VIII. Intervaly spolehlivosti

Princip bodového a intervalového odhadu

Příklad: Odhadněte velikost průměrné hodnoty nákupů μ u zákazníků hypermarketu TESCO Ka v roce 2012 s pravděpodobností **95%**.

Je náhodně vybrán vzorek **64** zákazníků: vypočítán průměr $\bar{x}$ = **450** Kč a je známa směrodatná odchylka: σ = **128** Kč.

Řešení:

Průměrnou velkost nákupů populačního souboru (všech) zákazníků TESCO Ka v r. 2012 odhadneme jako interval [*L*,*P*]:

L - levý krajní bod, *P* - pravý krajní bod. Střed intervalu stanovíme jako $\overline{x}$. Hledaný interval:

$$L = \overline{x} - \Delta,\ P = \overline{x} + \Delta$$

Přitom

$$\boxed{\Delta = 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

V Excelu:
=NORMSINV(0,975)=1,9599

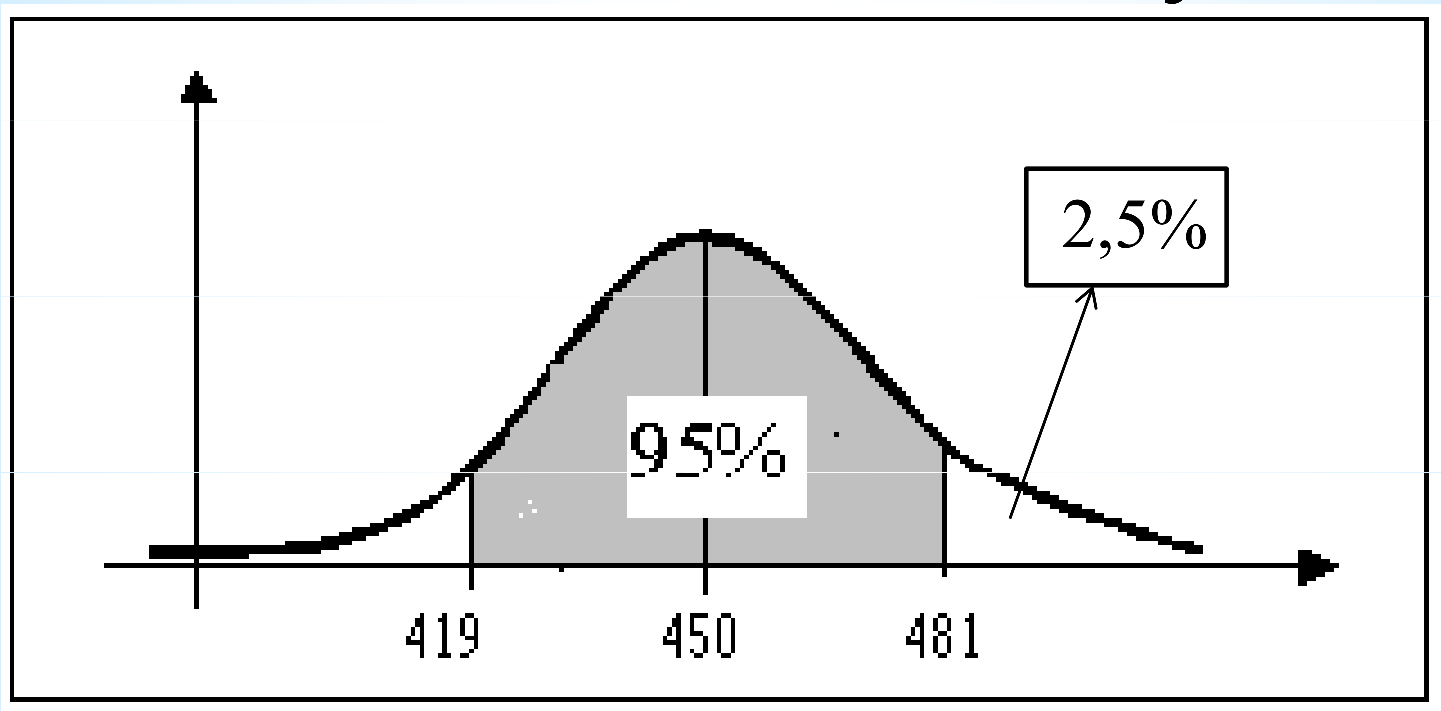
kde $n = 64$, $\sigma = 128$, tj. $\Delta = 1{,}96 \frac{128}{\sqrt{64}} \approx 31$

