X. Testování hypotéz: neparametrické testy

Co přináší neparametrické testování hypotéz

V případě ordinálních (pořadových) nebo nominálních dat odpovídá na specifické otázky:

1. Existuje významný soulad dané charakteristiky rozdělení četnosti vzorku se zadanou charakteristikou populace?

2. Existuje významný rozdíl dané charakteristiky mezi 2 (nebo více) vzorky?

Charakteristika - např. medián, zadané pořadí, **typ rozdělení pr-sti (četnosti)** aj.

Neparametrické testy hypotéz

- Má medián populace s neznámým rozdělením stanovenou hodnotu? (**mediánový test**)
- Pochází výběr z populace se zadaným (známým) rozdělením pravděpodobnosti?

  (**Chi-kvadrát test**)

Mediánový test

(pro 1 výběr)

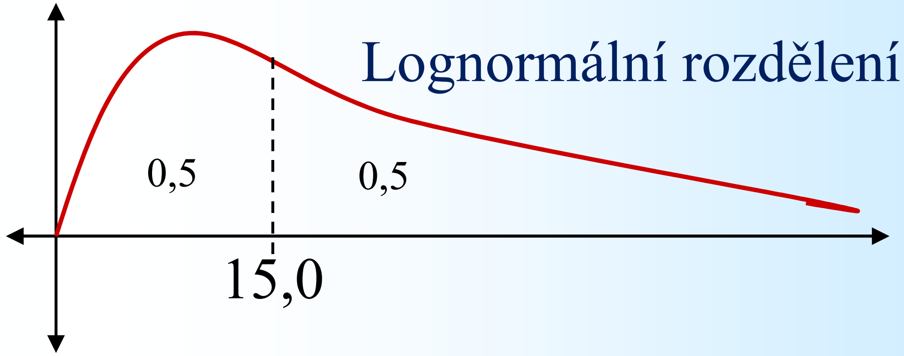
- Nevíme-li, zda má populace normální rozdělení, předpokládáme, že má medián $\tilde{\mu}_0$ rozsah vzorku n
- H_0: $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$, H_1: $\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$ - oboustranný test
- Testové kritérium: $u = \dfrac{|2m - n|}{\sqrt{n}}$

m je počet počet pozorování ve vzorku < $\tilde{\mu}_0$

- Jestliže $u > z_{1-\alpha/2}$ potom H_0 zamítáme!

$z_{1-\alpha/2}$ je kvantil norm. normál. rozd. (viz tabulky)

Příklad 1: Mzdy



Náhodně vybraný vzorek 19 pracovníků jisté (dělnické) profese ve městě Karviná poskytl následující údaje o jejich měsíčních mzdách (v tis.Kč):

10,0	12,3	12,6	12,6	13,0	13,2	13,3	13,3	13,4	13,8
14,1	14,3	14,6	15,1	15,2	15,4	16,5	18,2	20,5	----

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že průměrná (mediánová) měsíční mzda pracovníků této profese v Karviné je 15 tis. Kč.

Příklad 1: Řešení …

Populace - měsíční mzdy všech pracovníků dané profese v Karviné

Je známo, že **mzdy nemají normální rozdělení** pr-sti!

Proto namísto **střední hodnoty** je lepší

charakteristikou **medián**, jemu pak odpovídá

neparametrický dvoustranný mediánový test hypotézy

$$H_0: Med(X) = 15$$

proti alternativní hypotéze

$$H_1: Med(X) \neq 15$$

Příklad 1: … Řešení

Z dat: n = 19, m = 13, vypočteme:

$$u = \frac{|2.13 - 19|}{\sqrt{19}} = 1{,}61$$

NORMSINV(0,975) = 1,96

Protože 1,61 < 1,96, nulovou hypotézu H_0 nezamítáme (přijímáme)

Jinými slovy: na zvolené hladině významnosti 0,05 vzorek neodporuje hypotéze o výši mediánové měsíční mzdy prac. dané profese v Karviné (tj. 15 tis. Kč)

Také: vybraný vzorek je v souladu s karvinskou populací v této profesi!

