Finanční ekonometrie

Modely jednorozměrných stacionárních a nestacionárních časových řad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Modely jednorozměrných stacionárních časových řad

Boxova-Jenkinsova metodologie

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Autory této teorie jsou matematici G.E.P. Box a G.Jenkins = Boxova-Jenkinsova metodologie.
- Metodologie především vychází z modelů, které popisují tzv. stochastické procesy, tj. určité fenomény, které se vyvíjejí v čase plně podle zákonů pravděpodobnosti.
- Tyto modely pracují s náhodnými proměnnými a (většinou) nepředpokládají přítomnost nějaké deterministické složky ve funkčním vztahu.
- Pro stochastický proces je typické, že nelze s jistotou předpovědět jeho budoucí vývoj. Maximálně se může odhadnout pravděpodobnosti jeho budoucího chování.

Boxova-Jenkinsova metodologie

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Metodologie Boxe a Jenkinse je pojata velmi obecně a modely v ní vytvořené jsou schopny popisovat řadu reálných situací.
- Modely, s nimiž se pracuje, jsou schopny popisovat stochastické trendy a dokonce i sezónnost.
- Metodologie lépe totiž popisuje ty časové řady, jejichž vývoj je mnohem dynamičtější, tj. dochází v nich častěji k prudším nebo náhlým změnám.
- Metodologie tedy poskytuje v určitém slova smyslu „pružnější“ modely, jež se lépe adaptují na vývoj sledovaného procesu.

Boxova-Jenkinsova metodologie

- Kromě toho, klasická teorie vychází z regresní analýzy, která dává optimální model v případě, kdy jsou splněny klasické podmínky formulované pro náhodnou složku modelu.
- Tyto podmínky zahrnují předpoklad, že náhodné složky modelu jsou vzájemně nekorelované, tj. že závislé proměnné y_t jsou vzájemně nekorelované.
- Pokud tento předpoklad splněn není, zhoršují se vlastnosti odhadnutých parametrů regresní funkce a modelování se celkově komplikuje.
- V případě Boxovy-Jenkinsovy metodologie se naopak vychází právě ze zkorelovanosti y_t, která je základem pro budování konkrétního modelu.

Výhody a nevýhody Boxovy-Jenkinsovy metodologie

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Výhody :
  - stochastické modely typu ARMA jsou značně flexibilní, takže jsou použitelní i pro časové řady velmi obecných průběhů,
  - lze doložit nepřeberné množství úspěšných aplikací,
  - dostupný software,
  - zatím neexistuje lepší rutinní nástroj pro analýzu časově závislých pozorování.

- Nevýhody:
  - Boxova-Jenkinsova metodologie vyžaduje delší časové řady (minimálně 50 pozorování),
  - bez software je nerealizovatelná,
  - obtížná praktická interpretace zkonstruovaných modelů.

