- rozdělení diskrétní veličiny, která představuje počet úspěšných výsledků při **výběru s vracením**

$\boldsymbol{n}$ – počet nezávislých pokusů
$\boldsymbol{\pi}$ – pravděpodobnost úspěšného výsledku při jednom (libovolném) pokusu

pravděpodobnostní funkce:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^{x} \cdot (1-\pi)^{n-x}$$

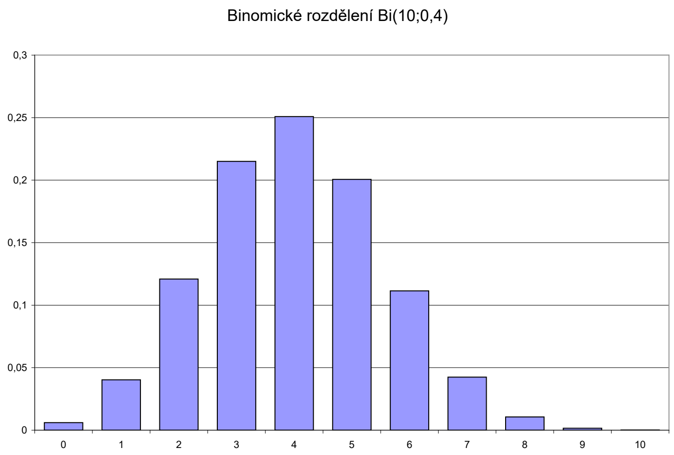
pro $x = 0, 1, \dots, n$

# Vlastnosti binomického rozdělení:

střední hodnota: $\boxed{E(X) = n \cdot \pi}$

rozptyl: $\boxed{D(X) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}$

je-li $\boldsymbol{\pi = 0,5}$, je rozdělení symetrické

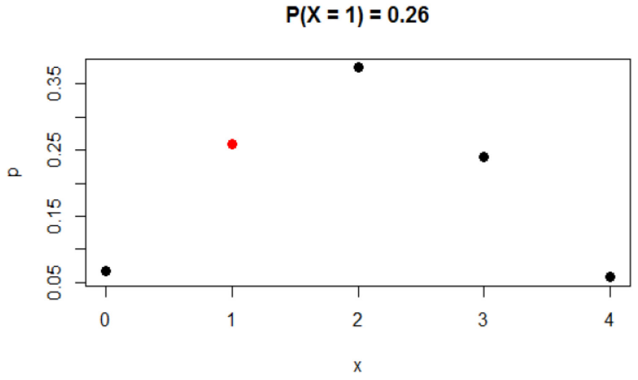


# Příklad 2 – počet dětí

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je právě jedna dívka?

$X \ldots$ počet dívek mezi 4 dětmi

$D \ldots$ narodí se dívka, $P(D) = \pi$
$\overline{D} \ldots$ narodí se chlapec, $P(\overline{D}) = 1 - \pi$




$(X = 1)$ … $\{D\overline{D}\ \overline{D}\ \overline{D}, \overline{D}\ D\ \overline{D}\ \overline{D}, \overline{D}\ \overline{D}\ D\ \overline{D}, \overline{D}\ \overline{D}\ \overline{D}\ D\}$

$$P(\overline{D}\ D\ \overline{D}\ \overline{D}) = P(\overline{D}\ \overline{D}\ D\ \overline{D}) = P(\overline{D}\ \overline{D}\ \overline{D}\ D) = \pi \cdot (1-\pi)^3$$

$$P(X = 1) = P(D\ \overline{D}\ \overline{D}\ \overline{D} + \overline{D}\ D\ \overline{D}\ \overline{D} + \overline{D}\ \overline{D}\ D\ \overline{D} + \overline{D}\ \overline{D}\ \overline{D}\ D) = \binom{4}{1} \cdot \pi \cdot (1-\pi)^3$$