1,96 je 2,5% krit. hodn. N(0,1)

Hledaný interval: [*L*,*P*] = [450-31,450+31] = [419,481], tedy:

Neznámý populační průměr μ leží v ***intervalu spolehlivosti*** [419,481] s pravděpodobností 95 procent („téměř jistota“)

Interval spolehlivosti střední hodnoty

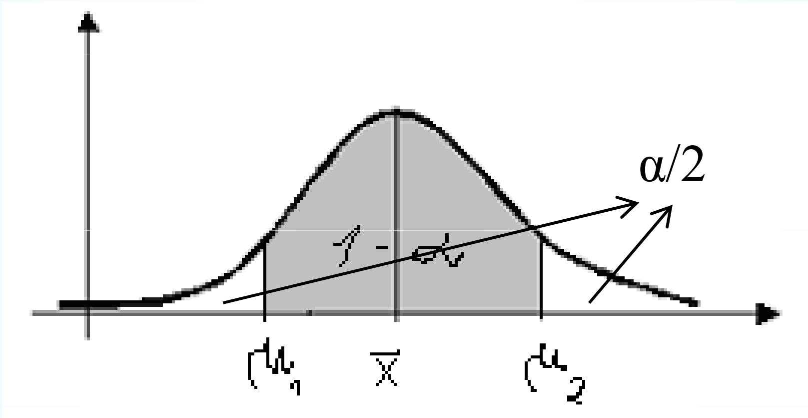


$\bar{x}$ = 450 Kč - bodový odhad μ

[419, 481] - 95% - ní interval spolehlivosti μ

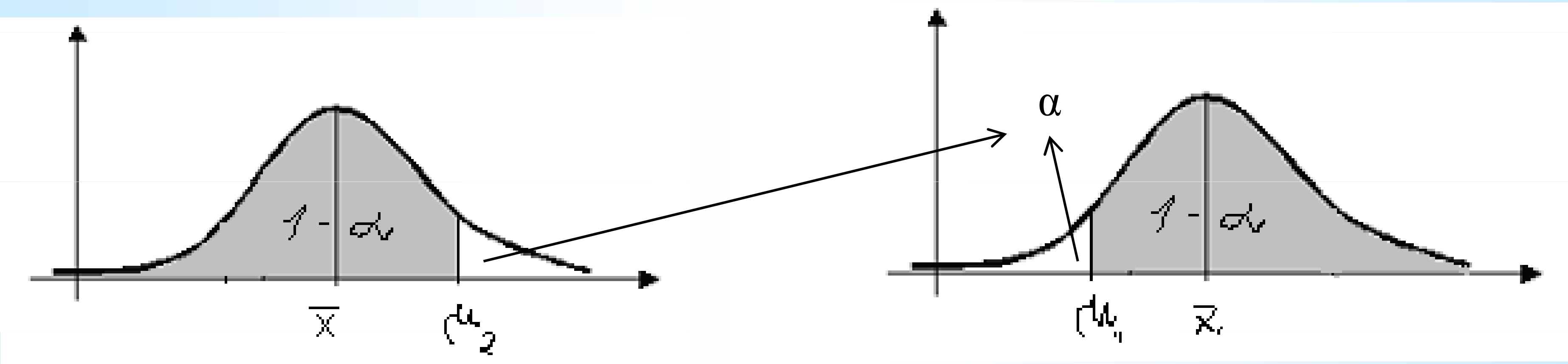
Dvoustranný a jednostranné intervalové odhady

Dvoustranný IS



Levostranný IS

Pravostranný IS



Výpočet intervalů spolehlivosti pro μ (1)

