

# **V. Diskrétní pravděpodobnostní modely**

# Náhodná veličina

**Náhodná veličina** = soubor všech hodnot znaku + rozdělení pravděpodobnosti hodnot

- některé hodnoty se nabývají častěji než jiné → mají větší pravděpodobnost výskytu

- hodnoty znaku statistických jednotek se „generují“ podle **pravděpodobnostního rozdělení**

# Statistický soubor (SS)

- Statistický soubor je tvořen **statistickými jednotkami**
- Sledujeme (kvantitativní) hodnotu **statistického znaku**
- Každá jednotka = jedna hodnota (číslo) **statistického znaku**
- **SS vzniká realizací NV neboli**
- **NV generuje SS – obecná představa vzniku SS pomocí NV**

# Diskrétní náhodná veličina - Příklady

1. Jistý hotel má 100 pokojů, celkový počet obsazených pokojů 1. července je náhodná veličina  $X$  s možnými hodnotami  $x = 0, 1, 2, \dots, 100$
2. Počet zákazníků v supermarketu mezi 12 až 18 hod. je náhodná veličina  $X$ , která může **teoreticky** nabývat jakékoliv nezáporné celočíselné hodnoty  $x \geq 0$

# Diskrétní náhodná veličina - Příklady

3. Rozdíl mezi počtem zákazníků ve dvou supermarketech (Kaufland, Tesco) v jednom dni je náhodná veličina  $X$ , jež může teoreticky nabýt jakékoliv celočíselné hodnoty

$$x = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

# 1. Diskrétní model pr-sti rozdělení: Stejnoměrné rozdělení

Diskrétní náhodná veličina  $X$   
nabývá právě  $k$  různých hodnot:

$1, 2, 3, \dots, k$

se stejnou pravděpodobností

$$P(x) = \frac{1}{k}$$

pro  $x = 1, 2, 3, \dots, k$

# Stejněměrné rozdělení

**Střední hodnota:**  $E(X) = \frac{k+1}{2}$

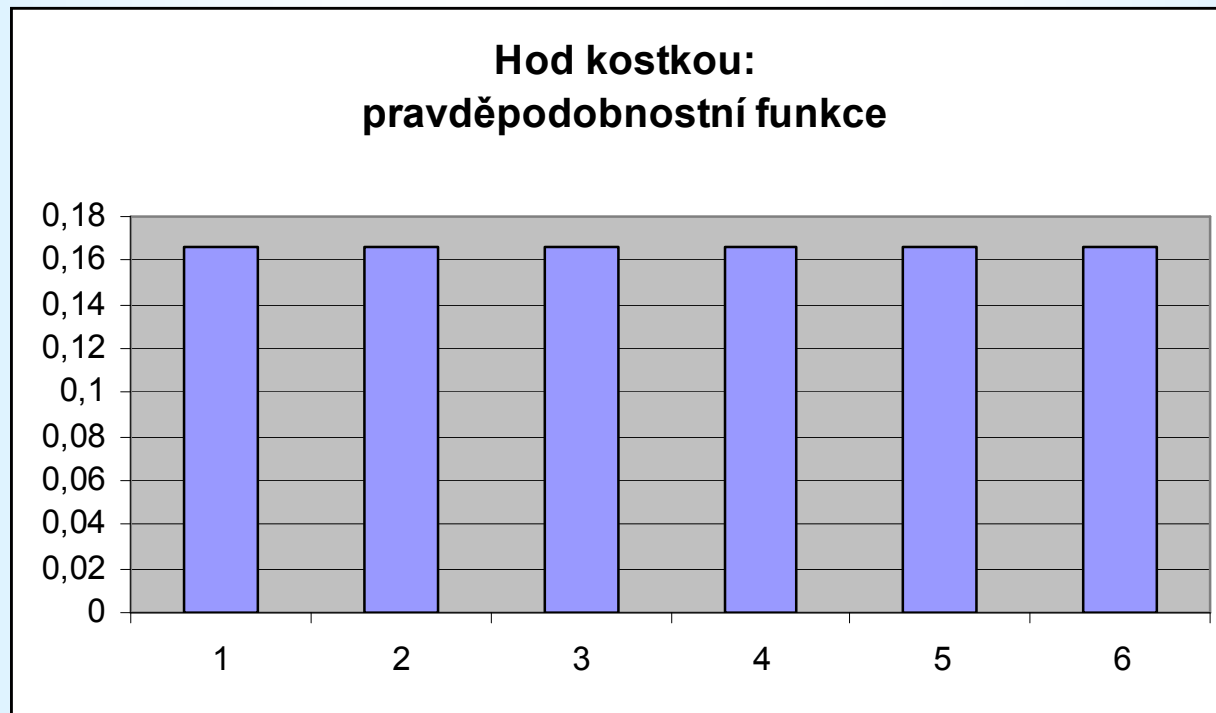
obecný vzorec:  $E(X) = \sum_x xp(x)$

**Rozptyl:**  $Var(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$

obecný vzorec:  $Var(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 p(x)$

# Příklad 1: „Vrh kostkou“

- Střední hodnota:  $E(X) = (6+1)/2 = 3,5$
- Rozptyl:  $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2,92$





## 2. Model: Alternativní rozdělení

Dva vzájemně se vylučující výsledky -

„úspěch“ = 1 a „neúspěch“ = 0

s pravděpodobnostmi  $p$  a  $(1 - p)$

$$P(x | p) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

### Příklady:

(1) Hod mincí „hlava“ vers. „orel“  $p = 1/2$

(2) Hod kostkou „šestka“ vers. „nešestka“  
 $p = 1/6$

### 3. Model: Binomické rozdělení

$n$  pokusů s alternativním rozdělením  
celkem  $x$  krát úspěch a  $n-x$  krát  
neúspěch  $p$  pravděpodobnost úspěchu  
Binomické rozdělení pravděpodobnosti:

$$P(x | n; p) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

pravděpodobnost, že při  $n$ -krát  
opakovaném alternativním procesu  
nastane  $x$  krát úspěch a  $n-x$  krát  
neúspěch

# Charakteristiky binomického rozdělení

- Střední hodnota:  $E(X) = n.p$
- Rozptyl:  $Var(X) = n.p.(1-p)$
- Směrodatná odchylka:  $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)}$

## Příklad 2:

Je známo, že při epidemii chřipky onemocní každý třetí student, tj. pravděpodobnost onemocnění je  $1/3 = 0,333$ , tj.  $p = 1/3$

Zjistěte pravděpodobnost, že ve studijní skupině s 20 studenty onemocní každý druhý

$$n = 20, p = 1/3, x = 10 \Rightarrow P(10 | 20; 1/3) =$$

$$= \frac{20!}{10!.10!} 0,333^{10} \cdot 0,667^{10} = 20 \cdot 0,333 = 0,092 \quad (9,2 \%)$$

$$E(X) = 20 \cdot 1/3 = 6,67$$

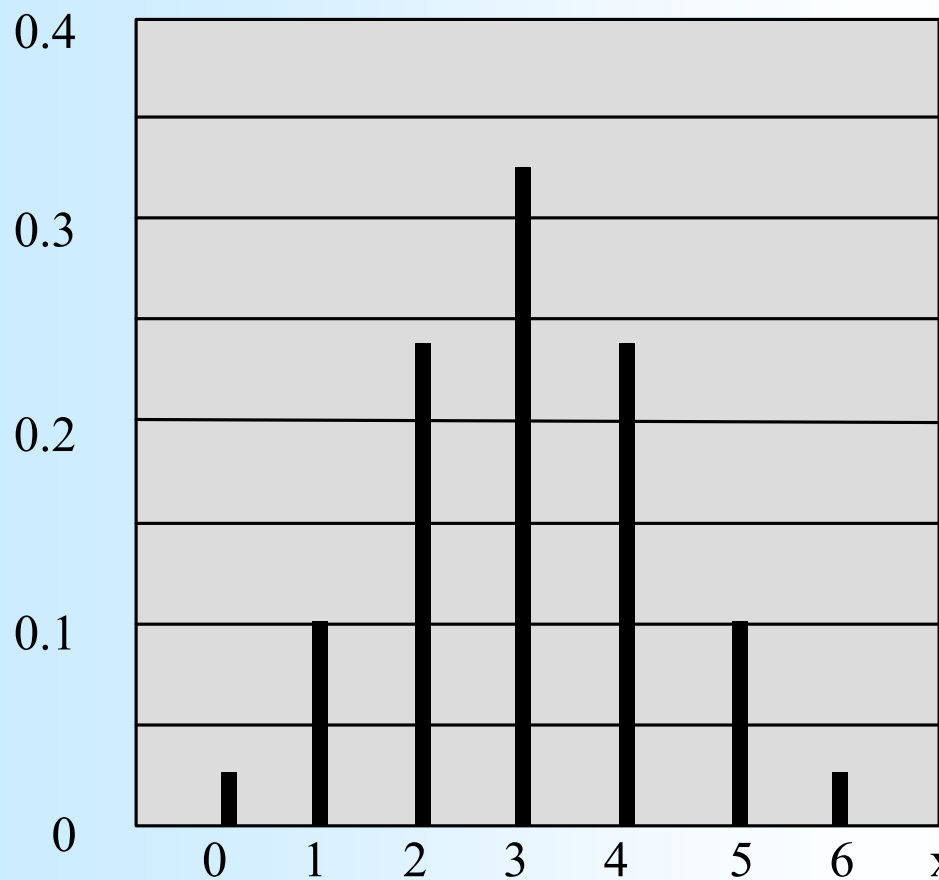
$$Var(X) = 20 \cdot 1/3 \cdot 2/3 = 4,44$$