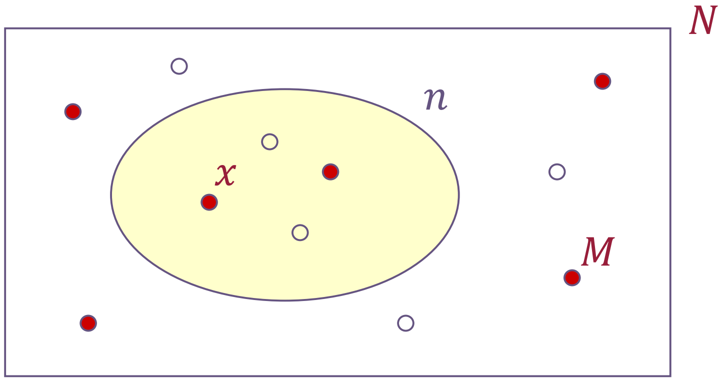
$$P(X = 1) = 0{,}260$$

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

## Hypergeometrické rozdělení $HG(N, M, n)$:

- rozdělení diskrétní náhodné veličiny, která představuje počet úspěšných výsledků při **výběru bez vracení**

$\boldsymbol{N}$ – velikost základního souboru
$\boldsymbol{M}$ – počet prvků s danou vlastností v základním souboru
$\boldsymbol{n}$ – velikost vzorku
$\boldsymbol{x}$ – počet prvků s danou vlastností ve vzorku




$$\pi = \frac{M}{N}$$

pravděpodobnost úspěchu při 1. pokusu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

# Vlastnosti hypergeometrického rozdělení:

pravděpodobnostní funkce

pro $x = 0, 1, \dots, \min(M, n)$

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

střední hodnota: $\boxed{E(X) = n \cdot \pi}$

rozptyl: $\boxed{D(X) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi) \cdot \frac{N-n}{N-1}}$

pro $N >> n$ se rozdělení $HG(N, M, n)$ blíží rozdělení $Bi(n, p)$

# Příklad 3 – jogurty



Mezi 20 jogurty určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 5 jogurtů prošlých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 6 jogurtů, budou 3 z nich prošlé?

$X$ … počet prošlých jogurtů z 6 vybraných (výběr bez vracení)

celkem jogurtů
20

prošlých jogurtů
5

neprošlých jogurtů
15

$$P(X=3)=\frac{\binom{5}{3}\binom{15}{3}}{\binom{20}{6}}$$

počet příznivých možností, vybíráme 3 prošlé z 5 prošlých a zároveň 3 ze 15 neprošlých

počet všech možností, vybíráme 6 jogurtů z 20

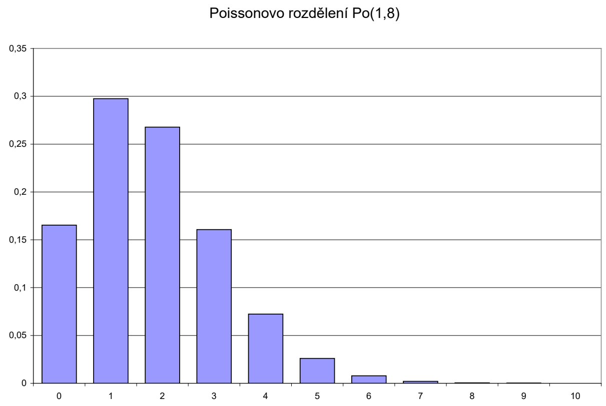
$$P(X=3)=\frac{10\cdot 455}{38650}=0{,}117$$

# Poissonovo rozdělení řídkých jevů $Po(\lambda)$:

- rozdělení diskrétní náhodné veličiny, která představuje počet výskytu sledovaného jevu v daném intervalu

**$\lambda$** – průměrný počet výskytu jevů v intervalu

pravděpodobnostní funkce: $$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$




střední hodnota: $$E(X) = \lambda$$

rozptyl: $$D(X) = \lambda$$

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

## Co je to řídký jev?

Jev nazýváme řídkým (s řídkou pravděpodobností výskytu), pokud:

- počet výskytu jevu v daném intervalu je nezávislý na počtu výskytu v jiných intervalech.
- střední hodnota počtu výskytu jevu je přímo úměrná délce intervalu.
- jev se vyskytuje s malou četností (při vhodně zvolené délce intervalu se v něm vyskytuje maximálně jednou).

# Příklad 4 – systém hromadné obsluhy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

Do opravny přijde během jednoho pracovního dne (10 hodin) v průměru 24 zákazníků. S jakou pravděpodobností přijde během jediné hodiny do opravny nejvýše jeden zákazník?

rozdělení $Po(2,4)$

$$p(0) = \frac{2,4^0 \cdot e^{-2,4}}{0!} = 0,091 \qquad p(1) = \frac{2,4^1 \cdot e^{-2,4}}{1!} = 0,218$$

$$P = p(0) + p(1) = 0,091 + 0,218 = 0,309 \doteq \boxed{31\%}$$

## Shrnutí diskrétních rozdělení:

Dosavadní rozdělení pravděpodobnosti byla **diskrétní**.