- Uvažujeme PNV rozsahu n z X s parametry střední hodnoty μ a rozptylu σ^2, které ***neznáme***
- Uvažujeme statistiku: $$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

kde $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

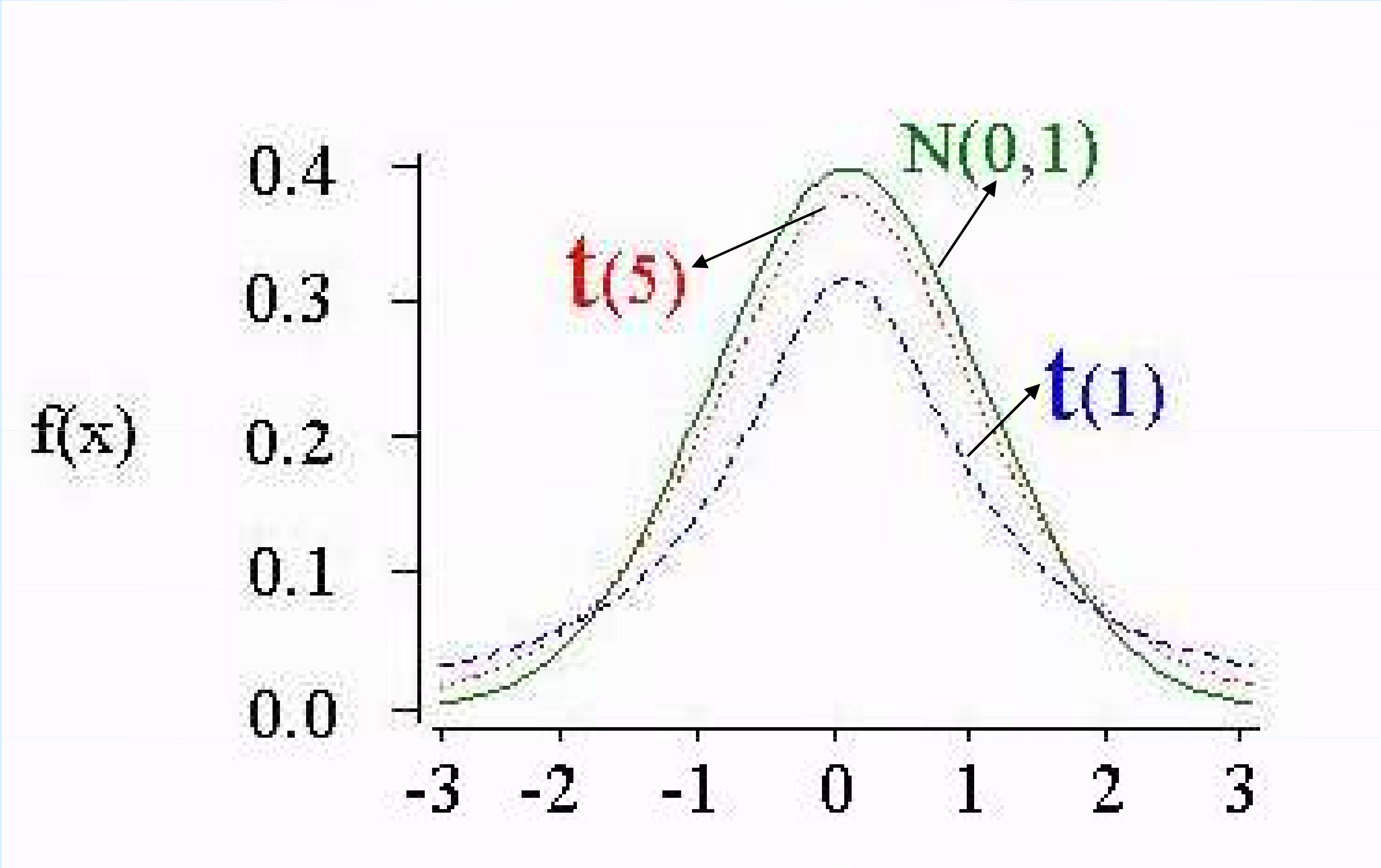
Výpočet intervalů spolehlivosti pro μ (2)

- T má **Studentovo rozdělení *t***
  s $\boldsymbol{df = n\text{-}1}$ stupni volnosti
  (***d***egree of ***f***reedom)
- Stanovíme **kritické hodnoty rozdělení *t*:**

$$\boxed{P(-t^{df}_{\alpha/2} \le T \le t^{df}_{\alpha/2}) = 1-\alpha \qquad \text{- dvojstranný IS}}$$

$$\left.\begin{aligned} P(-\infty \le T \le t^{df}_{\alpha}) = 1-\alpha \\ P(-t^{df}_{\alpha} \le T \le +\infty) = 1-\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{- jednostranné IS}$$