$$\sigma(X) = 2,11$$

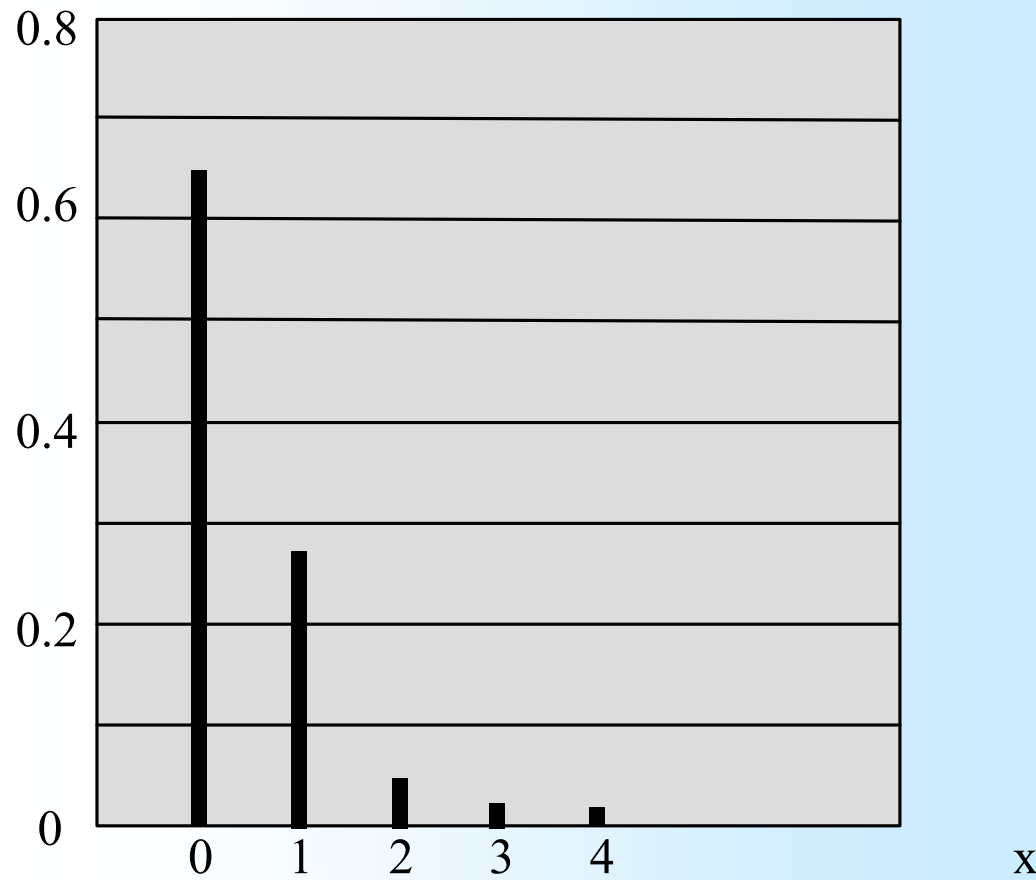
# Binomické rozdělení

s různými parametry

pravděpodobnostní funkce



$n=6, \pi=0.5$



$n=4, \pi=0.1$

## 4. Model: Poissonovo rozdělení

[Čti: *Poasonovo*]

Uvažujme jevy, které nastávají  
v průběhu časového intervalu, například:

- požadavky na telefonní spojení  
přicházející na ústřednu
- zákazníci přicházející do prodejny
- automobily zastavující u benzínového  
čerpadla

Takové jevy vznikají v tzv.