- konečná
  - rovnoměrné
  - binomické
  - hypergeometrické

- nekonečná (spočetná)
  - Poissonovo

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

## Rovnoměrné spojité rozdělení $R(a, b)$:

- rozdělení spojité náhodné veličiny, která má pro všechny hodnoty z intervalu $(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b})$ stejnou hustotu pravděpodobnosti výskytu

frekvenční funkce: $$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad pro\, x \in \langle a;b \rangle$$

distribuční funkce: $$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad pro\, x \in \langle a;b \rangle$$

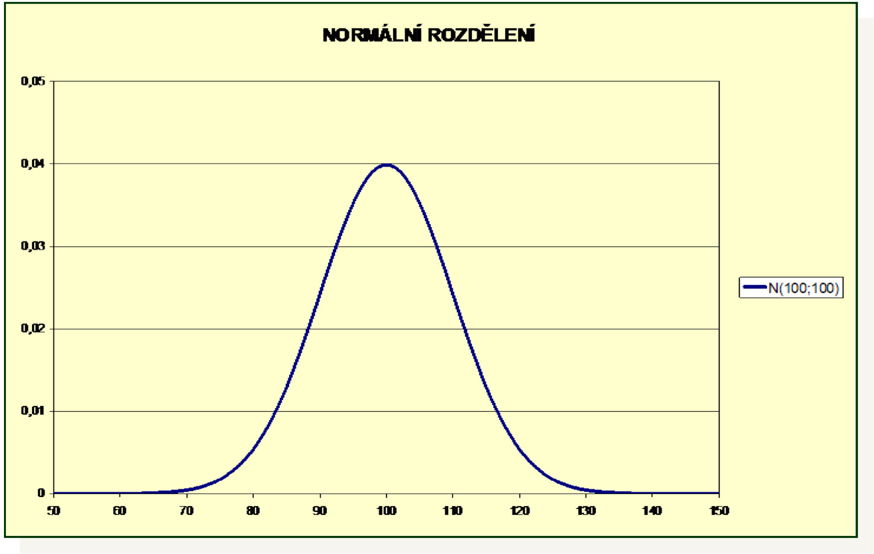
střední hodnota: $$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

rozptyl: $$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

# Vybraná rozdělení

## Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

- rozdělení spojité náhodné veličiny, která kolísá kolem průměru $\boldsymbol{\mu}$ s rozptylem $\boldsymbol{\sigma^2}$ vlivem působení velkého množství malých a navzájem nezávislých vlivů




Gaussova křivka
graf hustoty
pravděpodobnosti
normálního rozdělení

# Vybraná rozdělení

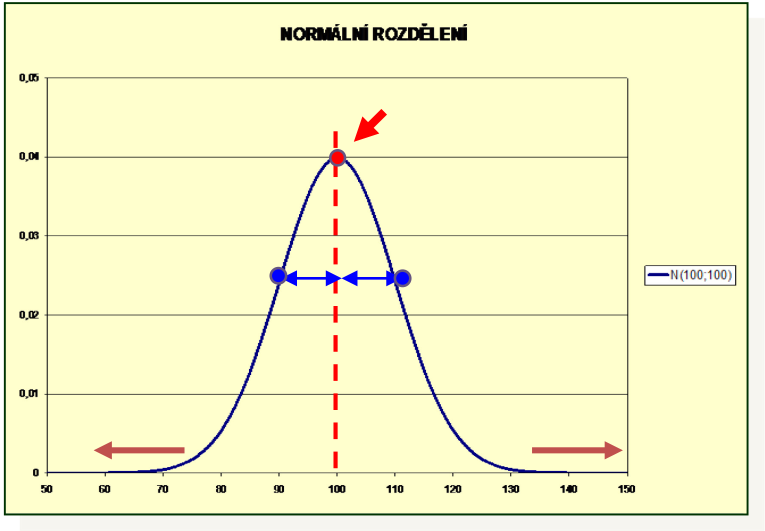
## Vlastnosti normální náhodné veličiny:

- má maximum v bodě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}$, který je současně střední hodnotou a mediánem rozdělení

- je symetrická kolem střední hodnoty $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}$

- v bodech $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu} \pm \boldsymbol{\sigma}$ má inflexní body, $\boldsymbol{\sigma}$ je směrodatná odchylka rozdělení

- pro $\boldsymbol{x} \to \pm\infty$ se asymptoticky blíží k ose $x$



## Co je to normální rozdělení?

Normální rozdělení je nejdůležitějším rozdělením spojité náhodné proměnné, které statistika zná. Slouží jako pravděpodobnostní model chování velkého množství jevů v technice, přírodních vědách i ekonomii, například:

- rozložení hodnot $IQ$ v populaci,
- rozložení hmotnosti výrobků v sériové (pásové) výrobě,
- rozložení týdenního počtu zákazníků v restauraci,
- rozložení výsledků zápočtového testu ze statistiky.

# Příklad 5 – *IQ*



Nechť $X$ je náhodná veličina, která vyjadřuje kvocient inteligence náhodně vybrané osoby. Pak platí:

$$E(X) = 100$$

$$\sigma(X) = 15$$

Testy inteligence je čas od času přepočítávají, aby výše uvedené charakteristiky platily.

# Centrální limitní věta:

Vysvětluje výjimečnost normálního rozdělení.

Součet (nebo aritmetický průměr) náhodně vytvořených nezávislých hodnot veličiny s libovolným rozdělením se s rostoucím počtem sčítanců blíží k náhodné veličině s normálním rozdělením.

Důsledek:

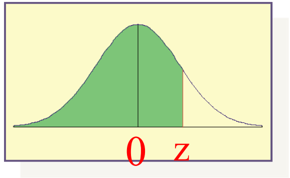
Budeme-li mít veličinu, jejíž chování je způsobeno vlivem většího množství malých nezávislých vlivů, bude se svým chováním blížit veličině s normálním rozdělením.

## Centrální limitní věta:

$Z \approx N\ (0; 1)$ $\quad E(Z) = 0, D(Z) = 1$

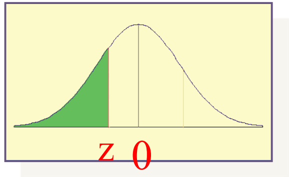
distribuční funkce $\Phi(z)$
kvantil $z_p$

najdeme ve statistických tabulkách




$z = 1{,}28 \rightarrow \Phi(z) = 0{,}89973$

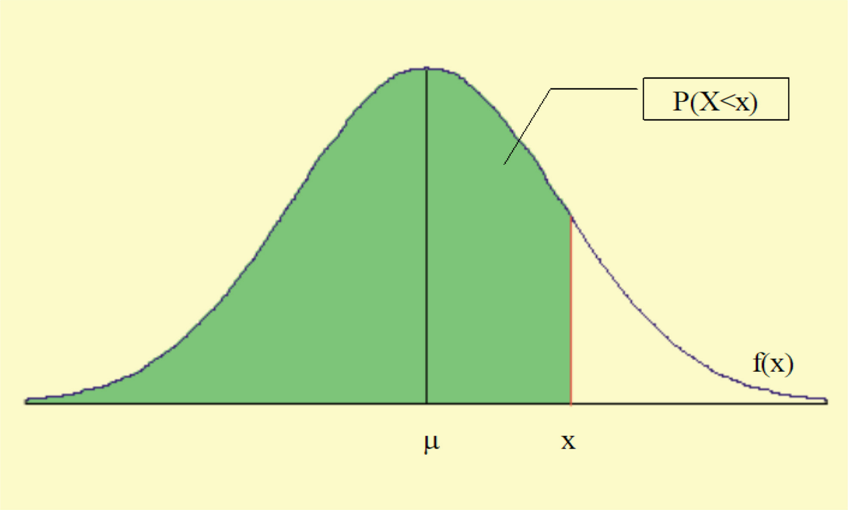
$z = -1{,}28 \rightarrow \Phi(z) = 1 - 0{,}89973 = 0{,}10027$