Chi-kvadrát test

(X^2 - test pro 1 výběr)

- Data mohou být **nominální** (nejslabší požadavek)!
- Testuje se (nulová) hypotéza
  H_0: výběr pochází z populace s daným rozdělením
- Zadané rozdělení je obvykle:

- diskrétní rozdělení se stejnými pr- stmi (tzv. **test nezávislosti**)

- diskrétní rozdělení s rozdílnými pr- stmi (tzv. **test dobré shody**)

Příklad 2: Limonády

Nová limonáda se prodávala za stejnou cenu jeden týden ve 3 různých typech obalu: A, B, C, počet prodaných limonád viz tabulka:

Typ obalu	Prodané kusy
A	135
B	130
C	155
Celkem	420

Ovlivňuje styl designu obalu počet prodaných limonád?

Jinak: Závisí prodej na obalu?

Příklad 2: Algoritmus a řešení 1:
Test nezávislosti

Krok 1. Nulová hypotéza H_0:

Počet prodaných kusů **nezávisí** na typu obalu (rozdíly v prodeji u vzorku jsou pouze dílem náhody).

Očekávané četnosti (Expected):

$E_1 = E_2 = E_3 = {}^{420}/_{3} = 140$

Pozorované četnosti (Observed):

$O_1 = 135,\ O_2 = 130,\ O_3 = 155$

Krok 2. Testové kritérium: $$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

k - **počet kategorií** ($k = 3$)

Příklad 2: Algoritmus a řešení 2

Krok 3. Porovnání hodnoty vypočítaného kritéria

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 2,5$$

$$\boxed{\text{CHIINV}(0,05;2) = 6,0}$$

s tabulkovou **kritickou hodnotou** rozdělení $\chi^2_\alpha(2) = 6,0$

kde $\alpha\,(= 0,05)$ je zadaná hladina významnosti

V každé kategorii: O_i alespoň 5 !

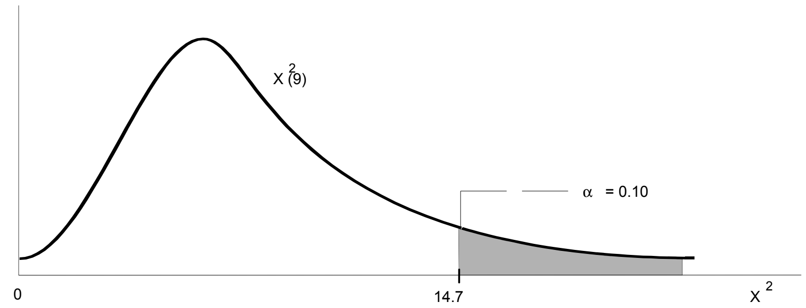
Jestliže

$$X^2 = 2,5 < \chi^2_{0,05}(2) = 6,0$$

potom H_0 nezamítáme! (jinak **zamítáme**)

***p*-hodnota (signifikance)** = 0,287 > 0,05 (Nezamítáme)

Kritické hodnoty
rozdělení Chi-kvadrát $\chi^2_\alpha(n)$



n \ α	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0.1	0.05	0.025	0.01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2.7	3.8	5.0	6.6	7.9
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4.6	6.0	7.4	9.2	10.6
3	0,07	0,12	0,22	0,35	0,58	6.3	7.8	9.4	11.3	12.8
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7.8	9.5	11.1	13.3	14.9
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9.2	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21.0	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8,64	9,51	10,98	12,34	14,04	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,58	32.0	35.2	38.1	41.6	42.2
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35.6	38.9	41.9	45.6	48.6
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

Řešení příkladu 2 pomocí Excelu:

Tabulka→Funkce: SUMA, CHIIV, CHIDIST…

Typ obalu	Oi	Ei	(Oi - Ei)^2/Ei
A	135	140	0,179
B	130	140	0,714
C	155	140	1,607
Sumy	420	420	2,500

X^2	=	2,5
alfa	=	0,05
k-1	=	2
CHIINV	=	5,991
CHIDIST	=	0,287

Signifikance = CHIDIST = 0,287 > 0,05

⇒ H_0 nezamítáme!

Příklad 2: Limonády (**nová verze**)…

Nová limonáda se prodávala za stejnou cenu jeden týden ve fakultním bufetu ve 3 různých typech obalu: A, B, C, počet prodaných limonád viz tabulka:

NOVÉ ZADÁNÍ:

Typ obalu	Prodané kusy	NOVÉ ZADÁNÍ
A	135	120
B	130	130
C	155	170
Celkem	420	420

Ovlivňuje styl designu obalu počet prodaných limonád?