***Poissonově procesu***

# Poissonovo rozdělení

$X$  - náhodná veličina = počet výskytu jevu Poissonova procesu v daném časovém intervalu délky  $t$  (např. za 1 minutu, 1 hodinu apod.)  
+ rozdělení pr-stí počtu výskytů (tj. s jakou pr-stí nastane v daném čas. intervalu určitý počet výskytů jevu)

# Vlastnosti Poissonova procesu

## 3 vlastnosti:

1. Počet výskytu jevu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu
2. Střední hodnota počtu výskytu jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu
3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu



# Vlastnosti Poissonova rozdělení

- Pravděpodobnost výskytu  $x$  jevů Poissonova procesu  $X$ :

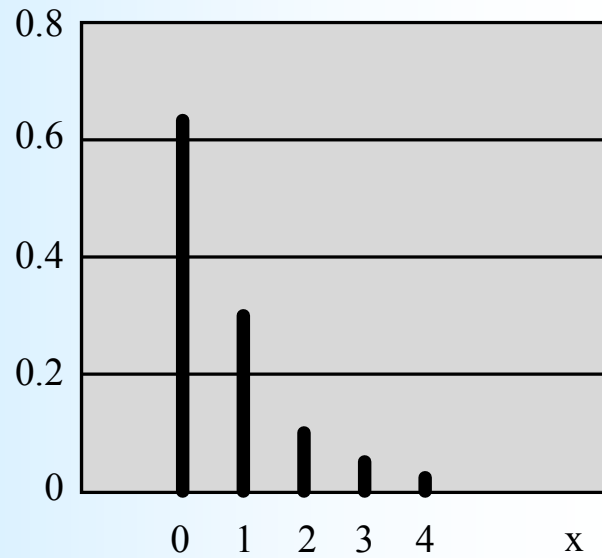
$$P(x | \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

- $\lambda, t$  - parametry Poiss. rozdělení
- $x$  – počet výskytů jevu
- $\lambda$  - intenzita Poissonova procesu (tj. střední hodnota výskytů jevů)
- $t$  - délka časového intervalu

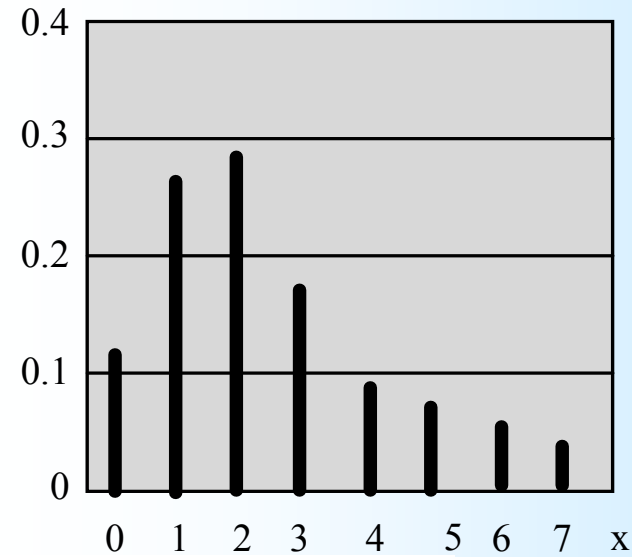
$$E(X) = \lambda.t \quad \text{Var}(X) = \lambda.t \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda t}$$

