

Diskrétní náhodná veličina

Distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$

Platí: $p(x) \geq 0, x \in X$
 $\sum_{x \in X} p(x) = 1$

Střední hodnota: $E(X) = \sum_{x \in X} x p(x)$

Rozptyl: $Var(X) = \sum_{x \in X} x^2 p(x) - E(X)^2$

Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Kvantily: $P(X \leq x_p) \geq p$
 $P(X > x_p) \leq 1 - p$

Spojité náhodná veličina

Distribuční funkce $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Platí: $f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Střední hodnota: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Rozptyl: $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2$

Rozhodněte, které z uvedených předpisů představují diskrétní rozdělení pravděpodobnosti.

součet pravděpodobností $p(x)$ musí být jedna, jednotlivé pravděpodobnosti $p(x)$ jsou nezáporné

a)

x	$p(x)$
0	0.1
1	0.1
2	0.6
3	0.1

součet 0.9 NE

b)

x	$p(x)$
-1	0.5
0	0.7
1	-0.3
2	0.1

součet 1
ale $p(1)$ je záporná, tudíž NE

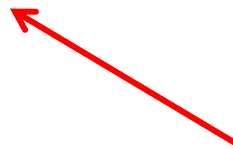
c)

x	$p(x)$
-2	0.4
-1	0.2
0	0.1
1	0.1
2	0.2

součet 1 ANO

Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že počet pracovních úrazů v jedné firmě je náhodná veličina s následujícím rozdělením pravděpodobnosti:

x	$p(x)$	$F(x)$
0	0.14	0.14
1	0.22	$0,14+0,22=0,36$
2	0.37	$0,36+0,37=0,73$
3	0.25	$0,73+0,25=0,98$
4	0.02	$0,98+0,02=1$



- Určete hodnoty distribuční funkce $F(x)$. $F(x)$ kumuluje $p(x)$
- Určete pravděpodobnost
 - právě 1 pracovního úrazu v následujícím měsíci, slovo "právě" odkazuje na pravděpodobnost
 - nejvýše 2 pracovních úrazů v následujícím měsíci, slovo "nejvýše" odkazuje na distribuční
 - alespoň 3 pracovních úrazů v následujícím měsíci, slovo "alespoň" odkazuje na negaci výr
- Určete
 - střední hodnotu počtu úrazů během měsíce, $\sum x \cdot p(x) = 0 \cdot 0,14 + 1 \cdot 0,22 + 2 \cdot 0,37 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,02 = 1,79$
 - modus, počet úrazů s největší pravděpodobností $p(x)$, tedy $\text{Mod}(X) = 2$

- medián.

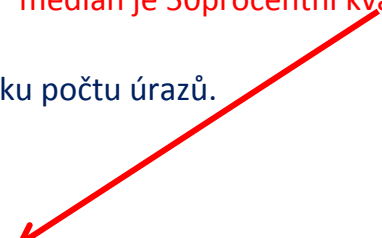
medián je 50procentní kvantil, $P(X \leq 2) = F(2) = 0,73 > 0,5 \dots$ OK

$P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - 0,36 = 0,64 > 0,5 \dots$ OK

Med(X) =

4. Určete směrodatnou odchylku počtu úrazů.

$\text{Var}(X) = \sum (x - E(x))^2 \cdot p(x) = (0 - 1,79)^2 \cdot 0,14 + (1 - 1,79)^2 \cdot 0,22 + (2 - 1,79)^2 \cdot 0,64 = 0,42$


$$P(X \leq x_p) \geq p$$
$$P(X > x_p) < 1 - p$$

bnost, tedy $p(1) = 0,22$

funkci, tedy $F(2) = 0,73$

azu "nejvýše", tedy $1 - F(2) = 1 - 0,73 = 0,27$

2

$$)^2*0,37+(3-1,79)^2*0,25+(4-1,79)^2*0,22=1,0659$$

Životnost nové výrobní linky na strojové česání chmele má charakter náhodné veličiny s rozdělením pravděpodobnosti daným předpisem:

$$f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \quad 0 < x < 2$$

1. Dokažte, že uvedený předpis představuje funkci hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny.
2. Nalezněte vztah pro distribuční funkci tohoto rozdělení.
3. Vypočtěte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozdělení.

ad 1

první podmínka: $f(x) \geq 0$

výpočet: $\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \geq 0$

...

získáme: x patří do intervalu $\langle 0; 2 \rangle$

druhá podmínka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

výpočet: $\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \dots = 1$

ad 2

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

výpočet: $F(X) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2 \right) dt = \dots = \frac{1}{4}x^2(3-x)$

ad 3

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \quad \text{střední hodnota}$$

výpočet: $E(X) = \int_0^x x \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \dots = 1$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \quad \text{rozptyl}$$

výpočet: $Var(X) = \int_0^2 (x-1)^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \dots = 0,2$

směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu, tj. odmocnina z 0,2 = 0,45