Řešení příkladu 2… pomocí Excelu:

Tabulka→Funkce: SUMA, CHIIV, CHIDIST…

	Oi	Ei	(Oi-Ei)^2/Ei
A	120	140	2,857
B	130	140	0,714
C	170	140	6,429
Suma	420	420	10,000

Signifikance = CHIDIST = 0,0067 < 0,05 ⇒ H_0 **zamítáme**!

$X^2 = 10{,}0 > \chi^2_\alpha(k-1)$ = CHINV = 5,991 ⇒ H_0 zamítáme!

Příklad 3: Barvy automobilů 1

Automobil Škoda - Felicia se prodává ve čtyřech barvách:

- 40% zákazníků požaduje zelenou barvu automobilu
- 25% červenou barvu,
- 25% modrou barvu a
- 10% bílou barvu.

K ověření správnosti předpokladu o struktuře poptávky podle barev použijte záznamy o nákupech v dané prodejně v jistém měsíci

Příklad 3: Barvy automobilů 2

Vstupní údaje obsahuje následující tabulka:

j	Barva	$p_{0,j}$	n_j
1	zelená	0,40	201
2	červená	0,25	105
3	modrá	0,25	144
4	bílá	0,10	30
součet		1,00	480

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že uvedené pravděpodobnostní odhady odpovídají zjištěným hodnotám prodejů

Příklad 3: Algoritmus a řešení 1: *Test dobré shody*

Krok 1. Nulová hypotéza H_0:

$$H_0 : p_{0,1} = 0{,}4, p_{0,2} = p_{0,3} = 0{,}25, p_{0,4} = 0{,}1$$

Očekávané četnosti:

$E_1 = 192$, $E_2 = 120$, $E_3 = 120$, $E_4 = 48$

Pozorované četnosti:

$O_1 = 201$, $O_2 = 105$, $O_3 = 144$, $O_4 = 30$

Krok 2. Testové kritérium:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

k - **počet kategorií** ($k = 4$)

Očekávané četnosti:

$$\text{Očekáv\_čet\_}i = \text{Pravděp\_}i \times \text{celk\_čet}$$

Příklad:

i = zelená, Pravděp_i = 0,40 , celk_čet = 480

E_1 = Očekáv_čet_i = 0,4*480 = 192

atd.

Příklad 3: Algoritmus a řešení 2: ***Test dobré shody***

Krok 3. Porovnání hodnoty vypočítaného kritéria

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 13{,}85$$

s tabulkovou **kritickou hodnotou** rozdělení $\chi^2_{0,05}(3) = 7{,}81$

V každé kategorii: *O_i* je alespoň 5 (>30)

Platí

$$X^2 = 13{,}85 > \chi^2_{0,05}(3) = 7{,}81 = \mathrm{CHIINV}(0{,}05;3)$$

proto H_0 zamítáme! Alternativně:

Sig = CHIDIST(13,85; 3) = 0,003 < 0,05

Testování nezávislosti kvalitativních znaků 1

V jednom vzorku (výběru) můžeme současně sledovat dva nebo i více (kvalitativních) znaků

Příklad:
Při kontrole jakosti výrobku sledujeme přítomnost nebo nepřítomnost vady A (znak A), nebo přítomnost nebo nepřítomnost vady B (znak B).
A i B nabývají pouze dvě alternativní hodnoty – **kategorie**: **Ano, Ne** (**Přítomnost, Nepřítomnost**, apod.).

Testování nezávislosti kvalitativních znaků 2

Uvažujte soubor se dvěma **kvalitativními** znaky ***A*** a ***B***

Znak ***A*** má r možných kategorií hodnot označených: $A_1, A_2, \ldots, A_r$

znak ***B*** má s možných kategorií hodnot:

$$B_1, B_2, \ldots, B_s$$

Výsledek celého složeného experimentu lze shrnout do **kontingenční tabulky**:

Kontingenční tabulka:

Kategorie znaku A/B	B_1	B_2	B_3	**................**	B_s	**Součet**
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1s}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2s}	$n_{2.}$
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3s}	$n_{3.}$
....	.....	....	....	....	....	....
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	....	n_{rs}	$n_{r.}$
Součet	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	....	$n_{.s}$	n

Kontingenční tabulka (čtyřpolní)

Příklad: vzhled vers. hmotnost výrobku

Vzhled / Hmotnost výrobků	**Vyhovující hmotnost**	**Nevyhovující hmotnost**	**Součet- Marg. četnost**
Vyhovující vzhled	**239**	**60**	**299**
Nevyhovující vzhled	**14**	**7**	**21**
Součet - Marg. četnost	**253**	**67**	**320**

Chi-kvadrát test nezávislosti: Algoritmus 1

Krok 1. Nulová hypotéza H_0:

Vzhled výrobku nezávisí na hmotnosti (rozdíly u vzorku jsou pouze dílem náhody).