Studentovo rozdělení *t*
graf hustoty pro df*=1,* df*=5*



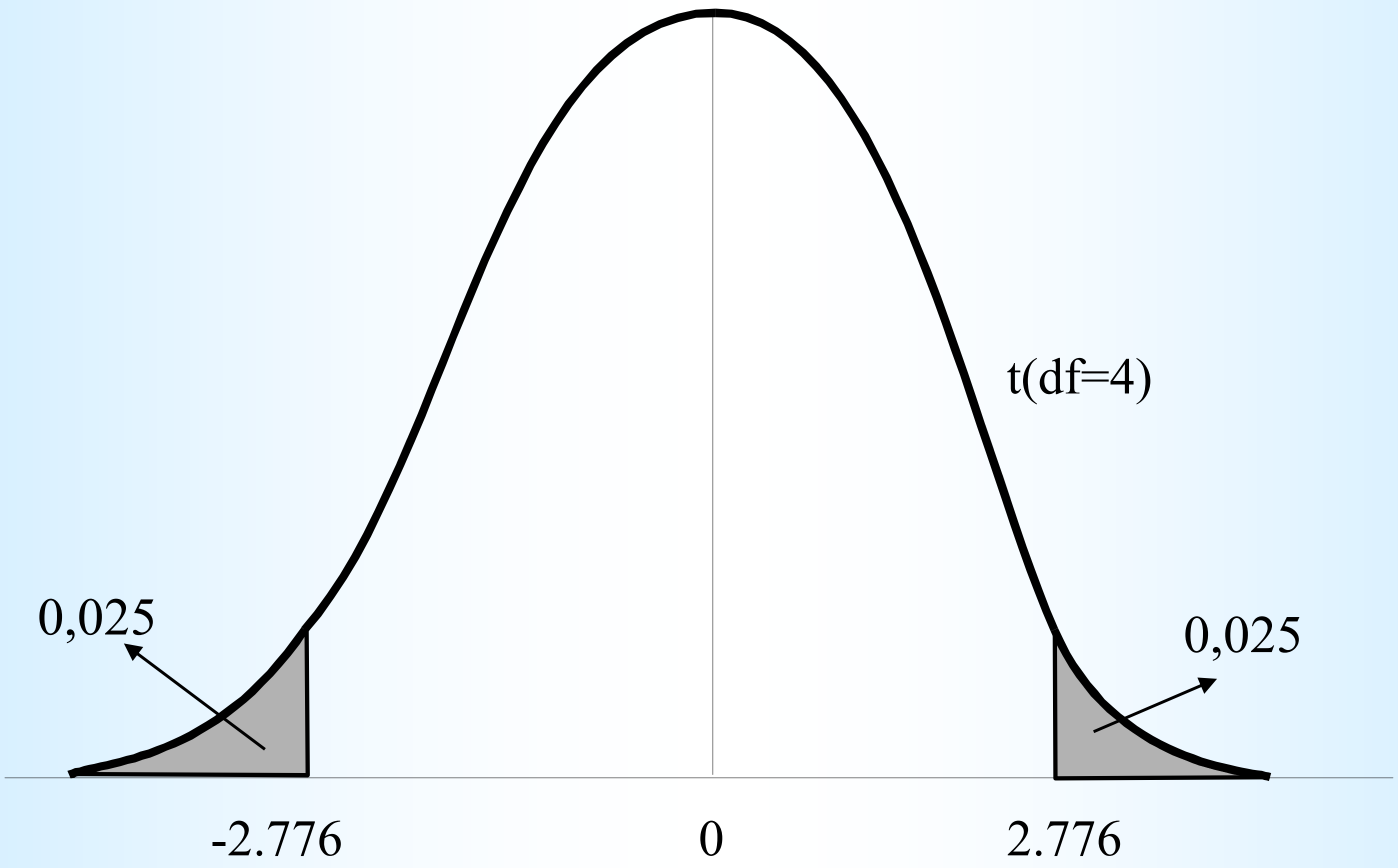
Studentovo rozdělení *t*

Tabulka kritických hodnot

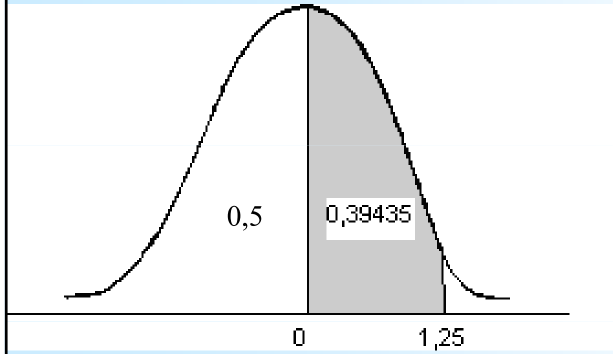
Jednostr. α	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
Oboustr. α df	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	0.941	1.195	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.925	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.073	0.883	1.100	1.383	1.883	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.666
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Studentovo rozdělení *t*

Graf hustoty a kritické hodnoty



Excel: TINV(0,05;4)=2,776



Normální rozdělení $N(0,1)$

Tabulka kritických hodnot

Excel: NORMSINV(0,5+0,39435) = 1,25

$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.10260	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.18824	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.36460	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34850	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0,39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42786	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49532	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929