$$\boxed{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}$$

# Normální rozdělení a pravděpodobnost $P\ (X < x)$:

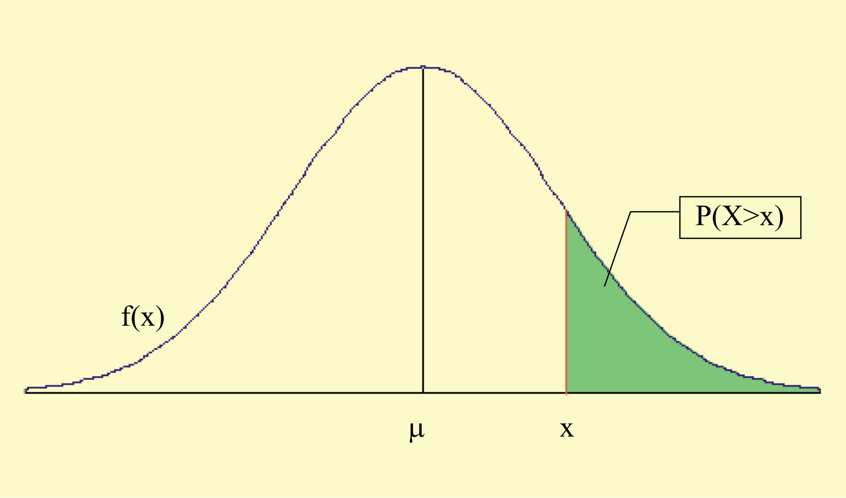
jednostranný interval omezený zprava

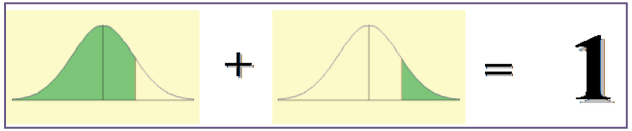



$$P(X < x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

# Normální rozdělení a pravděpodobnost $P\ (X > x)$:

jednostranný interval omezený zleva



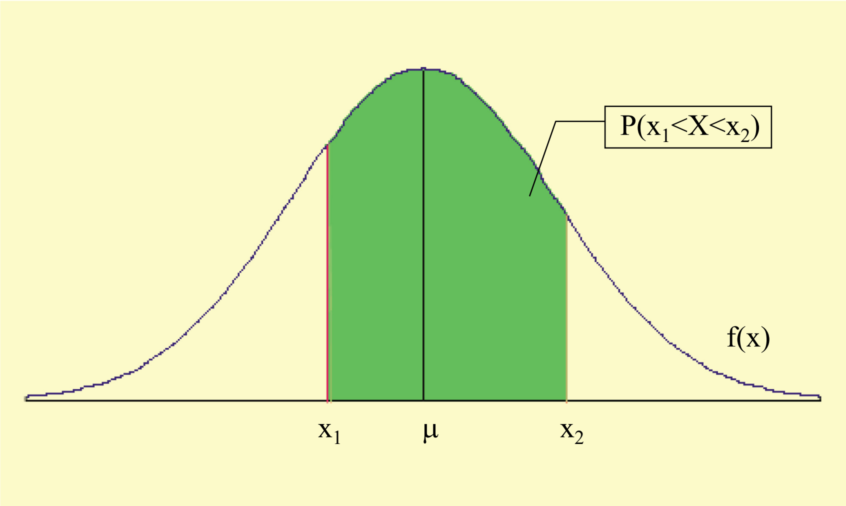



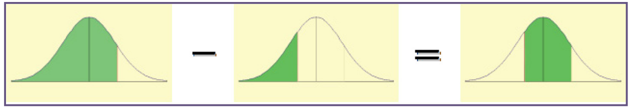

$$P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

# Vybraná rozdělení

## Normální rozdělení a pravděpodobnost $P\ (x_1 < X < x_2)$:

Oboustranně omezený interval

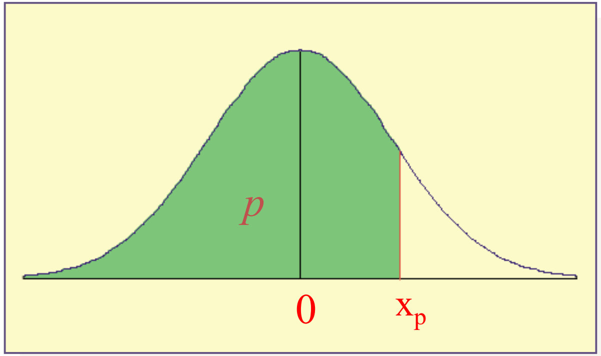



$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

## Výpočet kvantilu $x_p$ : $p \rightarrow x_p$




pro $p < 0{,}5$ platí:

$$z_{1-p} = -z_p$$

1. najdeme v tabulkách nejbližší hodnotu $\boldsymbol{p}$

2. odečteme příslušné $\boldsymbol{z_p}$

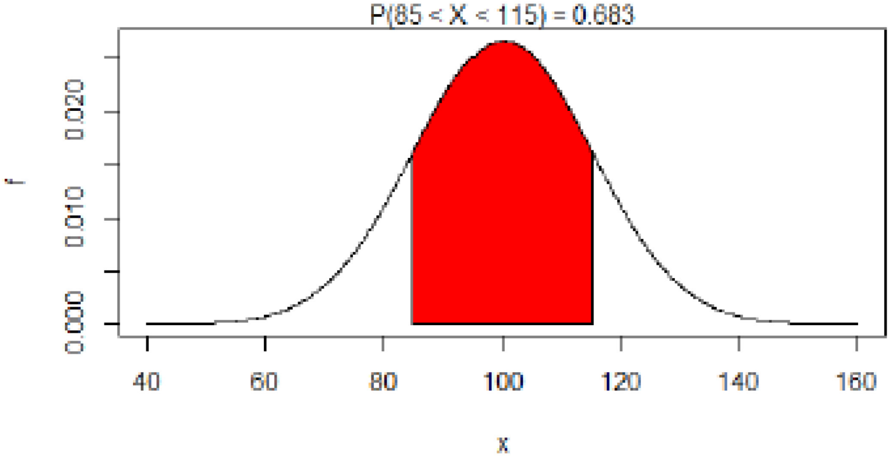
3. provedeme „odnormování“ veličiny $\boldsymbol{z_p} \rightarrow \boldsymbol{x_p}$

$$x_p = \mu + z_p \cdot \sigma$$

# Příklad 6 – *IQ*

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) české populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

a) Kolik procent Čechů má IQ v rozmezí 85-115 bodů?
b) Kolik procent Čechů má IQ vyšší než 115 bodů?

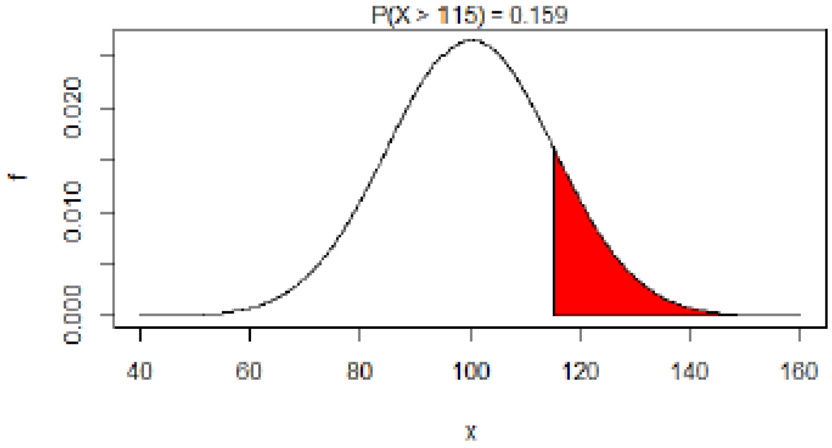



a) $P(85 \leq X \leq 115) = F(115) - F(85) = \Phi\left(\frac{115-100}{15}\right) - \Phi\left(\frac{85-100}{15}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826.$

# Příklad 6 – *IQ*

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) české populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

a) Kolik procent Čechů má IQ v rozmezí 85-115 bodů?
b) Kolik procent Čechů má IQ vyšší než 115 bodů?




b) $P(X > 115) = 1 - F(115) = 1 - \Phi\left(\frac{115-100}{15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$

# Literatura

1. Janáček J. *Statistika jednoduše*. Praha: Grada, 2022. **(kapitola 3).**

2. Ramík J. a Čemerková Š. *Statistika A*. Opava, Karviná: SLU, 2000. **(kapitola 4 a 5).**

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FAKULTA VEŘEJNÝCH POLITIK V OPAVĚ

# Děkuji za pozornost.