# Poissonovo rozdělení s různými parametry ( $t = 1$ )

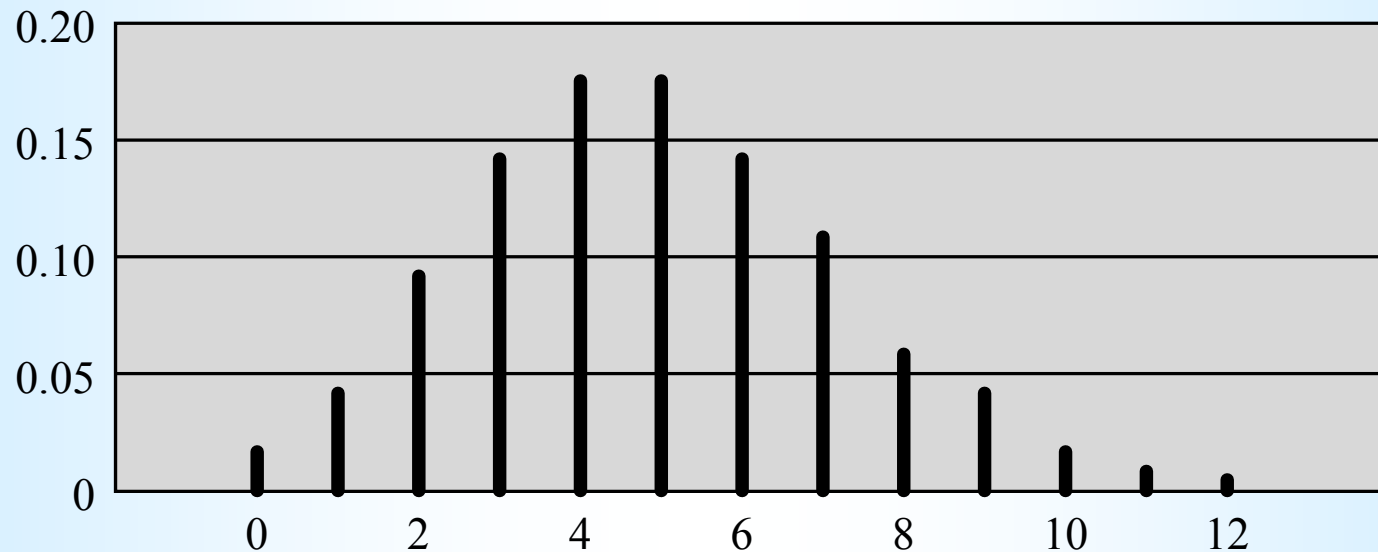
$\lambda = 0,5$



$\lambda = 2$



$\lambda = 5$



## Příklad 3:

Zákazníci přicházejí náhodně do opravny obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravny přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

**Řešení:**

$$P(2 | 4,1) = \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} = 0,1465$$

Střední hodnota  $E(X) = 4$ , rozptyl  $Var(X) = 4$ ,  
směrodatná odchylka  $\sigma = \sqrt{4} = 2$

# Obecné rozdělení diskrétní NV

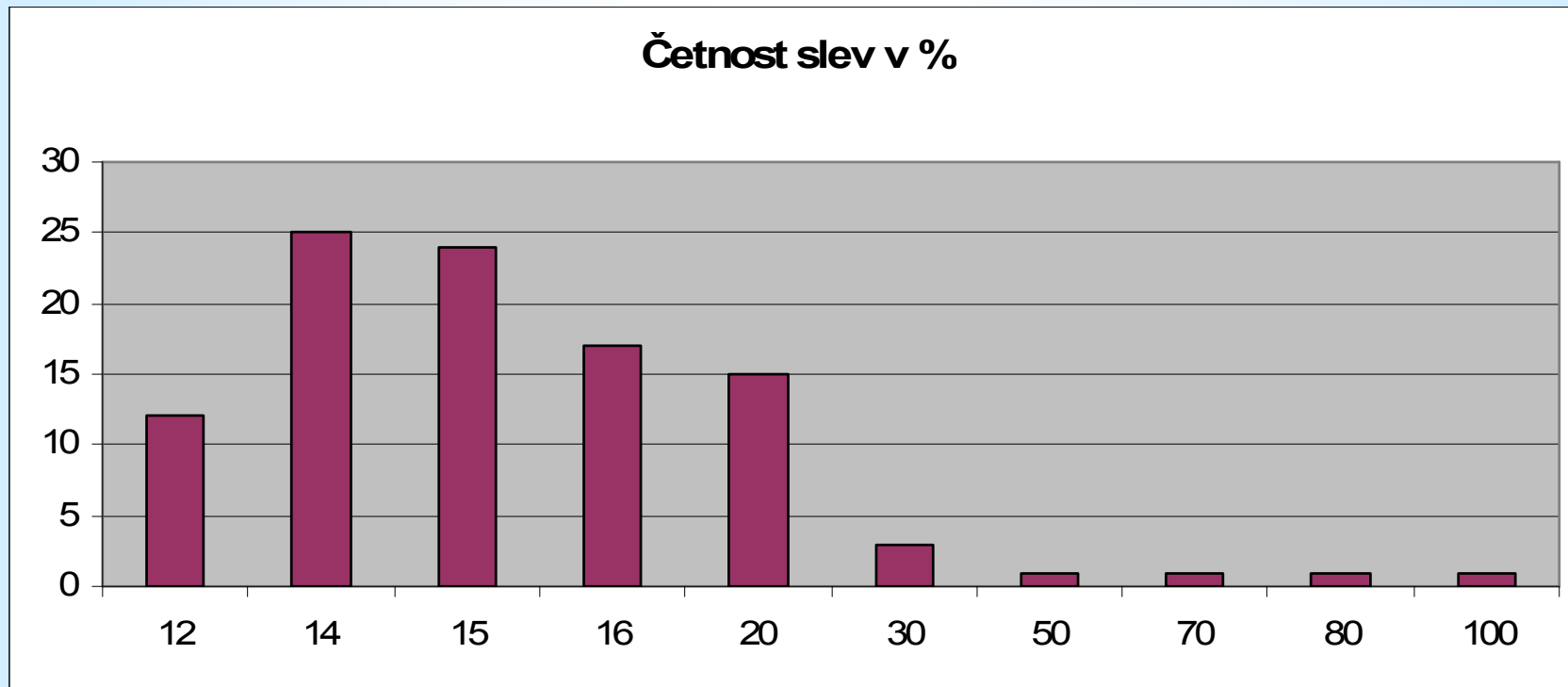
- Hodnoty NV:  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Pravděpodobnosti rozdělení:  $p_1, p_2, \dots, p_n$   
platí:  $\sum p_i = 1$