Důležité kritické hodnoty normovaného normálního $N(0,1)$ a studentova rozdělení t

Funkce Excel	α=0,10	α=0,05	α=0,01	df
NORMSINV(1-$\alpha/2$)	1,64	1,96	2,58	
TINV(α,df)	2,015	2,571	4,032	df=5
	1,812	2,228	3,169	df=10
	1,697	2,042	2,750	df=30

Výpočet intervalů spolehlivosti pro μ (3)

$$\mu \in [\bar{x} - t_{\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty)$$ Pravostr. IS

$$\mu \in (-\infty, \bar{x} + t_{\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}]$$ Levostr. IS

$$\boxed{\mu \in [\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}]}$$ Oboustranný IS

t_{α}^{n-1} - krit. hodnota Studentova *t*-rozdělení

Výpočet intervalů spolehlivosti pro μ (4)

Poznámky:

- Pro $n > 30$ můžeme namísto t_{α}^{n-1} použít z_{α} ! (tj. krit. hodnoty normovaného normálního rozdělení)
- Pro $n < 30$ předpokládáme ***normálně rozdělenou veličinu*** X, jinak výsledky ***neplatí***!

Příklad 1. Průměrná spotřeba benzínu

α =	0,01	0,05	0,1
(1-α) =	0,99	0,95	0,9

č. testu	spotřeba
1	7,8
2	6,4
3	5,5
4	8,1
5	7,7
6	5,6
7	9,1
8	6,6
9	7,2
10	6,6
11	6,0
12	6,4

Excel: TINV(0,05;11) = 2,200

6,92-2,20*1,04/3,46 = 6,26

$$\boxed{\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{až} \quad \boxed{\bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