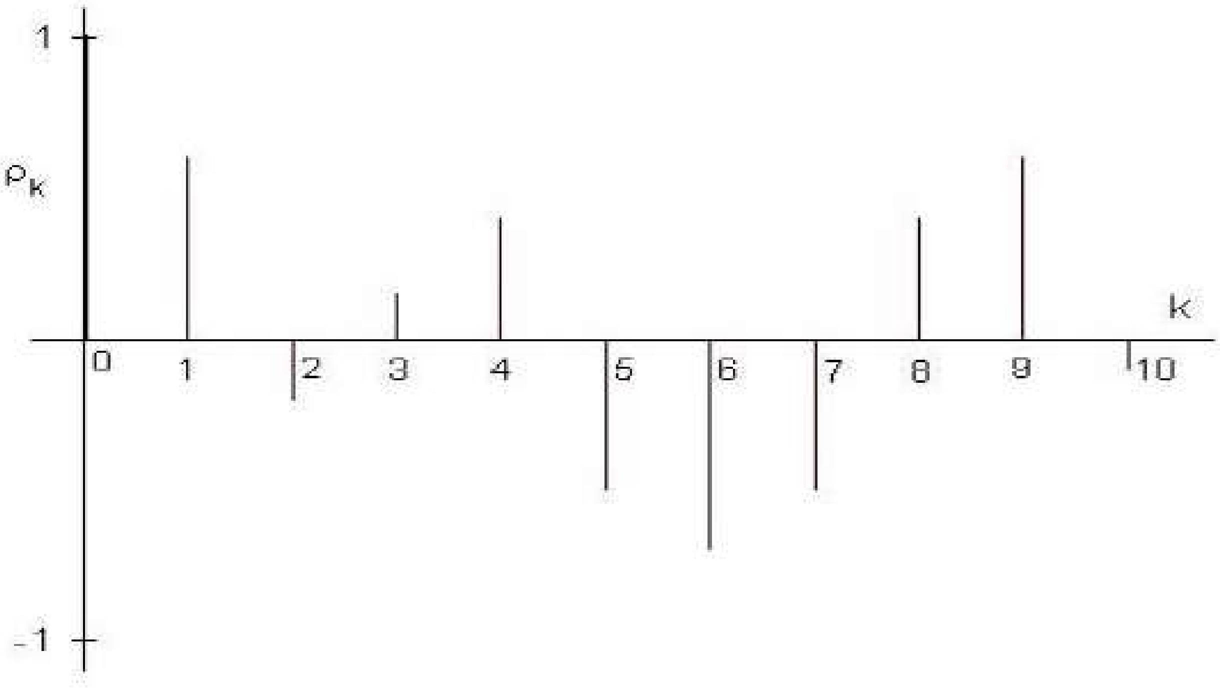
Autokorelační funkce

- Autokorelační funkce (ACF) podává informaci o síle lineární závislosti mezi veličinami y_t a y_{t-k}.
- Autokorelační funkce pro zpoždění *k* (autokorelace pro zpoždění *k*) se definuje jako

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2} \qquad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

- Autokorelační funkce je symetrická kolem *k = 0,* proto je vyjadřovaná pouze pro k > 0. Nabývá hodnoty v intervalu <-1; 1>.
- Graf autokorelační funkce se nazývá korelogram. Korelogram popisuje pomocí několika hodnota krátkodobou dynamiku dané stacionární řady (dlouhodobou dynamiku naproti tomu zachycuje většinou trend).

Korelogram



Parciální autokorelační funkce

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Korelace mezi dvěma náhodnými veličinami je často způsobena tím, že obě veličiny jsou korelovány s veličinou třetí.
- Značná část korelace mezi veličinami X_t a X_{t-k} může být tedy způsobena jejich korelací s veličinami X_{t-1}, X_{t-2}, …, X_{t-k+1}.
- Parciální autokorelace (PACF) podávají informaci o korelaci veličin X_t a X_{t-k} očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi.

Proces bílého šumu (White Noise)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Jestliže je stochastický proces $\{a_t\}$ řadou nekorelovaných náhodných veličin jednoho pravděpodobnostního rozdělení s konstantní střední hodnotou (obvykle nulovou), konstantním rozptylem, pro všechna $k \neq 0$, potom se označuje jako *proces bílého šumu.*

Proces bílého šumu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Základním rysem procesu bílého šumu tedy je, že ACF a PACF jsou identicky nulové.
- I když se tento proces prakticky nevyskytuje, hraje důležitou roli jako základní stavební prvek při výstavbě modelů časových řad.
- Proces bílého šumu se označuje jako gaussovský, je-li jeho sdružené pravděpodobnostní rozdělení normální.

Autoregrese, řády autoregresních procesů (AR)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Proces typu AR (řádu p): p = 1, 2,…,p
  - příklad: AR(1), AR(3) atd.
- základní forma procesu AR:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Charakteristické kořeny leží vně jednotkového kruhu.
- Při zjištění, že tyto podmínky nejsou splněny, proces AR není invertibilní a nemůže být taktéž stacionární!

- Součet hodnot parametru alfa musí být menší než jedna. Pokud jsou jedna nebo se blíží 1, jsou nestacionární.
- Kořeny polynomu musí být v absolutní hodnotě větší jedna.

- Podmínka stacionarity: kořeny polynomu leží v rovině vně jednotkového kruhu.
- AR(p) je tedy automaticky invertibilním procesem.

