STATISTIKA

7. PŘEDNÁŠKA

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Téma přednášky:
spojitá náhodná veličina

a) Stejnoměrné rozdělení,
b) Exponenciální rozdělení,
c) Normální rozdělení.

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Spojité modely – Stejnoměrné rozdělení

Spojitá náhodná veličina X má ***stejnoměrné rozdělení:***
nabývá hodnot z intervalu $[a,b]$ stejnou pravděpodobností

Funkce hustoty: $f(x)=\frac{1}{b-a}$ pro $x \in [a,b]$, jinak $f(x)=0$

Pravděpodobnost: $c,d \in [a,b]$, $P(c \le X \le d)=\int_c^d f(x)dx=\frac{d-c}{b-a}$

Střední hodnota: $E(X)=\frac{a+b}{2}$

Rozptyl: $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X)=\frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$

Příklad – stejnoměrné rozdělení – čekání na autobus

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Autobusy odjíždějí z určité zastávky během dne pravidelně každých 15 minut. V náhodnou dobu přijdete na zastávku.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že budete na autobus čekat dobu mezi 5 až 10 minutami?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budete čekat alespoň 12 minut?

(c) Stanovte střední hodnotu a směrodatnou odchylku doby čekání.

Příklad – stejnoměrné rozdělení – čekání na autobus

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

X je spojitá náhodná veličina s následující hustotou:

$$f(x) = \frac{1}{15} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 15$$
$$= 0 \quad \text{jinde}$$

$$E(X) = \frac{0+15}{2} = 7{,}5$$

$$Var(X) = \frac{(15-0)^2}{12} = 18{,}75$$

Příklad – stejnoměrné rozdělení – čekání na autobus

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

(a) S využitím vzorce vypočítáme: $P(5<X<10) = (10-5)/(15-0) = 0,33$

(b) Analogicky obdržíme: $P(12< X<15) = (15-12)/(15-0) = 0,2$

(c) $\sigma(X) = \sqrt{18,75} = 4,33$

Střední čekací doba je 7,5 minut, směrodatná odchylka je 4,33 minut.

Normální rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Nejdůležitější rozdělení ve statistice!

Normální (Gaussovo) rozdělení pr-sti NV:

Způsobené kolísáním NV velkého počtu nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů, které se skládají (sečítají).

Příklady:

(1) výsledky různých testů (body)

(2) výsledky měření rozměrů a hmotností (mm, cm, m, g, kg, t aj.)

Normální rozdělení

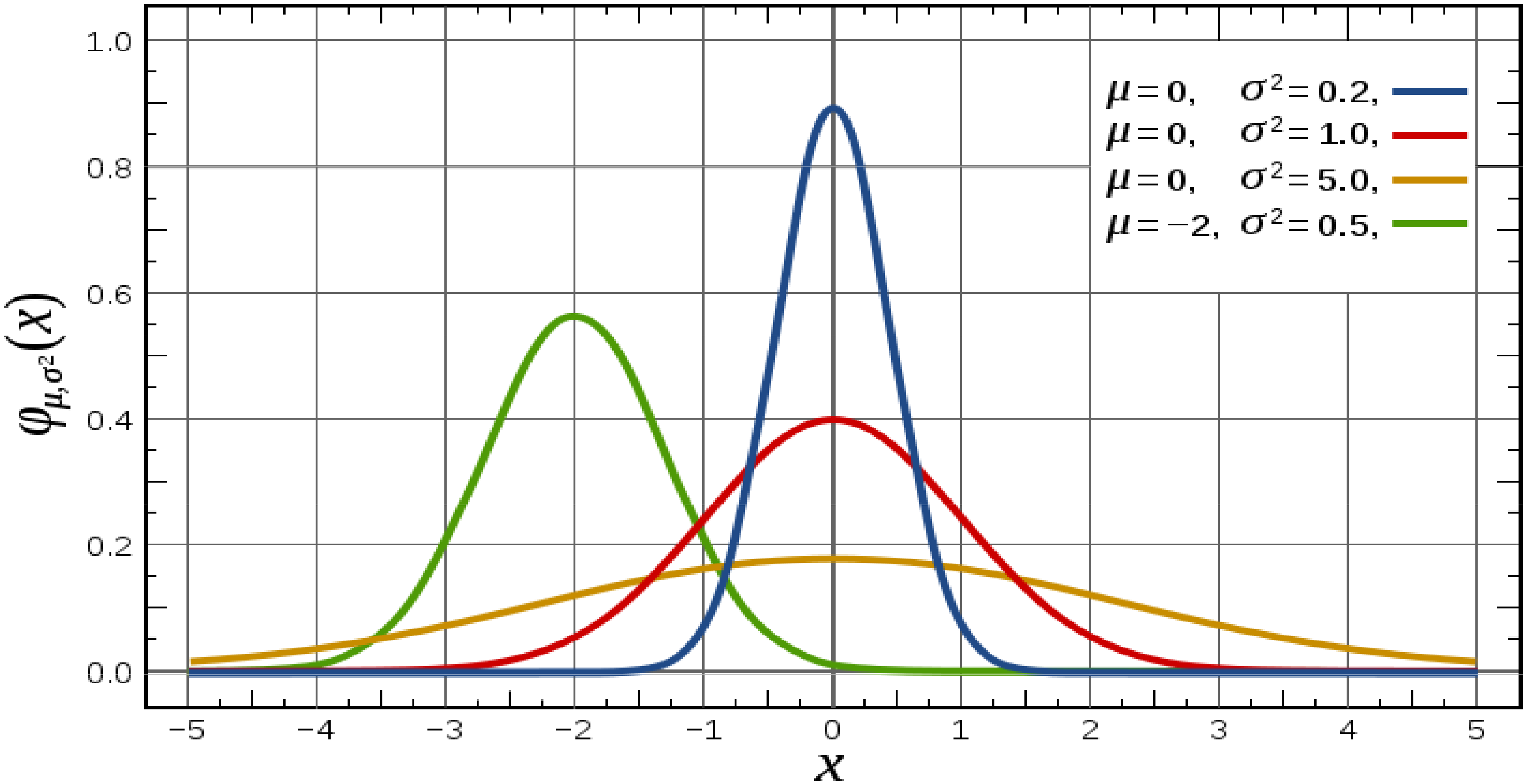
Funkce hustoty rozdělení pr-sti $f(x|\mu,\sigma^2)$:

$$f(x|\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0, \text{ kde } \mu \text{ a } \sigma$$

se nazývají **parametry rozdělení**

Gaussova křivka – funkce hustoty



Charakteristiky normálního rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Střední hodnota: $E(X) = \mu$

Rozptyl: $Var(X) = \sigma^2$

Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sigma$

Normované normální rozdělení

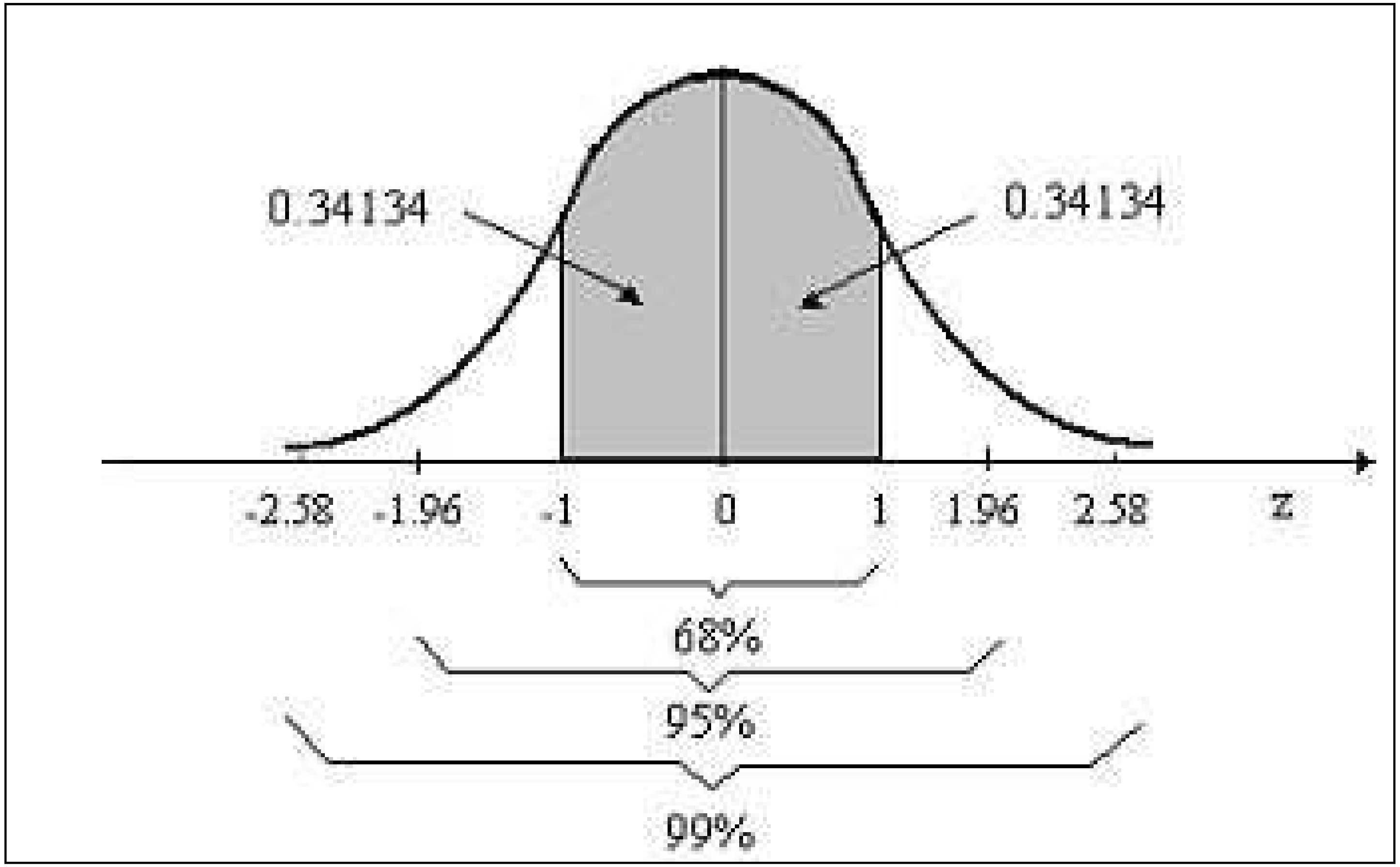
SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Namísto NV X s normálním rozdělením s parametry μ, σ^2 uvažujeme transformovanou NV Z takto:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad (*)$$