5,99	až	7,85	- 99% IS
6,26	až	7,58	- 95% IS
6,38	až	6,92	- 90% IS

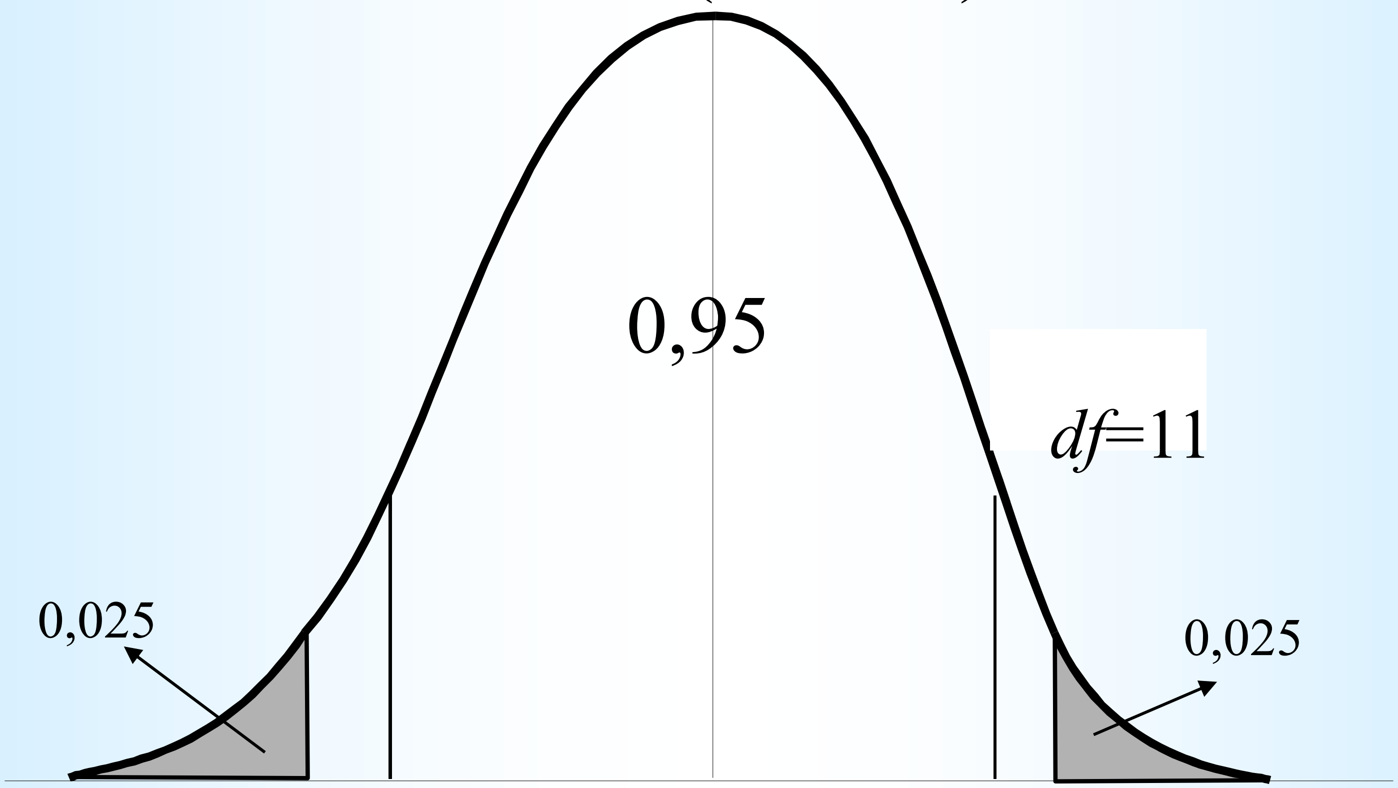
	Xpruh =	6,92		
	s =	1,04		
$t_{\alpha/2}^{n-1}$	*t(n-1,alfa)* =	3,11	2,20	1,80
	odmocnina(n) =	3,46		

Bodový odhad: $\bar{x}$ = 6,92

Příklad 1:

$\alpha = 0{,}05$

Excel: TINV(0,05;11)=2,200



6,92 – 2,2*1,04/3,46 =6,26 | 6,92 | 6,92 + 2,2*1,04/3,46 =7,58

Příklad 2. Průměrná hodnota nákupů

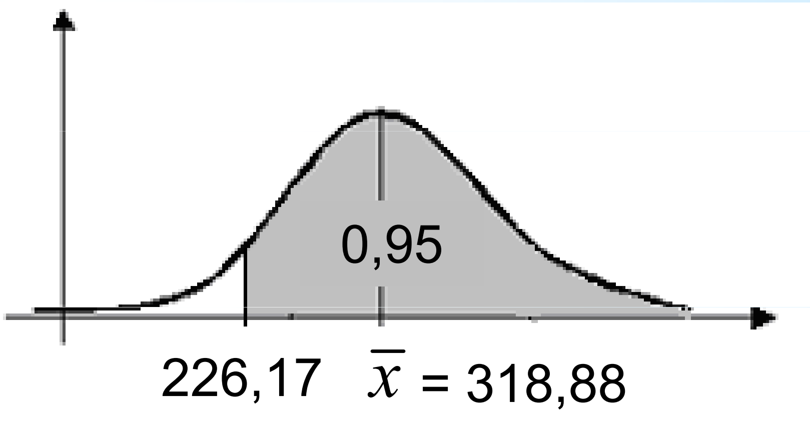
oboustranný IS

α =	0,01	0,05	0,1
(1-α) =	0,99	0,95	0,9

hodnota nákupů v Kč	
122	316
435	390
43	45
533	540
145	210
267	150
376	588
334	445
143	298
52	351
1211	245
230	64