Klouzavé (pohyblivé) průměry (MA), řády procesů MA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- MA(1): $y_t = e_t - \gamma_1 e_{t-1}$
- nebo pomocí operátoru zpětného posunutí: $y_t = (1 - \gamma_1 L) e_t$
- Modely MA(i) mají vždy konečný řád, to znamená, že jsou vždy stacionární.
- Proces klouzavých průměrů je automaticky stacionární.
- Naproti tomu není automaticky invertibilní.
- Podmínka invertibility: když kořeny polynomu leží vně jednotkového kruhu.

Smíšený model ARMA

- Proces *ARMA* lze identifikovat podle toho, že jeho autokorelační funkce vypadá jako autokorelační funkce procesu *AR* a jeho parciální autokorelační funkce vypadá jako parciální autokorelační funkce procesu *MA*.
- Obojí však platí s výjimkou prvních několika hodnot těchto funkcí.
- Tento návod platí v populaci a tvar výběrových korelací se může lišit, takže ne vždy je možné se těmito doporučeními řídit.
- Výběrové korelace poskytují při výběru konkrétního modelu pouze hrubou orientaci.

- Smíšený proces řádu p a q značený jako ARMA (p,q) je definován jako:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q} .$$

Smíšený model ARMA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Proces ARMA (p,q) má vlastnosti:
  - Podmínka stationarity modelu ARMA (1,1) je totožná s podmínkou stacionarity modelu AR(1), podmínka invertibility je totožná s podmínkou invertibility modelu MA(1).
  - Střední hodnota procesu je nulová.

- Při praktických aplikacích Box-Jenkinsovy metodologie se obvykle vystačí s procesy, pro něž p+q ≤2, tj. s autoregresními procesy maximálně druhého řádu a procesy klouzavých součtů také do maximálně druhého řádu.

Smíšený model ARMA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Výstavbu modelu lze rozdělit do tří základních kroků:
  - Identifikace modelu – jaký typ modelu vybrat (AR, MA, ARMA) a explicitně určit řád modelu
  - Odhad parametrů modelu
  - Ověřování modelu – má potvrdit nebo zamítnout adekvátnost modelu

Modely jednorozměrných nestacionárních časových řad

Nestacionární časové řady

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- V ekonomii a financích se často setkáváme s časovými řadami tvořeny nestacionárními stochastickými procesy.
- Nestacionarita procesu může být způsobena buď v čase se měnící střední hodnotou, nebo v čase se měnícím rozptylem procesu.

Náhodná procházka (Random Walk Process)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Proces náhodné procházky je tvořen kumulováním náhodných veličin tvořících proces bílého šumu.
- Proces náhodné procházky se také nazývá *integrovaný proces*. Protože jeho první diference je proces bílého šumu, nazývá se integrovaný proces řádu jedna a označuje se I(1).
- Náhodná procházka je nestacionární proces. Zdrojem nestacionarity je stochastický trend $\sum_{j=1}^{t} a_j$.

Model ARIMA

- Modely *ARIMA* se hodí pro popis celé řady nestacionárních procesů.
- Model *ARIMA(p,d,q)* má tři parametry
  - první udává stupeň autoregresního operátoru,
  - druhý počet diferencí aplikovaných na původní časovou řadu
  - a třetí udává stupeň *MA* operátoru.
- Pracovat s modely *ARIMA* tedy znamená *d*-krát diferencovat původní časovou řadu a pak s ní pracovat pomocí modelu *ARMA*.
- Odhad parametrů i verifikace modelu se tak vlastně aplikuje na výsledný *ARMA* model.

Model ARIMA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Pokud jde o identifikaci modelu *ARIMA*, používají se opět autokorelační a parciální autokorelační funkce, které se však konstruují pro různé úrovně *d*, tj. konstruují se pro původní časovou řadu, pro jedenkrát zdiferencovanou časovou řadu, dvakrát zdiferencovanou časovou řadu, atd.
- Pro nestacionární procesy je typické, že jejich korelogram vykazuje jen velmi pozvolný pokles korelace s rostoucím *k.*
- Pokud taková situace nenastává, nemá smysl řadu diferencovat, pokud nastává, je třeba konstruovat více korelogramů pro různé úrovně *d*, dokud korelogram nebude mít pro konkrétní d = *d* * již známý tvar typický pro *modely ARMA(p,q).*
- Následně je pak třeba vyzkoušet k analýze procesu model *ARIMA(p, d * ,q).*