Očekávané četnosti:

$E_{11} = 253*299/320 = 236{,}4$

$E_{21} = 253*21/320 = 16{,}6$

$E_{12} = 67*299/320 = 62{,}6$

$E_{22} = 67*21/320 = 4{,}4$

Pozorované četnosti: $O_{11} = 239$, $O_{12} = 14$, $O_{21} = 60$, $O_{22} = 7$

Krok 2. Testové kritérium X^2:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 2{,}086$$

$df = (r-1)(s-1)$ počet stupňů volnosti ($k = (2-1)(2-1) = 1$)

Očekávané četnosti:

$$\frac{\text{Ocekáv\_č\_}i,j}{\text{celk.c.}} = \frac{\text{Marg\_č\_}i}{\text{celk.č.}} \times \frac{\text{Marg\_č\_}j}{\text{celk.č.}}$$

$$\boxed{\text{Očekáv\_č\_}i,j = \text{Marg\_č\_}i \times \text{Marg\_č\_}j\,/\,\text{celk\_č}}$$

Příklad:

i = 1: Hmotnost-Nevyhovující

j = 2 : Vzhled-Vyhovující

celk_č = 320

E_{12} = Očekáv_č_1,2 = 299*67/320 = 62,6

atd.

Chi-kvadrát test nezávislosti: Algoritmus 2

Krok 3. Porovnání hodnoty vypočítaného kritéria s tabulkovou kritickou hodnotou rozdělení

kde $\alpha = 0,10$ je zadaná hladina významnosti.

V každé kategorii má být alespoň 5 hodnot!

Jestliže $X^2 = 2,1 < \chi^2_{0,1}(1) = 2,7$ potom H_0 nezamítáme!

Alternativně:

Pro hodnotu X^2 zjistíme p-hodnotu (tj. signifikanci - - má být menší než 0,1)

p = CHIDIST(2,1;1) = 0,147 - tedy H_0 nezamítáme!

Čtyřpolní tabulka – kontingenční tabulka 2 x 2:

Znak2			**Součet**
Znak1	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	
$\boldsymbol{h_1}$	A	B	$A+B$
$\boldsymbol{h_2}$	C	D	$C+D$
Součet	$A+C$	$B+D$	n

Kritérium:

$$X^2 = \frac{n(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

Jestliže $X^2 > \chi^2_\alpha(1)$

pak H_0 zamítáme, jinak ji nezamítáme!

Příklad: Vzhled vers. Hmotnost

A = 239, B = 60, C = 14, D = 7

$$X^2 > \chi^2_{0,1}(1) = 2,7$$

$$X^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} = 2,1$$

Příklad 4 – Vliv kouření na úmrtnost v Karviné

Kontingenční tabulka pro 2917 zemřelých v Karviné v roce 1998

Kouření versus *Počet zemřelých na rakovinu plic*

Pozorované čet.	zemřel RP	zemřel JINAK
kouření ANO	137	817
kouření NE	198	1765

Analyzujte, zda kouření respondentů ovlivnilo úmrtnost na rakovinu plic (*RP*)

Použijte Chi-kvadrát test

Řešení příkladu 4 pomocí Excelu:

Pozorované čet.	zemřel RP	zemřel JINAK	Suma
kouření ANO	137	817	954
kouření NE	198	1765	1963
Suma	335	2582	2917

Očekávané čet.	zemřel RP	zemřel JINAK	(Eij-Oij)^2/Eij	
kouření ANO	109,56	844,44	6,87	0,89
kouření NE	225,44	1737,56	3,34	0,43

CHI-SQUARE	11,54
alfa	0,05
df	1
CHIINV	3,8415
CHIDIST=Sig	0,0007

součet

Nulovou hypotézu o nezávislosti znaků zamítáme!

(Úmrtnost na rakovinu plic závisí na kouření respondentů)

$$X^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} = 11{,}54$$