Xpruh =	313,88		
s =	250,70		
t(n-1,alfa) =	2,50	1,71	1,32
odmocnina(n) =	4,90		

$\bar{x} - t_{\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	až	$+\infty$	
185,95	až	$+\infty$	- 99% PrIS
226,17	až	$+\infty$	- 95% PrIS
246,35	až	$+\infty$	- 90% PrIS



Stanovení rozsahu vzorku 1

Rozsah vzorku - počet stat. jednotek ve výběrovém souboru

Absolutní chyba odhadu Δ - polovina šířky IS

Relativní chyba odhadu δ (vztažena k průměru) je

$$\delta = \frac{\Delta}{\bar{x}} \; [\times 100 \text{ v } \%]$$

Stanovení rozsahu vzorku 2

Následující úloha je z praktického pohledu velmi důležitá!

- Potřebujeme znát rozsah vzorku pro předem zadanou chybu Δ → $\Delta = z_{\alpha/2} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
- Ze vzorce pro IS lze snadno vypočítat rozsah náhodného výběru n_R :

$$\boxed{n_R = \frac{(z_{\alpha/2})^2 s^2}{\Delta^2}}$$

Stanovení rozsahu vzorku 3

- Analogicky vypočítáme rozsah náhodného výběru n_R (počet hodnot vzorku) pro předem zadanou **relativní** chybu δ (např. $\delta = 0{,}03$ tj. 3 %) → do vztahu (*) dosadíme $\Delta = \delta\,\bar{x}$

$$\boxed{n_R = \frac{(z_{\alpha/2})^2 s^2}{\delta^2 \bar{x}^2}} \qquad (*)$$

Příklad 4. Rozsah vzorku

Uvažujme úvodní příklad (s hodnotami nákupů): $\bar{x} = 450,\ s = 128$

1. Jak velký vzorek bychom měli uvažovat, abychom se dopustili při odhadu střední hodnoty chyby maximálně 20 Kč (na hladině významnosti 5%)
2. Kolik zákazníků bychom měli uvažovat, abychom se dopustili relativní chyby 10% (na hladině významnosti 5%)?

Příklad 4. Rozsah vzorku - řešení

(ad 1) Vypočteme $n_R > \frac{(1{,}96)^2 128^2}{20^2} = 157{,}35$

$\rightarrow$ alespoň 158

(ad 2) $\Delta = \delta\,\bar{x}$ = 0,1.450 = 45

$$n_R > \frac{(1{,}96)^2 128^2}{45^2} = 31{,}08$$ $\rightarrow$ alespoň 32

Interval spolehlivosti pro parametr σ^2

- Bodovým odhadem rozptylu σ^2 je výběrový rozptyl S^2
- X - normálně rozdělená NV

Interval spolehlivosti pro parametr σ^2

- Statistika $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
  má Chi-kvadrát rozdělení $\chi^2(n\text{-}1)$
  s $df = n$-1 stupni volnosti
- oboustranný interval spolehlivosti:

$$\boxed{\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right]}$$

Příklad 5. IS rozptylu měření velikostí

Na základě 25 nezávislých měření velikosti vyrobených součástek byl zjištěn výběrový rozptyl 36 μm. Sestrojte 95%-ní interval spolehlivosti pro odhad rozptylu délek všech součástek, za předpokladu normálního rozdělení základního souboru

- $\alpha = 0{,}05$, $n = 25$ $\quad \chi^2_{0,025}(24) = 12{,}4 \quad \chi^2_{0,975}(24) = 39{,}4$
- $\sigma^2 \in \left[\frac{24.36}{39{,}4}; \frac{24.36}{12{,}4}\right] = [21{,}9\ ;\ 69{,}7]$ $\quad \boxed{\sigma \in [4{,}68\ ;\ 8{,}35]}$