Modely sezónních časových řad (SAR, SMA, SARMA, resp. SARIMA)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Důležitou vlastností mnoha krátkodobých časových řad je sezonnost.
- Sezonní složkou časových řad se rozumí periodické kolísání, které má systematický charakter.
- Toto kolísání se u makroekonomických časových řad odehrává během jednoho kalendářního roku a každý rok se ve stejné nebo modifikované podobě opakuje.
- U denních finančních časových řad se však také může projevovat pravidelné periodické kolísání, např. ve dnech během týdne.

Modely sezónních časových řad (SAR, SMA, SARMA, resp. SARIMA)

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Tradičním předpokladem je, že sezonní složka časové řady má pravidelný deterministický charakter.
- Tento typ systematičnosti lze dále klasifikovat na stacionární a integrovaný (jedná se o analogii nesezonních stacionárních a integrovaných řad).

Frakcionálně integrované procesy (tzv. dlouhá paměť), frakcionální diference, model ARFIMA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Při analýze stacionárních procesů ARMA se došlo k závěru, že hodnoty ACF těchto modelů vykazují s rostoucím zpožděním exponenciální pokles.
- To znamená, že náhodné veličiny, které jsou od sebe časově vzdálené, můžeme pokládat za téměř nekorelované.
- Avšak v praxi se také můžeme setkat s časovými řadami, tvořenými stacionárními procesy, jejichž i velmi časově vzdálené náhodné veličiny jsou poměrně silně korelované.

Frakcionálně integrované procesy (tzv. dlouhá paměť), frakcionální diference, model ARFIMA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Na tento jev u časových řad v hydrologii poprvé upozornil Hurst (1951, 1957).
- Podobné vlastnosti byly později nalezeny také u ekonomických, zejména pak u finančních časových řad.
- Časové řady s touto vlastností se označují jako *řady s dlouhou pamětí* a jejich generující stochastické procesy jako procesy s dlouhou pamětí.
- Modely časových řad s dlouhou pamětí se v ekonometrii pravidelně objevují od 80. let minulého století.
- Jejich charakteristikou vlastností je, že hodnoty ACF neklesají s rostoucím zpožděním exponenciální, ale hyperbolicky.

Frakcionálně integrované procesy (tzv. dlouhá paměť), frakcionální diference, model ARFIMA

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Toto chování je možné modelovat pomocí procesů ARFIMA(p,d,q), které jsou zobecněním modelů ARIMA(p,d,q).
- V procesech ARFIMA není kladeno žádné omezení na řád diferencování a *d* může být libovolné reálné číslo, které se označuje jako frankcionální parametr.

Diagnostika modelu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Diagnostika v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie spočívá v tom, že pomocí různých diagnostických nástrojů ověřujeme (verifikujeme) adekvátnost zkonstruovaného modelu, tj. kontrolujeme, zda je skutečně kompatibilní s analyzovanými daty.
- Přitom se zaměřujeme zejména na:
  - Kontrola stationarity
  - Kontrola struktury ARMA
  - Grafická prohlídka vypočteného bílého šumu
  - Testování nekorelovanosti pro vypočtený bílý šum

Kritéria pro volbu modelu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Při analýze časové řady můžeme dojít k závěru, že existuje několik akceptovatelných modelů. Někdy je poměrně jednoduché z této množiny vybrat ten nejlepší. Jsou však situace, kdy tuto jistotu nemáme a výběr nejlepšího modelu je velice obtížný.
- Pro řešení bylo navrženo několik dodatečných kritérií. Tato kritéria jsou založena na porovnání reziduí jednotlivých modelů prostřednictvím souhrnných statistik. Předpokládají přitom, že řád diferencování byl zvolen správně.
- **Jako nejvhodnější se vybírá model minimalizující hodnoty těchto kritérií.**
    - Akaikeho kritéria AIC a BIC
    - Schwartzovo bayesovské kritérium SBC
    - Hannanovo-Quinnovo kritérium HQ

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den ☺