- potom se funkce hustoty převede na hustotu normovaného normálního rozdělení transformaci (*) nazýváme ***normalizace***
- **V Excelu**: **NORMDIST**(x; Střed_hodn; Sm_odch; Součet)
  NORMINV(prst; střední; sm_odch)

Významné hodnoty normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$



Příklad – normální rozdělení

Jistý druh pomerančů má průměrnou hmotnost plodu μ =100 g se směrodatnou odchylkou σ =10 g.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný plod bude mít hmotnost mezi 100g až 110g?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný plod bude mít hmotnost větší než 120g?

Exponenciální rozdělení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Exponenciální rozdělení slouží jako vhodný model pro výpočet pravděpodobnosti doby životnosti výrobků, čekacích dob v modelech hromadné obsluhy, apod.

Příklady: (1) doba pobytu ve frontě u přepážky
(2) doba obsluhy jednoho zákazníka

- Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $f(x|\ \delta)$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \quad \textbf{pro } x > 0 \\ &= 0 \quad \textbf{jinak} \end{aligned}}$$

Přitom $\delta > 0$ je parametr

Exponenciální rozdělení - charakteristiky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Střední hodnota: $E(X) = \delta$

Rozptyl: $Var(X) = \delta^2$

Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \delta$ (= $E(X)$!!!)

Pravděpodobnost: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = e^{-\frac{a}{\delta}} - e^{-\frac{b}{\delta}}$

Exponenciální rozdělení - příklad

Průměrná doba čekání u přepážky v bance je 5 min.

Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat

(a) Právě 5 minut,

(b) Méně než 5 minut

(c) Více než 5 minut

(d) Více než 3 minuty a méně než 6 minut?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \left[-e^{-\frac{x}{\delta}}\right]_a^b = e^{-\frac{a}{\delta}} - e^{-\frac{b}{\delta}}$$

Exponenciální rozdělení – řešení příkladu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Průměrná doba čekání u přepážky v bance je δ **= 5**.

(a) Právě 5 minut: $P(X=5)=0$!!! - spojité rozdělení,

(b) Více než 5 minut: $P(X \geq 5) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{5}^{-\infty} = e^{-\frac{5}{5}} - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{5}} - = e^{-1} - 0 \approx 0{,}368$

(c) Méně než 5 minut: $P(X \leq 5) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{0}^{5} = e^{0} - e^{-1} \approx 1 - 0{,}368 = 0{,}632$

(d) Více než 3 minuty a méně než 6 minut:

$$P(3 \leq X \leq 6) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{3}^{6} = e^{-\frac{3}{5}} - e^{-\frac{6}{5}} \approx 0{,}549 - 0{,}301 = 0{,}248$$

Závěr přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!