# Příklad 4: Kolo štěstí

<http://www.mountfield.cz/>



# Kolo štěstí - pravděpodobnosti

$x_i$ - Sleva %	$n_i$ - Četnost	$p_i$ - Pr-st
12	12	0,12
14	25	0,25
15	24	0,24
16	17	0,17
20	15	0,15
30	3	0,03
50	1	0,01
70	1	0,01
80	1	0,01
100	1	0,01
Suma	100	1,00

# Kolo štěstí – průměrná sleva

$$\begin{aligned} \text{Průměrná sleva} &= \text{střední hodnota} = E(X) = \sum_x xp(x) \\ &= 12*0,12 + 14*0,25 + 15*0,24 + \dots + 80*0,01 + \\ &+ 100*0,01 = 18,16 \end{aligned}$$

Kolo štěstí poskytuje zákazníkům průměrnou slevu

**18,16 %**



## Příklad 5:

Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodního domu, je náhodná veličina  $X$ .

Bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot:

$x$	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,20	0,40	0,25	0,10	0,03	0,01

**Řešení:**

Střední hodnota počtu druhů zboží zakoupeného jedním zákazníkem

$$E(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,03 + 5 \cdot 0,01 = 1,37$$

# Pravděpodobnostní funkce

Pravděpodobnost počtu nakoupených výrobků



- Pravděpodobnostní funkce  $p(x)$  nabývá maximální hodnotu 0,4 pro  $x = 1$  :

$$\text{Mod}(X) = 1$$

- Medián:

$$p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1) = 0,2+0,4 = 0,6 \geq 0,5$$

$$p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + \dots + p(X=5) = 0,4+0,25+0,1+0,03+0,01 = 0,7 \geq 1 - 0,5 = 0,5$$

Podle definice je medián:

$$\text{Med}(X) = 1$$

- $\text{Var}(X) = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,25 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,03 + 5^2 \cdot 0,01 - 1,37^2 = 3,39 - 1,88 = 1,51$
- $\sigma(x) = \sqrt{1,51} = 1,23$

# Shrnutí

- Co je to NV: číselné hodnoty + pravděpodobnosti
- Diskrétní NV: individuální č. hod. + pr-sti
- Charakteristiky NV (polohy - 3, variability - 2)
- NV se stejnoměrným rozdělením pr-sti
- NV s alternativním rozdělením pr-sti
- NV s binomickým rozdělením pr-sti (též multinomickým)
- NV s Poissonovým rozdělením pr-sti
- NV s obecným rozdělením pr-sti