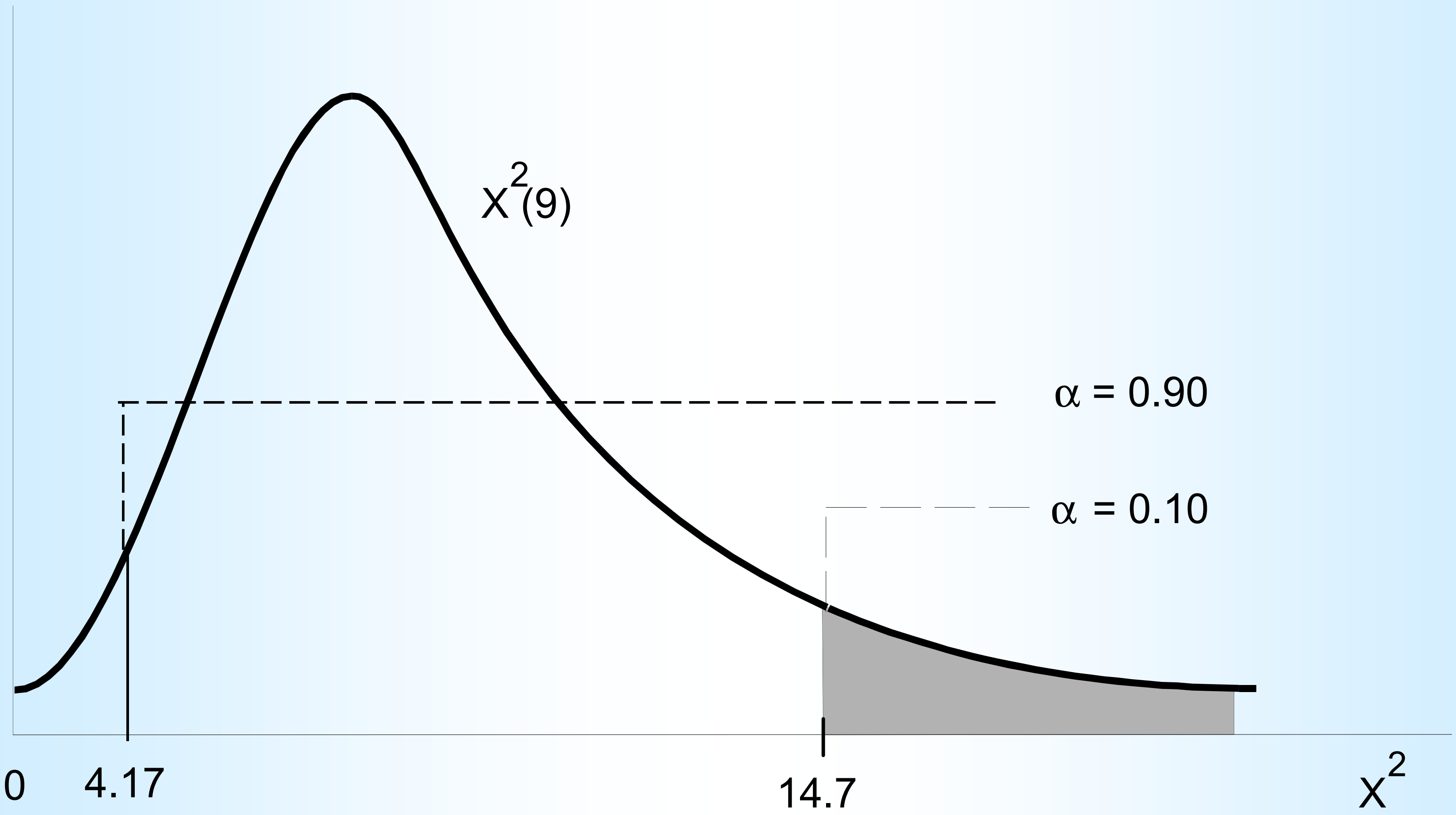
Chi-kvadrát rozdělení

Tabulka kritických hodnot

$df \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0.1	0.05	0.025	0.01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2.7	3.8	5.0	6.6	7.9
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4.6	6.0	7.4	9.2	10.6
3	0,07	0,12	0,22	0,35	0,58	6.3	7.8	9.4	11.3	12.8
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7.8	9.5	11.1	13.3	14.9
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9.2	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21.0	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8

Chi-kvadrát rozdělení X^2

Graf hustoty a kritická hodnota



Shrnutí

- Princip intervalového odhadu střední hodnoty a rozptylu
- Studentovo *t*-rozdělení pravděpodobnosti versus Normované normální rozdělení
- Jednostranné a dvoustranné intervaly spolehlivosti v konkrétních úlohách
- Stanovení rozsahu náhodně vybraného vzorku při zadané přesnosti odhadu
- Dvoustranné intervaly spol. pro rozptyl
- Chi-kvadrát rozdělení pravděpodobnosti