SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Finanční ekonometrie

Téma 9:

Nelinearita finančních časových řad a modely volatility

Finanční časové řady

- Speciálně lineární modely časových řad nejsou schopny zohlednit některé typické vlastnosti finančních řada, jako je např.:
  - Leptokurtické rozdělení: míry zisku finančních aktiv mívají rozdělení, která jsou více špičatá kolem středu, přičemž na koncích je jejich hustota větší a v ramenech menší než u normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a rozptylem; významnou charakteristikou takových rozdělení bývá kladný koeficient špičatosti.
  - Shlukování volatility: tendence volatility finančních trhů objevovat ve shlucích vysokých a nízkých volatilit, tj. velké (malé) výkyvy v míře zisku lze očekávat spíše po větších (menších) předchozích výkyvech (někdy také výbuších volatility (bursts)).
  - Pákový efekt (leverage effect): souvisí s kolísáním volatility v čase, se kterým se lineární modely nejsou schopni vypořádat; konkrétně se jedná o tendenci volatility zvětšit se více po cenovém poklesu než po cenovém nárůstu stejné velikosti.

Modelování volatility

- Modelování a předpovídání volatility je v centru zájmu finančních analýz, protože volatilita uvažovaná jako směrodatná odchylka různých ukazatelů výnosnosti či ztrátovosti je dnes základní mírou rizikovosti finančních aktiv.
- Přestože volatilita není přímo pozorovatelná, má určité charakteristiky, které jsou obvyklé, když se právě sleduje výnosnost nejrůznějších finančních aktiv:
  - Shlukování volatility: volatilita může být v některých obdobích vysoká a v jiných nízká,
  - Pákový efekt: volatilita reaguje odlišně na cenový vzestup a cenový pokles,
  - Volatilita se vyvíjí spíše spojitě bez nějakých výrazných skoků,
  - Volatilita nediverguje k vysokým (neomezeným) hodnotám, ale její průběh bývá spíše stacionární v určitém rozmezí.

Modely volatility

- Modely volatility (tedy modely popisující variabilitu finančních časových řad) se zabývají modelováním podmíněného rozptylu (na rozdíl od modelů podmíněné střední hodnoty - ARMA).
- Na analýzu volatility se velmi často používají modely založené na konceptu autoregresivní podmíněné heteroskedasticity (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, ARCH).
- Tyto modely předpokládají v čase proměnlivou volatilitu časových řad, což je jeden ze základních rysů ekonomických a především finančních dat.

Modely volatility

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Jelikož až do 80. let 20. století se ve výzkumu i praxi používaly výhradně modely založené na předpokladu konstantní volatility, staly se modely třídy ARCH základem moderní finanční ekonometrie.
- Základem rozsáhlé skupiny modelů volatility je model ARCH, který v roce 1982 sestavil R.F. Engle (1982).
- Jeho model dokázal jako první popsat měnící se variabilitu časových řad, která je odrazem nejistoty a rizika vyskytujícího se ve finančních časových řadách.

Modely volatility

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Vzhledem k faktu, že modely volatility charakterizují vývoj podmíněného rozptylu stochastického procesu, jedná se vlastně o modely nelineární.
- Přesto se v této skupině modelů rozlišují lineární a nelineární modely.
- Lineární modely vycházejí z jednoduchého funkčního vztahu, kdy je podmíněný rozptyl lineární funkcí zpožděných čtverců reziduí stacionárního autoregresního procesu.
- Mezi nejznámější lineární modely volatility patří ARCH model, modely GARCH nebo GARCH-M.
- Tyto modely byly také zahrnuty do statistického software EViews.

Modely volatility

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Pokud je funkce podmíněného rozptylu a zpožděných čtverců reziduí stacionárního autoregresního procesu nelineární, jde o tzv. nelineární modely volatility.
- Ty jsou schopny zachytit empiricky popsanou vlastnost některých finančních časových, která spočívá v přítomnosti různých asymetrických efektů.
- Nejznámější popsal Black (1976) jako pákový efekt, při kterém se kladné a záporné šoky nepromítají do podmíněného rozptylu časové řady symetricky, jak to popisují lineární modely volatility.
- Lineární modely nejsou takovouto asymetrii schopny popsat, protože jimi popsaný podmíněný rozptyl je závislý na čtverci šoků a nerozlišuje tedy, zda je hodnota šoků kladná nebo záporná.
- Mezi nejvýznamnější nelineární modely patří modely EGARCH (Nelson, 1991), GRJ-GARCH (Glosten, Jaganathan a Runkle, 1993) a APARCH (Ding a kol., 1993).
- Přičemž APARCH v sobě zahrnuje jak nelineární, tak i lineární modely.
- Odhady těchto parametrů jsou dostupné v programu EViews.

Teoretické vymezení modelů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Nutnost aplikace modelů třídy ARCH nabývá na významu zejména při použití časových řad s častější frekvencí pozorování, například denní.
- Ve většině případů se dostaneme do situace, kdy nejsou splněny podmínky, za nichž lze aplikovat lineární modely typu ARMA nebo ARIMA.
- K základním „prohřeškům“ patří hlavně nesplnění podmínky homoskedasticity a normality časových řad.
- Filtrace takových časových řad modelem ARMA nebo ARIMA nevede k časové řadě typu bílého šumu a analyzovaná časová řada je zpravidla charakteristická měnící se variabilitou, kterou nazýváme proměnlivou volatilitou časové řady.

Teoretické vymezení modelů

- Fenomén proměnlivé volatility vysokofrekvenčních finančních dat lze spojit i se shlukováním volatility (volatility clustering).
- Princip shlukování vychází z tendence výrazných změn v cenách finančních aktiv následovat výrazné změny a tendence malých změn následovat malé změny.
- Jinými slovy je současná úroveň volatility pozitivně korelována s úrovní v bezprostředně předcházejících obdobích.
- Finanční časové řady s denní frekvencí pozorování obvykle mají i rozdělení pravděpodobnosti hodnot, které se liší od normálního rozdělení.
- Jejich typické rozdělní je ve skutečnosti špičatější a má „tlustší chvosty“ než normální rozdělení.

Teoretické vymezení modelů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Engle (1982) upozornil na skutečnost, že standardní lineární modely typu ARMA nebo ARIMA sice umožňují v čase proměnlivou střední hodnotu, ale podmíněný rozptyl je konstantní, což už realitě neodpovídá.
- Bylo tedy nutné navrhnout modely, které by splňovaly předpoklad v čase se měnícího podmíněného rozptylu (případně podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu).
- Podstatným rysem této koncepce je, že se nemění původní požadavek normality.

Modely ARCH

- Formálně pak můžeme obecný lineární model ARCH(q) s *q* členy v autoregresní formě pro *n* zpoždění zapsat takto:

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

- nebo

$$\sigma_t^2 = \varpi + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 = \varpi + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2$$

- kde σ^2 je podmíněný rozptyl reziduí časové řady, ω je konstanta, *α* je koeficient a ε^2 jsou rezidua. Jelikož podmíněný rozptyl musí být kladné číslo, pak je dáno, že ω musí být > 0 a α_n musí být ≥ 0.
- Tyto modely se vyznačují schopností zachytit shluky volatility, protože jestliže je ε^2_{t-1} nízké, pak lze očekávat, že ε^2_t bude také nízké, a naopak.

Modely GARCH

- **Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity**
- Autorem modelu GARCH je T. Bollerslev (1986).
- Model GARCH je rozšířením modelu ARCH o zpožděný podmíněný rozptyl.
- Nahrazuje jednodušší model tam, kde by bylo nutné odhadovat velké množství parametrů α_i *(model ARCH s vysokým stupněm q).*
- Podmíněný rozptyl procesu je tedy lineární funkcí čtverců reziduí modelu a zpožděného podmíněného
- rozptylu:

$$\sigma_t^2 = \varpi + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- nebo

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta(L)\sigma_{t-1}^2$$

Modely GARCH

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Kladné hodnoty nepodmíněného rozptylu je dosaženo, když $\omega>0$, $\alpha_i>0$ pro i = 1, 2, ..., q a $\beta_j \geq 0$ pro j = 1, 2, ..., p.
- Nepodmíněný rozptyl procesu ε_t je konstantní a má tvar:

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha(1)-\beta(1)}$$

- Také tento model dokáže podchytit zvýšenou špičatost časové řady.

- Parametry modelů GARCH lze odhadovat pomocí programu EViews, který je odhaduje prostřednictvím maximalizace věrohodnostní funkce.

Modely EGARCH

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- **Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity**
- Model je jedním z nejvýznamnějších nelineárních modelů volatility.
- Byl publikován v roce 1991 D.B. Nelsonem .
- *Cílem modelu EGARCH bylo zachytit tzv.* asymetrické efekty ve finančních časových řadách.
- Nejznámějším je pákový efekt, při kterém je vliv záporných šoků na hodnotu podmíněného rozptylu výrazně vyšší nežli vliv šoků kladných.
- Pákový efekt pojmenoval F. Black (1976).
- Model podmíněného rozptylu má následující tvar:

- ***EGARCH (1, 1)***

$$\log \sigma_t^2 = \varpi + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right|$$

- ***EGARCH (p, q)***

$$\log \sigma_t^2 = \varpi + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log \sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j \left| \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right| + \gamma_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right)$$

Modely EGARCH

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Zde platí, že pro popis případné asymetrie je důležitá hodnota parametrů γ_i.
- Je-li různá od nuly, asymetrie se v modelu vyskytuje.
- Je-li hodnota parametru záporná, existuje v časové řadě pákový efekt, tedy vyšší vliv záporných šoků než šoků kladných.
- Je-li hodnota γ_i kladná, je asymetrický efekt opačný.
- Kladné šoky v takovém případě zvyšují volatilitu časové řady více než šoky záporné.

TGARCH

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- **Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity**
- Model vytvořil J.M. Zakoian (1990), dále jej dopracoval spolu R. Rabemananjarem (1993) do tvaru:

$$\sigma_t^2 = \varpi + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 d_{t-k}$$

- ***TARCH (1, 1)***

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1}$$

- Vliv kladných šoků je popsán parametry α_i *a vliv* šoků záporných parametry γ_k.
- *Pákový efekt se v řadě vyskytuje pokud platí nerovnost* $\alpha_i < \gamma_k$.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den ☺